函数

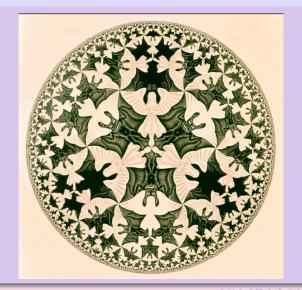
离散教学小组

School of Computer Wuhan University

- 1 函数的基本概念
 - 函数的定义
 - 函数的象和逆象
 - 函数的合成
 - 单射,满射和双射
- 2 函数的分解
 - Examples
 - 函数的标准分解
- 3 函数的递归定义
 - 自然数集合上的递归函数
 - Euclid算法与尾递归
 - List集合上的递归定义函数
 - Ackerman函数
 - 高阶函数

- 1 函数的基本概念
 - 函数的定义
 - 函数的象和逆象
 - 函数的合成
 - 单射,满射和双射
- 2 函数的分解
 - Examples
 - 函数的标准分解
- 高数的递归定义
 - 自然数集合上的递归函数
 - Euclid算法与尾递归
 - List集合上的递归定义函数
 - Ackerman函数
 - 高阶函数

Circle Limit IV — Escher



Definition (函数, function(map, mapping))

设f是集合X到Y上的关系(f ⊆ $X \times Y$), f是函数, iff, f满足下述两条件:

- ① 完全性: $\forall x \in X \exists y \in Y$, such that, $\langle x, y \rangle \in f$;
- ② 多对一: if $\langle x, y \rangle \in f \land \langle x, z \rangle \in f$, then y = z;

集合X和Y分别称为函数f的定义域(domain)和陪域(codomain),与 $x \in X$ 有关系f的 $y \in Y$ 记为:f(x).

Remark

对上述两条件的任意一个的破坏,将不能构成函数。

函数的定义

Definition (函数, function(map, mapping))

设f是集合X到Y上的关系 $(f \subseteq X \times Y)$, f是函数, iff, f满足下述两条件:

- ① 完全性: $\forall x \in X \exists y \in Y$, such that, $\langle x, y \rangle \in f$;
- ② 多对一: if $\langle x, y \rangle \in f \land \langle x, z \rangle \in f$, then y = z;

集合X和Y分别称为函数f的定义域(domain)和陪域(codomain),与 $x \in X$ 有关系f的 $y \in Y$ 记为:f(x).

Remark

对上述两条件的任意一个的破坏,将不能构成函数:

函数的定义

Definition (函数, function(map, mapping))

设f是集合X到Y上的关系($f \subseteq X \times Y$), f是函数, iff, f满足下述两条件:

- ① 完全性: $\forall x \in X \exists y \in Y$, such that, $\langle x, y \rangle \in f$;
- ② 多对一: if $\langle x, y \rangle \in f \land \langle x, z \rangle \in f$, then y = z;

集合X和Y分别称为函数f的定义域(domain)和陪域(codomain),与 $x \in X$ 有关系f的 $y \in Y$ 记为: f(x).

Remark

对上述两条件的任意一个的破坏,将不能构成函数。

- 15/245 -

Definition (函数, function(map, mapping))

设f是集合X到Y上的关系($f \subseteq X \times Y$)、f是函数, iff, f满足下述两条件:

- ① 完全性: $\forall x \in X \exists y \in Y$, such that, $\langle x, y \rangle \in f$;
- ② 多对一: if $\langle x, y \rangle \in f \land \langle x, z \rangle \in f$, then y = z;

集合X和Y分别称为函数f的定义域(domain)和陪域(codomain),与 $x \in X$ 有关系f的 $y \in Y$ 记为:f(x).

Remark

对上述两条件的任意一个的破坏, 将不能构成函数:

- ① 非完全的: $\exists x \in X \land \forall y \in Y, \langle x, y \rangle \notin f$: 表示函数在有些点没有定义,将满足条件② 不满足条件①的关系称为部 分函数(partial);
- ② 一对多: $if \exists x \in X \land y, z \in Y \land y \neq z \land \langle x, y \rangle \in f \land \langle x, z \rangle \in f$ 表示函数在有些点可能对应多值,将满足条件①不满足条件② 的关系称为多值函数(multivalued)。

函数的定义

Definition (函数, function(map, mapping))

设f是集合X到Y上的关系 $(f \subseteq X \times Y)$, f是函数, iff, f满足下述两条件:

- ① 完全性: $\forall x \in X \exists y \in Y$, such that, $\langle x, y \rangle \in f$;
- ② 多对一: if $\langle x, y \rangle \in f \land \langle x, z \rangle \in f$, then y = z;

集合X和Y分别称为函数f的定义域(domain)和陪域(codomain),与 $x \in X$ 有关系f的 $y \in Y$ 记为: f(x).

Remark

对上述两条件的任意一个的破坏, 将不能构成函数:

- ① 非完全的: $\exists x \in X \land \forall y \in Y, \langle x, y \rangle \notin f$: 表示函数在有些点没有定义,将满足条件② 不满足条件①的关系称为部 分函数(partial);
- ② 一对多: $if \exists x \in X \land y, z \in Y \land y \neq z \land \langle x, y \rangle \in f \land \langle x, z \rangle \in f$ 表示函数在有些点可能对应多值,将满足条件①不满足条件② 的关系称为多值函数(multivalued)。

Definition (函数, function(map, mapping))

设f是集合X到Y上的关系($f \subseteq X \times Y$)、f是函数, iff, f满足下述两条件:

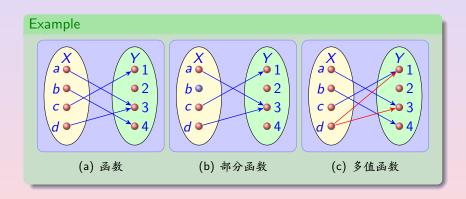
- ① 完全性: $\forall x \in X \exists y \in Y$, such that, $\langle x, y \rangle \in f$;
- ② 多对一: if $\langle x, y \rangle \in f \land \langle x, z \rangle \in f$, then y = z;

集合X和Y分别称为函数f的定义域(domain)和陪域(codomain),与 $x \in X$ 有关系f的 $y \in Y$ 记为:f(x).

Remark

对上述两条件的任意一个的破坏, 将不能构成函数:

- ① 非完全的: $\exists x \in X \land \forall y \in Y, \langle x, y \rangle \notin f$: 表示函数在有些点没有定义,将满足条件② 不满足条件①的关系称为部 分函数(partial);
- ② 一对多: $if \exists x \in X \land y, z \in Y \land y \neq z \land \langle x, y \rangle \in f \land \langle x, z \rangle \in f$ 表示函数在有些点可能对应多值,将满足条件①不满足条件② 的关系称 为多值函数(multivalued)。



- 记 $Y^X \triangleq \{f: X \longrightarrow Y\}$ 为所有的从X到Y的函数集合;
- if X和Y为有限集合,则|Y^X| = |Y|^{|X|};
- $\bullet |Y|^{|X|} < 2^{|x| \times |y|}, \cdot Y^X \subseteq \mathscr{P}(X \times Y).$

Definition (相等)

称两函数 $f,g:X\longrightarrow Y$ 相等(记为f=g), iff, 对应的函数关系在集合意义下相等,即 $\forall x\; f(x)=g(x)$.

- 记 $Y^X \triangleq \{f: X \longrightarrow Y\}$ 为所有的从X到Y的函数集合;
- if X和Y为有限集合,则|Y^X| = |Y||^X|;
- $\bullet |Y|^{|X|} < 2^{|x| \times |y|}, \cdots Y^X \subsetneq \mathscr{P}(X \times Y).$

Definition (相等)

称两函数 $f,g:X\longrightarrow Y$ 相等(记为f=g), iff,对应的函数关系在集合意义下相等,即 $\forall x f(x)=g(x)$.

Example

- 21/245 -

- 记 $Y^X \triangleq \{f: X \longrightarrow Y\}$ 为所有的从X到Y的函数集合;
- if X和Y为有限集合,则|Y^X| = |Y||X|;
- $\bullet |Y|^{|X|} < 2^{|x| \times |y|}, \cdots Y^X \subsetneq \mathscr{P}(X \times Y).$

Definition (相等)

称两函数 $f,g:X\longrightarrow Y$ 相等(记为f=g), iff,对应的函数关系在集合意义下相等,即 $\forall x f(x)=g(x)$.

- 记 $Y^X \triangleq \{f: X \longrightarrow Y\}$ 为所有的从X到Y的函数集合;
- if X和Y为有限集合,则|Y^X| = |Y|^{|X|};
- $\bullet |Y|^{|X|} < 2^{|x| \times |y|}, :: Y^X \subsetneq \mathscr{P}(X \times Y).$

Definition (相等)

称两函数 $f,g:X\longrightarrow Y$ 相等(记为f=g), iff, 对应的函数关系在集合意义下相等,即 $\forall x f(x)=g(x)$.

Example

- 23/245 -

- 记 $Y^X \triangleq \{f: X \longrightarrow Y\}$ 为所有的从X到Y的函数集合;
- if X和Y为有限集合,则|Y^X| = |Y||X|;
- $\bullet |Y|^{|X|} < 2^{|x| \times |y|}, :: Y^X \subsetneq \mathscr{P}(X \times Y).$

Definition (相等)

称两函数 $f,g:X\longrightarrow Y$ 相等(记为f=g), iff, 对应的函数关系在集合意义下相等,即 $\forall x\; f(x)=g(x)$.

Example

• |{0,1}|⁽⁰⁾

- 记 $Y^X \triangleq \{f: X \longrightarrow Y\}$ 为所有的从X到Y的函数集合;
- if X和Y为有限集合,则|Y^X| = |Y||X|;
- $\bullet |Y|^{|X|} < 2^{|x| \times |y|}, :: Y^X \subsetneq \mathscr{P}(X \times Y).$

Definition (相等)

称两函数 $f,g:X\longrightarrow Y$ 相等(记为f=g), iff, 对应的函数关系在集合意义下相等,即 $\forall x\; f(x)=g(x)$.

- $|\{0,1\}^{\{0,1\}^n}| = 2^{2^n};$
- $F \Leftrightarrow G \text{ iff } I(F) = I(G);$

- 记 $Y^X \triangleq \{f: X \longrightarrow Y\}$ 为所有的从X到Y的函数集合;
- if X和Y为有限集合,则|Y^X| = |Y||X|;
- $\bullet |Y|^{|X|} < 2^{|x| \times |y|}, :: Y^X \subsetneq \mathscr{P}(X \times Y).$

Definition (相等)

称两函数 $f,g:X\longrightarrow Y$ 相等(记为f=g), iff, 对应的函数关系在集合意义下相等,即 $\forall x\; f(x)=g(x)$.

