武汉大学计算机学院
《离散数学》第三次练习

§3.1.1 用列举法表示下列集合：

(2) 由a，b组成的长度为2的符号串集合；
$\{aa, ab, ba, bb\}$.

(4) 10到30之间的质数集合；
$\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots, 29\}$.

(6) 偶质数组成的集合.
$\{2\}$.

§3.1.2 用描述法表示下列集合：

(2) 被5除余1的正整数；
$\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \exists p(p \in \mathbb{N} \wedge n = 5p + 1)\}$.

(4) 72的质因子；
$\{n \mid n\text{是质数} \wedge \exists p(p \in \mathbb{N} \wedge np = 72)\}$.

(6) 函数 $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.
$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 2\}$.

§3.1.3 用归纳定义法表示下列集合：

(2) 不允许有前0的十进制无符号整数的集合；
集合$\mathbb{Z}$归纳定义如下:
1. $0 \in \mathbb{Z}, 1 \in \mathbb{Z}, \ldots, 9 \in \mathbb{Z}$;
2. 若$d \in \{1, 2, \ldots 9\}$, $z \in \mathbb{Z}$, 则$dz \in \mathbb{Z}$.

§3.1.5 判断下列命题的真伪：

(1) $\varnothing \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$； ✓

(2) $\varnothing \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$； ✓

(3) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$； ✘

(4) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$； ✓

(5) $\{\{\varnothing\}\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$； ✘

(6) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$； ✓

(7) $\{\{\varnothing\}\} \in \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$； ✘

(8) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$； ✘

§3.1.6 设A和B是集合，$A \subseteq B$和$A \in B$能否同时成立，为什么？
解: 能，如$A = \{\varnothing\}$, $B = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, 则$A \subseteq B$和$A \in B$同时成立.

§3.1.7 设A和B是集合，$A \subseteq B$和$B \in A$能否同时成立，为什么？
解: 不能，这样有$B \in B$, 导致罗素悖论.

§3.2.2 设A, B和C是集合，试把$A \cup B \cup C$表示成各个不相交集合的并.
解: 相当于对命题公式$A \vee B \vee C$求主析取范式, 即

$$(A \cap B \cap A) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup$$
$$\cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$$

§3.3.1 证明下列各式：

(1) $A \cap (B - A) = \varnothing$;
证明:

$$\begin{aligned} & A \cap (B - A) \\ = \ & A \cap B \cap \overline{A} \\ = \ & (A \cap \overline{A}) \cap B \\ = \ & \varnothing \cap B \\ = \ & \varnothing \end{aligned}$$

(2) $A \cup (B - A) = A \cup B$；
证明:

$$\begin{aligned} & (A \cup (B - A) \\ = \ & A \cup (B \cap \overline{A}) \\ = \ & (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \\ = \ & (A \cup B) \cap \mathcal{U} \\ = \ & A \cup B \end{aligned}$$

(3) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$；
证明:

$$\begin{aligned} & (A - (B \cup C) \\ = \ & A \cap \overline{B \cup C} \\ = \ & A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ = \ & (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) \\ = \ & (A - B) \cap (A - C) \end{aligned}$$

§3.3.3 证明$(A - B) \cup B = (A \cup B) - B$ 当且仅当$B = \varnothing$.
证明: 必要性

$$\begin{aligned} & (A - B) \cup B = (A \cup B) - B \\ \Longrightarrow \ & (A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap \overline{B} \\ \Longrightarrow \ & (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ \Longrightarrow \ & A \cup B = A \cap \overline{B} \\ \Longrightarrow \ & B \cap (A \cup B) = B \cap (A \cap \overline{B}) \\ \Longrightarrow \ & B = \varnothing \end{aligned}$$

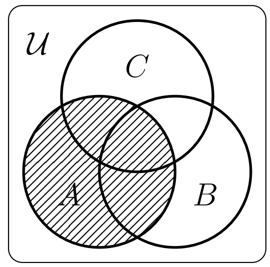
充分性：如果$B = \varnothing$, 则$(A - B) \cup B = A$, $(A \cup B) - B = A$, 故等式成立.

