第 24 章《圆》定理汇总

一、圆的概念

集合形式的概念： 1、圆可以看作是到定点的距离等于定长的点的集合；

2、圆的外部：可以看作是到定点的距离大于定长的点的集合；

3、圆的内部：可以看作是到定点的距离小于定长的点的集合

轨迹形式的概念：

1、圆：到定点的距离等于定长的点的轨迹就是以定点为圆心，定长为半径的圆；

（补充）2、垂直平分线：到线段两端距离相等的点的轨迹是这条线段的垂直平分线；

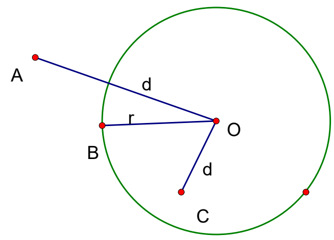
3、角的平分线：到角两边距离相等的点的轨迹是这个角的平分线；

二、点与圆的位置关系

1、点在圆内 $\Rightarrow$ $d<r$ $\Rightarrow$ 点 C 在圆内；

2、点在圆上 $\Rightarrow$ $d=r$ $\Rightarrow$ 点 B 在圆上；

3、点在圆外 $\Rightarrow$ $d>r$ $\Rightarrow$ 点 A 在圆外；

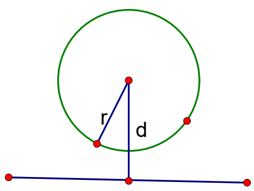


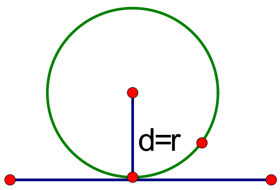
三、直线与圆的位置关系

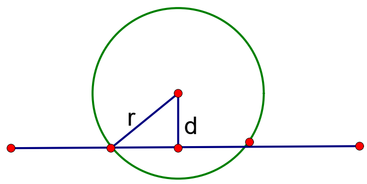
1、直线与圆相离 $\Rightarrow$ $d>r$ $\Rightarrow$ 无交点；

2、直线与圆相切 $\Rightarrow$ $d=r$ $\Rightarrow$ 有一个交点；

3、直线与圆相交 $\Rightarrow$ $d<r$ $\Rightarrow$ 有两个交点；







四、垂径定理

垂径定理：垂直于弦的直径平分弦且平分弦所对的弧。

推论 1：（1）平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧；

（2）弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧；

（3）平分弦所对的一条弧的直径，垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧

以上共 4 个定理，简称 2 推 3 定理：此定理中共 5 个结论中，只要知道其中 2 个即可推出其它 3 个结论，即：

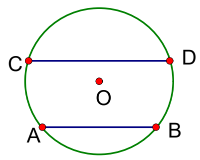
①AB 是直径 ②$AB\perp CD$ ③$CE=DE$ ④ 弧 BC ＝弧 BD ⑤ 弧 AC ＝弧 AD