- $F \Leftrightarrow G \text{ iff } I(F) = I(G)$;

- 记 $Y^X \triangleq \{f: X \longrightarrow Y\}$ 为所有的从X到Y的函数集合;
- if X和Y为有限集合,则|Y^X| = |Y||X|;
- $|Y|^{|X|} < 2^{|x| \times |y|}, :: Y^X \subsetneq \mathscr{P}(X \times Y).$

Definition (相等)

称两函数 $f,g:X\longrightarrow Y$ 相等(记为f=g), iff, 对应的函数关系在集合意义下相等,即 $\forall x\; f(x)=g(x)$.

- $|\{0,1\}^{\{0,1\}^n}| = 2^{2^n};$
- $F \Leftrightarrow G \text{ iff } I(F) = I(G);$

Definition (象, image; 逆象, inverse image)

设 $f: X \longrightarrow Y \not\in X$ 到Y上的函数, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$:

· A在f下的象:

$$f(A) \triangleq \{ y \mid \exists x \in A \land y = f(x) \} = \{ f(x) \mid x \in A \};$$

• B在f下的逆象:

$$f^{-1}(B) \triangleq \{ x \mid \exists y \in B \land y = f(x) \} = \{ x \mid f(x) \in B \}$$

f(X)称为函数f的值域(range).

Definition

Definition (象, image; 逆象, inverse image)

设 $f: X \longrightarrow Y \not\in X$ 到Y上的函数, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$:

A在f下的象:

$$f(A) \triangleq \{ y \mid \exists x \in A \land y = f(x) \} = \{ f(x) \mid x \in A \};$$

• B在f下的逆象:

$$f^{-1}(B) \triangleq \{x \mid \exists y \in B \land y = f(x)\} = \{x \mid f(x) \in B\}$$

f(X)称为函数f的值域(range).

Definition

4ロ > 4団 > 4 豆 > 4 豆 > 豆 め Q ()

Definition (象, image; 逆象, inverse image)

设 $f: X \longrightarrow Y \not\in X$ 到Y上的函数, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$:

· A在f下的象:

$$f(A) \triangleq \{ y \mid \exists x \in A \land y = f(x) \} = \{ f(x) \mid x \in A \};$$

• B在f下的逆象:

$$f^{-1}(B) \triangleq \{x \mid \exists y \in B \land y = f(x)\} = \{x \mid f(x) \in B\};$$

f(X)称为函数f的值域(range).

Definition

Definition (象, image; 逆象, inverse image)

设 $f: X \longrightarrow Y \in X$ 到Y上的函数, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$:

- A在f下的象: $f(A) \triangleq \{ y \mid \exists x \in A \land y = f(x) \} = \{ f(x) \mid x \in A \};$
- B在f下的逆象: $f^{-1}(B) \triangleq \{x \mid \exists y \in B \land y = f(x)\} = \{x \mid f(x) \in B\};$
- f(X)称为函数f的值域(range).

Definition

4□ > 4個 > 4 量 > 4 量 > ■ 900

Definition (象, image; 逆象, inverse image)

设 $f: X \longrightarrow Y \not\in X$ 到Y上的函数, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$:

- A在f下的象:
 - $f(A) \triangleq \{ y \mid \exists x \in A \land y = f(x) \} = \{ f(x) \mid x \in A \};$
 - B在f下的逆象: $f^{-1}(B) \triangleq \{x \mid \exists y \in B \land y = f(x)\} = \{x \mid f(x) \in B\};$
- f(X)称为函数f的值域(range).

Definition

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, if f 是连续函数,则对任意的开区间] a, b | a,
- 重言式集合 $T = \mathcal{I}^{-1}(\{\mathbb{T}\})$.

4□ > 4□ > 4□ > 4□ > 4□ > 1□

Definition (象, image; 逆象, inverse image)

设 $f: X \longrightarrow Y \not\in X$ 到Y上的函数, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$:

· A在f下的象:

$$f(A) \triangleq \{ y \mid \exists x \in A \land y = f(x) \} = \{ f(x) \mid x \in A \};$$

• B在f下的逆象:

$$f^{-1}(B) \triangleq \{x \mid \exists y \in B \land y = f(x)\} = \{x \mid f(x) \in B\};$$

f(X)称为函数f的值域(range).

Definition

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, if f是连续函数,则对任意的开区间]a, b[a, b[)也是开区间;
- 重言式集合 $T = \mathcal{I}^{-1}(\{\mathbb{T}\})$.

Definition (象, image; 逆象, inverse image)

设 $f: X \longrightarrow Y \not\in X$ 到Y上的函数, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$:

- A在f下的象: $f(A) \triangleq \{ y \mid \exists x \in A \land y = f(x) \} = \{ f(x) \mid x \in A \};$
- B在f下的逆象: $f^{-1}(B) \triangleq \{x \mid \exists y \in B \land y = f(x)\} = \{x \mid f(x) \in B\};$
- f(X)称为函数f的值域(range).

Definition

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, if f是连续函数,则对任意的开区间]a, b[ff([a, b])也是开区间;
- 重言式集合 $T = \mathscr{I}^{-1}(\{\mathbb{T}\}).$

◆□ → ◆□ → ◆ ■ → ◆ ■ → り へ ○

Remark

 f^{-1} 有两重含义,求逆象和反函数,求逆象的作用对象只能是集合: f^{-1} 才能作用元素。

Remark

 f^{-1} 有两重含义,求逆象和反函数,求逆象的作用对象只能是集合: f^{-1} 才能作用元素。



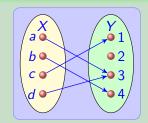
Remark

 f^{-1} 有两重含义,求逆象和反函数,求逆象的作用对象只能是集合: f^{-1} 才能作用元素。



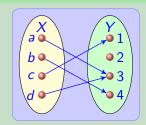
Remark

 f^{-1} 有两重含义,求逆象和反函数,求逆象的作用对象只能是集合: f^{-1} 才能作用元素。



Remark

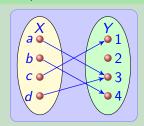
 f^{-1} 有两重含义,求逆象和反函数,求逆象的作用对象只能是集合: f^{-1} (如); 只有当f有反函数存在时, f^{-1} 才能作用元素。



- $f(\{a,d\}) = \{3\}$
- $f(\{d\}) = \{3\};$
- $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$;

Remark

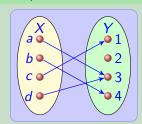
 f^{-1} 有两重含义,求逆象和反函数,求逆象的作用对象只能是集合: f^{-1} 才能作用元素。



- $f(\{a,d\}) = \{3\};$
- $f(\{d\}) = \{3\};$
 - $f^{-1}(\{3\}) = \{a, d\};$
- $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset;$

Remark

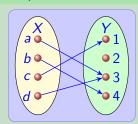
 f^{-1} 有两重含义,求逆象和反函数,求逆象的作用对象只能是集合: f^{-1} 才能作用元素。



- $f(\{a,d\}) = \{3\};$
- $f(\{d\}) = \{3\};$
- $f^{-1}(\{3\}) = \{a, d\};$
- $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$

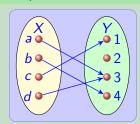
Remark

 f^{-1} 有两重含义,求逆象和反函数,求逆象的作用对象只能是集合: f^{-1} (如): 只有当f 有反函数存在时, f^{-1} 才能作用元素。



- $f(\{a,d\}) = \{3\};$
- $f(\{d\}) = \{3\};$
- $f^{-1}(\{3\}) = \{a, d\};$
- $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset;$

Remark



- $f(\{a,d\}) = \{3\};$
- $f(\{d\}) = \{3\};$
- $f^{-1}(\{3\}) = \{a, d\};$
- $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset;$

Propostion

设 $f: X \longrightarrow Y \not\in X$ 到 $Y \not\in Y$ 的函数, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, 则:

- $\bullet \qquad A \subseteq f^{-1}(f(A));$
- $\bullet \qquad f(f^{-1}(B)) \subseteq B.$

Remark

直观上、求象:对集合缩小:求逆象:对集合放大

设 $f: X \longrightarrow Y \not\in X$ 到Y上的函数, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, 则:

- $\bullet \qquad A \subseteq f^{-1}(f(A));$
 - $\bullet \qquad f(f^{-1}(B)) \subseteq B.$

F 1001.

Remark

直观上, 求象: 对集合缩小; 求逆象: 对集合放大

设 $f: X \longrightarrow Y \not\in X$ 到 $Y \not\in Y$ 的函数, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, 则:

- $\bullet \qquad A \subseteq f^{-1}(f(A));$
- $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Proof.

Remark

直观上, 求象: 对集合缩小; 求逆象: 对集合放大

设 $f: X \longrightarrow Y \not\in X$ 到 $Y \not\in Y$ 的函数, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, 则:

- $\bullet \qquad A \subseteq f^{-1}(f(A));$
- $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Proof.

- $\forall x \in A$, $\bigcup f(x) \in f(A)$, ∴ $x \in f^{-1}(f(A)) = \{x' \mid f(x') \in f(A)\}$;
- ② $\forall y \in f(f^{-1}(B)), \ M\exists x \in f^{-1}(B) \land y = f(x),$ $\pi : x \in f^{-1}(B), \ \therefore f(x) \in B, \ \mathbb{P}_{Y} \in B.$

Remark

直观上, 求象: 对集合缩小; 求逆象: 对集合放大

设 $f: X \longrightarrow Y \not\in X$ 到 $Y \not\in Y$ 的函数, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, 则:

- $\bullet \qquad A \subseteq f^{-1}(f(A));$
- $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Proof.

- $\forall x \in A, \ Mf(x) \in f(A),$ $\therefore x \in f^{-1}(f(A)) = \{ x' \mid f(x') \in f(A) \};$
- ② $\forall y \in f(f^{-1}(B)), \ M\exists x \in f^{-1}(B) \land y = f(x),$ $\ \text{$\mathfrak{A}$} : x \in f^{-1}(B), \ \therefore f(x) \in B, \ \Re y \in B.$

Remark

直观上, 求象: 对集合缩小; 求逆象: 对集合放大。

设 $f: X \longrightarrow Y \not\in X$ 到 $Y \not\in Y$ 的函数, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, 则:

- $\bullet \qquad A \subseteq f^{-1}(f(A));$
- $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Proof.

- $\forall x \in A, \ \mathfrak{N} f(x) \in f(A),$ $\therefore x \in f^{-1}(f(A)) = \{ x' \mid f(x') \in f(A) \};$
- ② $\forall y \in f(f^{-1}(B)), \ M\exists x \in f^{-1}(B) \land y = f(x),$ $\pi : x \in f^{-1}(B), \ \therefore f(x) \in B, \ \mathfrak{P} y \in B.$

Remark

直观上, 求象: 对集合缩小; 求逆象: 对集合放大。

设 $f: X \longrightarrow Y \not\in X$ 到 $Y \not\in Y$ 的函数, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, 则:

- $\bullet \qquad A \subseteq f^{-1}(f(A));$
- $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Proof.

