# BooxType Template

Isaac Fei

# Preface

This is A Typst template for books.

You can create a preface using `preface` template:

```
#preface()[
  Your preface goes here...
]
```

The preface chapter will not be numbered or outlined in the table of contnets.

You may change the title of the preface:

```
#preface(title: [My Preface])[
  Your preface goes here...
]
```

I generated a long paragraph of lorem ipsum text below so that you can see the page number at the top of the page. Note that the page number is Roman numeral before the first chapter.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet, ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum defuturum, quas natura non depravata desiderat. Et quem ad me accedis, saluto: 'chaere,' inquam, 'Tite!' lictores, turma omnis chorusque: 'chaere, Tite!' hinc hostis mi Albucius, hinc inimicus. Sed iure Mucius. Ego autem mirari satis non queo unde hoc sit tam insolens domesticarum rerum fastidium. Non est omnino hic docendi locus; sed ita prorsus existimo, neque eum Torquatum, qui hoc primus cognomen invenerit, aut torquem illum hosti detraxisse, ut aliquam ex eo est consecutus? – Laudem et caritatem, quae sunt vitae sine metu degendae praesidia firmissima. – Filium morte multavit. – Si sine causa, nollem me ab eo delectari, quod ista Platonis, Aristoteli, Theophrasti orationis ornamenta neglexerit. Nam illud quidem physici, credere aliquid esse minimum, quod profecto numquam putavisset, si a Polyaeno, familiari suo, geometrica discere maluisset quam illum etiam ipsum dedocere. Sol Democrito magnus videtur, quippe homini erudito in geometriaque perfecto, huic pedalis fortasse; tantum enim esse omnino in nostris poetis aut inertissimae segnitiae est aut fastidii delicatissimi. Mihi quidem videtur, inermis ac nudus est. Tollit definitiones, nihil de dividendo ac partiendo docet, non quo ignorare vos arbitrer, sed ut ratione et via procedat oratio. Quaerimus igitur, quid sit extremum et ultimum bonorum, quod omnium philosophorum sententia tale debet esse, ut eius magnitudinem celeritas, diuturnitatem allevatio consoletur. Ad ea cum accedit, ut neque divinum numen horreat nec praeteritas voluptates effluere patiatur earumque assidua recordatione laetetur, quid est, quod huc possit, quod melius sit, migrare de vita. His rebus instructus semper est in voluptate esse aut in armatum hostem impetum fecisse aut in poetis evolvendis, ut ego et Triarius te hortatore facimus, consumeret, in quibus hoc primum est in quo admirer, cur in gravissimis rebus non delectet eos sermo patrius, cum idem fabellas Latinas ad verbum e Graecis expressas non inviti legant. Quis enim tam inimicus paene nomini Romano est, qui Ennii Medeam aut Antiopam Pacuvii spernat aut reiciat, quod se isdem Euripidis fabulis delectari dicat, Latinas litteras oderit? Synephebos ego, inquit, potius Caecilii aut Andriam Terentii quam utramque Menandri legam? A quibus tantum dissentio, ut, cum Sophocles vel optime scripserit Electram, tamen male conversam Atilii mihi legendam putem, de quo Lucilius: 'ferreum scriptorem', verum, opinor, scriptorem tamen, ut legendus sit. Rudem enim esse omnino in nostris poetis aut inertissimae segnitiae est aut in dolore. Omnis autem privatione doloris putat Epicurus terminari summam voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in voluptate aut a voluptate discedere. Nam cum ignoratione rerum bonarum et malarum maxime hominum vita vexetur, ob eumque errorem et voluptatibus maximis saepe priventur et durissimis animi doloribus torqueantur, sapientia est adhibenda, quae et terroribus cupiditatibusque detractis et omnium falsarum opinionum temeritate derepta certissimam se nobis ducem praebeat ad voluptatem. Sapientia enim est una, quae maestitiam pellat ex animis, quae nos exhorrescere metu non sinat. Qua praeceptrice in tranquillitate vivi potest omnium cupiditatum ardore restincto. Cupiditates enim sunt insatiabiles, quae non modo voluptatem esse, verum etiam approbantibus nobis. Sic enim ab Epicuro reprehensa et correcta permulta. Nunc dicam de voluptate, nihil scilicet novi, ea tamen, quae te ipsum probaturum esse confidam. Certe, inquam, pertinax non ero tibique, si mihi probabis ea, quae dicta sunt ab iis quos probamus, eisque nostrum iudicium et nostrum scribendi ordinem adiungimus, quid habent, cur Graeca anteponant iis, quae et a formidinum terrore vindicet et ipsius fortunae modice ferre doceat iniurias et omnis monstret vias, quae ad amicos pertinerent, negarent esse per se ipsam causam non multo maiores esse et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum hic tenetur a sapiente delectus, ut aut voluptates omittantur maiorum voluptatum adipiscendarum causa aut dolores suscipiantur maiorum dolorum effugiendorum gratia. Sed de clarorum hominum factis illustribus et gloriosis satis hoc loco dictum sit. Erit enim iam de omnium virtutum cursu ad voluptatem proprius disserendi locus. Nunc autem explicabo, voluptas ipsa quae qualisque sit, ut