修士研究の記録

これは私が藤田教員の指導のもと、修士研究をした記録である。

2024年5月8日 稲福勇也

追記

なお月毎にwordファイルを分けて管理する。これは5月分の記録である。

2024年5月31日 稲福勇也

2024年5月以前のまとめ

2023年8月ごろに、ラプラス課題を再開。9月に近況報告を両教員にして以降、時期によっては週２回のペースでフィードバックをもらう。翌年1月の終わりに中断し、帰国準備および帰国をする。

2024年4月より、新入生も迎えて再開。週に一度に同問題について進捗を共有するゼミを開催。5月8日までに合計３回実施。

2024年5月より

5月8日

ゼミの後、藤田先生より、研究の内容について、エッセンスが話される。

内容：Shiさんの研究内容の継承。主応力に沿ったメッシュを作成することによって地滑り面を効率的に計算することができる。そのメッシュの作成方法を提案することで、新しい有限要素解析を行いたい。

キーワード：曲線座標系、クリストフェルの記号

5月9日

上記のキーワード(Curvilinear Coordinates, Christoffel Symbols)を受けて、YouTubeで適当なTutorialを視聴する。

参考URL:

Dialect, “An Introduction to Curvilinear Coordinates in Differential Geometry”, <https://youtu.be/2V__naEkXVY?si=SS-Hl_cUV3MqLjSu>

Dialect, “Conceptualizing the Christoffel Symbols: An Adventure in Curvilinear Coordinates”, <https://youtu.be/TvFvL_sMg4g?si=gUidsFzSw7THA1OI>

Faculty of Khan, “Coordinate Transformations and Curvilinear Coordinates | Tensor Calculus”, <https://youtu.be/XtpVVcKXfnA?si=B7Rc1B37jBY-prt2>

Dr Andrew Swann, “Orthogonal curvilinear coordinates (basis vectors, Lamé coefficients, volume element, area element)”, <https://youtu.be/E7Sh-i9bPAA?si=sLb2_Aa0OkqGbTd1>

感想:

曲線座標系の中でも、Orthogonal curvilinear coordinatesだと何かありがたいことがありそう。

とりあえず、Curvilinear Coordinatesに関する一般的な理論をさらって、クリストフェル記号について理解した上で、直交する場合のありがたさを考えたい。例えば、代表的な曲線座標系（極座標、円筒座標、球面座標）について、クリストフェル記号を導出する。そのプロセスを実演する。くらいのことをしたい。

新たなキーワード：計量テンソル、距離の定義

そのほか有用なWebサイト：

Wikipedia, “Christoffel symbols”, <https://en.wikipedia.org/wiki/Christoffel_symbols>

Wikipedia, « Levi-Civita connection », <https://en.wikipedia.org/wiki/Levi-Civita_connection>

5月10日Fri.

弥生本郷間で歩きながら話した内容：

処理のイメージとしては、普通の解き方でざっくり解く→結果（変位とか）に合わせて座標系を取り直す→解き直す→少ない自由度で高度に結果を出力できる。

中尾くんが学部時代にやっていた研究に類似。

その後、研究室で検索すると、Adaptive Meshもキーワードかもしれない。

5月16日Thu.

“Curvilinear coordinates finite element”でGoogle Scholar” 検索。

Maria Cinefra (2022) Formulation of 3D finite elements using curvilinear coordinates, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 29:6, 879-888, DOI: 10.1080/15376494.2020.1799122

https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1799122

Johnen, Amaury, J-F. Remacle, and Christophe Geuzaine. "Geometrical validity of curvilinear finite elements." Journal of Computational Physics 233 (2013): 359-372.

https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.08.051

研究室で話した内容のまとめ

以上の論文をもとに、曲線座標を用いる場合のFEMの立式の仕方を理解する(B行列の作り方とか)。できれば実装もしたい。

計量テンソルについて、理解する必要があると承知。Metric Tensorで検索。

The meaning of Metric Tensor, <https://www.youtube.com/watch?v=Dn0ZZRVuJcU>

5月19日 Sun.