- $\forall x \in A$, $\emptyset f(x) \in f(A)$, ∴ $x \in f^{-1}(f(A)) = \{ x' \mid f(x') \in f(A) \};$
- ② $\forall y \in f(f^{-1}(B)), \ M\exists x \in f^{-1}(B) \land y = f(x),$ $\pi : x \in f^{-1}(B), \ \therefore f(x) \in B, \ \mathfrak{P} y \in B.$

Remark

直观上, 求象: 对集合缩小; 求逆象: 对集合放大。

常用的函数

Description

- ① $1x: X \longrightarrow X, x \longmapsto x 恒等函数;$
- ② b: X → Y, x → b 常数函数;
- ③ s: N → N, n → n+1后继函数;
- ① $f: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ n元函数;
- ⑤ $p_i: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_i, \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \longmapsto x_i$ 投影函数;
- ① $X \longrightarrow \mathcal{P}(X \times Y), x \longmapsto \{x\} \times Y$ 截痕函数。

- 51/245 -

- ① 1x: X → X, x → x 恒等函数;
- ② b: X → Y, x → b 常数函数;
- ③ s: N → N, n → n + 1后继函数;
- ① $f: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ n元函数;
- ① $p_i: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_i, \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \longmapsto x_i$ 投影函数;
- ① $X \longrightarrow \mathcal{P}(X \times Y), x \longmapsto \{x\} \times Y$ 截痕函数。

- ① 1x: X → X, x → x 恒等函数;
- ② b: X → Y, x → b 常数函数;
- ③ s: N → N, n → n+1后继函数;
- ① $f: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ n元函数;
- ① $p_i: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_i, \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \longmapsto x_i$ 投影函数;
- ① $X \longrightarrow \mathcal{P}(X \times Y), x \longmapsto \{x\} \times Y$ 截痕函数。

- 53/245 -

- ① 1x: X → X, x → x 恒等函数;
- ② b: X → Y, x → b 常数函数;
- ③ $s: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \longmapsto n+1$ 后继函数;
- ① $f: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ n元函数;
- ⑤ $p_i: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_i, \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \longmapsto x_i$ 投影函数;
- $X \longrightarrow \mathcal{P}(X \times Y), x \longmapsto \{x\} \times Y$ 截痕函数。

- 54/245 -

- ① $1_X: X \longrightarrow X, x \longmapsto x$ 恒等函数;
- ② b: X → Y, x → b 常数函数;
- ③ $s: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \longmapsto n+1$ 后继函数;
- **4** $f: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ n元函数;
- ⑤ $p_i: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_i, \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \longmapsto x_i$ 投影函数;
- ① $X \longrightarrow \mathcal{P}(X \times Y), x \longmapsto \{x\} \times Y$ 截痕函数。

- ① $1_X: X \longrightarrow X, x \longmapsto x$ 恒等函数;
- 2 b: X → Y, x → b 常数函数;
- ③ $s: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \longmapsto n+1$ 后继函数;
- 4 $f: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ n元函数;
- **⑤** $X \longrightarrow \mathcal{P}(X \times Y), x \longmapsto \{x\} \times Y$ 截痕函数。

- ① 1x: X → X, x → x 恒等函数;
- ② b: X → Y, x → b 常数函数;
- ③ $s: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \longmapsto n+1$ 后继函数;
- 4 $f: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ n元函数;
- **⑤** $p_i: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_i, \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \longmapsto x_i$ 投影函数;
- **③** $X \longrightarrow \mathcal{P}(X \times Y), x \longmapsto \{x\} \times Y$ 截痕函数。

函数的基本概念

Definition (合成函数(复合), Composite function)

设 $f: X \longrightarrow Y \in X$ 到Y上的函数, $g: Y \longrightarrow Z \in Y$ 到Z上的函数,f和g的合成 $g \circ f: X \longrightarrow Z$, $x \longmapsto g(f(x))$ 也是函数,称为合成函数 (注意: 在写法上与关系的合成相反)。

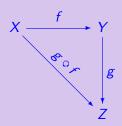
Definition (交換图, Commutative Diagram)



Definition (合成函数(复合), Composite function)

设 $f: X \longrightarrow Y \not\in X$ 到Y上的函数, $g: Y \longrightarrow Z \not\in Y$ 到Z上的函数,f和g的合成 $g \circ f: X \longrightarrow Z$, $x \longmapsto g(f(x))$ 也是函数,称为合成函数 (注意: 在写法上与关系的合成相反)。

Definition (交换图, Commutative Diagram)



函数的基本概念

Propostion

 $沒f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z, h: Z \longrightarrow W:$

- 60/245 -

 $沒f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z, h: Z \longrightarrow W:$

- $\bullet \ \mathbb{1}_Y \circ f = f \circ \mathbb{1}_X = f;$
- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (结合律).

Notation

 $沒f: X \longrightarrow X:$

 $沒f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z, h: Z \longrightarrow W:$

- $\bullet \ \mathbb{1}_Y \circ f = f \circ \mathbb{1}_X = f;$
- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (结合律).

Notation

 $沒f: X \longrightarrow X$

 $\circ f^0 = 1_A;$

 $沒f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z, h: Z \longrightarrow W:$

- $\bullet \ \mathbb{1}_{Y} \circ f = f \circ \mathbb{1}_{X} = f;$
- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (结合律).

Notation

设 $f: X \longrightarrow X$:

- $f^0 = \mathbb{1}_A$;
- $f^{n+1} = f \circ f^n$;
- 和关系一样: ∀m, n∈ N f^m ∘ fⁿ = f^{m+n}; (f^m)ⁿ = f^{mn}

设 $f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z, h: Z \longrightarrow W$:

- $\bullet \ \mathbb{1}_{Y} \circ f = f \circ \mathbb{1}_{X} = f;$
- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (结合律).

Notation

设f: X → X:

- $f^0 = 1_A$;
- $f^{n+1} = f \circ f^n$;
- 和关系一样: ∀m,n∈ N f^m ∘ fⁿ = f^{m+n}; (f^m)ⁿ = f^{mn}

 $沒f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z, h: Z \longrightarrow W:$

- $\bullet \ \mathbb{1}_{Y} \circ f = f \circ \mathbb{1}_{X} = f;$
- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (结合律).

Notation

设f: X → X:

- $f^0 = 1_A$;
- $\bullet \ f^{n+1}=f\circ f^n;$
- 和关系一样: ∀m,n∈ N f^m ∘ fⁿ = f^{m+n}; (f^m)ⁿ = f^{mn}

 $沒f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z, h: Z \longrightarrow W:$

- $\bullet \ \mathbb{1}_{\mathsf{Y}} \circ f = f \circ \mathbb{1}_{\mathsf{X}} = f$
- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (结合律).

Notation

设f: X → X:

- $f^0 = 1_A$;
- $\bullet \ f^{n+1}=f\circ f^n;$
- 和关系一样: ∀m, n ∈ N f^m ∘ fⁿ = f^{m+n}; (f^m)ⁿ = f^{mn}.

单射,满射和双射

Definition

设 $f: X \longrightarrow Y$:

- if f(X) = Y, 称f为满射(onto)
- if $\forall x, x' \in X$ $f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$ (或者 $\forall xx' \in X$ $x \neq x' \rightarrow f(x) \neq f(x')$, 称f为单射(one to one);
- if f 既是单射也是满射,则称f 为双射(bijection).

Example

 $\mathcal{E}[X] = m, |Y| = n$:

单射,满射和双射

Definition

设 $f: X \longrightarrow Y$:

- if f(X) = Y, $\Re f \rtimes \Re f$ (onto)
- if $\forall x, x' \in X$ $f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$ (或者 $\forall xx' \in X$ $x \neq x' \rightarrow f(x) \neq f(x')$, 称f为单射(one to one);
- if f 既是单射也是满射,则称f 为双射(bijection).

Example

 $\mathcal{E}[X] = m, |Y| = n$:

- if f(X) = Y, $\Re f \to \Re \Re (\text{onto})$
- if $\forall x, x' \in X$ $f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$ (§ 者 $\forall xx' \in X \ x \neq x' \rightarrow f(x) \neq f(x')$, 称f为单射(one to one);

- if f(X) = Y, $\Re f \to \Re \Re (\text{onto})$
- if $\forall x, x' \in X$ $f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$ (§ 者 $\forall xx' \in X \ x \neq x' \rightarrow f(x) \neq f(x')$, 称f为单射(one to one);
- if f 既是单射也是满射,则称f 为双射(bijection).

 $设f: X \longrightarrow Y:$

- if f(X) = Y, $\Re f \rtimes \Re f$ (onto)
- if $\forall x, x' \in X$ $f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$ (或者 $\forall xx' \in X$ $x \neq x' \rightarrow f(x) \neq f(x')$, 称f为单射(one to one);
- if f 既是单射也是满射,则称f 为双射(bijection).

Example

 $\mathcal{Z}|X|=m, |Y|=n$:

- 1x 是双射;
- f是单射, iff, |f(X)| = m, 因此|X| ≤ |Y|;
- f是满射,则, |Y| = |f(X)| ≤ |X|,因此|Y| ≤ |X|;
- f是双射、则|X| = |Y|.

单射,满射和双射

Definition

- if f(X) = Y, $\Re f \rtimes \Re f$ (onto)
- if $\forall x, x' \in X$ $f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$ (或者 $\forall xx' \in X$ $x \neq x' \rightarrow f(x) \neq f(x')$, 称f为单射(one to one);
- if f 既是单射也是满射,则称f 为双射(bijection).

Example

 $\mathcal{Z}|X|=m, |Y|=n$:

- 1x 是双射;
- f是单射, iff, |f(X)| = m, 因此|X| ≤ |Y|;
- f是满射,则,|Y|=|f(X)|≤|X|,因此|Y|≤|X|;
- f是双射、则|X| = |Y|.

函数的基本概念

- if f(X) = Y, $\Re f \rtimes \Re f$ (onto)
- if $\forall x, x' \in X$ $f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$ (或者 $\forall xx' \in X$ $x \neq x' \rightarrow f(x) \neq f(x')$, 称f为单射(one to one);
- if f 既是单射也是满射,则称f 为双射(bijection).

Example

 $\mathcal{Z}|X|=m, |Y|=n$:

- 1x是双射;
- f是单射, iff, |f(X)| = m, 因此|X| ≤ |Y|;
- f是满射,则, |Y| = |f(X)| ≤ |X|,因此|Y| ≤ |X|;
- f 是 双射、则 | X | = | Y |.

- if f(X) = Y, 称 f 为满射(onto)
- if $\forall x, x' \in X$ $f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$ (或者 $\forall xx' \in X$ $x \neq x' \rightarrow f(x) \neq f(x')$, 称f为单射(one to one);
- if f 既是单射也是满射,则称f 为双射(bijection).

