# 命 题 逻 辑

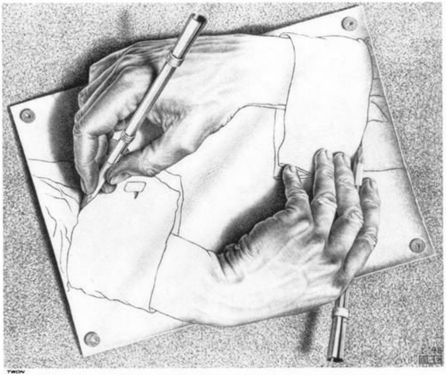
School of Computer
Wuhan University

2018

# 内容

# 内容

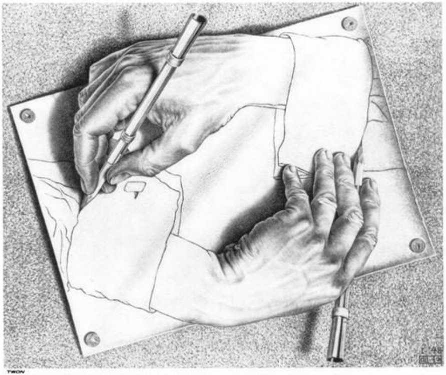
# Drawing hands



**True or False**

- 左手画右手，右手画左手;
- paradox

# Drawing hands



## True or False

- 左手画右手，右手画左手；
- **paradox**

# 逻辑

## logic

- 自然语言是对客观世界的描述，因此有“真”有“假”；
- 逻辑学是研究“真假”的普遍规律的学科；
- 形式逻辑是用符号化的方法研究逻辑，也称符号逻辑，是数理逻辑的基础；
- 数理逻辑的主要研究内容：公理集合论、证明论、模型论、递归论。

# 逻辑

## logic

- 自然语言是对客观世界的描述，因此有“真”有“假”；
- 逻辑学是研究“真假”的普遍规律的学科；
- 形式逻辑是用符号化的方法研究逻辑，也称符号逻辑，是数理逻辑的基础；
- 数理逻辑的主要研究内容：公理集合论、证明论、模型论、递归论。

# 逻辑

## logic

- 自然语言是对客观世界的描述，因此有“真”有“假”；
- 逻辑学是研究“真假”的普遍规律的学科；
- 形式逻辑是用符号化的方法研究逻辑，也称符号逻辑，是数理逻辑的基础；
- 数理逻辑的主要研究内容：公理集合论、证明论、模型论、递归论。

# 逻辑

**logic**

- 自然语言是对客观世界的描述，因此有“真”有“假”；
- 逻辑学是研究“真假”的普遍规律的学科；
- 形式逻辑是用符号化的方法研究逻辑，也称符号逻辑，是数理逻辑的基础；
- 数理逻辑的主要研究内容：公理集合论、证明论、模型论、递归论。

# 命题（Proposition）

## 推理和证明

- 数学中的重要问题是“推理”，即构造正确的论证(证明).
- 数理逻辑用符号化的方法的方法，来研究推理.
- 推理的基本要素即为命题.

## Definition命题

- 有惟一真假值的陈述句（Declarative Sentence）.

# 命题（Proposition）

## 推理和证明

- 数学中的重要问题是“推理”，即构造正确的论证(证明).
- 数理逻辑用符号化的方法的方法，来研究推理.
- 推理的基本要素即为命题.

## Definition命题

- 有惟一真假值的陈述句（Declarative Sentence）.

# 命题（Proposition）

## 推理和证明

- 数学中的重要问题是“推理”，即构造正确的论证(证明).
- 数理逻辑用符号化的方法的方法，来研究推理.
- 推理的基本要素即为命题.

## Definition命题

- 有惟一真假值的陈述句（Declarative Sentence）.

# 命题（Proposition）

## 推理和证明

- 数学中的重要问题是“推理”，即构造正确的论证(证明).
- 数理逻辑用符号化的方法的方法，来研究推理.
- 推理的基本要素即为命题.

## Definition命题

- 有惟一真假值的陈述句（Declarative Sentence）.

# Examples

## Example

- 糖是碳水化合物；－（简单命题）
- 武汉大学是最美丽的大学；－（简单命题）
- 如果不下雨，就开运动会；－（复合命题）

## Example—非命题

- 现在几点？－（疑问句）
- 请不要讲话！－（祈使句）
- $x+y\leqslant 4$

## Example—Paradox

- 我正在说谎。

# Examples

## Example

- 糖是碳水化合物；-（简单命题）
- 武汉大学是最美丽的大学；-（简单命题）
- 如果不下雨，就开运动会；-（复合命题）

## Example—非命题

- 现在几点？-（疑问句）
- 请不要讲话！-（祈使句）
- $x+y\leqslant 4$

## Example—Paradox

- 我正在说谎。

# Examples

## Example

- 糖是碳水化合物；-（简单命题）
- 武汉大学是最美丽的大学；-（简单命题）
- 如果不下雨，就开运动会；-（复合命题）

## Example—非命题

- 现在几点？-（疑问句）
- 请不要讲话！-（祈使句）
- $x+y \leqslant 4$

## Example—Paradox

- 我正在说谎。

# Examples

## Example

- 糖是碳水化合物; - (简单命题)
- 武汉大学是最美丽的大学; - (简单命题)
- 如果不下雨，就开运动会; - (复合命题)

## Example—非命题

- 现在几点? - (疑问句)
- 请不要讲话! - (祈使句)
- $x+y \leqslant 4$

## Example—Paradox

- 我正在说谎。

# Examples

## Example

- 糖是碳水化合物；-（简单命题）
- 武汉大学是最美丽的大学；-（简单命题）
- 如果不下雨，就开运动会；-（复合命题）

## Example—非命题

- 现在几点？-（疑问句）
- 请不要讲话！-（祈使句）
- $x + y \leqslant 4$

## Example—Paradox

- 我正在说谎。

# Examples

## Example

- 糖是碳水化合物；-（简单命题）
- 武汉大学是最美丽的大学；-（简单命题）
- 如果不下雨，就开运动会；-（复合命题）

## Example—非命题

- 现在几点？-（疑问句）
- 请不要讲话！-（祈使句）
- $x+y\leqslant 4$

## Example—Paradox

- 我正在说谎。

# Examples

## Example

- 糖是碳水化合物；-（简单命题）
- 武汉大学是最美丽的大学；-（简单命题）
- 如果不下雨，就开运动会；-（复合命题）

## Example—非命题

- 现在几点？-（疑问句）
- 请不要讲话！-（祈使句）
- $x+y\leqslant 4$

## Example—Paradox

- 我正在说谎。

# 符号化

## 命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值，称为命题的真值.
- 对于真命题，称命题真值为“真”；假命题，称其真值为“假”.
- 但符号化只关心命题的真假，不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子（atom），用英文字母表示：
  - 命题常元–真命题：$\mathbb{T}$，假命题：$\mathbb{F}$；
  - 命题变元–可以代表真命题或假命题，常用大写字母表示：$P, Q, R, \ldots$
- 原子通过联结词（connectives）按照一定的规则组成复合命题.

# 符号化

## 命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值，称为命题的真值.
- 对于真命题，称命题真值为“真”；假命题，称其真值为“假”.
- 但符号化只关心命题的真假，不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子（atom），用英文字母表示：
  - 命题常元–真命题：T，假命题：F；
  - 命题变元–可以代表真命题或假命题，常用大写字母表示：$P, Q, R, \ldots$
- 原子通过联结词（connectives）按照一定的规则组成复合命题.

# 符号化

## 命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值，称为命题的真值.
- 对于真命题，称命题真值为“真”；假命题，称其真值为“假”.
- 但符号化只关心命题的真假，不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子（atom），用英文字母表示：
  - 命题常元–真命题：T，假命题：F；
  - 命题变元–可以代表真命题或假命题，常用大写字母表示：$P, Q, R, \ldots$
- 原子通过联结词（connectives）按照一定的规则组成复合命题.

# 符号化

## 命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值，称为命题的**真值**.
- 对于真命题，称命题真值为“真”；假命题，称其真值为“假”．
- 但符号化只关心命题的真假，不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子（atom），用英文字母表示：
  - 命题常元-真命题：$\mathbb{T}$，假命题：$\mathbb{F}$；
  - 命题变元-可以代表真命题或假命题，常用大写字母表示：$P, Q, R, \ldots$
- 原子通过**联结词**（connectives）按照一定的规则组成**复合命题**.

# 符号化

## 命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值，称为命题的**真值**.
- 对于真命题，称命题真值为“真”；假命题，称其真值为“假”.
- 但符号化只关心命题的真假，不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为*原子*（atom），用英文字母表示：
    - 命题常元-真命题：$\mathbb{T}$，假命题：$\mathbb{F}$；
    - 命题变元-可以代表真命题或假命题，常用大写字母表示：$P, Q, R$，...
- 原子通过**联结词**（connectives）按照一定的规则组成**复合命题**.