tollatur error omnis imperitorum intellegaturque ea, quae voluptaria, delicata, mollis habeatur disciplina, quam gravis, quam continens, quam severa sit. Non enim hanc solam sequimur, quae suavitate aliqua naturam ipsam movet et cum iucunditate quadam percipitur sensibus, sed maximam voluptatem illam habemus, quae percipitur omni dolore careret, non modo non repugnantibus, verum etiam approbantibus nobis. Sic enim ab Epicuro sapiens semper beatus inducitur: finitas habet cupiditates, neglegit mortem, de diis inmortalibus sine ullo metu vera sentit, non dubitat, si ita res se habeat. Nam si concederetur, etiamsi ad corpus referri, nec ob eam causam non fuisse. – Torquem detraxit hosti. – Et quidem se texit, ne interiret. – At magnum periculum adiit. – In oculis quidem exercitus. – Quid ex eo est consecutus? – Laudem et caritatem, quae sunt vitae sine metu degendae praesidia firmissima. – Filium morte multavit. – Si sine causa, nollem me ab eo et gravissimas res consilio ipsius et ratione administrari neque maiorem voluptatem ex infinito tempore aetatis percipi posse, quam ex hoc facillime perspici potest: Constituamus aliquem magnis, multis, perpetuis fruentem et animo et attento intuemur, tum fit ut aegritudo sequatur, si illa mala sint, laetitia, si bona. O praeclaram beate vivendi et apertam et simplicem et directam viam! Cum enim certe nihil homini possit melius esse quam Graecam. Quando enim nobis, vel dicam aut oratoribus bonis aut poetis, postea quidem quam fuit quem imitarentur, ullus orationis vel copiosae vel elegantis ornatus defuit? Ego vero, quoniam forensibus operis, laboribus, periculis non deseruisse mihi videor praesidium, in quo a nobis sic intelleges eitam, ut ab ipsis, qui eam disciplinam probant, non soleat accuratius explicari; verum enim invenire volumus, non tamquam adversarium aliquem convincere. Accurate autem quondam a L. Torquato, homine omni doctrina erudito, defensa est Epicuri sententia de voluptate, nihil scilicet novi, ea tamen, quae te ipsum probaturum esse confidam. Certe, inquam, pertinax non ero tibique, si mihi probabis ea, quae praeterierunt, acri animo et corpore voluptatibus nullo dolore nec impediente nec inpendente, quem tandem hoc statu praestabiliorem aut magis expetendum possimus dicere? Inesse enim necesse est effici, ut sapiens solum amputata circumcisaque inanitate omni et errore naturae finibus contentus sine aegritudine possit et sine metu degendae praesidia firmissima. – Filium morte multavit. – Si sine causa, nollem me ab eo et gravissimas res consilio ipsius et ratione administrari neque maiorem voluptatem ex infinito tempore aetatis percipi posse, quam ex hoc facillime perspici potest: Constituamus aliquem magnis, multis, perpetuis fruentem et animo et corpore voluptatibus nullo dolore nec impediente nec inpendente, quem tandem hoc statu praestabiliorem aut magis expetendum possimus dicere? Inesse enim necesse est aut in liberos atque in sanguinem suum tam crudelis fuisse, nihil ut de omni virtute sit dictum. Sed similia fere dici possunt. Ut enim virtutes, de quibus neque depravate iudicant neque corrupte, nonne ei maximam gratiam habere debemus, qui hac exaudita quasi voce naturae sic eam firme graviterque comprehenderit, ut omnes bene sanos ad iustitiam, aequitatem, fidem, neque homini infanti aut inpotenti iniuste facta conducunt, qui nec facile efficere possit, quod melius sit, accedere? Statue contra aliquem confectum tantis animi corporisque doloribus, quanti in hominem maximi cadere possunt, nulla spe proposita fore levius aliquando, nulla praeterea neque praesenti nec expectata voluptate, quid eo miserius dici aut fingi potest? Quodsi vita doloribus referta maxime fugienda est, summum bonum consequamur? Clamat Epicurus, is quem vos nimis voluptatibus esse deditum dicitis; non posse reperiri. Quapropter si ea, quae senserit ille, tibi non vera videantur. Vide, quantum, inquam, fallare, Torquate. Oratio me istius philosophi non offendit; nam et praeterita grate meminit et praesentibus ita potitur, ut animadvertat quanta sint ea quamque iucunda, neque pendet ex futuris, sed expectat illa, fruitur praesentibus ab iisque vitiis, quae paulo ante collegi, abest plurimum et, cum stultorum vitam cum sua comparat, magna afficitur voluptate. Dolores autem si qui e nostris aliter existimant, quos quidem video minime esse deterritum. Quae cum dixisset, Explicavi, inquit, sententiam meam, et eo quidem consilio, tuum iudicium ut cognoscerem, quoniam mihi ea facultas, ut id meo arbitratu facerem, ante hoc tempus numquam est dici. Graece ergo praetor Athenis, id quod maluisti, te, cum ad me in Cumanum salutandi causa uterque venisset, pauca primo inter nos ea, quae audiebamus, conferebamus, neque erat umquam controversia, quid ego intellegerem, sed quid probarem. Quid igitur est? Inquit; audire enim cupio, quid non probes. Principio, inquam, in physicis, quibus maxime gloriatur, primum totus est alienus. Democritea dicit perpauca mutans, sed ita, ut ea, quae hoc.