Example

设|X| = m, |Y| = n:

- 1x是双射;
- f是单射, iff, |f(X)| = m, 因此|X| ≤ |Y|;
- f是满射,则, $|Y| = |f(X)| \leq |X|$,因此 $|Y| \leq |X|$;
- *f* 是双射,则|X| = |Y|.

设 $f: X \longrightarrow Y$:

- if f(X) = Y, $\Re f \rtimes \Re f$ (onto)
- if $\forall x, x' \in X$ $f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$ (或者 $\forall xx' \in X$ $x \neq x' \rightarrow f(x) \neq f(x')$, 称f为单射(one to one);
- if f 既是单射也是满射,则称f 为双射(bijection).

Example

设|X| = m, |Y| = n:

- 1_X是双射;
- f是单射, iff, |f(X)| = m, 因此|X| ≤ |Y|;
- f是满射,则,|Y|=|f(X)|≤|X|,因此|Y|≤|X|;
- f是双射,则|X|=|Y|.

Examples

Example

 $\mathcal{E}|X| = m, |Y| = n$:

- $\{1,2,\ldots,n\}$ 上的双射称为置换; 记 $P_n = \{\{1,2,\ldots,n\}$ 所有置换的集合 $\}, 则|P_n| = n!$
- 设 $n \ge m$ 则X到Y上的单射共有 $C_n^m m!$ 个;
- 设n ≤ m 则X到Y上的满射的个数等于m个元素的集合共有 多少个n分区的个数。

Example

 $\mathcal{E}|X| = m, |Y| = n$:

- $\{1,2,\ldots,n\}$ 上的双射称为置换; 记 $P_n = \{\{1,2,\ldots,n\}$ 所有置换的集合 $\}$, 则 $|P_n| = n!$;
- 设n ≥ m 则X到Y上的单射共有C_n^mm!个;
- 设n≤m则X到Y上的满射的个数等于m个元素的集合共有 多少个n分区的个数。

Example

 $\mathcal{E}|X| = m, |Y| = n$:

- $\{1,2,\ldots,n\}$ 上的双射称为置换; 记 $P_n = \{\{1,2,\ldots,n\}$ 所有置换的集合 $\}$,则 $|P_n| = n!$;
- 设 $n \ge m$ 则X到Y上的单射共有 $C_n^m m!$ 个;
- 设n≤m则X到Y上的满射的个数等于m个元素的集合共有 多少个n分区的个数。

Example

 $\mathcal{E}|X| = m, |Y| = n$:

- $\{1,2,\ldots,n\}$ 上的双射称为置换; 记 $P_n = \{\{1,2,\ldots,n\}$ 所有置换的集合 $\}$,则 $|P_n| = n!$;
- 设 $n \ge m$ 则X到Y上的单射共有 $C_n^m m!$ 个;
- 设n≤m则X到Y上的满射的个数等于m个元素的集合共有 多少个n分区的个数.



- 79/245 -

设f: X → Y, g: Y → Z:

- ① 设f, g是单射, 则g f 也是单射;
- ② 设f, g是满射, 则g⊙f也是满射;
- ③ 设f, g是双射, 则g∘f也是双射。

①的证明.

0.11次是等别,一样

设f: X → Y, g: Y → Z:

- ① 设f, g是单射, 则g f 也是单射;
- ② 设f, g是满射, 则g o f 也是满射;
- ③ 设f, g是双射, 则g f 也是双射。

①的证明.

设f: X → Y, g: Y → Z:

- ① 设f, g是单射, 则g f 也是单射;
- ② 设f, g是满射, 则g f 也是满射;
- ③ 设f, g是双射, 则g f 也是双射。

①的证明

◆□ → ←□ → ← 亘 → □ ● り へ ○

 $沒f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z:$

- ① 设f, g是单射, 则g f 也是单射;
- ② 设f, g是满射, 则g f 也是满射;
- ③ 设f, g是双射, 则g f 也是双射。

 $ightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z$:

- ① 设f, g是单射, 则g f 也是单射;
- ② 设f, g是满射, 则g f 也是满射;
- ③ 设f, g是双射, 则g f 也是双射。

- **1** $x, x' \in X$, if g(f(x)) = g(f(x'));
- ② :: g是单射, :: f(x) = f(x');
- ③ 又f是单射, ∴x = x'.



 $ightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z$:

- ① 设f, g是单射, 则g f 也是单射;
- ② 设f, g是满射, 则g f 也是满射;
- ③ 设f, g是双射, 则g f 也是双射。

- **1** $x, x' \in X$, if g(f(x)) = g(f(x'));
- ② :: g是单射, :: f(x) = f(x');
- ③ 又f是单射, ∴ x = x'.



 $沒f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z:$

- ① 设f, g是单射, 则g f 也是单射;
- ② 设f, g是满射, 则g f 也是满射;
- ③ 设f, g是双射, 则g f 也是双射。

- **1** $x, x' \in X$, if g(f(x)) = g(f(x'));
- ② :: g是单射, :: f(x) = f(x');
- ③ 又*f* 是单射, ∴ *x* = *x*′.



 $i g f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z:$

- ① 设f, g是单射, 则g f 也是单射;
- ② 设f, g是满射, 则g f 也是满射;
- ③ 设f, g是双射, 则g f 也是双射。

- **1** $x, x' \in X$, if g(f(x)) = g(f(x'));
- ② :: g是单射, :: f(x) = f(x');
- ③ 又f 是单射, ∴ x = x'.



Propostion

 $沒f: X \longrightarrow Y:$

- ① f是单射, iff, $\exists g: Y \longrightarrow X \land g \circ f = 1_X$, $\mathop{\pi} g \not \to f$ 的左逆元;
- ② f是满射, iff, $\exists g: Y \longrightarrow X \land f \circ g = \mathbb{1}_Y$, 称 $g \not \to f$ 的右逆元。

 $沒f: X \longrightarrow Y:$

- ① f是单射, iff, $\exists g: Y \longrightarrow X \land g \circ f = 1_X$, 称 $g \rightarrow f$ 的左逆元;

Propostion

 $沒f: X \longrightarrow Y:$

- ① f是单射, iff, $\exists g: Y \longrightarrow X \land g \circ f = \mathbb{1}_X$, 称 $g \rightarrow f$ 的左逆元;
- ② f 是满射, iff, $\exists g: Y \longrightarrow X \land f \circ g = 1_Y$, $kg \to f$ 的右逆元。

Propostion

设f: X → Y:

- ① f是单射, iff, $\exists g: Y \longrightarrow X \land g \circ f = \mathbb{1}_X$, 称 $g \rightarrow f$ 的左逆元;

①的证明.

 \iff $\mathfrak{F}(x) = f(x'), \ \mathfrak{M}g(f(x)) = g(f(x')), \ \mathfrak{P}x = x'; \ \mathfrak{K} \mathfrak{M}f \not\in \mathfrak{H};$

→ 设x₀ ∈ X, 构造g: Y →→ X:

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{if } y \in f(X) \land f(x) = y; \\ y_0 & \text{if } y \notin f(X). \end{cases}$$

g是单射, $\exists ! x \in X \land f(x) = y$, if $y \in f(X)$;

 \therefore g is well-defined, And $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$;

从构造上左右逆元不唯一!

Propostion

设f: X → Y:

①的证明.

 \Longrightarrow 设 $x_0 \in X$, 构造 $g: Y \longrightarrow X$

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{if } y \in f(X) \land f(x) = y; \\ y & \text{if } y \notin f(X). \end{cases}$$

$$(x_0 \text{ if } y \notin f(X);$$

g是单射, $\exists ! x \in X \land f(x) = y$, if $y \in f(X)$;

 \therefore g is well-defined, And $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$;

从构造上左右逆元不唯一!

 $沒f: X \longrightarrow Y:$

- ② f 是满射, iff, $\exists g: Y \longrightarrow X \land f \circ g = \mathbb{1}_Y$, $\Re M f$ 的右逆元。

①的证明.

$$\implies$$
 $∂x_0 ∈ X$, $∧beg : Y \longrightarrow X$:

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{if } y \in f(X) \land f(x) = y; \\ x_0 & \text{if } y \notin f(X); \end{cases}$$

- ∵ g是单射,∃!x ∈ X ∧ f(x) = y, if y ∈ f(X);
- \therefore g is well-defined, And $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$;

从构造上左右逆元不唯一!

设 $f: X \longrightarrow Y$, f 是双射,iff, $\exists ! g: Y \longrightarrow X \land g \circ f = \mathbb{1}_X \land f \circ g = \mathbb{1}_Y$,称 $g \to f$ 的逆元,并记该逆元为 f^{-1} .

© hfwan

双射充要条件

函数的基本概念

Propostion

设 $f: X \longrightarrow Y$, f 是双射,iff, $\exists ! g: Y \longrightarrow X \land g \circ f = \mathbb{1}_X \land f \circ g = \mathbb{1}_Y$,称 $g \to f$ 的逆元,并记该逆元为 f^{-1} .

Proof.

 \Longrightarrow $\ \mathcal{U}_f \not= X \ \mathbf{g} \circ f = \mathbb{1}_X \land f \circ g' = \mathbb{1}_Y ;$

∴ g

 $= g \circ 1_Y$

 $= g \circ (f \circ g')$

 $= (g \circ f) \circ g'$

 $= \mathbb{I}_X \circ g'$

= g';

 $\therefore g = g'$, 即g存在并且唯一确定的;

← 由上命题得知: f既是单射也是满射, 即f是双射,

设 $f: X \longrightarrow Y$, f 是双射,iff, $\exists ! g: Y \longrightarrow X \land g \circ f = \mathbb{1}_X \land f \circ g = \mathbb{1}_Y$,称 $g \to f$ 的逆元,并记该逆元为 f^{-1} .

Proof.

⇒ 设
$$f$$
是双射,由上命题 $\exists g, g': Y \rightarrow X g \circ f = \mathbb{1}_X \land f \circ g' = \mathbb{1}_Y;$
∴ g

$$= g \circ \mathbb{1}_Y$$

$$= g \circ (f \circ g')$$

$$= (g \circ f) \circ g'$$

$$= \mathbb{1}_X \circ g'$$

$$= g';$$
∴ $g = g'$, 即 g 存在并且唯一确定的;

← 由上命题得知: f既是单射也是满射, 即f是双射。

设 $f:X\longrightarrow Y$, f 是双射,iff, $\exists !g:Y\longrightarrow X\wedge g\circ f=\mathbb{1}_X\wedge f\circ g=\mathbb{1}_Y$,称g 为f 的逆元,并记该逆元为 f^{-1} .

Proof.