1次元のFEMで座標変換してみて、FEMの要素剛性マトリクスがどう変化するか知りたい。

１DFEMをもう一度手書きでやってみて、手順を確認。

座標変換をして例えばx=√tとすると、よくわからなくなる。

5月20日 Mon.

これまで通り弱形式化しようとし、ガウス積分でKu=fが与えられるところまで式変形できたが、うまくいってるかは知らない（式変形の途中でヤコビアンとかがわからなくなる）。

なお、参考論文の多くでは、基底関数を指数関数にすることで、２回微分をしやすくしているものがほとんどなので、藤田先生に問い合わせてみる。

テキスト

自動的に生成された説明

他方で、改めて常微分方程式を座標変換して解く。

1. xについての１回微分、２回微分をtで表現する。
2. もとの常微分方程式をtで表現する。
3. 弱形式化し、1次要素の利用に備えて、２回微分を部分積分で消去し、1回微分以下のもののみで表現する。
4. Ku=fとし、K内の積分はガウス数値積分を用いて、数値化する。
5. (integralの取れたものは、0になる)

そして成功した（数値解が解析解に一致(N=5)）。

を, とすることで、Ku=f化して解いた。

次は、2D FEM

5月21日 Tue.

２d FEMについてリサーチ。Polar Coordinate FEMで検索。

Duda, Piotr. "Finite element method formulation in polar coordinates for transient heat conduction problems." Journal of Thermal Science 25 (2016): 188-194.

<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s11630-016-0850-2.pdf>

にて、極座標系のFEMの例をみっけ。

藤田先生と会話。まとめ：1DのFEMについて、二次微分が一定とならない座標変換を行うと本当に正しく立式できたかわかる。2DのFEMについて、一般的な座標変換関数について考えると良い。

２回微分が一定とならない場合の1D FEMを実施。t領域で弱形式化する分には成功。x領域での弱形式化も成功。

t=x^3の座標変換の場合、N=20(要素数)の場合、

t領域積分で弱形式化した時のRMSEは0.017.

グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明

x領域積分での弱形式化した時のRMSEは0.062.

グラフ

中程度の精度で自動的に生成された説明

5月22日

x領域積分での弱形式化した時の誤差が大きすぎる件について再検討。

5月23日

ガウス数値積分の区間範囲を見直すことで、任意の関数で収束確認。

グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明

グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明

なお、Kを作るときにx領域で積分した場合の方が最終的なRMSEガ小さくなる。ちなみに上のやつはt=sin(x)/sin(1)の場合。5点で数値積分。

これにて1D FEMは完結。

でKを作る(x domainで積分する）。

改めて2D のFEMを検討する。

5月23日 Thu.

二重積分の変数変換

テキスト

低い精度で自動的に生成された説明, カレンダー

低い精度で自動的に生成された説明



これを用いて、要素剛性マトリクスの組み立てに取り組む。

簡単のため、初めて四角要素を用いる。

5月24日

2DFEMについて、ガウス積分の部分はできた模様。

しかし、要素剛性マトリクスの部分で間違っていそう。

実際数値解を与えると、一致しない。

原因：二度の座標変換をしきれていないこと（(x,y)->(s,t)->(zeta,eta)

微調整をすることにより解決（ただし、理論の再確認が必要）。

5月25日

2DFEMについて、さらに検討を重ねる。

恒等関数による座標変換の場合の正しい計算はできた。２乗関数についても然り。

ただし、座標変換の選び方によっては誤差が大きすぎると感じている。

<https://diracphysics.com/portfolio/physicalmath/S3/pbasisdiff.html>

に基底のベクトルの微分の話が出てきているので気になる。

基底ベクトルの微分を考えてないのが問題か？？

Dialect の動画を再確認しつつ、理論背景を整理し直す。特にクリストッtフェル記号についても考えつつ、理論を再構築してみる。とくに

<https://youtu.be/TvFvL_sMg4g?si=JkMC8_25izD7f_Kg>

は極座標に限った議論をしているが、これを一般化したい。

ヤコビアンと計量テンソルについて一般議論

<https://hooktail.maxwell.jp/kagi/9bbb84b57b72e40116c4898acf787de2.html>

共変ベクトルと反変ベクトルを区別してみたい。

5月28日 Tue.