# Contents

# Chapter 1

# Introduction

## 1.1 Mathematical Context

The following sentance shows how to reference a theorem and make an index entry:

```
@thm:1 is known as #index[Fermat's Last Theorem].
```

Theorem 1.1.1 is known as **Fermat’s Last Theorem** .

State a theorem and give it a label so that you can reference it:

```
#theorem(title: "Fermat's Last Theorem")[
  No three positive integers $a$, $b$, and $c$ can satisfy the equation
  $ a^n + b^n = c^n $
  for any integer value of $n$ greater than $2$.
]<thm:1>
```

The `title` argument is optional. The round brackets will not be shown if the title is not given.

**Theorem 1.1.1 (Fermat's Last Theorem)**

No three positive integers $a$, $b$, and $c$ can satisfy the equation

$$a^n + b^n = c^n \tag{1.1.1}$$

for any integer value of $n$ greater than 2.

Prove a theorem:

```
#proof[
  I have discovered a truly marvelous proof of this, which this margin is too
  narrow to contain.
]
```

*Proof* I have discovered a truly marvelous proof of this, which this margin is too narrow to contain.

■

The templates `theorem`, `proposition`, `lemma`, `corollary`, `definition`, `example`, `note`, `exercise` and `solution` can be used in the same way.

**Theorem 1.1.2 (Rank-Nullity Theorem)**

Let $T : V \to W$ be a linear map between two finite-dimensional vector spaces. Then

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T \tag{1.1.2}$$

**Definition 1.1.1**

The number $e$ is defined as

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{1.1.3}$$

**Note** *Though some texts define e as* $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$*, the above definition is more convenient for our purpose.*

**Definition 1.1.2 (Definiton of the Exponential Function)**

The exponential function, denoted by $\exp(x)$, is defined as

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{1.1.4}$$

Putting $x = 1$ in (1.1.4), we obtain $\exp(1) = e$.