# 符号化

## 命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值，称为命题的真值.
- 对于真命题，称命题真值为“真”；假命题，称其真值为“假”.
- 但符号化只关心命题的真假，不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子（atom），用英文字母表示：
  - 命题常元-真命题：$\mathbb{T}$，假命题：$\mathbb{F}$；
  - 命题变元-可以代表真命题或假命题，常用大写字母表示：$P, Q, R, \ldots$
- 原子通过联结词（connectives）按照一定的规则组成复合命题.

# 符号化

## 命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值，称为命题的真值.
- 对于真命题，称命题真值为“真”；假命题，称其真值为“假”.
- 但符号化只关心命题的真假，不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为原子（atom），用英文字母表示：
  - 命题常元-真命题：$\mathbb{T}$，假命题：$\mathbb{F}$；
  - 命题变元-可以代表真命题或假命题，常用大写字母表示：$P, Q, R, \ldots$
- 原子通过联结词（connectives）按照一定的规则组成复合命题.

# 逻辑联结词

**Table:** 常用的逻辑联结词

| 名称 | 英文 | 符号 | 解释 |
|---|---|---|---|
| 否定词 | negation | $\neg P$ | 非$P$, 否定$P$ |
| 析取词 | disjunction | $P \vee Q$ | $P$或者$Q$（兼或） |
| 合取词 | conjunction | $P \wedge Q$ | $P$并且$Q$ |
| 蕴涵词 | implication | $P \rightarrow Q$ | 如果$P$，则$Q$<br>$P$是$Q$的充分条件<br>$Q$是$P$的必要条件<br>$P$是前提，$Q$是结论<br>当$P$，则$Q$（仅当$Q$，有$P$） |
| 等值词 | bicondition | $P \leftrightarrow Q$ | $P$等值于$Q$<br>$P$是$Q$的充分必要条件<br>$P$当且仅当$Q$ |

# 逻辑联结词

## 联结词含义

- 原子命题的真值有“真”和“假”，由原子和联结词组成的复合命题也有“真”和“假”.
- 复合命题的真值由其中的原子和联结词的含义决定.

**Table**：逻辑联结词的含义

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \vee Q$ | $P \wedge Q$ | $P \to Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 逻辑联结词

## 联结词含义

- 原子命题的真值有“真”和“假”，由原子和联结词组成的复合命题也有“真”和“假”.
- 复合命题的真值由其中的原子和联结词的含义决定.

**Table**：逻辑联结词的含义

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \vee Q$ | $P \wedge Q$ | $P \rightarrow Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

**Example**

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

**Example**

- **If today is Thursday**, then $2+3=5$. (True)
- **If today is Thursday**, then $2+3=6$. (True, except for Thursday)

# 蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

## Example

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

## Example

- If today is Thursday, then $2+3=5$. (True)
- If today is Thursday, then $2+3=6$. (True, except for Thursday)

# 蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

**Example**

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

**Example**

- If today is Thursday, then $2+3=5$. (True)
- If today is Thursday, then $2+3=6$. (True, except for Thursday)

# 蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

**Example**

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

**Example**

- **If today is Thursday**, then $2+3=5$. (True)
- **If today is Thursday**, then $2+3=6$. (True, except for Thursday)

# 蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

**Example**

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

**Example**

- If today is Thursday, then $2+3=5$. (True)
- If today is Thursday, then $2+3=6$. (True, except for Thursday)

# 蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

**Example**

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

**Example**

- If today is Thursday, then $2+3=5$. (True)
- If today is Thursday, then $2+3=6$. (True, except for Thursday)

# 蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

**Example**

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

**Example**

- **If today is Thursday**, then $2+3=5$. (True)
- **If today is Thursday**, then $2+3=6$. (True, except for Thursday)

# Example—符号化

## 命题

你可以上网，仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生。

## 符号化命题中的原子

- $A$：你可以上网；
- $C$：你是计算机专业的学生；
- $F$：你是一年级的学生.

## 用联结词合成原命题

- 你不是一年级的学生：$\neg F$
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生：$C \vee \neg F$
- 原命题：$A \rightarrow (C \vee \neg F)$

# Example—符号化

## 命题

你可以上网，仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生。

## 符号化命题中的原子

- $A$：你可以上网；
- $C$：你是计算机专业的学生；
- $F$：你是一年级的学生.

## 用联结词合成原命题

- 你不是一年级的学生：$\neg F$
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生：$C \vee \neg F$
- 原命题：$A \rightarrow (C \vee \neg F)$

# Example—符号化

### 命题

你可以上网，仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生。

### 符号化命题中的原子

- $A$：你可以上网；
- $C$：你是计算机专业的学生；
- $F$：你是一年级的学生.

### 用联结词合成原命题

- 你不是一年级的学生：$\neg F$
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生：$C \vee \neg F$
- 原命题：$A \rightarrow (C \vee \neg F)$

# Example—符号化

### 命题

你可以上网，仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生。

### 符号化命题中的原子

- $A$：你可以上网；
- $C$：你是计算机专业的学生；
- $F$：你是一年级的学生.

### 用联结词合成原命题

- 你不是一年级的学生：$\neg F$
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生：$C \vee \neg F$
- 原命题：$A \to (C \vee \neg F)$

# Example—符号化

## 命题

你可以上网，仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生。

## 符号化命题中的原子

- $A$：你可以上网；
- $C$：你是计算机专业的学生；
- $F$：你是一年级的学生.

## 用联结词合成原命题

- 你不是一年级的学生：$\neg F$
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生：$C \vee \neg F$
- 原命题：$A \rightarrow (C \vee \neg F)$

# Example—符号化

## 命题

你可以上网，仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生。

## 符号化命题中的原子

- $A$：你可以上网；
- $C$：你是计算机专业的学生；
- $F$：你是一年级的学生.

## 用联结词合成原命题

- 你不是一年级的学生：$\neg F$
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生：$C \vee \neg F$
- 原命题：$A \to (C \vee \neg F)$

# 合式公式（Well-Formed Formulas, WFFs）

**Remark**

命题符号化的结果是合式公式，是命题“语言”中的“句子”.

**字母表**

- 常元：$\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$
- 变元：$P, Q, R, \ldots$
- 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号：$(,)$

**Definition合式公式WFFs**

1. 递归基础：常元和变元是WFFs;
2. 递归规则：若$A, B$是WFFs，则 $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs;
3. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

# 合式公式（Well-Formed Formulas, WFFs）

**Remark**

命题符号化的结果是合式公式，是命题“语言”中的“句子”.

**字母表**

- 常元：$\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$
- 变元：$P, Q, R, \ldots$
- 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号：$(,)$

**Definition合式公式WFFs**

1. 递归基础：常元和变元是WFFs;
2. 递归规则：若$A, B$是WFFs，则 $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs;
3. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

# 合式公式（Well-Formed Formulas, WFFs）

**Remark**

命题符号化的结果是合式公式，是命题“语言”中的“句子”.

**字母表**

- 常元：$\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$
- 变元：$P, Q, R, \ldots$
- 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号：$(,)$

**Definition合式公式WFFs**

1. 递归基础：常元和变元是WFFs;
2. 递归规则：若$A, B$是WFFs，则 $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs;
3. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

# 合式公式（Well-Formed Formulas, WFFs）

**Remark**

命题符号化的结果是合式公式，是命题“语言”中的“句子”.

**字母表**

- 常元：$\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$
- 变元：$P, Q, R, \ldots$
- 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号：$($, $)$

**Definition合式公式WFFs**

1. 递归基础：常元和变元是WFFs;
2. 递归规则：若$A, B$是WFFs，则
   $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs;
3. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

# 合式公式（Well-Formed Formulas, WFFs）

**Remark**

命题符号化的结果是合式公式，是命题“语言”中的“句子”.

**字母表**

- 常元：$\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$
- 变元：$P, Q, R, \ldots$
- 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号：$(, )$

**Definition合式公式WFFs**

1. 递归基础：常元和变元是WFFs；
2. 递归规则：若$A, B$是WFFs，则 $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs；
3. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

# 合式公式（Well-Formed Formulas, WFFs）

## Remark

命题符号化的结果是合式公式，是命题“语言”中的“句子”.

## 字母表

- 常元：$\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$
- 变元：$P, Q, R, \ldots$
- 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号：$(, )$

## Definition合式公式WFFs

1. 递归基础：常元和变元是WFFs;
2. 递归规则：若$A, B$是WFFs，则
   $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs;
3. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

# 合式公式（Well-Formed Formulas, WFFs）

**Remark**

命题符号化的结果是合式公式，是命题“语言”中的“句子”.

**字母表**

- 常元：$\mathbb{T}$，$\mathbb{F}$
- 变元：$P, Q, R, \ldots$
- 联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号：$(,)$

**Definition合式公式WFFs**

1. 递归基础：常元和变元是WFFs;
2. 递归规则：若$A, B$是WFFs，则
   $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs;
3. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

# Example

## Example

- $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式.