⇒ 设
$$f$$
是双射,由上命题 $\exists g, g': Y \longrightarrow X g \circ f = \mathbb{1}_X \land f \circ g' = \mathbb{1}_Y;$
∴ g

$$= g \circ \mathbb{1}_Y$$

$$= g \circ (f \circ g')$$

$$= (g \circ f) \circ g'$$

$$= \mathbb{1}_X \circ g'$$

= g'; $\therefore g = g', \text{即g存在并且唯一确定的;}$

← 由上命题得知: f既是单射也是满射,即f是双射。

● 设f, g都是双射,则 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ∴ $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_X$ ∧ $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_Z$

• 设f, g都是双射,则 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$: : $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathbb{1}_X$ $\wedge (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathbb{1}_Z$

Example

$$f: X \longrightarrow Y$$
, f 是单射, iff, $\forall A \subseteq X f^{-1}(f(A)) = A$;



 $f: X \longrightarrow Y$, f是单射, iff, $\forall A \subseteq X f^{-1}(f(A)) = A$;

 \Longrightarrow

- 2 $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$?
- ③ $\forall x \in f^{-1}(f(A)), \ \text{M} f(x) \in f(A);$
- $\exists x' \in A \land f(x) = f(x');$
- ⑤ 而f是单射、∴ x = x' ∈ A.

 $f: X \longrightarrow Y$, f是单射, iff, $\forall A \subseteq X f^{-1}(f(A)) = A$;

 \Longrightarrow

- 2 $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$
- ③ $\forall x \in f^{-1}(f(A)), \ \textit{y} \ f(x) \in f(A);$
 - $\exists x' \in A \land f(x) = f(x');$
- ⑤ 而f 是单射, ∴ x = x' ∈ A.

(ロ) (部) (目) (目) (目) の(の)

- 103/245 -

 $f: X \longrightarrow Y$, f是单射, iff, $\forall A \subseteq X f^{-1}(f(A)) = A$;

 \Longrightarrow

- 2 $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$?
- ③ $\forall x \in f^{-1}(f(A)), \ \textit{M} f(x) \in f(A);$
- $\exists x' \in A \land f(x) = f(x');$
- ⑤ 而f是单射, $\triangle x = x' \in A$.

· ____

 $f: X \longrightarrow Y$, f是单射, iff, $\forall A \subseteq X f^{-1}(f(A)) = A$;

 \Longrightarrow

- **2** $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$?
- **③** $\forall x \in f^{-1}(f(A)), \ \textit{⋈} f(x) \in f(A);$
- $\exists x' \in A \land f(x) = f(x');$
- ⑤ 而f 是单射, ∴ x = x' ∈ A.

←ロ → ← 個 → ← 重 → ← 重 → りへで

 $f: X \longrightarrow Y$, f是单射, iff, $\forall A \subseteq X f^{-1}(f(A)) = A$;

 \Longrightarrow

- **2** $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$?
- **③** $\forall x \in f^{-1}(f(A)), \ \textit{⋈} f(x) \in f(A);$
- ⑤ 而f是单射, ∴ x = x' ∈ A

- 106/245 -

$$f: X \longrightarrow Y$$
, f 是单射, iff, $\forall A \subseteq X f^{-1}(f(A)) = A$;

 \Longrightarrow

- $\mathbf{1} \quad A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad \checkmark$
- **2** $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$?
- **③** $\forall x \in f^{-1}(f(A)), \ Mf(x) \in f(A);$
- **⑤** 而f是单射、∴ $x = x' \in A$.



Example

$$f: X \longrightarrow Y$$
, f 是单射, iff, $\forall A \subseteq X f^{-1}(f(A)) = A$;

 \Longrightarrow

2
$$f^{-1}(f(A)) \subseteq A$$
 ?

③
$$\forall x \in f^{-1}(f(A)), \ \text{⋈} f(x) \in f(A);$$

⑤ 而
$$f$$
是单射,∴ $x = x' \in A$.

②
$$\diamond A = \{x\}, \ Mf^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}\}$$

③ 而
$$f(x') \in \{f(x)\};$$

$$f: X \longrightarrow Y$$
, f 是单射, iff, $\forall A \subseteq X f^{-1}(f(A)) = A$;

函数的分解

$$\Longrightarrow$$

- **2** $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$?
- **③** $\forall x \in f^{-1}(f(A)), \ \textit{⋈} f(x) \in f(A);$
- ⑤ 而f是单射, ∴ x = x' ∈ A.

- ① 设f(x) = f(x'), 证明x = x';
- ② $\diamond A = \{x\}, \ Mf^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\};$
- ③ 而 $f(x') \in \{f(x)\};$

$$f: X \longrightarrow Y$$
, f 是单射, iff, $\forall A \subseteq X f^{-1}(f(A)) = A$;

函数的分解

 \Longrightarrow

- **2** $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$?
- **③** $\forall x \in f^{-1}(f(A)), \ \emptyset | f(x) \in f(A)$:
- **⑤** 而f是单射、∴ $x = x' \in A$.

- ① 设f(x) = f(x'), 证明x = x';
- ② $\diamondsuit A = \{x\}, \ \mathbb{N}f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\};$

$$f: X \longrightarrow Y$$
, f 是单射, iff, $\forall A \subseteq X f^{-1}(f(A)) = A$;

 \Longrightarrow

2
$$f^{-1}(f(A)) \subseteq A$$
 ?

③
$$\forall x \in f^{-1}(f(A)), \ \text{⋈} f(x) \in f(A);$$

←=

① 设
$$f(x) = f(x')$$
, 证明 $x = x'$;

②
$$\diamondsuit A = \{x\}, \ Mf^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\};$$

③ 而
$$f(x')$$
 ∈ { $f(x)$ };

函数的基本概念

Example

$$f: X \longrightarrow Y$$
, f 是单射, iff, $\forall A \subseteq X f^{-1}(f(A)) = A$;

 \Longrightarrow

2
$$f^{-1}(f(A)) \subseteq A$$
 ?

③
$$\forall x \in f^{-1}(f(A)), \ \text{⋈} f(x) \in f(A);$$

① 设
$$f(x) = f(x')$$
, 证明 $x = x'$;

②
$$\diamondsuit A = \{x\}, \ Mf^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\};$$

$$f: X \longrightarrow Y$$
, f 是单射, iff, $\forall A \subseteq X f^{-1}(f(A)) = A$;

 \Longrightarrow

2
$$f^{-1}(f(A)) \subseteq A$$
 ?

③
$$\forall x \in f^{-1}(f(A)), \ \textit{M}f(x) \in f(A);$$

① 设
$$f(x) = f(x')$$
, 证明 $x = x'$;

②
$$\diamondsuit A = \{x\}, \ Mf^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\};$$

Example

$$f: X \longrightarrow Y$$
, $f \not\in A$, iff, $\forall B \subseteq Y f(f^{-1}(B)) = B$.



 $f: X \longrightarrow Y$, $f \not\in A$, iff, $\forall B \subseteq Y f(f^{-1}(B)) = B$.

 \Longrightarrow

- **2** $B \subseteq f(f^{-1}(B))$?
- ① : f是满射, $\exists x \in X \ f(x) = y$;
- **③** ∴ $x ∈ f^{-1}(B)$;
- **6** $\therefore f(x) \in f(f^{-1}(B));$
- $\mathbf{O} \text{ Re} \mathbf{y} \in \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B})).$

 $\longleftarrow t(X) = Y ?$

 $f: X \longrightarrow Y$, $f \not\in A$, iff, $\forall B \subseteq Y f(f^{-1}(B)) = B$.

 \Longrightarrow

- **2** $B \subseteq f(f^{-1}(B))$?
- ① : f 是满射, $\exists x \in X \ f(x) = y$;
- **⑤** ∴ $x ∈ f^{-1}(B)$;
- \bullet : $f(x) \in f(f^{-1}(B));$

 $f: X \longrightarrow Y$, f是满射, iff, $\forall B \subseteq Y f(f^{-1}(B)) = B$.

- $\mathbf{a} \quad B \subseteq f(f^{-1}(B))$?
- ④ ∵ f 是满射,∃x ∈ X f(x) = y;
- **5** $\therefore x \in f^{-1}(B);$
- $(a) ... t(x) \in t(t^{-1}(B));$
- **○** $py \in f(f^{-1}(B)).$

$$f: X \longrightarrow Y$$
, $f \not\in A$, iff, $\forall B \subseteq Y f(f^{-1}(B)) = B$.

- $B \subseteq f(f^{-1}(B))$?
- $\exists \forall y \in B$;
- \bullet : f 是满射, $\exists x \in X \ f(x) = y$;
- (B);
- **② P** $y ∈ f(f^{-1}(B))$.

$$f: X \longrightarrow Y$$
, $f \not\in A$, iff, $\forall B \subseteq Y f(f^{-1}(B)) = B$.

- **2** $B \subseteq f(f^{-1}(B))$?
- 3 : f是满射, $\exists x \in X f(x) = y$;
- **6** $\therefore f(x) \in f(f^{-1}(B));$
- **○** $py \in t(t^{-1}(B)).$

$$f: X \longrightarrow Y$$
, $f \not\in A$, iff, $\forall B \subseteq Y f(f^{-1}(B)) = B$.

- **2** $B \subseteq f(f^{-1}(B))$?
- 3 : f是满射, $3x \in X f(x) = y$;
- **⑤** ∴ $x \in f^{-1}(B)$;
- ② $Py ∈ f(f^{-1}(B)).$

$$f: X \longrightarrow Y$$
, $f \not\in A$, iff, $\forall B \subseteq Y f(f^{-1}(B)) = B$.

 \Longrightarrow

- $\triangle B \subseteq f(f^{-1}(B))$?
- ④ ∵ f是满射, $\exists x \in X \ f(x) = y$;
- **⑤** ∴ $x ∈ f^{-1}(B)$;
- **③** ∴ $f(x) \in f(f^{-1}(B))$;
- **②** $\text{Pr} y \in t(t^{-1}(B)).$

= f(X) = Y ?

$$f: X \longrightarrow Y$$
, $f \not\in A$, iff, $\forall B \subseteq Y f(f^{-1}(B)) = B$.

 \Longrightarrow

- $\mathbf{a} \quad B \subseteq f(f^{-1}(B))$?
- ④ ∵ f是满射, $\exists x \in X \ f(x) = y$;
- **⑤** ∴ $x \in f^{-1}(B)$;
- **③** ∴ $f(x) \in f(f^{-1}(B))$;
- **② P** $y ∈ f(f^{-1}(B))$.

∢ロト ∢御 医 ∢ 恵 医 ◆ 夏 医

$$f: X \longrightarrow Y$$
, $f \not\in A$, iff, $\forall B \subseteq Y f(f^{-1}(B)) = B$.

 \Longrightarrow

2
$$B \subseteq f(f^{-1}(B))$$
 ?

$$\bullet$$
 :: f 是满射, $\exists x \in X \ f(x) = y$;

⑤ ∴
$$x ∈ f^{-1}(B)$$
;

③ ∴
$$f(x) \in f(f^{-1}(B))$$
;

② P
$$y ∈ f(f^{-1}(B))$$
.

$$\iff f(X) = Y$$
?

