武汉大学计算机学院
《离散数学》第一次练习

§1.1.1 判断下列语句是否命题：

(1) $3x - 8 = 0.$ ✘

(2) 这花多美呀！ ✘

(3) $3 + 5 = 18.$ ✓

(4) 下午有会吗？ ✘

(5) 雪是白色的。✓

§1.1.3 分析下列各命题的真值：

(1) $2 + 2 = 6$，当且仅当2是质数。($\mathbb{F}$)

(2) 两角相等，当且仅当它们是对顶角。($\mathbb{F}$)

(3) 2是质数，也是偶数。($\mathbb{T}$)

§1.3.1 给定解释I，$I(P) = 1$, $I(Q) = 1$, $I(R) = 0$, $I(S) = 1$, 求下列各命题的真值：

(1) $P \vee Q \wedge R$; $(I(P \vee Q \wedge R) = 1)$

(2) $P \wedge Q \wedge R \vee \neg(P \vee Q) \wedge \neg(R \vee S)$; $(I(P \wedge Q \wedge R \vee \neg(P \vee Q) \wedge \neg(R \vee S)) = 0)$

(3) $P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg Q \rightarrow S)$; $(I((P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg Q \rightarrow S)) = 0)$

(4) $P \vee (Q \rightarrow R \wedge \neg P) \leftrightarrow Q \vee \neg S$; $(P \vee (Q \rightarrow R \wedge \neg P) \leftrightarrow Q \vee \neg S) = 1)$

(5) $\neg(P \wedge Q) \vee \neg R \vee ((Q \leftrightarrow \neg P) \rightarrow R \vee \neg S)$; $(I(\neg(P \wedge Q) \vee \neg R \vee ((Q \leftrightarrow \neg P) \rightarrow R \vee \neg S)) = 1)$

§1.3.4 证明下列各式：

(2) $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$；
证明:

$$\begin{aligned} & \neg(P \rightarrow Q) \\ \Leftrightarrow\ & \neg(\neg P \vee Q) \\ \Leftrightarrow\ & \neg\neg P \wedge \neg Q \\ \Leftrightarrow\ & P \wedge \neg Q \end{aligned}$$

(4) $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$；
证明:

$$
\begin{aligned}
& \neg(P \leftrightarrow Q) \\
\Leftrightarrow\ & \neg((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) \\
\Leftrightarrow\ & (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) && \text{(右边)} \\
\Leftrightarrow\ & (P \vee \neg Q) \wedge \neg P \vee (P \vee \neg Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (P \wedge \neg P \vee \neg Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q \vee \neg Q \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\mathbb{F} \vee \neg Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q \vee \mathbb{F}) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & \text{中间}
\end{aligned}
$$

§1.3.5 证明下列各式：

(1) $P \wedge Q \Rightarrow P \to Q$；
证明:

$$
\begin{aligned}
& P \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee Q \\
\Rightarrow\ & Q \\
\Rightarrow\ & \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & P \to Q
\end{aligned}
$$

(3) $P \to Q \Rightarrow P \to P \wedge Q$；
证明:

$$
\begin{aligned}
& P \to Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge \mathbb{T} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee P) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (P \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & P \to P \wedge Q
\end{aligned}
$$

(5) $(P \vee \neg P \to Q) \wedge (P \vee \neg P \to R) \Rightarrow Q \to R$；

证明:

$$
\begin{array}{rl}
 & (P \vee \neg P \to Q) \wedge (P \vee \neg P \to R) \\
\Leftrightarrow & (\mathbb{T} \to Q) \wedge (\mathbb{T} \to R) \\
\Leftrightarrow & (\neg \mathbb{T} \vee Q) \wedge (\neg \mathbb{T} \vee R) \\
\Leftrightarrow & (\mathbb{F} \vee Q) \wedge (\mathbb{F} \vee R) \\
\Leftrightarrow & Q \wedge R \\
\Rightarrow & R \\
\Rightarrow & \neg Q \vee R \\
\Leftrightarrow & Q \to R
\end{array}
$$

§1.4.1 求下列各式的主析取范式和主合取范式：

(2) $\neg(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q)$；
解:
主析取范式:

$$\neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q \vee P \wedge Q$$

主合取范式：

$$P \vee Q$$

(4) $P \to (\neg P \to (Q \vee (\neg Q \to R)))$；
解:
主析取范式:

$$\neg P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge \neg R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee$$

$$P \wedge \neg Q \wedge \neg R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R$$

主合取范式：

$$P \vee Q \vee R$$

§1.4.2 求下列各式的主析取范式：

(3) $(P \to Q \wedge R) \wedge (\neg P \to \neg Q \wedge \neg R)$；
解:
主析取范式:

$$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R$$

§1.4.3 求下列各式的主合取范式：

(3) $(P \to Q) \to R$；
解:
主合取范式:

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

§1.5.1 证明下列推理：

(3) $(P\to Q)\wedge(P\to R),\quad \neg(Q\wedge R),\quad S\vee P\ \vdash\ S$；

证明:

① $(P\to Q)\wedge(P\to R)$	引入前提
② $P\to Q\wedge R$	①+恒等变换
③ $\neg(Q\wedge R)$	引入前提
④ $\neg P$	②+③+拒取式
⑤ $S\vee P$	引入前提
⑥ S	⑤+⑤+析取三段论

§1.5.2 用附加前提的方法证明下列推理：

(1) $\neg P\vee Q,\quad \neg Q\vee R,\quad R\to S\ \vdash\ P\to S$；

证明:

① P	附加前提
② $\neg P\vee Q$	引入前提
③ Q	①+②+析取三段论
④ $\neg Q\vee R$	引入前提
⑤ R	③+④+析取三段论
⑥ $R\to S$	引入前提
⑦ S	⑤+⑥+三段论

§1.5.3 用反证法证明下列推理：

(3) $S\to\neg Q,\quad S\vee R,\quad \neg R,\quad \neg R\leftrightarrow Q\ \vdash\ \neg S$；

证明:

① S	附加前提
② $S\to\neg Q$	引入前提
③ $\neg Q$	①+②+三段论
④ $\neg R\leftrightarrow Q$	引入前提
⑤ $(\neg R\to Q)\wedge(Q\to\neg R)$	③+恒等变换
⑥ $\neg R\to Q$	⑤+简化规则
⑦ R	③+⑥+拒取式
⑧ $\neg R$	引入前提
⑨ $\mathbb{F}$	⑦+⑧

§1.6.1 仅用$\downarrow$等价表达$P\to Q$和$(P\vee Q)\wedge R$：

(1) $P\to Q$；

解:

$$\begin{aligned}
& P\to Q\\
\Leftrightarrow\ & \neg P\vee Q\\
\Leftrightarrow\ & (P\downarrow P)\vee Q\\
\Leftrightarrow\ & \neg\neg((P\downarrow P)\vee Q)\\
\Leftrightarrow\ & \neg((P\downarrow P)\downarrow Q)\\
\Leftrightarrow\ & ((P\downarrow P)\downarrow Q)\downarrow((P\downarrow P)\downarrow Q)
\end{aligned}$$

(2) $(P \vee Q) \wedge R$;

解:

$$
\begin{aligned}
& (P \vee Q) \wedge R \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg R) \\
\Leftrightarrow\ & \neg((P \downarrow Q) \vee \neg R) \\
\Leftrightarrow\ & \neg((P \downarrow Q) \vee (R \downarrow R)) \\
\Leftrightarrow\ & (P \downarrow Q) \downarrow (R \downarrow R)
\end{aligned}
$$