武汉大学计算机学院
《离散数学》第五次练习

§5.1.1 下列二元关系中，哪些是函数？函数的值域是什么？

(1) $R_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $R_1 = \{\langle x, y\rangle \,|\, x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x + y \leqslant 101\}$;
解: 不是函数，因为$\langle 0, 0\rangle \in R_1 \wedge \langle 0, 1\rangle \in R_1$，即一对多.

(2) $R_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R_2 = \{\langle x, y\rangle \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}$；
解: 是函数，其值域为$\{x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0\}$.

(3) $R_3 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R_2 = \{\langle x, y\rangle \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x = y^2\}$；
解: 不是是函数，因为$\langle 1, 1\rangle \in R_3 \wedge \langle 1, -1\rangle \in R_3$，即一对多. □

§5.1.2 设$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 10, & 若x > 100; \\ f(f(x+1)), & 若x \leqslant 100. \end{cases}$$

证明(McCarthy 91 function, 见`http://en.wikipedia.org/wiki/McCarthy_91_function`):

(1) $f(99) = 91$;

证明: $\forall n, 90 \leqslant n < 101$有

$$\begin{aligned} f(n) &= f(f(n+11)) \\ &= f(n+11-10) \quad (\because n \geqslant 90 \therefore n+11 \geqslant 101) \\ &= f(n+1) \\ &= f(100+1) = 101 - 10 = 91 \end{aligned}$$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant n \leqslant 100$, 有$f(n) = 91$.

证明: 用归纳法. 设对任意的a, 有如果$a \leqslant n < a+11 \wedge n \leqslant 100$，则$f(n) = 91$. 这样当$a - 11 \leqslant n < a \wedge n \leqslant 100$时有

$$\begin{aligned} f(n) &= f(f(n+11)) \\ &= f(91) \quad (\because a \leqslant n+11 < a+11) \end{aligned}$$

由(1)有$a = 90$时归纳基础成立，即$90 \leqslant n < 101$ 时$f(n) = 91$, 由上述归纳假设，可推得

$$89 \leqslant n < 90, f(n) = 91$$

$$78 \leqslant n < 89, f(n) = 91$$

$$\cdots\cdots$$

$$2 \leqslant n < 12, f(x) = 91$$

$$0 \leqslant n < 2, f(x) = 91$$

即$0 \leqslant n < 101$有$f(n) = 91$. □

§5.1.3 下列函数中，哪些是单射、满射或双射？并证明你的判断：

(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$: 双射；

(2) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$: 单射；

(3) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x \mod 3$: 非单，亦非满；

(4) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x\text{是奇数;} \\ 1, & \text{if not.} \end{cases}$：满射，非单射；

(5) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(m, n) = m^n$：满射，非单射. □

§5.1.4 设A为任意集合. 证明: 存在从A到$\mathscr{P}(A)$的单射.

证明: 定义函数$f : A \longrightarrow \mathscr{P}(A), x \longmapsto \{\, x \,\}$. 设$f(x) = f(y)$, 则$\{\, x \,\} = \{\, y \,\}$, 即$x = y$. 故$f$是单射. □

§5.1.5 设$f : X \longrightarrow Y$, $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$，下列各式中哪些成立？哪些不成立？试证明你的判断.

(1) $f^{-1}(Y - Y') = X - f^{-1}(Y')$;

证明:

$$\begin{aligned}
& f^{-1}(Y - Y') \\
= {} & f^{-1}(Y \cap \overline{Y'}) \\
= {} & f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(\overline{Y'}) \quad (\text{由习题\$5.1.6}) \\
= {} & X \cap \{\, x \mid f(x) \in \overline{Y'} \,\} \\
= {} & X \cap \{\, x \mid f(x) \notin Y' \,\} \\
= {} & X \cap \{\, x \mid x \in \overline{f^{-1}(Y')} \,\} \\
= {} & X \cap \overline{f^{-1}(Y')} \\
= {} & X - f^{-1}(Y')
\end{aligned}$$

(2) $f(X' \cap f^{-1}(Y')) = f(X') \cap Y'$;

证明:

$$
\begin{aligned}
& y \in f(X' \cap f^{-1}(Y')) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists x \in X' \cap f^{-1}(Y') \wedge f(x) = y \\
\Longleftrightarrow\ & \exists x \in X' \wedge f(x) \in Y' \wedge f(x) = y \\
\Longleftrightarrow\ & y \in f(X') \wedge y \in Y' \\
\Longleftrightarrow\ & y \in f(X') \cap Y'
\end{aligned}
$$

(3) $f(f^{-1}(Y')) = Y'$;
答: 不成立，如$X = Y = \{a, b\}$, $f(a) = f(b) = a$, 则$\{a\} = f(f^{-1}(Y)) \subsetneq Y = \{a, b\}$.