## Proof.

1. $A, C, F,$是公式，根据规则①;
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②;
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②;
4. $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. □

## Example

- $(\to (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\to A)$的规则;
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

# Example

**Example**

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$是公式.

**Proof.**

1. $A, C, F,$是公式，根据规则①；
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②；
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②；
4. $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. □

**Example**

- $(\rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\rightarrow A)$的规则；
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

# Example

**Example**

- $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式.

**Proof.**

1. $A, C, F,$是公式，根据规则①；
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②；
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②；
4. $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. □

**Example**

- $(\to (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\to A)$的规则；
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

# Example

## Example

- $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式.

## Proof.

1. $A, C, F,$是公式，根据规则①；
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②；
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②；
4. $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. □

## Example

- $(\to (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\to A)$的规则；
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

# Example

## Example

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$是公式.

## Proof.

1. $A, C, F,$是公式，根据规则①；
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②；
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②；
4. $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. □

## Example

- $(\rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\rightarrow A)$的规则；
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

# Example

**Example**

- $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式.

**Proof.**

1. $A, C, F,$是公式，根据规则①；
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②；
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②；
4. $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. $\square$

**Example**

- $(\to (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\to A)$的规则；
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

# Example

**Example**

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$是公式.

**Proof.**

1. $A, C, F,$是公式，根据规则①;
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②;
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②;
4. $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. □

**Example**

- $(\rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\rightarrow A)$的规则;
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

# 公式简化规则

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低：括号，$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为：$A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为：$P \vee Q \vee R$

**注意**

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

# 公式简化规则

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低：括号，$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为：$A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为：$P \vee Q \vee R$

**注意**

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

## 公式简化规则

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低：括号，$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为：$A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为：$P \vee Q \vee R$

**注意**

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

## 公式简化规则

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低：括号，$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为：$A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为：$P \vee Q \vee R$

**注意**

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

# 公式简化规则

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低：括号，$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为：$A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为：$P \vee Q \vee R$

**注意**

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

## 公式简化规则

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低：括号，$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为：$A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为：$P \vee Q \vee R$

**注意**

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

# 公式简化规则

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低：括号，$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为：$A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为：$P \vee Q \vee R$

**注意**

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

# 逻辑运算的基本法则

- 每个命题都可以符号化为一个公式;
- 每个命题中的原子的真假一旦确定，则该命题的真假也惟一确定，即对应公式的真假值也惟一确定.

**Definition真值表**

表示公式中原子的真假和公式真假值之间关系.为方便书写，用0表示假值，1表示真值.

Table: 逻辑联结词的含义

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \vee Q$ | $P \wedge Q$ | $P \rightarrow Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 逻辑运算的基本法则

- 每个命题都可以符号化为一个公式;
- 每个命题中的原子的真假一旦确定，则该命题的真假也惟一确定，即对应公式的真假值也惟一确定.

**Definition 真值表**

表示公式中原子的真假和公式真假值之间关系.为方便书写，用0表示假值，1表示真值.

Table: 逻辑联结词的含义

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \vee Q$ | $P \wedge Q$ | $P \rightarrow Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 逻辑运算的基本法则

- 每个命题都可以符号化为一个公式；
- 每个命题中的原子的真假一旦确定，则该命题的真假也惟一确定，即对应公式的真假值也惟一确定.

**Definition 真值表**

表示公式中原子的真假和公式真假值之间关系.为方便书写，用0表示假值，1表示真值.

Table：逻辑联结词的含义

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \vee Q$ | $P \wedge Q$ | $P \to Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 逻辑运算的基本法则

- 每个命题都可以符号化为一个公式;
- 每个命题中的原子的真假一旦确定，则该命题的真假也惟一确定，即对应公式的真假值也惟一确定.

**Definition真值表**

表示公式中原子的真假和公式真假值之间关系.为方便书写，用0表示假值，1表示真值.

Table: 逻辑联结词的含义

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \vee Q$ | $P \wedge Q$ | $P \rightarrow Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

**Example**

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

**Example**

- **If today is Thursday**, then $2+3=5$. (True)
- **If today is Thursday**, then $2+3=6$. (True, except for Thursday)

# 蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

**Example**

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

**Example**

- If today is Thursday, then $2+3=5$. (True)
- If today is Thursday, then $2+3=6$. (True, except for Thursday)

# 蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

**Example**

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

**Example**

- **If today is Thursday**, then $2+3=5$. (True)
- **If today is Thursday**, then $2+3=6$. (True, except for Thursday)

# 蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

**Example**

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

**Example**

- **If today is Thursday**, then $2+3=5$. (True)
- **If today is Thursday**, then $2+3=6$. (True, except for Thursday)

# 蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

**Example**

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

**Example**

- If today is Thursday, then $2+3=5$. (True)
- If today is Thursday, then $2+3=6$. (True, except for Thursday)

# 蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

**Example**

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

**Example**

- **If today is Thursday**, then $2+3=5$. (True)
- If today is Thursday, then $2+3=6$. (True, except for Thursday)

# 蕴涵式

- 蕴涵式仅在条件为真结论为假时取假值，其余情况为真值。

**Example**

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...
- 若前件为真，后件为假，则该蕴涵式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真。

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴涵式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语义关联无关。

**Example**

- **If today is Thursday**, then $2+3=5$. (True)
- **If today is Thursday**, then $2+3=6$. (True, except for Thursday)

# 一般公式的语义

**记号**

- 记含$n$个原子$P_1, P_2, \ldots, P_n$的公式$G$为：$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

**定义**

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一公式：对$P_1, P_2, \ldots, P_n$的一次取值$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle, x_i \in \{0, 1\}$，称为一个指派(assignment). 记$P_1, P_2, \ldots, P_n$的指派$I = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$为：$I = x_1 x_2 \ldots x_n$

**Property**

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$一共有$2^n$种不同的指派.

**Example**

- $G(P, Q) = \neg((P \vee Q) \wedge P)$的4个指派是：$I_0 = 00, I_1 = 01, I_2 = 10, I_3 = 11$.

- 指派的下标与对应指派间的关系。

# 一般公式的语义

**记号**

- 记含$n$个原子$P_1, P_2, \ldots, P_n$的公式$G$为：$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

**定义**

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一公式：对$P_1, P_2, \ldots, P_n$的一次取值$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle, x_i \in \{0, 1\}$，称为一个指派(assignment)．记$P_1, P_2, \ldots, P_n$的指派$I = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$为：$I = x_1 x_2 \ldots x_n$

**Property**

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$一共有$2^n$种不同的指派.

**Example**

- $G(P, Q) = \neg((P \vee Q) \wedge P)$的4个指派是：
  $I_0 = 00, I_1 = 01, I_2 = 10, I_3 = 11.$

- 指派的下标与对应指派间的关系。

# 一般公式的语义

**记号**

- 记含$n$个原子$P_1, P_2, \ldots, P_n$的公式$G$为：$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

**定义**

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一公式：对$P_1, P_2, \ldots, P_n$的一次取值$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle, x_i \in \{0, 1\}$，称为一个指派(**assignment**). 记$P_1, P_2, \ldots, P_n$的指派$I = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$为：$I = x_1 x_2 \ldots x_n$

**Property**

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$一共有$2^n$种不同的指派.

**Example**

- $G(P, Q) = \neg((P \vee Q) \wedge P)$的4个指派是：
  $I_0 = 00, I_1 = 01, I_2 = 10, I_3 = 11$.

- 指派的下标与对应指派间的关系。

# 一般公式的语义

**记号**

- 记含$n$个原子$P_1, P_2, \ldots, P_n$的公式$G$为：$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

**定义**

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一公式：对$P_1, P_2, \ldots, P_n$的一次取值$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle, x_i \in \{0, 1\}$，称为一个指派(**assignment**). 记$P_1, P_2, \ldots, P_n$的指派$I = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$为：$I = x_1 x_2 \ldots x_n$

**Property**

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$一共有$2^n$种不同的指派.

**Example**

- $G(P, Q) = \neg((P \vee Q) \wedge P)$的**4**个指派是：
  $I_0 = 00, I_1 = 01, I_2 = 10, I_3 = 11$.

