Ejercicios Teórico-Prácticos: Conceptos Básicos y Serie de Fourier
Señales y Sistemas - 2025

Profesor: Andrés Marino Álvarez Meza, Ph.D.
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación
Universidad Nacional de Colombia - sede Manizales

1. Conceptos básicos de señales

- Consultar y realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno de Colab IntroNumpy SyS
- Consultar y realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno de Colab Señales estandar
- Consultar y realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno de Colab Operaciones señales continuas
- Evaluar la expresión: $\int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-\cos(t)} \cos(-2t)\delta(2t-5\pi)dt$. Nota: Consultar las propiedas de selectividad y escala en el tiempo de la función impulso unitario. Comprobar el resultado en simulación con la librería SymPy.
- Sea $x(t) = u(t-t_o) - u(t-nt_o) - 3k\delta(t-mt_o)$. Determine el valor de k para el cual $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = A$, con $A \in \mathbb{R}$. Comprobar el resultado en simulación con la librería SymPy.
- Consultar y realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno de Colab Señales periódicas aperiódicas
- Consulte en qué consisten las señales cuasiperiódicas. Luego, demuestre la periodicidad o no de las siguientes señales :
  - $x(t) = 3\cos(\omega t)$.
  - $x(t) = 2\sin(\omega t + \pi)$.
  - $x(t) = 3\sin(\sqrt{3}t) + 3\sin(5t) - 2\cos(t/\sqrt{3})$.
  - $x(t) = 3\sin(4t) - 2\cos(50t) + 2\cos(10t)$.
  - $x(t) = e^{j\omega t}$.

  Grafique cada una de las señales anteriores en Python utilizando arreglos de numpy (dibuje tres periodos si es el caso).

2. Señales de energía y potencia

- Consultar y realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno de Colab Señales Energía Potencia
- Clasifique según su tipo (energía o potencia):
  - $x(t) = 3t + 2; \forall t \in [0, 5]$.
  - $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$; $A, B, \omega \in \mathbb{R}^+$.
  - $x(t) = ae^{-|t|k}(u(t-t_o) - u(t-t_1))$; $a, k \in \mathbb{R}$ y $0 < t_o < t_1$.
  - $x(t) = ate^{-tk}\left(u(t) - u(t-t_o)\right); a, k, t_o \in \mathbb{R}^+$.
  - $x[n] = nu[n]$; $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}$.
  - $x[n] = |n|$; $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}$.
  - $x[n] = A\cos[n\pi]u[n-n_o]$; $A \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \{0 \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}$; $0 < n_o < N$.

  Grafique cada una de las señales anteriores en Python (considere simulaciones tipo sympy para tiempo continuo y numpy para tiempo discreto).
- Consulte los procedimientos básicos para el análisis de circuitos mediante el manejo de impedancias y fasores. Ver cuaderno Potencia Circutios

3. Discretización de señales

- Se pretende muestrear la señal $x(t) = 10\cos(\Omega t)$, con $t \in [0, T]$, $\Omega = 2\pi F$, $F = 1/T$ y $F = 50$ Hz. Se emplea un sistema de discretización con frecuencia de muestreo $F_s = 80$ Hz. Demuestre si el sistema utilizado es apropiado para la señal $x(t)$ y estime la señal capturada. Realice una simulación en Python del proceso de discretización.
- Se tiene un microprocesador de 4 bits con entrada análoga entre -3.3 y 3.3 [v]. Describa las condiciones necesarias para que el microprocesador pueda digitalizar la señal $x(t) = 30\cos(100\pi t)$. Presente una simulación en Python de dicho proceso para tres ciclos de la señal $x(t)$. Ver cuaderno IntroNumpy SyS.
- Se tiene un sistema de discretización con frecuencia de muestreo $F_s = 40$ Hz, aplicado a las señales $x_1(t) = \cos(20\pi t)$ y $x_2(t) = \cos(100\pi t)$. Las versiones discretizadas de las señales son distinguibles entre si?. Implemente una simulación en Python del proceso de discretización.
- Cuál es la frecuencia de muestreo límite apropiada para discretizar la señal $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(6000\pi t) + 10\cos(14000\pi t)$?. Si se utiliza una frecuencia de muestreo de 5kHz, cuál es la señal discreta obtenida?.
- Demuestre que funciones cosenoidales con frecuencia de oscilación $F_k = F_o + kF_s$; con $k \in \mathbb{Z}$, no son distinguibles de la función $\cos(2\pi F_o t)$ al utilizar un