(4) $f^{-1}(f(X')) = X'$.
答: 不成立，如$X = Y = \{a, b\}$, $f(a) = f(b) = a$, 则$\{a, b\} = f^{-1}(f(\{a\})) \supsetneq \{a\}$. $\square$

§5.1.6 设$f : X \longrightarrow Y$, $A \subseteq Y$, $B \subseteq Y$，证明：$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$:

证明:

$$
\begin{aligned}
& x \in f^{-1}(A \cap B) & \\
\Longleftrightarrow\ & f(x) \in A \cap B & \text{by 逆象的定义} \\
\Longleftrightarrow\ & f(x) \in A \wedge f(x) \in B & \text{by 交集的定义} \\
\Longleftrightarrow\ & x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B) & \text{by 逆象的定义} \\
\Longleftrightarrow\ & x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) & \text{by 交集的定义}
\end{aligned}
$$

$\square$

§5.1.7 设$f : X \longrightarrow Y$，定义$g : Y \longrightarrow \mathscr{P}(X)$, $y \longmapsto f^{-1}(\{y\})$，证明：若$f$是满射，则$g$是单射:

证明:

① f 是满射，$\therefore \forall B \subseteq Y$, $f(f^{-1}(B)) = B$;

② 设$g(y) = g(y')$，则$f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{y'\})$;

③ $\therefore f(f^{-1}(\{y\})) = f(f^{-1}(\{y'\}))$;

④ 由①有：$\{y\} = \{y'\}$;

⑤ 即：$y=y'$. □

§5.1.10 设A和B是非空有限集，且$|A|=m$, $|B|=n$.

(1) 从A到B的不同的单射共有多少个？
解：A到B有单射的条件是$m\leqslant n$. A的m元素与给定B的m个元素一一对应个数为m的排列数$m!$. 从B中选取n个元素的选法有组合数$\binom{n}{m}$. 这样单射的总数为$m!\binom{n}{m}$.

(2) 从A到B的不同的满射共有多少个？
解：A到B有满射的条件是$m\geqslant n$. 首先考虑A的m元素放在n个不同的桶中，且每个桶至少有一个元素有多少不同的放置方法；或者说m个元素有多少秩为n的划分. 该数记为$S(m,n)$, 称为Stirling number(见`http://en.wikipedia.org/wiki/Stirling_numbers_of_the_second_kind`):

$$S(m,n)=\frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^m$$

对每个划分按B中m个元素进行编号共有$m!$个不同的编号，这样满射共有$m!S(m,n)$个. 如$A=\{0,1,2\}$, $B=\{a,b\}$. 对划分$\{\{0\},\{1,2\}\}$有$2!=2$个不同的函数: $f_1(0)=a$, $f_1(1)=f_1(2)=b$; $f_2(0)=b$, $f_2(1)=f_2(2)=a$. 而集合$\{0,1,2\}$的秩为2的划分有$\{\{0\},\{1,2\}\}$，$\{\{1\},\{0,2\}\}$和$\{\{2\},\{0,1\}\}$共3个($=S(3,2)$). 故满射的总数为$2!\times 3=6$.

(3) 从A到B的不同的双射共有多少个？

解：双射的条件是$m=n$, 双射总数为$m!$. □

§5.1.12 证明：在任意选择的$n+1$个整数中，存在着两个数，它们的差能被n整除.

证明：将任意的n+1个整数组成的集合记为$A=\{a_0,a_1,\dots,a_n\}$，定义函数$f:A\longrightarrow\{0,1,\dots,n-1\}, x\longmapsto x \mod n$, 而$|A|=n+1>n=|\{0,1,\dots,n-1\}|$, 因此$f$不可能是单射，即存在$a_i,a_j\in A\wedge a_i\neq a_j\wedge f(a_i)=f(a_j)$. 这样$a_i \mod n=a_j \mod n$, $\therefore (a_i-a_j) \mod n=0$. 即$a_i-a_j$能被$n$整除. □

§5.1.13 证明：在任意的整数n，均存在着S_n满足：S_n是n的倍数且只含有数字0和7.

证明：考虑由$n+1$个元素组成的集合$\{7, 77, 777, \ldots, \underbrace{777\cdots7}_{n+1个}\}$，
则存在两个形如$77\cdots7$的数其差记为S_n能被n整除(由题\$5.1.12).
而两个形如$77\cdots7$的数的差只可能由数字0和7组成. $\square$

§5.2.2 设$f: A \longrightarrow A$, 存在正整数n使得$f^n = \mathbb{1}_A$. 证明: f是双射.