- 指派的下标与对应指派间的关系。

# 解释(Interpretation)

**定义**

设$I = x_1x_2\dots x_n$为公式$G(P_1, P_2, \dots, P_n)$的一个指派，则公式$G$在指派$I$下的值记为：$I(G)$，其递归定义如下：

- $I(\mathbb{T}) = 1, \quad I(\mathbb{F}) = 0;$
- $I(G) = x_i, \quad \textbf{if} \quad G \equiv P_i;$
- $$I(G) = \begin{cases} \neg I(A), & \textbf{if} \quad G = \neg A \\ I(A) \wedge I(B), & \textbf{if} \quad G = A \wedge B \\ I(A) \vee I(B), & \textbf{if} \quad G = A \vee B \\ I(A) \to I(B), & \textbf{if} \quad G = A \to B \\ I(A) \leftrightarrow I(B), & \textbf{if} \quad G = A \leftrightarrow B \end{cases}$$

# 解释(Interpretation)

**定义**

设$I = x_1x_2\ldots x_n$为公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的一个指派，则公式$G$在指派$I$下的值记为：$I(G)$，其递归定义如下：

- $I(\mathbb{T}) = 1, \quad I(\mathbb{F}) = 0;$
- $I(G) = x_i, \quad \textbf{if} \quad G \equiv P_i;$
- $$I(G) = \begin{cases} \neg I(A), & \textbf{if} \quad G = \neg A \\ I(A) \wedge I(B), & \textbf{if} \quad G = A \wedge B \\ I(A) \vee I(B), & \textbf{if} \quad G = A \vee B \\ I(A) \to I(B), & \textbf{if} \quad G = A \to B \\ I(A) \leftrightarrow I(B), & \textbf{if} \quad G = A \leftrightarrow B \end{cases}$$

# 解释(Interpretation)

**定义**

设$I = x_1x_2\ldots x_n$为公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的一个指派，则公式$G$在指派$I$下的值记为：$I(G)$，其递归定义如下：

- $I(\mathbb{T}) = 1, \quad I(\mathbb{F}) = 0;$
- $I(G) = x_i, \quad \textbf{if} \quad G \equiv P_i;$
- $$I(G) = \begin{cases} \neg I(A), & \textbf{if} \quad G = \neg A \\ I(A) \wedge I(B), & \textbf{if} \quad G = A \wedge B \\ I(A) \vee I(B), & \textbf{if} \quad G = A \vee B \\ I(A) \to I(B), & \textbf{if} \quad G = A \to B \\ I(A) \leftrightarrow I(B), & \textbf{if} \quad G = A \leftrightarrow B \end{cases}$$

# Example

## Definition

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$在$2^n$的指派下的值所构成的表称为公式$G$的真值表。

## 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P)$的真值表

| 指派 | $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ | $(P \vee Q) \wedge P$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_0 = 00$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $I_1 = 01$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $I_2 = 10$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $I_3 = 11$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

## Remarks (1/2)

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的语义解释实际上是一个函数：

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n\text{次}} \to \{0,1\}$$

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mapsto G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function)；
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序；
- 形式系统的构成："形式结构+语义"
- 逻辑问题转化为"计算问题"。

## Remarks (1/2)

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的语义解释实际上是一个函数：

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n\text{次}} \to \{0,1\}$$

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mapsto G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function)；
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序；
- 形式系统的构成："形式结构+语义"
- 逻辑问题转化为"计算问题"。

## Remarks (1/2)

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的语义解释实际上是一个函数：

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n\text{次}} \to \{0,1\}$$

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mapsto G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function)；
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序；
- 形式系统的构成："形式结构+语义"
- 逻辑问题转化为"计算问题"。

## Remarks (1/2)

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的语义解释实际上是一个函数：

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n\text{次}} \to \{0,1\}$$

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mapsto G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function)；
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序；
- 形式系统的构成："形式结构+语义"
- 逻辑问题转化为"计算问题"。

# Remarks (1/2)

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的语义解释实际上是一个函数：

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n\text{次}} \to \{0,1\}$$

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mapsto G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function)；
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序；
- 形式系统的构成：“形式结构+语义”
- 逻辑问题转化为“计算问题”。

# Remarks (2/2)

## 计算问题

- 计算一个$n$个原子的真值表需要$2^n$次计算；
- 计算能力为$1T(2^{40})$Flops，计算100个原子的公式的真值表所用的时间是：

$$
\begin{aligned}
2^{100}(\text{次}) &= 2^{100} \div 2^{40} = 2^{60}(\text{秒}) \\
&= 2^{60} \div (365 * 24 * 3600) = 3.6558901 \times 10^{10}(\text{年})
\end{aligned}
$$

- Boolean Satisfiability problem (SAT) : NP-complete problem.

## Remarks (2/2)

**计算问题**

- 计算一个$n$个原子的真值表需要$2^n$次计算；
- 计算能力为$1\,T(2^{40})$**Flops**，计算100个原子的公式的真值表所用的时间是：

$$\begin{aligned}2^{100}(\text{次}) &= 2^{100} \div 2^{40} = 2^{60}(\text{秒})\\ &= 2^{60} \div (365 * 24 * 3600) = 3.6558901 \times 10^{10}(\text{年})\end{aligned}$$

- Boolean Satisfiability problem (SAT) : NP-complete problem.

# Remarks (2/2)

### 计算问题

- 计算一个$n$个原子的真值表需要$2^n$次计算;
- 计算能力为$1T(2^{40})$Flops，计算100个原子的公式的真值表所用的时间是:

$$
\begin{aligned}
2^{100}(\text{次}) &= 2^{100} \div 2^{40} = 2^{60}(\text{秒}) \\
&= 2^{60} \div (365 * 24 * 3600) = 3.6558901 \times 10^{10}(\text{年})
\end{aligned}
$$

- **Boolean Satisfiability problem (SAT): NP-complete problem.**

# 内容

# 重言式(Tautology，永真式)

## 定义

设$G$是公式：

- 如果对$G$的任意一个解释$I$，都有$I(G)=1$，称$G$为重言式。
- 如果存在$G$的一个解释$I$，有$I(G)=1$，称$G$为可满足式。
- 如果对$G$的任意一个解释$I$，都有$I(G)=0$，称$G$为矛盾式。

## Example

公式$G=\neg((P\vee Q)\wedge P)\leftrightarrow\neg P$为重言式

| 指派 | $P$ | $Q$ | $P\vee Q$ | $(P\vee Q)\wedge P$ | $\neg(P\vee Q)\wedge P$ | $\neg P$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_0=00$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $I_1=01$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $I_2=10$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $I_3=11$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

# 重言式(Tautology，永真式)

## 定义

设$G$是公式：

- 如果对$G$的任意一个解释$I$，都有$I(G)=1$，称$G$为重言式。
- 如果存在$G$的一个解释$I$，有$I(G)=1$，称$G$为可满足式。
- 如果对$G$的任意一个解释$I$，都有$I(G)=0$，称$G$为矛盾式。

## Example

公式$G=\neg((P\vee Q)\wedge P)\leftrightarrow\neg P$为重言式

| 指派 | $P$ | $Q$ | $P\vee Q$ | $(P\vee Q)\wedge P$ | $\neg(P\vee Q)\wedge P$ | $\neg P$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_0=00$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $I_1=01$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $I_2=10$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $I_3=11$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

# 重言式(Tautology，永真式)

**定义**

设$G$是公式：

- 如果对$G$的任意一个解释$I$，都有$I(G)=1$，称$G$为重言式。
- 如果存在$G$的一个解释$I$，有$I(G)=1$，称$G$为可满足式。
- 如果对$G$的任意一个解释$I$，都有$I(G)=0$，称$G$为矛盾式。

**Example**

公式$G=\neg((P\vee Q)\wedge P)\leftrightarrow\neg P$为重言式

| 指派 | $P$ | $Q$ | $P\vee Q$ | $(P\vee Q)\wedge P$ | $\neg(P\vee Q)\wedge P$ | $\neg P$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_0=00$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $I_1=01$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $I_2=10$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $I_3=11$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

# 重言式(Tautology，永真式)

## 定义

设$G$是公式:

- 如果对$G$的任意一个解释$I$，都有$I(G)=1$，称$G$为重言式。
- 如果存在$G$的一个解释$I$，有$I(G)=1$，称$G$为可满足式。
- 如果对$G$的任意一个解释$I$，都有$I(G)=0$，称$G$为矛盾式。

## Example

公式$G=\neg((P\vee Q)\wedge P)\leftrightarrow\neg P$为重言式

| 指派 | $P$ | $Q$ | $P\vee Q$ | $(P\vee Q)\wedge P$ | $\neg(P\vee Q)\wedge P$ | $\neg P$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_0=00$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $I_1=01$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $I_2=10$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $I_3=11$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

# 重言式(Tautology，永真式)

## 定义

设$G$是公式：

- 如果对$G$的任意一个解释$I$，都有$I(G)=1$，称$G$为重言式。
- 如果存在$G$的一个解释$I$，有$I(G)=1$，称$G$为可满足式。
- 如果对$G$的任意一个解释$I$，都有$I(G)=0$，称$G$为矛盾式。

## Example

公式$G=\neg((P\vee Q)\wedge P)\leftrightarrow\neg P$为重言式

| 指派 | $P$ | $Q$ | $P\vee Q$ | $(P\vee Q)\wedge P$ | $\neg(P\vee Q)\wedge P$ | $\neg P$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_0=00$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $I_1=01$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $I_2=10$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $I_3=11$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

# 逻辑等价

**定义**

称公式$F$和$G$逻辑等价，iff，公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Leftrightarrow G$.