①
$$\diamond B = Y$$
, $MY = f(f^{-1}(Y))$;

②
$$\mathfrak{Z}f^{-1}(Y) \subseteq X;$$

3 :
$$f(f^{-1}(Y)) \subseteq f(X)$$
;

①
$$\therefore Y = f(f^{-1}(Y)) \subseteq f(X) \subseteq Y, \therefore Y = f(X).$$

◆ロ > ◆昼 > ◆ 差 > ・ 差 ・ 夕 < や </p>

Example

$$f: X \longrightarrow Y$$
, $f \not\in A$, iff, $\forall B \subseteq Y f(f^{-1}(B)) = B$.

 \Longrightarrow

- **2** $B \subseteq f(f^{-1}(B))$?
- \bullet ∵ f是满射, $\exists x \in X f(x) = y$;
- **⑤** ∴ $x ∈ f^{-1}(B)$;
- **③** ∴ $f(x) \in f(f^{-1}(B))$;
- **② P** $y ∈ f(f^{-1}(B))$.

$$\iff f(X) = Y$$
?

- **1** $\diamondsuit B = Y$, $⋈ Y = f(f^{-1}(Y))$;

- **3** $\therefore Y = f(f^{-1}(Y)) \subseteq f(X) \subseteq Y, \therefore Y = f(X).$

Example

$$f: X \longrightarrow Y$$
, $f \not\in A$, iff, $\forall B \subseteq Y f(f^{-1}(B)) = B$.

 \Longrightarrow

②
$$B \subseteq f(f^{-1}(B))$$
 ?

$$3 : f$$
是满射, $3x \in X f(x) = y$;

⑤ ∴
$$x ∈ f^{-1}(B)$$
;

③ ∴
$$f(x) \in f(f^{-1}(B))$$
;

② P
$$y ∈ f(f^{-1}(B))$$
.

$$\iff f(X) = Y$$
?

1
$$\diamondsuit B = Y$$
, $\emptyset Y = f(f^{-1}(Y))$;

$$2 \mathfrak{K} f^{-1}(Y) \subseteq X;$$

$$\bullet : Y = f(f^{-1}(Y)) \subseteq f(X) \subseteq Y, : Y = f(X).$$

Example

$$f: X \longrightarrow Y$$
, $f \not\in A$, iff, $\forall B \subseteq Y f(f^{-1}(B)) = B$.

 \Longrightarrow

- $B \subseteq f(f^{-1}(B)) ?$
- \bullet : f 是满射, $\exists x \in X \ f(x) = y$;
- **⑤** ∴ $x ∈ f^{-1}(B)$;
- **③** ∴ $f(x) \in f(f^{-1}(B))$;
- **② P**y ∈ $f(f^{-1}(B))$.

$$\iff f(X) = Y$$
?

- **1** $\diamondsuit B = Y$, $\emptyset Y = f(f^{-1}(Y))$;
- $2 \mathfrak{K} f^{-1}(Y) \subseteq X;$
- $(4) : Y = f(f^{-1}(Y)) \subseteq f(X) \subseteq Y, : Y = f(X).$

Example

$$f: X \longrightarrow Y$$
, $f \not\in A$, iff, $\forall B \subseteq Y f(f^{-1}(B)) = B$.

 \Longrightarrow

- $\mathbf{a} \quad B \subseteq f(f^{-1}(B)) ?$
- ④ ∵ f是满射, $\exists x \in X f(x) = y$;
- **⑤** ∴ $x ∈ f^{-1}(B)$;
- **③** ∴ $f(x) \in f(f^{-1}(B))$;
- **② P** $y ∈ f(f^{-1}(B))$.

$$\iff f(X) = Y$$
?

- **1** $\diamondsuit B = Y$, $\emptyset Y = f(f^{-1}(Y))$;
- 2 $\mathfrak{Z}f^{-1}(Y)\subseteq X$;
- **3** ∴ $f(f^{-1}(Y)) \subseteq f(X)$;

- 1 函数的基本概念
 - 函数的定义
 - 函数的象和逆象
 - 函数的合成
 - 单射,满射和双射
- 2 函数的分解
 - Examples
 - 函数的标准分解
- 3 函数的递归定义
 - 自然数集合上的递归函数
 - Euclid算法与尾递归
 - List集合上的递归定义函数
 - Ackerman函数
 - 高阶函数

Example

 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 递归定义如下,求f 的解析式。

- **1** f(0) = 3
- ② f(n+1) = 2f(n) + 3

Example

 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 递归定义如下, 求 f 的解析式。

- **1** f(0) = 3;
- 2 f(n+1) = 2f(n) + 3.

Example

 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 递归定义如下, 求f 的解析式。

- **1** f(0) = 3;
- 2 f(n+1) = 2f(n) + 3.

Example

 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 递归定义如下, 求f 的解析式。

- **1** f(0) = 3;
- f(n+1) = 2f(n) + 3.

Solution.

$$f(n) = 2 * f(n-1) + 3$$

$$= 2 * (2f(n-2) + 3) + 3$$

$$= 2^{2} * f(n-2) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{2} * (2f(n-3) + 3) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{3} * f(n-3) + 2^{2} * 3 + 2 * 3 + 3$$

$$\dots \dots$$

$$= 2^{n} * f(0) + 2^{n-1} * 3 + \dots + 2^{2} * 3 + 2$$

- 181/245 -

Example

 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 递归定义如下, 求f 的解析式。

- **1** f(0) = 3;
- 2 f(n+1) = 2f(n) + 3.

$$f(n) = 2 * f(n-1) + 3$$

$$= 2 * (2f(n-2) + 3) + 3$$

$$= 2^{2} * f(n-2) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{2} * (2f(n-3) + 3) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{3} * f(n-3) + 2^{2} * 3 + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{n} * f(0) + 2^{n-1} * 3 + \dots + 2^{2} * 3 + 3$$

- $= 2^{n} * f(0) + 2^{n-1} * 3 + \dots + 2^{2} * 3 + 2 * 3 + 3$ $= 2 * (2^{n} + 2^{n-1}) + 2^{2} + 2 + 1$
- $= 3 * (2^{n+1} 1)$

Example

 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 递归定义如下, 求f 的解析式。

- f(0) = 3:
- 2 f(n+1) = 2f(n) + 3.

Solution.

$$f(n) = 2 * f(n-1) + 3$$

$$= 2 * (2f(n-2) + 3) + 3$$

$$= 2^{2} * f(n-2) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{2} * (2f(n-3) + 3) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{3} * f(n-3) + 2^{2} * 3 + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{n} * f(0) + 2^{n-1} * 3 + \dots + 2^{2} * 3 + 2$$

] 200

Example

 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 递归定义如下, 求f 的解析式。

- **1** f(0) = 3;
- 2 f(n+1) = 2f(n) + 3.

$$f(n) = 2 * f(n-1) + 3$$

$$= 2 * (2f(n-2) + 3) + 3$$

$$= 2^{2} * f(n-2) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{2} * (2f(n-3) + 3) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{3} * f(n-3) + 2^{2} * 3 + 2 * 3 + 3$$

-
- $= 2^{n} * f(0) + 2^{n-1} * 3 + \dots + 2^{2} * 3 + 2 * 3 + 3$
- $= 3 * (2ⁿ + 2ⁿ⁻¹ + \dots + 2² + 2 + 1)$
- $= 3 * (2^{n+1} 1)$

Example

 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 递归定义如下、求f 的解析式。

- **1** f(0) = 3;
- 2 f(n+1) = 2f(n) + 3.

$$f(n) = 2 * f(n-1) + 3$$

$$= 2 * (2f(n-2) + 3) + 3$$

$$= 2^{2} * f(n-2) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{2} * (2f(n-3) + 3) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{3} * f(n-3) + 2^{2} * 3 + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{n} * f(0) + 2^{n-1} * 3 + \dots + 2^{2} * 3 + 2 * 3 + 3$$

$$= 3 * (2^{n} + 2^{n-1} + \dots + 2^{2} + 2 + 1)$$

Example

 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 递归定义如下、求f 的解析式。

- f(0) = 3:
- f(n+1) = 2f(n) + 3.

Example

 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 递归定义如下、求f 的解析式。

- f(0) = 3;
- f(n+1) = 2f(n) + 3.

$$f(n) = 2 * f(n-1) + 3$$

$$= 2 * (2f(n-2) + 3) + 3$$

$$= 2^{2} * f(n-2) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{2} * (2f(n-3) + 3) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{3} * f(n-3) + 2^{2} * 3 + 2 * 3 + 3$$

$$\dots \dots$$

$$= 2^{n} * f(0) + 2^{n-1} * 3 + \dots + 2^{2} * 3 + 2 * 3 + 3$$

$$= 3 * (2^{n} + 2^{n-1} + \dots + 2^{2} + 2 + 1)$$

$$= 3 * (2^{n+1} - 1)$$

Example

 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 递归定义如下、求f 的解析式。

- f(0) = 3:
- f(n+1) = 2f(n) + 3.

$$f(n) = 2 * f(n-1) + 3$$

$$= 2 * (2f(n-2) + 3) + 3$$

$$= 2^{2} * f(n-2) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{2} * (2f(n-3) + 3) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{3} * f(n-3) + 2^{2} * 3 + 2 * 3 + 3$$
......
$$= 2^{n} * f(0) + 2^{n-1} * 3 + \dots + 2^{2} * 3 + 2 * 3 + 3$$

$$= 3 * (2^{n} + 2^{n-1} + \dots + 2^{2} + 2 + 1)$$

$$= 3 * (2^{n+1} - 1)$$

Example

 $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 递归定义如下、求f 的解析式。

- f(0) = 3:
- f(n+1) = 2f(n) + 3.

$$f(n) = 2 * f(n-1) + 3$$

$$= 2 * (2f(n-2) + 3) + 3$$

$$= 2^{2} * f(n-2) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{2} * (2f(n-3) + 3) + 2 * 3 + 3$$

$$= 2^{3} * f(n-3) + 2^{2} * 3 + 2 * 3 + 3$$

$$\dots \dots$$

$$= 2^{n} * f(0) + 2^{n-1} * 3 + \dots + 2^{2} * 3 + 2 * 3 + 3$$

$$= 3 * (2^{n} + 2^{n-1} + \dots + 2^{2} + 2 + 1)$$

$$= 3 * (2^{n+1} - 1)$$

Recursion

```
int f(int n)
{
  if (n < 0) error();
  if (n == 0) return 3;
  return 2 * f(n-1) + 3;</pre>
```

For-loops

```
int f(int n)
{
  int result = 3, i;
  if (n < 0) error();
  for (i = 1; i <= n; i++)
    result = 2 * result + 3;
  return result;
}</pre>
```

Example

Fibonacci序列递归定义如下,求其解析式。

- **1** $f(0) = 0, f_1 = 1;$
- ② $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \ (n \ge 2).$