证明: 利用双射的充分必要条件为存在函数$g: A \longrightarrow A$, 使得$g \circ f = f \circ g = \mathbb{1}_A$.
如果$n=1$，则$f = \mathbb{1}_A$，恒等映射，即为双射.
如果$n \geqslant 2$，则根据函数合成的结合律有$f^{n-1} \circ f = f \circ f^{n-1} = \mathbb{1}_A$，即$f$为双射. $\square$

§5.2.4 设$n \in \mathbb{Z}_+$, $f: A \longrightarrow A$. 证明: f是单射(满射、双射)，则f^n也是单射(满射、双射).

证明: 利用单射的充分必要条件为存在函数$g: A \longrightarrow A$, 使得$g \circ f = \mathbb{1}_A$. 利用满射的充分必要条件为存在函数$g: A \longrightarrow A$, 使得$f \circ g = \mathbb{1}_A$.
设f单射, 则存在$g: A \longrightarrow A$. $g \circ f = \mathbb{1}_A$. 这样$n \geqslant 2$时

$$
\begin{aligned}
g^n \circ f^n &= g^{n-1} \circ (g \circ f) \circ f^{n-1} \\
&= g^{n-1} \circ \mathbb{1}_A \circ f^{n-1} \\
&= g^{n-1} \circ f^{n-1} \\
&\cdots \\
&= g \circ f = \mathbb{1}_A
\end{aligned}
$$

故f^n也是单射，同理可证明满射和双射时结论成立. $\square$

§5.2.5 设$h \in A^A$，证明：$\forall f \forall g (f, g \in A^A \wedge f \circ h = g \circ h \to f = g)$当且仅当$h$是满射：

证明:

$\Longleftarrow$ h是满射，iff，$\exists h' \in A^A \wedge h \circ h' = \mathbb{1}_A$;
这样：if $f \circ h = g \circ h$, then $(f \circ h) \circ h' = (g \circ h) \circ h'$;
$\therefore f \circ (h \circ h') = g \circ (h \circ h')$，即$f \circ \mathbb{1}_A = g \circ \mathbb{1}_A$; $\therefore f = g$.

$\Longrightarrow$ 反证法：设h不是满射，$h(A) \subsetneq A$, 这样存在$a \in A \wedge a \notin h(A)$. 设$b \in h(A)$，定义函数

$$
f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in h(A); \\ a & \text{if } x \notin h(A). \end{cases}
$$

和函数

$$g(x)=\begin{cases} x & \text{if } x\in h(A);\\ b & \text{if } x\notin h(A).\end{cases}$$

则$f\neq g$. 但是$\forall x\in A$, $h(x)\in h(A)$. 这样$f(h(x))=h(x)=g(h(x))$, 即$f\circ h=g\circ h$. 但$f\neq h$. 矛盾. $\square$

§5.2.6 设$h\in A^A$，证明：$\forall f\forall g(f,g\in A^A\wedge h\circ f=h\circ g\to f=g)$当且仅当$h$是单射：

证明:

$\Longleftarrow$ h是单射，iff，$\exists h'\in A^A\wedge h'\circ h=\mathbb{1}_A$;
这样：if $h\circ f=h\circ g$, then $h'\circ(h\circ f)=h'\circ(h\circ g)$;
$\therefore (h'\circ h)\circ f=(h'\circ h)\circ g$，即$\mathbb{1}_A\circ f=\mathbb{1}_A\circ g$;
$\therefore f=g$;

$\Longrightarrow$ 设$h(a)=h(b)$, 定义常数函数$f:A\longrightarrow A, x\longmapsto a, g: A\longrightarrow A, y\longmapsto b$
则$h\circ f(x)\equiv h(a)\wedge h\circ g(x)\equiv h(b)$，$\therefore h\circ f=h\circ g$;
由条件得$f=g$，即$a=b$，所以h是单射. $\square$

§5.2.7 设集合$A\neq\varnothing$，$f,g\in A^A$，若$\widetilde{g\circ f}$是函数，则f和g均是单射吗？为什么？

① f是单射：设$f(x)=f(y)$，则$g\circ f(x)=g\circ f(y)$;
$\therefore \widetilde{g\circ f}\circ(g\circ f)(x)=\widetilde{g\circ f}\circ(g\circ f)(y)$；
而$\widetilde{g\circ f}\circ(g\circ f)=\mathbb{1}_A$，$\therefore x=y$，即$f$是单射；

② g不一定是单射：设$f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}, x\longmapsto 2x$，$g:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}, x\longmapsto\begin{cases} x/2, \text{ if } x\text{是偶数};\\ 0, \text{ if not}.\end{cases}$
则$g\circ f=\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$，$\therefore \widetilde{g\circ f}=\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$是函数，但是$g$不是单射. $\square$