**Example**

- 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow \neg P$为重言式；
- 则，$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

**性质**

- $A \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$, then $B \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$ and $B \Leftrightarrow C$, then $A \Leftrightarrow C$

# 逻辑等价

**定义**

称公式$F$和$G$逻辑等价，iff，公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Leftrightarrow G$.

**Example**

- 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow \neg P$为重言式；
- 则，$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

**性质**

- $A \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$, then $B \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$ and $B \Leftrightarrow C$, then $A \Leftrightarrow C$

## 逻辑等价

### 定义

称公式$F$和$G$逻辑等价，iff，公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Leftrightarrow G$.

### Example

- 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow \neg P$为重言式；
- 则，$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

### 性质

- $A \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$, then $B \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$ and $B \Leftrightarrow C$, then $A \Leftrightarrow C$

# 逻辑等价

**定义**

称公式$F$和$G$逻辑等价，**iff**，公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Leftrightarrow G$.

**Example**

- 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow \neg P$为重言式；
- 则，$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

**性质**

- $A \Leftrightarrow A$
- **if** $A \Leftrightarrow B$, **then** $B \Leftrightarrow A$
- **if** $A \Leftrightarrow B$ **and** $B \Leftrightarrow C$, **then** $A \Leftrightarrow C$

# 逻辑等价

**定义**

称公式$F$和$G$逻辑等价，**iff**，公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Leftrightarrow G$.

**Example**

- 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow \neg P$为重言式；
- 则，$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

**性质**

- $A \Leftrightarrow A$
- **if** $A \Leftrightarrow B$, **then** $B \Leftrightarrow A$
- **if** $A \Leftrightarrow B$ **and** $B \Leftrightarrow C$, **then** $A \Leftrightarrow C$

# 逻辑等价

**定义**

称公式$F$和$G$逻辑等价，iff，公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Leftrightarrow G$.

**Example**

- 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow \neg P$为重言式；
- 则，$\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$

**性质**

- $A \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$, then $B \Leftrightarrow A$
- if $A \Leftrightarrow B$ and $B \Leftrightarrow C$, then $A \Leftrightarrow C$

# 常用的逻辑恒等式

| | |
|---|---|
| $\neg\neg P \Leftrightarrow P$ | 双重否定律 |
| $P \wedge P \Leftrightarrow P$<br>$P \vee P \Leftrightarrow P$ | 幂等律 |
| $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$<br>$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ | 交换律 |
| $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$<br>$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ | 结合律 |
| $(P \wedge Q) \vee P \Leftrightarrow P$<br>$(P \vee Q) \wedge P \Leftrightarrow P$ | 吸收律 |
| $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ | 蕴涵等值式 |
| $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$<br>$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ | De Morgan律 |
| $(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$ | 归谬律 |
| $(P \vee \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{T}$ | 排中律 |

# 永真蕴涵关系(Logical Implication)

## 定义

- 称公式$F$永真蕴涵公式$G$，iff，公式$(F) \rightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Rightarrow G$.
- 例如，$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

## Remarks

- 对$F$和$G$中原子的所有指派$I$，都有$I(F) \leqslant I(G)$，即$F$为真时$G$一定为真，相当于代数中的不等式。

## 性质

- $A \Rightarrow A$
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow A$, then $A \Leftrightarrow B$
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow C$, then $A \Rightarrow C$
- if $A \Rightarrow B$, then $\neg B \Rightarrow \neg A$

# 永真蕴涵关系(Logical Implication)

## 定义

- 称公式$F$永真蕴涵公式$G$，iff，公式$(F) \to (G)$是重言式，记为：$F \Rightarrow G$.
- 例如，$P \land (P \to Q) \Rightarrow Q$

## Remarks

- 对$F$和$G$中原子的所有指派$I$，都有$I(F) \leqslant I(G)$，即$F$为真时$G$一定为真，相当于代数中的不等式。

## 性质

- $A \Rightarrow A$
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow A$, then $A \Leftrightarrow B$
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow C$, then $A \Rightarrow C$
- if $A \Rightarrow B$, then $\neg B \Rightarrow \neg A$

# 永真蕴涵关系(Logical Implication)

## 定义

- 称公式$F$永真蕴涵公式$G$，iff，公式$(F) \to (G)$是重言式，记为：$F \Rightarrow G$.
- 例如，$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

## Remarks

- 对$F$和$G$中原子的所有指派$I$，都有$I(F) \leqslant I(G)$，即$F$为真时$G$一定为真，相当于代数中的不等式。

## 性质

- $A \Rightarrow A$
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow A$, then $A \Leftrightarrow B$
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow C$, then $A \Rightarrow C$
- if $A \Rightarrow B$, then $\neg B \Rightarrow \neg A$

# 永真蕴涵关系(Logical Implication)

**定义**

- 称公式$F$永真蕴涵公式$G$, **iff**, 公式$(F) \to (G)$是重言式, 记为: $F \Rightarrow G$.
- 例如, $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

**Remarks**

- 对$F$和$G$中原子的所有指派$I$, 都有$I(F) \leqslant I(G)$, 即$F$为真时$G$一定为真, 相当于代数中的不等式。

**性质**

- $A \Rightarrow A$
- **if** $A \Rightarrow B$ **and** $B \Rightarrow A$, **then** $A \Leftrightarrow B$
- **if** $A \Rightarrow B$ **and** $B \Rightarrow C$, **then** $A \Rightarrow C$
- **if** $A \Rightarrow B$, **then** $\neg B \Rightarrow \neg A$

# 永真蕴涵关系(Logical Implication)

## 定义

- 称公式$F$永真蕴涵公式$G$，**iff**，公式$(F) \to (G)$是重言式，记为：$F \Rightarrow G$.
- 例如，$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

## Remarks

- 对$F$和$G$中原子的所有指派$I$，都有$I(F) \leqslant I(G)$，即$F$为真时$G$一定为真，相当于代数中的不等式。

## 性质

- $A \Rightarrow A$
- **if** $A \Rightarrow B$ **and** $B \Rightarrow A$, **then** $A \Leftrightarrow B$
- **if** $A \Rightarrow B$ **and** $B \Rightarrow C$, **then** $A \Rightarrow C$
- **if** $A \Rightarrow B$, **then** $\neg B \Rightarrow \neg A$

# 永真蕴涵关系(Logical Implication)

### 定义

- 称公式$F$永真蕴涵公式$G$，**iff**，公式$(F) \to (G)$是重言式，记为：$F \Rightarrow G$.
- 例如，$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

### Remarks

- 对$F$和$G$中原子的所有指派$I$，都有$I(F) \leqslant I(G)$，即$F$为真时$G$一定为真，相当于代数中的不等式。

### 性质

- $A \Rightarrow A$
- **if** $A \Rightarrow B$ **and** $B \Rightarrow A$, **then** $A \Leftrightarrow B$
- **if** $A \Rightarrow B$ **and** $B \Rightarrow C$, **then** $A \Rightarrow C$
- **if** $A \Rightarrow B$, **then** $\neg B \Rightarrow \neg A$

# 永真蕴涵关系(Logical Implication)

## 定义

- 称公式$F$永真蕴涵公式$G$，iff，公式$(F) \rightarrow (G)$是重言式，记为：$F \Rightarrow G$.
- 例如，$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

## Remarks

- 对$F$和$G$中原子的所有指派$I$，都有$I(F) \leqslant I(G)$，即$F$为真时$G$一定为真，相当于代数中的不等式。

## 性质

- $A \Rightarrow A$
- **if** $A \Rightarrow B$ **and** $B \Rightarrow A$, **then** $A \Leftrightarrow B$
- **if** $A \Rightarrow B$ **and** $B \Rightarrow C$, **then** $A \Rightarrow C$
- **if** $A \Rightarrow B$, **then** $\neg B \Rightarrow \neg A$

# 常用的永真蕴涵式

| | |
|---|---|
| $P \Rightarrow P \vee Q$ | 加法式 |
| $P \wedge Q \Rightarrow P$ | 简化式 |
| $(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$ | 假言推理 |
| $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg p$ | 拒取式 |
| $(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$ | 析取三段论 |
| $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$ | 前提三段论 |
| $(P \rightarrow Q) \Rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$ | |
| $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)$ | |

# 内容

# 逻辑恒等的公式

## 逻辑恒等

- $A \Leftrightarrow B$，即，公式$A$等价于$B$，$A$和$B$逻辑恒等。
- e. g.：$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow \ldots$
- e. g.：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \ldots$
- 为了便于讨论，有必要将公式的形式规范化，即将公式转换为与其等价的标准形式。

# 逻辑恒等的公式

## 逻辑恒等

- $A \Leftrightarrow B$，即，公式$A$等价于$B$，$A$和$B$逻辑恒等。
- **e. g.**：$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow \ldots$
- **e. g.**：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \ldots$
- 为了便于讨论，有必要将公式的形式规范化，即将公式转换为与其等价的标准形式。