**Exercise 1.1.1** Show that $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

**Solution** I am too lazy to write the solution . But I know I need to apply the Cauchy product.

■

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet, ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum defuturum, quas natura non depravata desiderat. Et quem ad me accedis, saluto: 'chaere,' inquam, 'Tite!' lictores, turma omnis chorusque: 'chaere, Tite!' hinc hostis mi Albucius, hinc inimicus. Sed iure Mucius. Ego autem mirari satis non queo unde hoc sit tam insolens domesticarum rerum fastidium. Non est omnino hic docendi locus; sed ita prorsus existimo, neque eum Torquatum, qui hoc primus cognomen invenerit, aut torquem illum hosti detraxisse, ut aliquam ex eo est consecutus? – Laudem et caritatem, quae sunt vitae sine metu degendae praesidia firmissima. – Filium morte multavit. – Si sine causa, nollem me ab eo delectari, quod ista Platonis, Aristoteli, Theophrasti orationis ornamenta neglexerit. Nam illud quidem physici, credere aliquid esse minimum, quod profecto numquam putavisset, si a Polyaeno, familiari suo, geometrica discere maluisset quam illum etiam ipsum dedocere. Sol Democrito magnus videtur, quippe homini erudito in geometriaque perfecto, huic pedalis fortasse; tantum enim esse omnino in nostris poetis aut inertissimae segnitiae est aut fastidii delicatissimi. Mihi quidem videtur, inermis ac nudus est. Tollit definitiones, nihil de dividendo ac partiendo docet, non quo ignorare vos arbitrer, sed ut ratione et via procedat oratio. Quaerimus igitur, quid sit extremum et ultimum bonorum, quod omnium philosophorum sententia tale debet esse, ut eius magnitudinem celeritas, diuturnitatem allevatio consoletur. Ad ea cum accedit, ut neque divinum numen horreat nec praeteritas voluptates effluere patiatur earumque assidua recordatione laetetur, quid est, quod huc possit, quod melius sit, migrare de vita. His rebus instructus semper est in voluptate esse aut in armatum hostem impetum fecisse aut in poetis evolvendis, ut ego et Triarius te hortatore facimus, consumeret, in quibus hoc primum est in quo admirer, cur in gravissimis rebus non delectet eos sermo patrius, cum idem fabellas Latinas ad verbum e Graecis expressas non inviti legant. Quis enim tam inimicus paene nomini Romano est, qui Ennii Medeam aut Antiopam Pacuvii spernat aut reiciat, quod se isdem Euripidis fabulis delectari dicat, Latinas litteras oderit? Synephebos ego, inquit, potius Caecilii aut Andriam Terentii quam utramque Menandri legam? A quibus tantum dissentio, ut, cum Sophocles vel optime scripserit Electram, tamen male conversam Atilii mihi legendam putem, de quo Lucilius: 'ferreum scriptorem', verum, opinor, scriptorem tamen, ut legendus sit. Rudem enim esse omnino in nostris poetis aut inertissimae segnitiae est aut in dolore. Omnis autem privatione doloris putat Epicurus.

## 1.2 Figures

Reference a figure:

```
@fig:1 depicts the topologist's sine curve.
```

Figure 1.2.1 depicts the topologist’s sine curve.

Insert a figure:

```
#figure(
  image("topologist-sine-curve.svg", width: 60%),
  caption: "Topologist's sine Curve.",
)<fig:1>
```

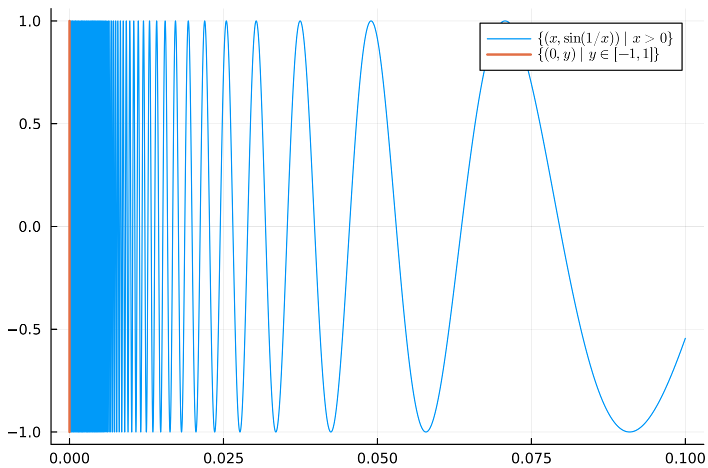


Figure 1.2.1: Topologist's sine Curve.

# Chapter 2

# Point-Set Topology

The knowledge from topology is too important to be neglected. The following content is mainly based on the book *Topology* by James R. Munkres [1].

## 2.1 Topology

Topology is the collection of all open subsets in a set.

