1.4.

a) $F\{e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t)\}$; $\omega_1, \omega_c \in \mathbb{R}$

Aplicando:
$$\cos(\omega_c t) = \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}$$

Tenemos:
$$F\left\{e^{-j\omega_1 t} \cdot \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}\right\}$$

$$= F\left\{\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_c t - j\omega_1 t} + e^{-(j\omega_c t + j\omega_1 t)}\right)\right\}$$

$$= F\left\{\frac{1}{2}\left(e^{jt(\omega_c-\omega_1)} + e^{-jt(\omega_c+\omega_1)}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} F\left\{\underbrace{e^{jt(\omega_c-\omega_1)}}_{e^{-jt(\omega_1-\omega_c)}} + e^{-jt(\omega_c+\omega_1)}\right\}$$

Así podremos aplicar la siguiente transformada:
$$F\{e^{-j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

Entonces:
$$= \frac{1}{\cancel{2}}\left[\left(\cancel{2}\pi\,\delta(\omega-(\omega_1-\omega_c))\right) + \left(\cancel{2}\pi\,\delta(\omega-(\omega_1+\omega_c))\right)\right]$$

$$= \pi\left(\delta(\omega-(\omega_1-\omega_c)) + \delta(\omega-(\omega_1+\omega_c))\right)$$

R/

$$F\{e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t)\} = \pi\left(\delta(\omega-\omega_1+\omega_c) + \delta(\omega-\omega_1-\omega_c)\right)$$

b) $F\left\{u(t)\cos^2(w_c t)\right\}$; $w_c \in \mathbb{R}$, $u(t)$ = Escalón.

Aplicamos:

$$\cos^2(w_c t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2w_c t)$$

Tenemos:

$$F\left\{u(t)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2w_c t)\right]\right\}$$

$$= F\left\{\frac{u(t)}{2} + \frac{u(t)}{2}\cos(2w_c t)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}F\left\{u(t)\right\} + \frac{1}{2}F\left\{u(t)\cos(2w_c t)\right\}$$

Resolviendo la primera transformada:

$$F\left\{u(t)\right\} = \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$$

Resolviendo la segunda:

$F\left\{u(t)\cos(2w_c t)\right\}$ Descompondremos el coseno:

$$F\left\{u(t)\cdot\frac{e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}}{2}\right\}$$

$$F\left\{\frac{1}{2}u(t)e^{jw_0 t} + \frac{1}{2}u(t)e^{-jw_0 t}\right\}$$

Sabemos que:

$$F\left\{u(t)\, e^{\pm j w_0 t}\right\} = \pi\, \delta(w \mp w_0) + \frac{1}{j(w \mp w_0)}$$

Entonces:

$$F\left\{u(t) \cos(2w_c t)\right\} = \frac{1}{2}\left[\pi\, \delta(w - 2w_c) + \frac{1}{j(w - 2w_c)} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ \pi\, \delta(w + 2w_c) + \frac{1}{j(w + 2w_c)}\right]$$

Tenemos que:

$$F\left\{u(t) \cos^2(w_c t)\right\} = \frac{1}{2}\left[\pi\, \delta(w) + \frac{1}{jw}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\ldots\right.\right.$$

$$\ldots\ \pi\, \delta(w - 2w_c) + \frac{1}{j(w - 2w_c)} + \pi\, \delta(w + 2w_c) + \ldots$$

$$\left.\left.\ldots + \frac{1}{j(w + 2w_c)}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\delta(w) + \frac{1}{jw} + \frac{1}{4}\left[\pi\, \delta(w - 2w_c) + \frac{1}{j(w - 2w_c)} + \pi\, \delta(w + 2w_c) \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{j(w + 2w_c)}\right]$$

$$\therefore F\left\{u(t) \cos^2(w_c t)\right\} = \frac{\pi}{2}\delta(w) + \frac{1}{jw} + \frac{\pi}{4}\left[\delta(w - 2w_c) + \delta(w + 2w_c)\right]$$

$$\ldots + \frac{1}{j4}\left[\frac{1}{j(w - 2w_c)} + \frac{1}{j(w + 2w_c)}\right]$$

c) $F^{-1}\left\{\dfrac{7}{w^2+6w+45}\cdot\dfrac{10}{\left(8+\frac{jw}{3}\right)^3}\right\}$

Aplicamos el teorema de convolución:

$$F^{-1}\{F(\omega)\cdot G(\omega)\} = 2\pi\cdot f(t)\cdot g(t)$$

$$f(t) = F^{-1}\{F(\omega)\} \quad y \quad g(t) = F^{-1}\{G(\omega)\}$$

Calculando $f(t)$:

$$f(t) = F^{-1}\left\{\frac{7}{\omega^2+6\omega+45}\right\}$$

Llevando $F(\omega)$ a la forma:

$$F\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\frac{7}{\omega^2+6\omega+45} \longrightarrow \frac{7}{6^2+(\omega+3)^2}$$