# 逻辑恒等的公式

## 逻辑恒等

- $A \Leftrightarrow B$，即，公式$A$等价于$B$，$A$和$B$逻辑恒等。
- **e. g.**： $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow \ldots$
- **e. g.**： $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \ldots$
- 为了便于讨论，有必要将公式的形式规范化，即将公式转换为与其等价的标准形式。

# 逻辑恒等的公式

## 逻辑恒等

- $A \Leftrightarrow B$，即，公式$A$等价于$B$，$A$和$B$逻辑恒等。
- **e. g.**：$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow \ldots$
- **e. g.**：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \ldots$
- 为了便于讨论，有必要将公式的形式规范化，即将公式转换为与其等价的标准形式。

# 析取范式和合取范式

**Definition 基本积、基本和**

- **基本积** 是合式公式中的变元或变元的否定的合取;
- **基本和** 是合式公式中的变元或变元的否定的析取;

**Example**

- 基本积: $P$, $\neg P \wedge Q$, $Q \wedge \neg P$, $P \wedge \neg P$, $Q \wedge P \wedge \neg P$
- 基本和: $P$, $\neg P \vee Q$, $Q \vee \neg P$, $P \vee \neg P$, $Q \vee P \vee \neg P$

# 析取范式和合取范式

**Definition 基本积、基本和**

- **基本积** 是合式公式中的变元或变元的否定的合取;
- **基本和** 是合式公式中的变元或变元的否定的析取;

**Example**

- 基本积: $P$, $\neg P \wedge Q$, $Q \wedge \neg P$, $P \wedge \neg P$, $Q \wedge P \wedge \neg P$
- 基本和: $P$, $\neg P \vee Q$, $Q \vee \neg P$, $P \vee \neg P$, $Q \vee P \vee \neg P$

# 析取范式和合取范式

**Definition基本积、基本和**

- 基本积　是合式公式中的变元或变元的否定的合取;
- 基本和　是合式公式中的变元或变元的否定的析取;

**Example**

- 基本积: $P$, $\neg P \wedge Q$, $Q \wedge \neg P$, $P \wedge \neg P$, $Q \wedge P \wedge \neg P$
- 基本和: $P$, $\neg P \vee Q$, $Q \vee \neg P$, $P \vee \neg P$, $Q \vee P \vee \neg P$

# 析取范式和合取范式

**Definition 基本积、基本和**

- **基本积** 是合式公式中的变元或变元的否定的合取;
- **基本和** 是合式公式中的变元或变元的否定的析取;

**Example**

- 基本积: $P$, $\neg P \wedge Q$, $Q \wedge \neg P$, $P \wedge \neg P$, $Q \wedge P \wedge \neg P$
- 基本和: $P$, $\neg P \vee Q$, $Q \vee \neg P$, $P \vee \neg P$, $Q \vee P \vee \neg P$

# 析取范式

## Definition析取范式

- 一个形为基本积的析取的公式，若与命题公式$A$等价，则称其为公式$A$的**析取范式**，记为：
$A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$, ($n \geq 1$, $A_i$是基本积)

## Example析取范式

- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

## 注意

- 析取范式中只含有联结词$\neg$, $\wedge$, $\vee$.

# 析取范式

## Definition析取范式

- 一个形为基本积的析取的公式，若与命题公式$A$等价，则称其为公式$A$的析取范式，记为：
  $A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, ($n \geq 1$, $A_i$是基本积)

## Example析取范式

- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

## 注意

- 析取范式中只含有联结词$\neg$, $\wedge$, $\vee$.

# 析取范式

**Definition 析取范式**

- 一个形为基本积的析取的公式，若与命题公式$A$等价，则称其为公式$A$的析取范式，记为：
$A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, ($n \geq 1$, $A_i$是基本积)

**Example 析取范式**

- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

**注意**

- 析取范式中只含有联结词$\neg$, $\wedge$, $\vee$.

# 析取范式

## Definition析取范式

- 一个形为基本积的析取的公式，若与命题公式$A$等价，则称其为公式$A$的析取范式，记为：
  $A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, ($n \geq 1$, $A_i$是基本积)

## Example析取范式

- $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

## 注意

- 析取范式中只含有联结词$\neg$, $\wedge$, $\vee$.

# 析取范式的求解

## 求解方法：公式恒等变换

1. 消去联结词$\rightarrow$，$\leftrightarrow$；
2. 利用DeMorgen律将联结词$\neg$移至变元前，并消去双重否定；
3. 利用分配律、结合律等将公式化为析取范式。

## Example求解析取范式

- 求公式$P \wedge (P \rightarrow Q)$的析取范式：

$$\begin{aligned} P \wedge (P \rightarrow Q) &\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \end{aligned}$$

注意：公式的析取范式不唯一。

# 析取范式的求解

**求解方法：公式恒等变换**

1. 消去联结词$\rightarrow$，$\leftrightarrow$；
2. 利用DeMorgen律将联结词$\neg$移至变元前，并消去双重否定；
3. 利用分配律、结合律等将公式化为析取范式。

**Example求解析取范式**

- 求公式$P \wedge (P \rightarrow Q)$的析取范式：

$$
\begin{aligned}
P \wedge (P \rightarrow Q) &\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q)
\end{aligned}
$$

注意：公式的析取范式不唯一。

# 析取范式的求解

**求解方法：公式恒等变换**

1. 消去联结词$\rightarrow$，$\leftrightarrow$；
2. 利用DeMorgen律将联结词$\neg$移至变元前，并消去双重否定；
3. 利用分配律、结合律等将公式化为析取范式。

**Example求解析取范式**

- 求公式$P \wedge (P \rightarrow Q)$的析取范式：

$$
\begin{aligned}
P \wedge (P \rightarrow Q) &\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q)
\end{aligned}
$$

**注意：公式的析取范式不唯一。**

# 析取范式的求解

**求解方法：公式恒等变换**

1. 消去联结词$\rightarrow$，$\leftrightarrow$；
2. 利用DeMorgen律将联结词$\neg$移至变元前，并消去双重否定；
3. 利用分配律、结合律等将公式化为析取范式。

**Example求解析取范式**

- 求公式$P \wedge (P \rightarrow Q)$的析取范式：

$$
\begin{aligned}
P \wedge (P \rightarrow Q) &\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q)
\end{aligned}
$$

**注意：公式的析取范式不唯一。**

# 主析取范式-极小项

## Definition极小项

- 对于共有$n$个命题变元$P_1$，$P_2, ..., P_n$的基本积，称之为**极小项**当且仅当，每个变元与其否定不同时出现，且二者之一出现且仅出现一次。

## Example

- 变元$P, Q$：则$P \wedge \neg Q$，$P \wedge Q$是极小项；
- 变元$P_1, P_2, P_3$：则$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$，$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$是极小项
- 问题：对于给定的$n$个变元，一共有多少个不同的极小项？

# 主析取范式-极小项

## Definition极小项

- 对于共有$n$个命题变元$P_1$，$P_2, ..., P_n$的基本积，称之为**极小项**当且仅当，每个变元与其否定不同时出现，且二者之一出现且仅出现一次。

## Example

- 变元$P, Q$：则$P \wedge \neg Q$，$P \wedge Q$是极小项；
- 变元$P_1, P_2, P_3$：则$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$，$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$是极小项
- 问题：对于给定的$n$个变元，一共有多少个不同的极小项？

# 主析取范式-极小项

**Definition 极小项**

- 对于共有$n$个命题变元$P_1$，$P_2, ..., P_n$的基本积，称之为**极小项**当且仅当，每个变元与其否定不同时出现，且二者之一出现且仅出现一次。

**Example**

- 变元$P, Q$：则$P \wedge \neg Q$，$P \wedge Q$是极小项；
- 变元$P_1, P_2, P_3$：则$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$，$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$是极小项
- 问题：对于给定的$n$个变元，一共有多少个不同的极小项?