Chfwano

Example

Fibonacci序列递归定义如下,求其解析式。

- 2 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \ (n \ge 2).$

Example

Fibonacci序列递归定义如下,求其解析式。

- 2 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \ge 2).$

Example

Fibonacci序列递归定义如下,求其解析式。

- **1** $f(0) = 0, f_1 = 1;$
- 2 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \ge 2).$

- ① 求方程 $r^2 = r + 1$ 的两个根 r_1 和 r_2 ;
- ③ 则有: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$;
- 利用条件①可求出系数α1和α2;

Example

Fibonacci序列递归定义如下,求其解析式。

- **1** $f(0) = 0, f_1 = 1;$
- 2 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \ge 2).$

- ① 求方程 $r^2 = r + 1$ 的两个根 r_1 和 r_2 ;
- ② $\partial_{n}f_{n}=\alpha_{1}r_{1}^{n}+\alpha_{2}r_{2}^{n};$
- ③ 则有: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$;
- 利用条件(①可求出系数α1和α2;

Example

Fibonacci序列递归定义如下,求其解析式。

- **1** f(0) = 0, $f_1 = 1$:
- 2 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \ge 2).$

- ① 求方程 $r^2 = r + 1$ 的两个根 r_1 和 r_2 ;
- 3 则有: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$;
- ④ 利用条件①可求出系数α1和α2

Example

Fibonacci 序列递归定义如下, 求其解析式。

- **1** f(0) = 0, $f_1 = 1$:
- 2 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \ge 2).$

- ① 求方程 $r^2 = r + 1$ 的两个根 r_1 和 r_2 ;
- ② 读 $f_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$;
- ③ 则有: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$;
- 利用条件①可求出系数α1和α2
- $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$

Example

Fibonacci序列递归定义如下,求其解析式。

- **1** $f(0) = 0, f_1 = 1;$
- 2 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \ge 2).$

- ① 求方程 $r^2 = r + 1$ 的两个根 r_1 和 r_2 ;
- ② $\mathfrak{F}_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$;
- 3 则有: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$;
- 利用条件①可求出系数α1和α2;

Example

Fibonacci序列递归定义如下、求其解析式。

- $f(0) = 0, f_1 = 1;$
- 2 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \ge 2)$.

- ① 求方程 $r^2 = r + 1$ 的两个根 r_1 和 r_2 ;
- ② 读 $f_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$;
- 3 则有: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$;
- 利用条件①可求出系数α1和α2;



函数的基本概念

```
Recursion
  int f(int n)
{
   if (n == 0) return 0;
   if (n == 1) return 1;
   return f(n-2) + f(n-1);
}
```

```
For-loops
int f(int n)
 int x = 0; /* f(n-2) */
 int y = 1; /* f(n-1) */
 if (n == 0) return 0;
 if (n < 0) error();
 for (i = 1; i \le n-1; i++) {
   int z = x + y;
   x = y;
    y = z;
 return y;
```

Euclid算法

Example (Greatest Common Divisor)

 $gcd: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- $2 \gcd(m, n) = \gcd((n \bmod m), m).$

Proof.

Example (Greatest Common Divisor)

 $gcd: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- **1** gcd(0, n) = n;

Example (Greatest Common Divisor)

 $gcd: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- **1** gcd(0, n) = n;
- 2 $gcd(m, n) = gcd((n \mod m), m)$.

Example (Greatest Common Divisor)

 $gcd: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- **1** gcd(0, n) = n;
- $2 \gcd(m, n) = \gcd((n \bmod m), m).$

- ① if $(k \mid m) \land (k \mid n)$,
- 2 then $m = kp \wedge n = kq$;
- ③ 设 $n \mod m = t$, 则n = rm + t;
- ③ 设 $(k \mid t) \land (k \mid m)$; then $\exists p, q \ t = kp \land m = kp$;
- **⑤** ∴ n = k(rq + p), $pt \mid n$; ∴ $gcd(m, n) \ge gcd(n \mod n, m)$.

Example (Greatest Common Divisor)

 $gcd: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- **1** gcd(0, n) = n;
- $2 \gcd(m, n) = \gcd((n \bmod m), m).$

- 2 then $m = kp \wedge n = kq$;
- ③ 设 $n \mod m = t$, 则n = rm + t;
- ① $\therefore t = k(q rp); \ \mathbb{R}^p k \mid t; \ \therefore \gcd(m, n) \leqslant \gcd(n \bmod n, m);$
- ③ $\aleph(k \mid t) \land (k \mid m)$; then $\exists p, q \ t = kp \land m = kp$;
- **⑤** ∴ n = k(rq + p), $pt \mid n$; ∴ $gcd(m, n) \ge gcd(n \mod n, m)$.

Example (Greatest Common Divisor)

 $gcd: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- **1** gcd(0, n) = n;
- $2 \gcd(m, n) = \gcd((n \bmod m), m).$

- 2 then $m = kp \wedge n = kq$;
- ③ 设 $n \mod m = t$, 则n = rm + t
- ④ ∴ t = k(q rp); $\mathfrak{P}_k \mid t$; ∴ $\gcd(m, n) \leq \gcd(n \mod n, m)$;
- ③ 设 $(k \mid t) \land (k \mid m)$; then $\exists p, q \ t = kp \land m = kp$;
- **⑤** ∴ n = k(rq + p), $pt \mid n$; ∴ $gcd(m, n) \ge gcd(n \mod n, m)$.

Example (Greatest Common Divisor)

 $gcd: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- **1** gcd(0, n) = n;
- $2 \gcd(m, n) = \gcd((n \bmod m), m).$

- 2 then $m = kp \wedge n = kq$;
- ③ 设 $n \mod m = t$, 则n = rm + t;
- ① $\therefore t = k(q rp); \ \mathbb{P}[k \mid t; \ \therefore \gcd(m, n) \leq \gcd(n \bmod n, m);$
- ③ 设 $(k \mid t) \land (k \mid m)$; then $\exists p, q \ t = kp \land m = kp$;

Example (Greatest Common Divisor)

 $gcd: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- **1** gcd(0, n) = n;
- $2 \gcd(m, n) = \gcd((n \bmod m), m).$

- lacksquare if $(k \mid m) \land (k \mid n)$,
- 2 then $m = kp \wedge n = kq$;
- ③ 设 $n \mod m = t$, 则n = rm + t;
- \bullet $\therefore t = k(q rp); \ \mathbb{R}^p k \mid t; \ \therefore \gcd(m, n) \leqslant \gcd(n \bmod n, m);$
- ③ 设 $(k \mid t) \land (k \mid m)$; then $\exists p, q \ t = kp \land m = kp$;
- \bullet $\therefore n = k(rq + p), \ \mathbb{P}_t \mid n; \ \therefore \gcd(m, n) \geqslant \gcd(n \mod n, m).$



Example (Greatest Common Divisor)

 $gcd: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- **1** gcd(0, n) = n;

- 2 then $m = kp \wedge n = kq$;
- ③ 设 $n \mod m = t$, 则n = rm + t;
- \bullet \therefore t = k(q rp); $\mathbb{P}[k \mid t; \therefore \gcd(m, n) \leq \gcd(n \mod n, m)]$;
- **⑤** 设 $(k \mid t) \land (k \mid m)$; then $\exists p, q \ t = kp \land m = kp$;



Example (Greatest Common Divisor)

 $gcd: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- **1** gcd(0, n) = n;
- $2 \gcd(m, n) = \gcd((n \bmod m), m).$

- lacksquare if $(k \mid m) \land (k \mid n)$,
- 2 then $m = kp \wedge n = kq$;
- ③ 设 $n \mod m = t$, 则n = rm + t;
- **⑤** $\mathfrak{F}(k \mid t) \wedge (k \mid m)$; then $\exists p, q \ t = kp \wedge m = kp$;



```
Tail Recursion
 int gcd(int m, int n)
  if (m == 0) return n;
  return gcd( n % m, m);
Ex:
  gcd(18, 12)
    L,gcd(12, 18)
        \downarrowgcd(6, 12)
           \rfloorgcd(0, 6)
               Ь6
```

```
While-loops
int gcd(int m, int n)
  int tmp;
  while (m != 0) {
  tmp = m;
  m = n \% m;
  n = tmp;
  return n;
```

Example (length)

length: Σ^* → \mathbb{N} 可递归定义如下:

- **1** length(ε) = 0;
- 2 $\operatorname{length}(a \cdot s) = 1 + \operatorname{length}(s)$.

Example (length尾递归定义)

 $f: \mathbb{N} \times \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

Example (length)

length: Σ^* → \mathbb{N} 可递归定义如下:

- **1** length(ε) = 0;
- 2 length $(a \cdot s) = 1 + \text{length}(s)$.

Example (length尾递归定义)

 $f: \mathbb{N} \times \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

Example (length)

length: Σ^* → \mathbb{N} 可递归定义如下:

- length(ε) = 0;
- 2 $\operatorname{length}(a \cdot s) = 1 + \operatorname{length}(s)$.

Example (length尾递归定义)

 $f: \mathbb{N} \times \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

Example (length)

length: Σ^* → \mathbb{N} 可递归定义如下:

- **1** length(ε) = 0;
- 2 $\operatorname{length}(a \cdot s) = 1 + \operatorname{length}(s)$.

Example (length尾递归定义)

 $f: \mathbb{N} \times \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- 2 $f(m, a \cdot s) = f(m + 1, s)$.

Example (length)

length: Σ^* → \mathbb{N} 可递归定义如下:

- length(ε) = 0;
- 2 $\operatorname{length}(a \cdot s) = 1 + \operatorname{length}(s)$.

Example (length尾递归定义)

 $f: \mathbb{N} \times \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- 2 $f(m, a \cdot s) = f(m+1, s)$.

Example (length)

length: Σ^* → \mathbb{N} 可递归定义如下:

- length(ε) = 0;
- 2 $\operatorname{length}(a \cdot s) = 1 + \operatorname{length}(s)$.

Example (length尾递归定义)

 $f: \mathbb{N} \times \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- 2 $f(m, a \cdot s) = f(m + 1, s)$.

```
Tail Recursion
 int f(int m, \Sigma List s)
  if (s == \varepsilon) return m;
  return f(m + 1, tl(s));
    /* tl is destructor of \Sigma List */
        tl(a\cdot s) = s */
int length(\Sigma List s)
  return f(0, s);
```

```
While-loops
 int length(\Sigma List s)
  int m = 0;
  while (s != \varepsilon) {
  m = m + 1:
  s = tl(s);
  return m;
int length(char * s)
  int tmp = 0;
  while(*s++) tmp++;
  return tmp;
```

4日 > 4周 > 4 目 > 4 目 >

Example (sum)

 $sum: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- \bullet sum $(\varepsilon) = 0$:
- 2 $\operatorname{sum}(a \cdot s) = a + \operatorname{sum}(s)$.

Example (sum尾递归定义)

 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

So, sum(s) = f(0, s).

Example (sum)

 $sum: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- $2 \operatorname{sum}(a \cdot s) = a + \operatorname{sum}(s).$

Example (sum尾递归定义)

 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

So, sum(s) = f(0, s).