De aquí tenemos que

$a = 6$

$\omega = \omega+3$

$\downarrow$

$H(\omega) = \dfrac{7}{\omega^2+6^2}$

Entonces:

$$F^{-1}\left\{\frac{2(6)}{6^2+\omega^2}\right\} = e^{-6|t|}$$

Ajustamos las constantes:

$$H(\omega) = \frac{7}{12}\cdot\frac{12}{6^2+\omega^2} \longrightarrow F^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{7}{12}e^{-6|t|}$$

Aplicando la propiedad de desplazamiento en frecuencia:

$\omega = \omega + 3$, entonces:

$$F^{-1}\left\{ H(\omega+3) \right\} = e^{-j3t}$$

Por tanto:

$$f(t) = \frac{7}{12} e^{-j3t} e^{-6|t|}$$

Calculando $g(t)$:

Reescribimos:

$$G(\omega) = \frac{1}{(8 + j\omega/3)^2} = \frac{90}{(24 + j\omega)^2}$$

Aplicamos:

$$F\left\{ t e^{-at} u(t) \right\} = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

Entonces:

$$g(t) = F^{-1}\left\{ \frac{90}{(24 + j\omega)^2} \right\} = 90\, F^{-1}\left\{ \frac{1}{(24+j\omega)^2} \right\}$$

Tenemos a:

$$g(t) = 90 \cdot t e^{-24t} u(t)$$

Aplicando el teorema de convolución:

$$y(t) = 2\pi \left(\frac{7}{12} e^{-j3t} \cdot e^{-6|t|} \right) \left(90 \cdot t e^{-24t} u(t) \right)$$

$$y(t) = 105\pi t e^{-j3t} \cdot e^{-6|t|} \cdot e^{-24t} \cdot u(t)$$

Donde: $u(t)$: 0 para $t < 0$ y

$|t|$: t para $t \geq 0$

Entonces:

$$y(t) = 105\pi \cdot t\, e^{-(30+j3)t}\, u(t) \quad ; \text{ Para } t \geq 0$$

$$0 \quad ; \text{ Para } t < 0$$

d) $F\{3t^3\}$

Aplicamos: $F\{t^n x(t)\} = j^n \dfrac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$

Donde:

$n = 3$, $x(t) = 1$ y $F\{1\} = 2\pi\delta(\omega) = X(\omega)$

Tenemos:

$$3F\{t^3\} = j^3 \frac{d^3}{d\omega^3}(2\pi\delta(\omega))$$

$$= -j2\pi\,\delta^3(\omega)$$

$$F\{3t^3\} = 3\cdot(-j2\pi\,\delta^3(\omega))$$

$$F\{3t^3\} = -j6\pi\,\delta^3(\omega)$$

e) $$\frac{B}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{a^2+(\omega-n\omega_0)^2} + \frac{1}{a+j(\omega-n\omega_0)}\right)$$

donde:

$n \in \{0, \pm1, \pm2, \dots, \pm n\}$

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ y $B, T \in \mathbb{R}^+$

$$X(\omega) = C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_0) \qquad \text{Si} \quad x(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Multiplicación de una señal aperiódica $f(t)$ por un tren de impulsos periódicos.

$$X(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_0)$$

La función base en frecuencia:

$$F(\omega) = \frac{1}{a^2 + \omega^2} + \frac{1}{a + j\omega}$$

$$f(t) = F^{-1}\{F(\omega)\}$$

, $F(\omega)$ es una suma, así que se puede aplicar la propiedad de linealidad.

Entonces:

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{a^2 + \omega^2}\right\} + F^{-1}\left\{\frac{1}{a + j\omega}\right\}$$

Solucionamos la primera transformada inversa con:

$$F^{-1}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \longrightarrow F^{-1}\left\{\frac{1}{a^2 + \omega^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|t|}$$

Se aplica lo mismo para la segunda transformada inversa:

$$F^{-1}\{e^{-a|t|} u(t)\} = \frac{1}{a + jw} \longrightarrow F^{-1}\left\{\frac{1}{a + w}\right\} = e^{-at} u(t)$$

La función base $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2a} e^{-a|t|} + e^{-at} u(t)$$

Ahora, se construye la señal, teniendo en cuenta que B es una constante, en el dominio del tiempo:

$$X(t) = B \cdot f(t) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \right)$$

Reemplazamos nuestro $f(t)$:

$$X(t) = B\left(\frac{1}{2a}e^{-a|t|} + e^{-at}u(t)\right)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$$

$$X(t) = B\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(kT)\cdot\delta(t-kT)$$

$$f(kT) = \frac{1}{2a}e^{-a|kT|} + e^{-akT}u(kT)$$

R/ Por tanto nuestra expresión final es:

$$X(t) = B\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2a}e^{-a|kT|} + e^{-akT}u(kT)\right)\delta(t-kT)$$