§3.3.4 化简下列各式：

(1) $((A-B)-C)\cup((A-B)\cap C)\cup((A\cap B)-C)\cup(A\cap B\cap C)$；
解:

$$
\begin{aligned}
&((A-B)-C)\cup((A-B)\cap C)\cup((A\cap B)-C)\cup(A\cap B\cap C)\\
=&(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap C)\\
=&((A\cap\overline{B})\cap(C\cup\overline{C}))\cup((A\cap B)\cap(C\cup\overline{C}))\\
=&(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)=A\cap(\overline{B}\cup B)=A
\end{aligned}
$$

或:化简后是主析取范式，对应的文氏图如下：



§3.3.5 给出下列各式成立的充分必要条件，并加以证明：

(4) $(A-B)\cap(A-C)=\varnothing$;
证明:

$$
\begin{aligned}
&(A-B)\cap(A-C)=\varnothing\\
\iff\quad&A\cap\overline{B\cup C}=\varnothing\\
\iff\quad&A\subseteq B\cup C
\end{aligned}
$$

$$(\because A\subseteq B \iff A\cap B=A \iff A\cap\overline{B}=\varnothing)$$

(5) $(A-B)\oplus(A-C)=A$;
证明:

$$
\begin{aligned}
&(A-B)\oplus(A-C)=A\\
\iff\quad&(A\cap\overline{B})\oplus(A\cap\overline{C})=A\\
\iff\quad&A\cap(\overline{B}\oplus\overline{C})=A\\
\iff\quad&A\subseteq\overline{B}\oplus\overline{C}\\
\iff\quad&A\subseteq(\overline{B}\cup\overline{C})-(\overline{B}\cap\overline{C})\\
\iff\quad&A\subseteq\overline{B\cap C}-\overline{B\cup C}\\
\iff\quad&A\subseteq(B\cup C)\cap\overline{B\cap C}\\
\iff\quad&A\subseteq B\oplus C
\end{aligned}
$$

(6) $(A-B)\oplus(A-C)=A$;

证明:

$$\begin{aligned}
& (A-B)\oplus(A-C)=\varnothing \\
\Longleftrightarrow\quad & (A\cap\overline{B})\oplus(A\cap\overline{C})=\varnothing \\
\Longleftrightarrow\quad & A\cap(\overline{B}\oplus\overline{C})=\varnothing \\
\Longleftrightarrow\quad & A\subseteq\overline{\overline{B}\oplus\overline{C}} \\
\Longleftrightarrow\quad & A\subseteq\overline{B\oplus C} \\
\Longleftrightarrow\quad & A\subseteq B\otimes C
\end{aligned}$$

(8) $A-B=B$;
证明:

$$\begin{aligned}
& A-B=B \\
\Longrightarrow\quad & A\cap\overline{B}=B \\
\Longrightarrow\quad & (A\cap\overline{B})\cap B=B\cap B \\
\Longrightarrow\quad & \varnothing=B \\
\Longrightarrow\quad & A=A\cap\overline{\varnothing}=\varnothing
\end{aligned}$$

所以$A=B=\varnothing$是等式成立的必要条件，易验证该条件也是充分的.

§3.3.6 给证明下列各式：

(1) $A\cup(\overline{A}\cap B)=A\cup B$;
证明:

$$\begin{aligned}
& A\cup(\overline{A}\cap B) \\
= \quad & (A\cup\overline{A})\cap(A\cup B) \\
= \quad & \mathcal{U}\cap(A\cup B) \\
= \quad & A\cup B
\end{aligned}$$

§3.4.1 对100名学生阅读3种杂志的情况进行调查，结果发现：60人阅读了甲类杂志，50人阅读了乙类杂志，50人阅读了C类杂志，阅读其中两类杂志的人数均为30，三种杂志都阅读的人数为10. 试求:

(1) 阅读且只阅读两种杂志的人数；
解:
设学生集合为U, 读甲类杂志的学生集合为A, 读乙类杂志的学生集合为B, 读C类杂志的学生集合为C，则$\left|U\right|=100$, $\left|A\right|=60$, $\left|B\right|=50$, $\left|C\right|=50$, $\left|A\cap B\right|=\left|B\cap C\right|=\left|C\cap A\right|=30$, $\left|A\cap B\cap C\right|=10$. 由容斥原理, $\left|A\cup B\cup C\right|=\left|A\right|+\left|B\right|+\left|C\right|-\left|A\cap B\right|-\left|B\cap C\right|-\left|C\cap A\right|+\left|A\cap B\cap C\right|$, $\therefore$ $\left|A\cup B\cup C\right|=60+50+50-3\times 30+10=80$, 即阅读两类以上杂志的人数$\left|((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))\right|=\left|A\cap B\right|+\left|B\cap C\right|+\left|C\cap A\right|-2\left|A\cap B\cap C\right|=3*30-2*10=70$. 仅阅读两类以上杂志的人数$\left|((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))-(A\cap B\cap C)\right|=70-10=60$.

(2) 不阅读任何杂志的人数.

解:

不阅读任何杂志的人数为$\left|U-(A\cup B\cup C)\right|=100-80=20.$