# 主析取范式-极小项

**Definition极小项**

- 对于共有$n$个命题变元$P_1$，$P_2, ..., P_n$的基本积，称之为**极小项**当且仅当，每个变元与其否定不同时出现，且二者之一出现且仅出现一次。

**Example**

- 变元$P, Q$：则$P \wedge \neg Q$，$P \wedge Q$是极小项；
- 变元$P_1, P_2, P_3$：则$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$，$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$是极小项
- 问题：对于给定的$n$个变元，一共有多少个不同的极小项？

# 极小项的性质

## 3个变元极小项

- 对于$3$个命题变元$P, Q, R$，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

| 极小项 | 所有指派 | 唯一指派 | 标记 |
|---|---|---|---|
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **000** | $m_0$ |
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **001** | $m_1$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **010** | $m_2$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **011** | $m_3$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **100** | $m_4$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **101** | $m_5$ |
| $P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_6$ |
| $P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_7$ |

# 极小项的性质

## 3个变元极小项

- 对于$3$个命题变元$P, Q, R$，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

| 极小项 | 所有指派 | 唯一指派 | 标记 |
|---|---|---|---|
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | 000 | $m_0$ |
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | 001 | $m_1$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | 010 | $m_2$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | 011 | $m_3$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | 100 | $m_4$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | 101 | $m_5$ |
| $P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | 110 | $m_6$ |
| $P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | 110 | $m_7$ |

# 极小项的性质

## 3个变元极小项

- 对于3个命题变元$P, Q, R$，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

| 极小项 | 所有指派 | 唯一指派 | 标记 |
|---|---|---|---|
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | 000 | $m_0$ |
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | 001 | $m_1$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | 010 | $m_2$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | 011 | $m_3$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | 100 | $m_4$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | 101 | $m_5$ |
| $P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | 110 | $m_6$ |
| $P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | 110 | $m_7$ |

# 极小项的性质

## 3个变元极小项

- 对于3个命题变元$P, Q, R$，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

| 极小项 | 所有指派 | 唯一指派 | 标记 |
|---|---|---|---|
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **000** | $m_0$ |
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **001** | $m_1$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **010** | $m_2$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **011** | $m_3$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **100** | $m_4$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **101** | $m_5$ |
| $P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_6$ |
| $P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_7$ |

# 极小项的性质

## 3个变元极小项

- 对于3个命题变元$P, Q, R$，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

| 极小项 | 所有指派 | 唯一指派 | 标记 |
|---|---|---|---|
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **000** | $m_0$ |
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **001** | $m_1$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **010** | $m_2$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **011** | $m_3$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **100** | $m_4$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **101** | $m_5$ |
| $P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_6$ |
| $P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_7$ |

# 极小项的性质

## 3个变元极小项

- 对于3个命题变元$P, Q, R$，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

| 极小项 | 所有指派 | 唯一指派 | 标记 |
|---|---|---|---|
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **000** | $m_0$ |
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **001** | $m_1$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **010** | $m_2$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **011** | $m_3$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **100** | $m_4$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **101** | $m_5$ |
| $P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_6$ |
| $P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_7$ |

# 极小项的性质

## 3个变元极小项

- 对于3个命题变元$P, Q, R$，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

| 极小项 | 所有指派 | 唯一指派 | 标记 |
|---|---|---|---|
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **000** | $m_0$ |
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **001** | $m_1$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **010** | $m_2$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **011** | $m_3$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **100** | $m_4$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **101** | $m_5$ |
| $P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_6$ |
| $P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_7$ |

# 极小项的性质

## 3个变元极小项

- 对于3个命题变元$P, Q, R$，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

| 极小项 | 所有指派 | 唯一指派 | 标记 |
|---|---|---|---|
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **000** | $m_0$ |
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **001** | $m_1$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **010** | $m_2$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **011** | $m_3$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **100** | $m_4$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **101** | $m_5$ |
| $P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_6$ |
| $P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_7$ |

# 极小项的性质

## 3个变元极小项

- 对于3个命题变元$P, Q, R$，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

| 极小项 | 所有指派 | 唯一指派 | 标记 |
|---|---|---|---|
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **000** | $m_0$ |
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **001** | $m_1$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **010** | $m_2$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **011** | $m_3$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **100** | $m_4$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **101** | $m_5$ |
| $P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_6$ |
| $P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_7$ |

# 极小项的性质

## 3个变元极小项

- 对于3个命题变元$P, Q, R$，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

| 极小项 | 所有指派 | 唯一指派 | 标记 |
|---|---|---|---|
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **000** | $m_0$ |
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **001** | $m_1$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **010** | $m_2$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **011** | $m_3$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **100** | $m_4$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **101** | $m_5$ |
| $P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_6$ |
| $P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_7$ |

# 极小项的性质

## 3个变元极小项

- 对于3个命题变元$P, Q, R$，共有$2^3 = 8$个极小项；
- 对于每个极小项，有且仅有一个指派使之真值为真。
- 标记法：用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标。

| 极小项 | 所有指派 | 唯一指派 | 标记 |
|---|---|---|---|
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **000** | $m_0$ |
| $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **001** | $m_1$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **010** | $m_2$ |
| $\neg P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **011** | $m_3$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **100** | $m_4$ |
| $P \wedge \neg Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **101** | $m_5$ |
| $P \wedge Q \wedge \neg R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_6$ |
| $P \wedge Q \wedge R$ | $000 \sim 111$ | **110** | $m_7$ |

# n个变元的极小项

## $n$个变元的极小项

- $n$个变元$P_1, P_2, ..., P_n$的极小项共$2^n$项：

$$m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$$

$$m_1: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$m_{2^n-1}: P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

## 极小项性质

- 极小项的下标对应的指派，唯一使得该极小项真值为1。

# n个变元的极小项

## $n$个变元的极小项

- $n$个变元$P_1, P_2, ..., P_n$的极小项共$2^n$项：

$m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$

$m_1: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$

......

$m_{2^n-1}: P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$

## 极小项性质

- 极小项的下标对应的指派，唯一使得该极小项真值为1。

# n个变元的极小项

## $n$个变元的极小项

- $n$个变元$P_1, P_2, ..., P_n$的极小项共$2^n$项：

$$m_0:\quad \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$$

$$m_1:\quad \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$m_{2^n-1}:\quad P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

## 极小项性质

- 极小项的下标对应的指派，唯一使得该极小项真值为1。

# n个变元的极小项

## $n$个变元的极小项

- $n$个变元$P_1, P_2, ..., P_n$的极小项共$2^n$项：

$$m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$$

$$m_1: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$m_{2^n-1}: P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

## 极小项性质

- 极小项的下标对应的指派，唯一使得该极小项真值为1。

# n个变元的极小项

## $n$个变元的极小项

- $n$个变元$P_1, P_2, ..., P_n$的极小项共$2^n$项：

$$m_0: \ \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$$

$$m_1: \ \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$m_{2^n-1}: \ P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

## 极小项性质

- 极小项的下标对应的指派，唯一使得该极小项真值为$1$。

# n个变元的极小项

## $n$个变元的极小项

- $n$个变元$P_1, P_2, \ldots, P_n$的极小项共$2^n$项：

$$m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \ldots \wedge \neg P_n$$

$$m_1: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$m_{2^n-1}: P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$$

## 极小项性质

- 极小项的下标对应的指派，唯一使得该极小项真值为1。

# 主析取范式

**Definition 主析取范式**

- 一个公式称之为公式$A$的主析取范式，当且仅当，其与公式$A$逻辑恒等，且由极小项之和组成。

**Example**

- 公式$P \leftrightarrow Q$的主析取范式：

$$
\begin{aligned}
P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\
&\Leftrightarrow m_3 \vee m_0 \\
&\Leftrightarrow \Sigma(0,\ 3)
\end{aligned}
$$

# 主析取范式

## Definition主析取范式

- 一个公式称之为公式$A$的主析取范式，当且仅当，其与公式$A$逻辑恒等，且由极小项之和组成。

## Example

- 公式$P \leftrightarrow Q$的主析取范式：

$$
\begin{aligned}
P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\
&\Leftrightarrow m_3 \vee m_0 \\
&\Leftrightarrow \Sigma(0,\ 3)
\end{aligned}
$$

# 主析取范式

## Definition 主析取范式

- 一个公式称之为公式$A$的主析取范式，当且仅当，其与公式$A$逻辑恒等，且由极小项之和组成。

## Example

- 公式$P \leftrightarrow Q$的主析取范式：

$$
\begin{aligned}
P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\
&\Leftrightarrow m_3 \vee m_0 \\
&\Leftrightarrow \Sigma(0,\ 3)
\end{aligned}
$$

# 主析取范式的求解

## 公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法：$A \Leftrightarrow$析取范式$\Leftrightarrow$主析取范式
  1. 去掉析取范式中的永假的基本积；
  2. 合并相同的变元（变元的否定）和基本积；
  3. 对每个基本积补入未出现的命题变元，再展开化简至主析取范式。
- 真值表法

# 主析取范式的求解

## 公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法：$A \Leftrightarrow$析取范式$\Leftrightarrow$主析取范式
  1. 去掉析取范式中的永假的基本积；
  2. 合并相同的变元（变元的否定）和基本积；
  3. 对每个基本积补入未出现的命题变元，再展开化简至主析取范式。
- 真值表法

# 主析取范式的求解

## 公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法：$A \Leftrightarrow$析取范式$\Leftrightarrow$主析取范式
  1. 去掉析取范式中的永假的基本积；
  2. 合并相同的变元（变元的否定）和基本积；
  3. 对每个基本积补入未出现的命题变元，再展开化简至主析取范式。
- 真值表法

# 主析取范式的求解

## 公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法：$A \Leftrightarrow$析取范式$\Leftrightarrow$主析取范式
  1. 去掉析取范式中的永假的基本积；
  2. 合并相同的变元（变元的否定）和基本积；
  3. 对每个基本积补入未出现的命题变元，再展开化简至主析取范式。
- 真值表法

