修士研究の記録

これは私が藤田教員の指導のもと、修士研究をした記録である。

2024年5月8日 稲福勇也

追記

なお月毎にwordファイルを分けて管理する。これは6月分の記録である。

2024年6月1日 稲福勇也

2024年5月までのまとめ

曲線座標系を用いたメッシュ生成を行いFEMの精度を上げることを提案する。特に、まずは一般的なFEMを行い、その結果に従って、離散化した座標変換を用いた新たなメッシュを作成し、曲線座標系上で解析対象を離散化し、再度FEMを行う。その結果として、同等の自由度を保ちながらも誤差が小さくなることを狙う。今後の課題は、曲線座標系上のベクトル値の積分をすること。

キーワード：曲線座標系、クリストフェルの記号、Adaptive Mesh、計量テンソル

6月4日Sat.

藤田先生とミーティング。

前回までの内容で、週右側していたのはよかった。

曲がってる境界について、曲がった境界条件が与えられた場合、境界上のメッシュをそわせないと誤差が生ずる。なおこれまで用いた座標系はどれも境界上で曲がらないからもんだなかった。

次は2次元ベクターに関する数値解を考える。特に2D弾性体の場合をシミュレーションする。

6月5日Tue.

参考：Jacob Fish and Ted Belytschko, “A first course in Finite Elements” (<http://160592857366.free.fr/joe/ebooks/Mechanical%20Engineering%20Books%20Collection/FINITE%20ELEMENT%20ANALYSIS/A%20first%20corse%20in%20finite%20element%20analysis.pdf>)

少なくともデカルト座標の場合は以下の通りに弱定式化される。

ロゴ, 会社名

自動的に生成された説明

ダイアグラム

自動的に生成された説明ダイアグラム

自動的に生成された説明

ダイアグラム

自動的に生成された説明ダイアグラム

自動的に生成された説明

テキスト

自動的に生成された説明

テキスト

自動的に生成された説明

ダイアグラム, 概略図

自動的に生成された説明

6月7日Fri.

上記の方針を撤回して、改めて以下の通りに弱定式化した。

6月9日Sun.

恒等変換の座標変換の場合において正しく作用することを確認。

タイムライン

自動的に生成された説明

ところで、解析解と一致しているかはわからない。

6月11日Tue.

藤田先生とミーティング

次回までの方針：2次元自重問題を解く。その際、メッシュは鉛直方向に3乗に比例する座標系を取る。そうすることで主応力が要素面について垂直であるように取る（アイデアの根源）。X境界ではスライド境界を設ける。Y=0ではディリクレ境界（固定）。図示はとりあえず節点のみ（形状関数は歪むだろうが今は気にしないでおく）。この例ではst座標も直交座標系となるため、クリストッフェル記号は非ゼロ要素が一つしかないが、とりあえずはこれで検証する。

6月12日Wed.

X軸方向に1m x 1mの領域で自重問題を解く。X=0,1におけるy成分はイコールでつなげた（周期的）。結果は以下の通り。なお、解析解に十分に一致。

パソコンの画面

中程度の精度で自動的に生成された説明

6月14日Fri.

解析解と数値解が一致しないので、数理背景を整理し直した。コード中の記述を整え直した。

6月17日 Mon.

引き続き一致しないので、定式化を整理し直した。しかしなお一致しない。

6月18日Tue.

藤田先生とミーティング。

定式化の整理と数値解と解析解の不一致について報告。ここで、数値解の基底がxy基底でない(実際にはst基底)ことに留意し、表示方法を整理し直すことで（解のスケーリング）解決。数値解が正しく、適切な基底を用いることで一致することを確認した。なお、スケーリングの際に、st基底の長さをかけるので、基底の長さ、すなわちx(s,t)またはy(s,t)の微分が領域内で0あるいは不定値となるような座標変換は用いないことに留意する。

今後の方針は、1.要素数とErrorの関係を整理すること。2.その際異なる座標変換を用いること。3.座標変換間で比較可能とできるように、メッシュはxy座標系上で定義すること。