数式を弱形式化する際に、基底ベクトルの線形和として表示。ただの積分だったらできるが、xy微分が入ってくると難しい気がする。

藤田先生とミーティング

歪んだ座標系を用いたときに、規則正しい解析解とずれるのは普通。不規則な物に適応してこそ意味があるが、現在の段階で綺麗な解が出ないのは問題ない。

メッシュを細かくして、(要素数N,誤差)の点をプロットしてみるのが良い。異なる座標変換を用いて、同様な傾向が見られたら、おそらく正しくプログラムが組めたと言える。

将来的には、座標系を離散化して与えたい。

また、ラプラス問題はスカラー値を求めるから確かにクリストッフェル記号はでてこない（ヤコビアンで足りる）が、積分の内側にベクトル値が入る場合はでてくるので要注意。特にベクトル表示するときに、各要素が何を基底として表されているのかをよく考えて式変形すること。

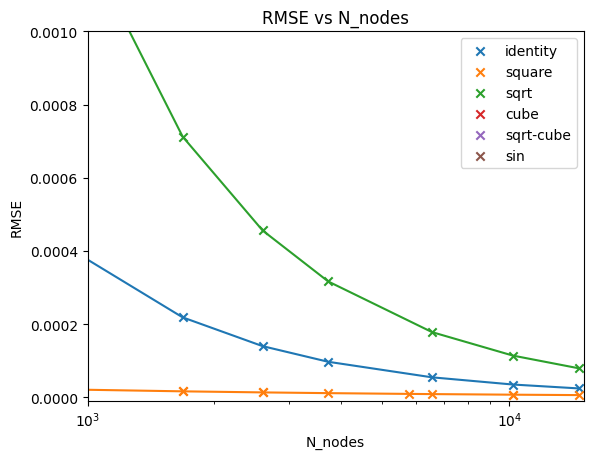
5月30日Thu.

上記の解析評価プロセスをpyモジュールとし、自動化。すなわち、異なる座標変換（ただしどれも一次元的変換、基底方向の伸び縮みに限る。

計算時間がかかるすぎることからせいぜいN\_division=120を限度とする。下記がそれぞれ異なる座標変換を用いた場合のRMSE（ガウス数値積分した）と接点数の関係である。座標変換によって差があるが、どれの場合も要素を細かくすれば収束することが確認された。また、s=x^2, t=y^2のした場合に高度に収束していることから、つまり、適切な座標変換をすることで、デカルト座標系よりも正確に近似できることも示せました。

グラフ

自動的に生成された説明グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明

本題とは外れるがPythonの並列化をすれば色々と速くなる気がしてる。

5月31日Fri.

一次元的でない伸び縮みをする(ヤコビ行列の非対角成分が存在する)座標変換を考える。あらたな座標変換”linearsquare”を考える。それぞれの座標変換を、図を添えて表現する。

Identity: s=x, t=y

Cube : s=x^3, t=y^3

Sqrt-cube : s=sqrt(x), t=y^3

Square : s=x^2, t=y^2

Sqrt: s=sqrt(x), t=sqrt(y)

Sin : s=sin(πx/2), t=sin(πy/2)

Linearsquare : s=yxx+(1-y)x, t=xyy+(1-x)y

グラフ

自動的に生成された説明グラフ, 棒グラフ, ヒストグラム

自動的に生成された説明グラフ, テーブル

自動的に生成された説明グラフ

自動的に生成された説明グラフ

自動的に生成された説明グラフ

自動的に生成された説明グラフ が含まれている画像

自動的に生成された説明

以上の座標変換を用いて、ノード数とRMSE誤差の関係を求める。

グラフ

自動的に生成された説明 グラフ, 折れ線グラフ

自動的に生成された説明

グラフ

自動的に生成された説明

いずれの場合も、要素を細かくするに従いRMSE誤差は収束し、特にs=x^2変換する場合には特に高度に収束する。また、linearsquare変換も同様に収束していることから、構築したFEMのシステムは正しく作用していることを確認する。ただし、いずれの場合も座標変換の式、その微分、および逆変換の式をそれぞれ手計算し与えていることに留意。