- 220/245 -

Example (sum)

 $sum: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

Example (sum尾递归定义)

 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

So, sum(s) = f(0, s).

Example (sum)

 $sum: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

Example (sum尾递归定义)

 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- 2 $f(m, a \cdot s) = f(m + a, s)$.

So,
$$sum(s) = f(0, s)$$
.

Example (sum)

 $sum: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

Example (sum尾递归定义)

 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

- 2 $f(m, a \cdot s) = f(m + a, s)$

So, sum(s) = f(0, s).

- 223/245 -

Example (sum)

 $sum: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

Example (sum尾递归定义)

 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ 可递归定义如下:

So, sum(s) = f(0, s).

```
Tail Recursion
 int f(int m, int List s)
  if (s == \varepsilon) return m;
  return f(m + hd(s), tl(s));
    /* tl, hd are destructors
        of int List:
       tl(a\cdot s) = s
       hd(a\cdot s) = a */
int sum (int List s)
  return f(0, s);
```

```
While-loops
int sum(int List s)
{
  int m = 0;
  while (s != ɛ) {
    m = m + hd(s);
    s = tl(s);
    }
  return m;
}
```

Example

Ackerman函数递归定义如下:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{if } m=0\\ A(m-1,1) & \text{if } m>0 \land n=0\\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{if } m>0 \land n>0 \end{cases}$$

Description

(c) hfwang

A P A A LIFE A REPORT OF THE

Example

Ackerman函数递归定义如下:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{if } m=0\\ A(m-1,1) & \text{if } m>0 \land n=0\\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{if } m>0 \land n>0 \end{cases}$$

- ① 处处有定义
- ② m足够小时,增长缓慢,m≥4时呈指数增长(A(4,2) = 2*10¹⁹⁷²⁸);
- 非原始递归函数(primitive recursive function)
- 不能够用while-loops表达;
- 由于其深度递归性(deep recursion), 该函数用于测试编译器对递归 的优化性能。

Example

Ackerman函数递归定义如下:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{if } m=0\\ A(m-1,1) & \text{if } m>0 \land n=0\\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{if } m>0 \land n>0 \end{cases}$$

- ① 处处有定义;
- ② m \mathcal{L} \mathcal{G} \mathcal{G}
- ③ 非原始递归函数(primitive recursive function)
- 不能够用while-loops表达;
- 由于其深度递归性(deep recursion),该函数用于测试编译器对递归的优化性能。

Example

Ackerman函数递归定义如下:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{if } m=0\\ A(m-1,1) & \text{if } m>0 \land n=0\\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{if } m>0 \land n>0 \end{cases}$$

- ① 处处有定义;
- ② m足够小时,增长缓慢,m≥4时呈指数增长(A(4,2) = 2*10¹⁹⁷²⁸);
- ③ 非原始递归函数(primitive recursive function)
- ④ 不能够用while-loops表达;
- 由于其深度递归性(deep recursion), 该函数用于测试编译器对递归的优化性能。

Example

Ackerman函数递归定义如下:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{if } m=0\\ A(m-1,1) & \text{if } m>0 \land n=0\\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{if } m>0 \land n>0 \end{cases}$$

- ① 处处有定义;
- ② m足够小时,增长缓慢,m≥4时呈指数增长(A(4,2) = 2*10¹⁹⁷²⁸);
- ③ 非原始递归函数(primitive recursive function);
- ④ 不能够用while-loops表达;
- ⑤ 由于其深度递归性(deep recursion), 该函数用于测试编译器对递归的优化性能。

Example

Ackerman函数递归定义如下:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{if } m=0\\ A(m-1,1) & \text{if } m>0 \land n=0\\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{if } m>0 \land n>0 \end{cases}$$

- ① 处处有定义;
- ② m足够小时,增长缓慢,m≥4时呈指数增长(A(4,2) = 2*10¹⁹⁷²⁸);
- ③ 非原始递归函数(primitive recursive function);
- ◆ 不能够用while-loops表达;
- ⑤ 由于其深度递归性(deep recursion), 该函数用于测试编译器对递归的优化性能。

Example

Ackerman函数递归定义如下:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{if } m = 0\\ A(m-1,1) & \text{if } m > 0 \land n = 0\\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{if } m > 0 \land n > 0 \end{cases}$$

- ① 处处有定义;
- ② m足够小时,增长缓慢,m≥4时呈指数增长(A(4,2) = 2*10¹⁹⁷²⁸);
- ③ 非原始递归函数(primitive recursive function);
- 不能够用while-loops表达;
- ⑤ 由于其深度递归性(deep recursion), 该函数用于测试编译器对递归的优化性能。

```
A(4, 3) = A(3, A(4, 2))
        = A(3, A(3, A(4, 1)))
        = A(3, A(3, A(3, A(4, 0))))
        = A(3, A(3, A(3, A(3, 1))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(3, 0)))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(2, 1)))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(1, A(2, 0))))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(1, A(1, 1))))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(1, A(0, A(1, 0))))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(1, A(0, A(0, 1))))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(1, A(0, 2))))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(1, 3)))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(0, A(1, 2))))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(0, A(0, A(1, 1)))))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(0, A(0, A(0, A(1, 0))))))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(0, A(0, A(0, A(0, 1))))))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(0, A(0, A(0, 2)))))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(0, A(0, 3))))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, A(0, 4)))))
        = A(3, A(3, A(3, A(2, 5))))
        = ...
        = A(3, A(3, A(3, 13)))
        = ...
        = A(3, A(3, 65533)) /* A(3, 65533) = 2^65533-3 */
        = ...
```

Recursion int ack(int m, int n) { if (m == 0) return n+1; if (n == 0) return ack(m-1, 1); return ack(m-1, ack(m, n-1)) } /* No linear recursion */

```
Partially while-loops
int ack(int m, int n)
{
  while (m != 0) {
    if (n == 0)
        n = 1;
    else
        n = ack(m, n-1);
    m = m - 1;
```

return n+1;

Example (高阶函数)

- 设 $C(\mathbb{R})$ 是实数上连续函数的集合: $g:C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$, $f \longmapsto (\langle x,y \rangle \longmapsto \int_x^y f(t)dt)$, 则 $(g(\sin))(0,1)$ 是 $\sin ax \in [0,1]$ 区间上的积分;
- 设fold_left: $X^{X \times \Sigma} \longrightarrow X^{X \times \Sigma^*}$, $f \longmapsto (\langle x, a_1 a_2 \dots a_n \rangle \longmapsto f(\cdots (f(x, a_1), a_2) \dots))$; 设 $\Sigma = \mathbb{Z}$; $X = \mathbb{Z}$, f(x, y) = x + y, 则: $sum(a_1 a_2 \cdots a_n) = (fold_left(f))(0, a_1 a_2 \cdots a_n)$ 设f(x, y) = 1 + x, 则:

4□ > 4ⓓ > 4≧ > 4≧ > ½ 90

Example (高阶函数)

- 设 $C(\mathbb{R})$ 是实数上连续函数的集合: $g:C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$, $f \longmapsto (\langle x, y \rangle \longmapsto \int_x^y f(t)dt)$, 则 $(g(\sin))(0,1)$ 是 $\sin at [0,1]$ 区间上的积分;
- 设fold_left: $X^{X \times \Sigma} \longrightarrow X^{X \times \Sigma^*}$, $f \longmapsto (\langle x, a_1 a_2 \dots a_n \rangle \longmapsto f(\cdots (f(x, a_1), a_2) \dots))$; 设 $\Sigma = \mathbb{Z}; X = \mathbb{Z}, f(x, y) = x + y$, 则: $sum(a_1 a_2 \cdots a_n) = (fold_left(f))(0, a_1 a_2 \cdots a_n)$ 设f(x, y) = 1 + x, 则:

4□ > 4ⓓ > 4틸 > 4틸 > 틸 9000

Example (高阶函数)

- 设 $C(\mathbb{R})$ 是实数上连续函数的集合: $g:C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$, $f \longmapsto (\langle x, y \rangle \longmapsto \int_x^y f(t)dt)$, 则 $(g(\sin))(0,1)$ 是 $\sin at [0,1]$ 区间上的积分;

函数的递归定义

- 函数能够递归定义的首要条是定义域必须有一个递归结构;
- 一般是按照定义域集合的归纳定义,对该集合中的每个元素 进行析构;
- recursions ≠ loops;
- tail recursion can be transform to while-loop;
- recursion: simple & clear, but expensive in runtime
- loop: complex & unclear, but more efficient

- 238/245 -

- 函数能够递归定义的首要条是定义域必须有一个递归结构;
- 一般是按照定义域集合的归纳定义,对该集合中的每个元素进行析构;
- recursions ≠ loops;
- tail recursion can be transform to while-loop;
- recursion: simple & clear, but expensive in runtime
- loop: complex & unclear, but more efficient

- 函数能够递归定义的首要条是定义域必须有一个递归结构;
- 一般是按照定义域集合的归纳定义,对该集合中的每个元素 进行析构;
- recursions ≠ loops;
- tail recursion can be transform to while-loop;
- recursion: simple & clear, but expensive in runtime
- loop: complex & unclear, but more efficient



- 函数能够递归定义的首要条是定义域必须有一个递归结构;
- 一般是按照定义域集合的归纳定义,对该集合中的每个元素 进行析构;
- recursions ≠ loops;
- tail recursion can be transform to while-loop;
- recursion: simple & clear, but expensive in runtime,
- loop: complex & unclear, but more efficient



- 函数能够递归定义的首要条是定义域必须有一个递归结构;
- 一般是按照定义域集合的归纳定义,对该集合中的每个元素 进行析构;
- recursions ≠ loops;
- tail recursion can be transform to while-loop;
- recursion: simple & clear, but expensive in runtime
- loop: complex & unclear, but more efficient



- 函数能够递归定义的首要条是定义域必须有一个递归结构;
- 一般是按照定义域集合的归纳定义,对该集合中的每个元素 进行析构;
- recursions ≠ loops;
- tail recursion can be transform to while-loop;
- recursion: simple & clear, but expensive in runtime;
- loop: complex & unclear, but more efficient



- 函数能够递归定义的首要条是定义域必须有一个递归结构;
- 一般是按照定义域集合的归纳定义,对该集合中的每个元素 进行析构;
- recursions ≠ loops;
- tail recursion can be transform to while-loop;
- recursion: simple & clear, but expensive in runtime;
- loop: complex & unclear, but more efficient.

本章小节

- 1 函数的基本概念
 - 函数的定义
 - 函数的象和逆象
 - 函数的合成
 - 单射,满射和双射
- ② 函数的分解
 - Examples
 - 函数的标准分解
- 3 函数的递归定义
 - 自然数集合上的递归函数
 - Euclid算法与尾递归
 - List集合上的递归定义函数
 - Ackerman函数
 - 高阶函数