その後、gitリポジトリを作成し、定式化をREADME.md上で行った。

6月19日

定式化の続きをREADME.md上で行う。一般の座標系について議論している。

異なる座標系にあり2つのベクトルが、同一座標系上では等しいことを示す等号（記法）が必要。

6月20日

Xy座標で作ったメッシュでシミュレーションを行うための準備を開始。

6月21日

藤田先生とミーティング。

xy座標上でノードの座標と接続関係を生成してから、st上でそれらに基づいてメッシュ（四角要素）を作成する。Xy上で境界が歪むことが考えられるが、今は気にしないで、とりあえず結果を出力すること。

同一点の異なる座標系での表現を等しいことを示す表現については、数値列としてのベクトルと、座標値列としてのベクトルを同等に扱っていることが問題かもしれない。座標系を明示した上で、等号で結ぶのは問題ないと言える。

四角要素での積分を考えるために、定式化を再度試みる。

ナブラとヤコビ行列を一つ追加して、N\_derivativeを正しく計算して、数値解の正当性が確認された。

6月22日Sat.

Xy平面上でのメッシュ分割、のち、st上での積分を実装。

ガウス数値積分によるRMSE評価を実装。

周期性のあるメッシュを実装。

Pytorchによる、自動微分を用いた、自動のJacobian, Christoffel記号の計算を検討。

6月23日Sun.

Pytorchを用いた自動微分が使えそうだということが確認できた。任意の座標変換に対して、ヤコビ行列、クリストッフェル記号が計算できることが確認できた。以降ではCurvilinearFEM\_Trial\_2D\_5.ipynbで作業する。

6月24日Mon.

Pytorchを使った自動微分は数値型管理が大変でエラーが多発。また、逆関数は引き続きて計算で求めているため、手計算の微分コストは小さいと判断し却下。

元の手法で全プロセスを自動化し、main\_vectorとしてCurvilinearFEM\_Trial\_2D.pyに格納。

パフォーマンスを図示して確認。

詳細：N\_divisionを5~100としてRMSEを計算し比較。

結果：identityとsquareについては同様に好成績だったが、両者の間に差異がないのも不思議。Sin変換とcubic変換はどちらも成績が悪かった。

グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明グラフ

自動的に生成された説明グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明

6月25日Tue.

進捗まとめ

* 定式化の整理
* 周期的なメッシュ(x=0とx=Wの接続)の利用
* Xy座標系でノードを固定した場合のFEMの実装
* ローカルの正しい規定を用いたRMSEの算出（ガウス積分利用）
* Pytorchの自動微分を用いたヤコビアン、クリストッフェル記号の導出の検討ないし挫折
* 異なる座標変換を用いた場合のパフォーマンスの比較

次回に向けて、st座標における変位uが線形になるような座標系を与えることが重要。どのような座標変換が効果的なのか、それをどのように求めることができるかを考える。

6月29日Sat.

より変位分布にあった座標変換を導入すると、st座標空間内の変位が線形となることが期待される。しかし、当該問題（自重問題）でそれをすると、積分空間内で基底が0となる場合が生じる。多少ずらすと、今度は誤差がとても大きくなる（とくに、基底が0付近になる時にずれる）。

Identity function(u\_xy座標系, u\_st座標系),

グラフ

自動的に生成された説明

function(u\_xy座標系, u\_st座標系)

としてy=Hで基底が0となることを回避。Xlinear-Ysquare1\_01

グラフ, 散布図

自動的に生成された説明グラフ

自動的に生成された説明

ところで、(Xlinear-Ysquare2)とすると、

グラフ

自動的に生成された説明グラフ, 棒グラフ

自動的に生成された説明

このようにうまくフィッティングする。

異なる座標変換についてそのRMSE誤差を重ねて表示すると、

ダイアグラム

自動的に生成された説明グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明

つまり、選び方が肝心で、特に基底が0となる前後で細心の注意が必要。

6月30日Sun.

基底が0でない部分のみについて適応してみる。ためしに自重問題の対象物体の高さを2mとし0~1mの範囲のみについて解く。

結果：上述の解析解に合わせたモデルを用いると、恒等変換の場合に比べて、誤差が小さくなる。具体的には、返還しない場合の分割数が2500の場合の誤差は、この座標変換における分割数が1600の場合に相当する。よって大きな荒さのメッシュで同程度の精度を実現できることが検証された。

グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明

ちなみに高さを2mにしたまま、解析範囲を0~1.5mにすると、計算が収束しなくなるので、おそらく何かおかしい。

グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明

課題まとめ：