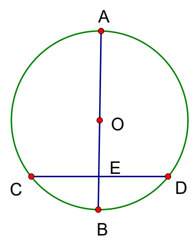
中任意 2 个条件推出其他 3 个结论。

推论 2：圆的两条平行弦所夹的弧相等。

即：在⊙O 中，∵ $AB \parallel CD$

∴弧 AC ＝弧 BD



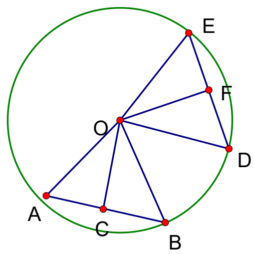


五、圆心角定理

圆心角定理：同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弦相等，所对的弧相等。

同圆或等圆中，相等的弧所对的圆心角相等，所对的弦相等。

同圆或等圆中，相等的弦所对的圆心角相等，所对的劣弧和优弧分别相等。

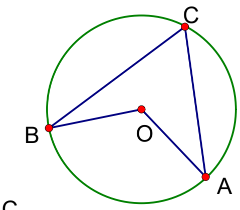


此定理也称 1 推 3 定理，即上述四个结论中，只要知道其中的 1 个相等，则可以推出其它的 3 个结论，

即：①$\angle AOB=\angle DOE$；②$AB=DE$；

③$OC=OF$；④ 弧 BA ＝弧 BD

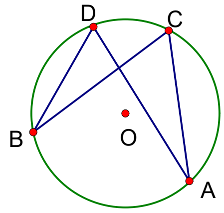
六、圆周角定理



1、圆周角定理：同弧所对的圆周角等于它所对的圆心的角的一半。

即：∵ $\angle AOB$ 和 $\angle ACB$ 是弧 AB 所对的圆心角和圆周角

　　∴ $\angle AOB = 2\angle ACB$



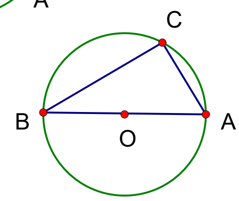
2、圆周角定理的推论：

推论 1：同弧或等弧所对的圆周角相等；

同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧是等弧；

即：在⊙ O 中，∵ $\angle C$ 、$\angle D$ 都是所对的圆周角

　　∴ $\angle C = \angle D$



推论 2：半圆或直径所对的圆周角是直角；

圆周角是直角所对的弧是半圆，所对的弦是直径。

即：在⊙ O 中，∵ AB 是直径　　或∵ $\angle C = 90^\circ$

　　∴ $\angle C = 90^\circ$　　∴ AB 是直径

七、圆内接四边形

圆的内接四边形定理：圆的内接四边形的对角互补，圆的内接四边形的外角等于它的内对角。

即：在⊙ O 中，

∵四边形 $ABCD$ 是内接四边形

∴ $\angle C + \angle BAD = 180^\circ$　$\angle B + \angle D = 180^\circ$

$\angle DAE = \angle C$

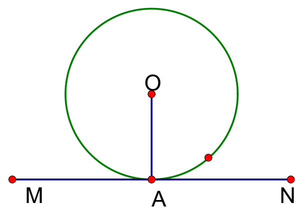
八、切线的性质与判定定理

（1）切线的判定定理：过半径外端且垂直于半径的直线是切线；

两个条件：过半径外端且垂直半径，二者缺一不可

即：∵ $MN \perp OA$ 且 MN 过半径 OA 外端

∴ MN 是⊙ O 的切线



（2）性质定理：圆的切线垂直于过切点的半径（如上图）

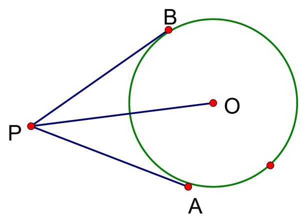
推论 1：过圆心垂直于切线的直线必过切点。

推论 2：过切点垂直于切线的直线必过圆心。

以上三个定理及推论也称二推一定理：

即：①过圆心；②过切点；③垂直切线，三个条件中知道其中两个条件就能推出最后一个。

九、切线长定理



切线长定理：

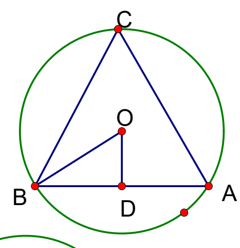
从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，这点和圆心的连线平分两条切线的夹角。

即：∵ PA 、PB 是的两条切线

∴ $PA = PB$

PO 平分 $\angle BPA$

十、圆内正多边形的计算

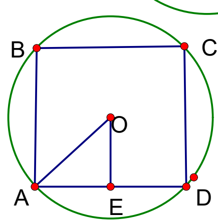


（1）正三角形

在⊙ O 中△ ABC 是正三角形，有关计算在 $Rt\Delta BOD$ 中进行：

$OD : BD : OB = 1 : \sqrt{3} : 2$；

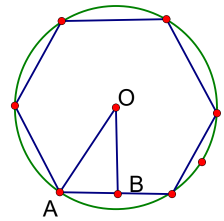
（2）正四边形



同理，四边形的有关计算在 $Rt\Delta OAE$ 中进行，$OE:AE:OA=1:1:\sqrt{2}$；

（3）正六边形

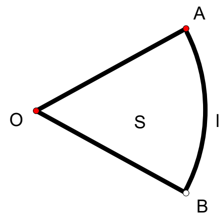
同理，六边形的有关计算在 $Rt\Delta OAB$ 中进行，$AB:OB:OA=1:\sqrt{3}:2$.



十一、扇形、圆柱和圆锥的相关计算公式

1、扇形：（1）弧长公式：$l=\dfrac{n\pi R}{180}$；

（2）扇形面积公式：$S=\dfrac{n\pi R^2}{360}=\dfrac{1}{2}lR$

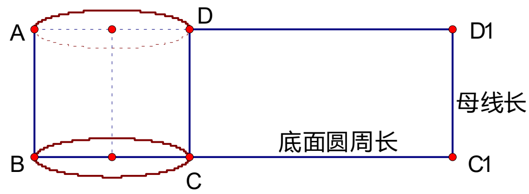


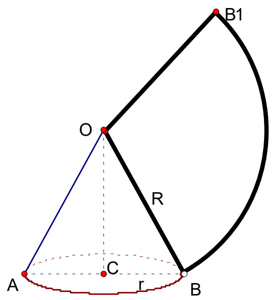
n：圆心角　R：扇形多对应的圆的半径　l：扇形弧长　S：扇形面积

2、圆柱：

（1）圆柱侧面展开图（选学）

$$S_{表}=S_{侧}+2S_{底}=2\pi rh+2\pi r^2$$



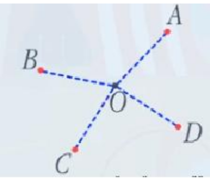


（2）圆锥侧面展开图（选学）

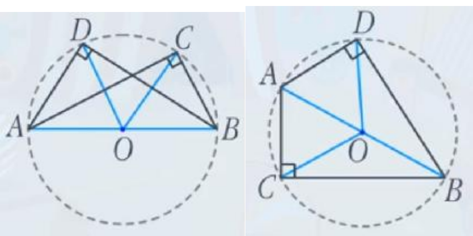
（1）$S_{表}=S_{侧}+S_{底}=\pi Rr+\pi r^2$

十二、四点共圆的判定

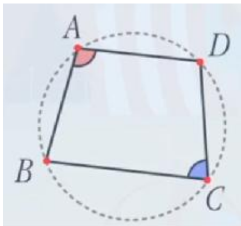
1. 四个点到一点的距离相等，则四点共圆；



2. 如果两个直角三角形斜边重合，则四个顶点公圆；



3. 对角互补的四边形，则四个顶点共圆；



4. 共底边且在同侧的两个三角形顶角相等，则四个顶点共圆.