sistema de discretización con frecuencia de muestreo F_s. Realice simulaciones para $k \in \{0, \pm 1, \pm, 2, \pm 3\}$.

4. Serie de Fourier

- Encuentre el valor de $\omega_o \in \mathbb{R}$ para que el conjunto $\{e^{jn\omega_o t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea ortogonal en el intervalo $t\in[-T/2, T/2]$, con $T\in\mathbb{R}^+$.
- Demuestre la ortogonalidad del conjunto $\{\cos(n\omega_o t), \sin(m\omega_o t)\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$.
- Encuentre el espectro $c_n \in \mathcal{C}$ de la señal $x(t) = u(t)$ a través de la representación generalizada $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_n(t)$, para $\phi_n(t) = e^{jn\omega_o t}$. Realice una simulación en Python para $t \in [0, 2]$ y determine el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$.
- Calcular los coeficientes de la serie compleja, trigonométrica y compacta de Fourier para las siguientes funciones, con $t \in [-\pi/2, \pi/2]$: a) $3t + 4$, b) $|\sin(t)|$, c) $\operatorname{sgn}(3t)$, d) $|\cos^2(t/3)|$, e) e^{jt}, f) $2t^2$. Para cada señal representada encuentre el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 5\}$. Implemente las simulaciones en Python para graficar la parte real del espectro, la parte imaginaria del espectro, la magnitud del espectro, la fase del espectro y la señal reconstruida. Ver cuaderno Serie de Fourier.
- Sea $x^{''}(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$c_n = \frac{1}{(ti - tf)n^2 w_o^2} \int_{t_i}^{t_f} x^{''}(t) e^{-jnw_o t} dt; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

  Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n desde $x^{''}(t)$ en la serie trigonométrica de Fourier?.
- Encuentre el espectro de Fourier, su magnitud y el error relativo para $n\in\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, a partir de $x^{''}(t)$ para la señal $x(t)$ en la Figura 1 . Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$ mediante una simulación en Python.

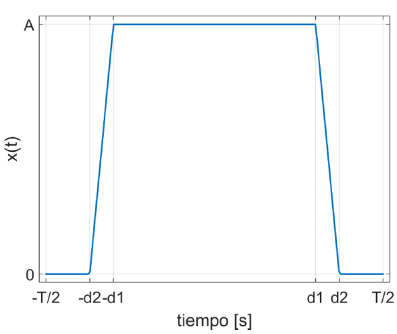

Figura 1: Espectro de Fourier desde $x^{''}(t)$.

- ¿Cómo se puede simplificar el cálculo de la serie trigonométrica de Fourier para señales con simetría de media onda y de cuarto de onda?. En dichos casos, ¿cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n con $n \in \mathbb{N}$?. Ver material de apoyo Simetría en serie de Fourier.

Referencias

https://github.com/amalvarezme/SenalesSistemas

Hsu, H., (2014). Signals and systems (Vol. 8). New York: McGraw-Hill Education.

Castellanos-Dominguez et. al (2010), *Teoría de señales: fundamentos*, Universidad Nacional de Colombia - sede Manizales.

Hsu, H. (2003), *Theory and problems of analog and digital communications*, Schaum's Outline series, McGraw-Hill.

Hsu, H. (1995), *Schaum's outlines of theory and problems of signals and systems*, McGraw Hill.

Hsu, H. (1970), *Análisis de Fourier*, Prentice Hall.