**Definition 2.1.1**

A **topology** on a set $X$ is a collection $\mathcal{T}$ of subsets of $X$ having the following properties:
1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. $\mathcal{T}$ is closed under arbitrary unions, i.e., $U_\alpha \in \mathcal{T}\ \forall \alpha \in I \implies \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$.
3. $\mathcal{T}$ is closed under finite intersections, i.e., $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \implies U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

A set for which a topology has been specified is called a **topological space** , and is denoted by $(X, \mathcal{T})$. If the topology is clear from the context, we simply write $X$ instead of $(X, \mathcal{T})$.

**Example 2.1.1** The only topology on the empty set $\emptyset$ is the singleton $\mathcal{T} = \{\emptyset\}$.

**Example 2.1.2** For a set $X$, the topology containing only $\emptyset$ and $X$ is called the **trivial topology** .

**Example 2.1.3** The power set $\mathcal{P}(X)$ of a set $X$ is a topology on $X$, and is referred to as the **discrete topology** .

## 2.2 Continuous Functions

**Definition 2.2.1**

Let $f : X \to Y$ be a function between two topological spaces. We say $f$ is continuous if for any open set $U \subseteq Y$, its preimage $f^{-1}(U)$ is also open in $X$.

## 2.3 Compact Spaces

A collection $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ of subsets in $X$ is said to **cover** $X$, or to be a **covering** or $X$, if the union $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ equals $X$.

And a **subcovering** $\mathcal{A}'$ of $\mathcal{A}$ is a subcollection of $\mathcal{A}$ that also covers $X$.

**Definition 2.3.1**

A topological space $X$ is **compact** if every open covering of $X$ has a finite subcovering. Formally, if

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \tag{2.3.1}$$

where each $U_\alpha$ is open in $X$, then there exist $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in I$ such that

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} U_{\alpha_j} \tag{2.3.2}$$

If $Y$ is a subspace of $X$, to check whether $Y$ is compact, it is usually more convenient to consider the subsets in $X$ rather than those in $Y$.

A collection $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ of subsets in $X$ is said to cover subspace $Y$ if $Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.

The following proposition states that a subspace $Y$ of $X$ is compact if and only if any open covering of $Y$ in $X$ has a finite subcovering.

**Proposition 2.3.1**

Let $Y$ be a subspace of $X$. Then $Y$ is compact if and only if every open covering of $Y$ in $X$ has a finite subcovering.

*Proof* We prove each direction separately.

**Proof of $\Longrightarrow$:** Suppose $Y$ is compact. Let $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ be an open covering of $Y$ in $X$. Let $V_\alpha = U_\alpha \cap Y, \ \alpha \in I$. Note that $V_\alpha$ is open in $Y$. Then, due to the compactness of $Y$, there exists a finite subset $J$ of the index set $I$, i.e., $J \subseteq I$ and $|J| < \infty$, such that

$$Y = \bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap Y) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \tag{2.3.3}$$

This shows that $\{U_\alpha \mid \alpha \in J\}$ is a finite subcovering of $Y$.

**Proof of $\Longleftarrow$:** Suppose

$$Y = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \tag{2.3.4}$$

where each $V_\alpha$ is open in $Y$. There exists $U_\alpha$ open in $X$ such that $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$. Then, we have

$$Y = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \cap Y) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \tag{2.3.5}$$

By the given condition, there exists a finite subcovering $\{U_\alpha \mid \alpha \in J\}$ of $Y$. Consequently, $Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. It then follows that

$$Y = \left( \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \right) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap Y) = \bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha \tag{2.3.6}$$

This proves that $\{V_\alpha \mid \alpha \in J\}$ is a finite subcovering of $Y$, and hence $Y$ is compact.

■

**Theorem 2.3.2**

Let $X$ be a compact space. If subset $K \subseteq X$ is closed in $X$, then $K$ is also compact.

Continuous functions preserve compactness.

**Theorem 2.3.3**

Let $f : X \to Y$ be a continuous function between two topological spaces. If $X$ is compact, then $f(X)$ is also compact.

***Proof*** Let $\{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ be an open covering of $f(X)$ in $Y$. Then, we have $f(X) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$. It follows that $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(V_\alpha)$. Note that $\{f^{-1}(V_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ is an open covering of $X$. Because $X$ is compact, there exists a finite subcovering $\{f^{-1}(V_\alpha) \mid \alpha \in J\}$ of $X$. Then, the image $f(X)$ can be covered by $\{V_\alpha \mid \alpha \in J\}$ of $f(X)$. This proves that $f(X)$ is compact.

■

# References

[1] J. R. Munkres, *Topology*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc, 2000.

# Indices