§5.2.8 设$f:X\longrightarrow Y$，$g:Y\longrightarrow X$，$A=\{\,x\,|\,x\in X\wedge f(x)=g(x)\,\}$，且$i_B:A\longrightarrow X, x\longmapsto x$（嵌入函数），证明：

(1) $f\circ i_A=g\circ i$;

证明:
$\forall x\in A$，则$f\circ i_A(x)=f(x)=g(x)=g\circ i_A(x)$;

(2) 又设$B\subseteq X$，$i_B:B\longrightarrow X, x\longmapsto x$, if $f\circ i_B=g\circ i_B$, then $B\subseteq A$:

证明: $\forall x \in B,\ f \circ i_B(x) = g \circ i_B(x)$, then $f(x) = g(x)$; $\therefore x \in A$, So $B \subseteq A$. $\square$

§5.3.2 设$A = \{1, 2, 3, 4\}$:

(1) 试构造函数$f : A \longrightarrow A$，使得$f \neq \mathbb{1}_A \wedge f = f^{-1}$:

解: $f : 1 \longmapsto 2, 2 \longmapsto 1, 3 \longmapsto 3, 4 \longmapsto 4$.

(2) 试构造函数$g : A \longrightarrow A$，使得$g \neq \mathbb{1}_A \wedge g^2 = g$:

解: $g : x \longmapsto 2$. $\square$

§5.3.3 设有$\mathbb{N}$到$\mathbb{N}$的函数如下:

$$f(x) = 3x, \quad g(x) = 3x + 1, \quad h(x) = 3x + 2.$$

(1) 试求f, g和h的一个共同的左逆元；

解: 定义函数$k : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}, x \longmapsto \lfloor x/3 \rfloor$ (下取整). 则k是上述三函数的共同左逆元.

(2) 试构造函数$g : A \longrightarrow A$，使得$g \neq \mathbb{1}_A \wedge g^2 = g$:

解: 定义函数$k : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}, x \longmapsto \lfloor (x+1)/3 \rfloor$. 则$k$是$f$和$g$的左逆元. $k(h(x)) = \lfloor (3x+3)/3 \rfloor = x + 1 \neq x$. $\square$

§5.3.4 设$f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow X$，若$g \circ f$是左可逆的，则$f$和$g$一定是左可逆的吗？为什么？

证明:

① g是左可逆的(满射)：
设$h : X \longrightarrow X$是$g \circ f$的左逆元，则$(g \circ f) \circ h = \mathbb{1}_X$;
$\because f \circ h(X) \subseteq Y$, $\therefore g(f \circ h(X)) \subseteq g(Y)$; But $g(f \circ h(X)) = (g \circ f) \circ h)(X) = \mathbb{1}_X(X) = X$.
$\therefore g(f \circ h(X)) = X \subseteq G(Y) \subseteq X$，即$g(Y) = X$，所以$g$是满射.

② f不一定是满射：
反例同练习§5.2.7. $\square$

§5.3.5 设$f : X \longrightarrow Y, |X| \geqslant 2$，若$f$是可逆的，则$f$和$g$当且仅当$f$有唯一的左逆函数.

证明:

$\Longleftarrow$ 根据定理双射函数的逆函数是唯一的即可证明.

$\Longrightarrow$ 反证法：设g是f的左逆函数，即$g \circ f = \mathbb{1}_X$，则f是单射. 设f不是满射，则存在$b \in Y - f(X) \neq \varnothing$. 设$g(b) = a$, 由于$|X| \geqslant 2$, 则存在$a' \in X \wedge a' \neq a$. 定义函数$g' : Y \longrightarrow X$:

$$g'(y) = \begin{cases} g(y), & \text{若} y \neq b; \\ a', & \text{若} y = b. \end{cases}$$

这样$g \neq g'$, 且$\forall x \in X, (g' \circ f)(x) = g'(f(x)) = g(f(x)) = x$, 即$g' \circ f = \mathbb{1}_A$. 这样$f$ 有两个不同的左逆函数，矛盾.

$\Longrightarrow$ 反证法：设g是f的右逆函数，即$f \circ g = \mathbb{1}_Y$，则f是满射. 设f不是单射，则存在$a, a' \in X \wedge a \neq a' \wedge f(a) = f(a')$. 定义函数$g' : Y \longmapsto X$:

$$g'(y) = \begin{cases} g(y), & \text{若} y \neq f(a); \\ a', & \text{若} y = f(a). \end{cases}$$

这样$g \neq g'$, 且$\forall y \in Y$, 如果$y \neq f(a)$,则$(f \circ g)(x) = f(g'(y)) = f(g(x)) = x$, 而$(f \circ g')(f(a)) = f(g'(f(a)) = f(a') = f(a)$, 故$g' \circ f = \mathbb{1}_A$. 这样$f$ 有两个不同的右逆函数，矛盾. $\square$