# 主析取范式的求解

## 公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法：$A \Leftrightarrow$析取范式$\Leftrightarrow$主析取范式
  1. 去掉析取范式中的永假的基本积；
  2. 合并相同的变元（变元的否定）和基本积；
  3. 对每个基本积补入未出现的命题变元，再展开化简至主析取范式。
- 真值表法

# 主析取范式求解-例题

## 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式$A$的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R && \text{(补入)}\\
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R\\
&\quad \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R && \text{(展开)}\\
&\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 && \text{(极小项标记)}\\
&\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 && \text{(化简)}\\
&\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)
\end{aligned}
$$

001仅使$m_1$为真 | 011仅使$m_3$为真 | 101 | 110 | 111

## 思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

# 主析取范式求解-例题

## 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式$A$的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad (\text{补入})$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad (\text{展开})$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad (\text{极小项标记})$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad (\text{化简})$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使$m_1$为真 | 011仅使$m_3$为真 | 101 | 110 | 111

## 思考：求出的主析取范式是否是惟一的？（考虑极小项的性质）

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

# 主析取范式求解-例题

## 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式$A$的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使$m_1$为真 011仅使$m_3$为真 101 110 111

## 思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

# 主析取范式求解-例题

## 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式$A$的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使$m_1$为真 | 011仅使$m_3$为真 | 101 | 110 | 111

思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

# 主析取范式求解-例题

## 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式$A$的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \quad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使$m_1$为真 | 011仅使$m_3$为真 | 101 | 110 | 111

## 思考：求出的主析取范式是否是惟一的？（考虑极小项的性质）

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

# 主析取范式求解-例题

## 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式$A$的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使$m_1$为真 011仅使$m_3$为真 101 110 111

## 思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

# 主析取范式求解-例题

## 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式$A$的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使$m_1$为真 011仅使$m_3$为真 101 110 111

## 思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

# 主析取范式求解-例题

## 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式$A$的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \quad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$$

001仅使$m_1$为真 011仅使$m_3$为真 101 110 111

## 思考：求出的主析取范式是否是惟一的？（考虑极小项的性质）

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

# 主析取范式求解-例题

## 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式$A$的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \quad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$$

001仅使$m_1$为真 011仅使$m_3$为真 101 110 111

## 思考：求出的主析取范式是否是惟一的?(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

# 主析取范式求解-例题

## 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式$A$的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使$m_1$为真 | 011仅使$m_3$为真 | 101 | 110 | 111

## 思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

# 主析取范式求解-例题

## 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式$A$的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \quad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使$m_1$为真 | 011仅使$m_3$为真 | 101 | 110 | 111

## 思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

# 主析取范式求解-例题

## 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式$A$的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \quad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

001仅使$m_1$为真 | 011仅使$m_3$为真 | 101 | 110 | 111

## 思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

# 主析取范式求解-例题

## 恒等变换法

- 用恒等变换法求公式$A$的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \quad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$$

001仅使$m_1$为真 | 011仅使$m_3$为真 | 101 | 110 | 111

## 思考：求出的主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真。

# 主析取范式的惟一性

## Remark

- 主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)
- 极小项的性质：有且仅有一个指派使得某个极小项真值为1。
- 公式$A$的主析取范式中，出现的极小项的下标对应的二进制编码，就是使得公式真值为1的指派；未出现的极小项的下标对应于使公式真值为0的指派。
- 结论：公式的主析取范式是惟一的。

# 主析取范式的惟一性

## Remark

- 主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)
- 极小项的性质：有且仅有一个指派使得某个极小项真值为1。
- 公式$A$的主析取范式中，出现的极小项的下标对应的二进制编码，就是使得公式真值为1的指派；未出现的极小项的下标对应于使公式真值为0的指派。
- 结论：公式的主析取范式是惟一的。

# 主析取范式的惟一性

**Remark**

- 主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)
- 极小项的性质：有且仅有一个指派使得某个极小项真值为1。
- 公式$A$的主析取范式中，出现的极小项的下标对应的二进制编码，就是使得公式真值为1的指派；未出现的极小项的下标对应于使公式真值为0的指派。
- 结论：公式的主析取范式是惟一的。

# 主析取范式的惟一性

**Remark**

- 主析取范式是否是惟一的？(考虑极小项的性质)
- 极小项的性质：有且仅有一个指派使得某个极小项真值为$1$。
- 公式$A$的主析取范式中，出现的极小项的下标对应的二进制编码，就是使得公式真值为$1$的指派；未出现的极小项的下标对应于使公式真值为$0$的指派。
- 结论：公式的主析取范式是惟一的。

# 主析取范式求解-例题（二）

## 真值表法求公式的主析取范式

- 用真值表法求公式$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$的主析取范式。

| | $P$ | $Q$ | $R$ | $P \wedge Q \vee R$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## 真值表法

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

  $\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$
- 使得公式真值为1的指派，对应于公式$A$的主析取范式中的某个极小项的下标。

# 主析取范式求解-例题（二）

## 真值表法求公式的主析取范式

- 用真值表法求公式$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$的主析取范式。

| | $P$ | $Q$ | $R$ | $P \wedge Q \vee R$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## 真值表法

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

  $\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$
- 使得公式真值为1的指派，对应于公式$A$的主析取范式中的某个极小项的下标。

# 主析取范式求解-例题（二）

## 真值表法求公式的主析取范式

- 用真值表法求公式$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$的主析取范式。

| | $P$ | $Q$ | $R$ | $P \wedge Q \vee R$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## 真值表法

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

  $\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$
- 使得公式真值为1的指派，对应于公式$A$的主析取范式中的某个极小项的下标。

# 主析取范式求解-例题（二）

## 真值表法求公式的主析取范式

- 用真值表法求公式$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$的主析取范式。

| | $P$ | $Q$ | $R$ | $P \wedge Q \vee R$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## 真值表法

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

  $\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$
- 使得公式真值为1的指派，对应于公式$A$的主析取范式中的某个极小项的下标。

# 主析取范式个数

## 问题

- $n$个变元的命题公式可以有无限多个，但一共有多少个不同的主析取范式呢?

## 分析

- 已知对于$n$个变元，有$2^n$个极小项；
- 对任一个主析取范式，可能含有的某个极小项，或者不含有某个极小项；
- 所以，一共可构造$\boxed{2^{2^n}}$个主析取范式。

# 主析取范式个数

**问题**

- $n$个变元的命题公式可以有无限多个，但一共有多少个不同的主析取范式呢？

**分析**

- 已知对于$n$个变元，有$2^n$个极小项；
- 对任一个主析取范式，可能含有的某个极小项，或者不含有某个极小项；
- 所以，一共可构造$2^{2^n}$个主析取范式。

# 主析取范式个数

**问题**

- $n$个变元的命题公式可以有无限多个，但一共有多少个不同的主析取范式呢?

**分析**

- 已知对于$n$个变元，有$2^n$个极小项；
- 对任一个主析取范式，可能含有的某个极小项，或者不含有某个极小项；
- 所以，一共可构造$2^{2^n}$个主析取范式。

# 主析取范式个数

## 问题

- $n$个变元的命题公式可以有无限多个，但一共有多少个不同的主析取范式呢?

## 分析

- 已知对于$n$个变元，有$2^n$个极小项；
- 对任一个主析取范式，可能含有的某个极小项，或者不含有某个极小项；
- 所以，一共可构造$\boxed{2^{2^n}}$个主析取范式。

# 主析取范式个数

**问题**

- $n$个变元的命题公式可以有无限多个，但一共有多少个不同的主析取范式呢?

**分析**

- 已知对于$n$个变元，有$2^n$个极小项；
- 对任一个主析取范式，可能含有的某个极小项，或者不含有某个极小项；
- 所以，一共可构造$\boxed{2^{2^n}}$个主析取范式。

# 主析取范式个数-例

**例**

- $n=1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1}=4$个：
  1. $\Sigma(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ （不含任何极小项）
  2. $\Sigma(0) \Leftrightarrow \neg P$
  3. $\Sigma(1) \Leftrightarrow P$
  4. $\Sigma(0,1) \Leftrightarrow \neg P \vee P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ （含所有极小项）
- $n=2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2}=16$个；
- $n=3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3}=256$个；

# 主析取范式个数-例

**例**

- $n=1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1}=4$个：
  1. $\Sigma(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ （不含任何极小项）
  2. $\Sigma(0) \Leftrightarrow \neg P$
  3. $\Sigma(1) \Leftrightarrow P$
  4. $\Sigma(0,1) \Leftrightarrow \neg P \vee P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ （含所有极小项）
- $n=2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2}=16$个；
- $n=3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3}=256$个；

# 主析取范式个数-例

**例**

- $n=1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1}=4$个：
  1. $\Sigma(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ (不含任何极小项)
  2. $\Sigma(0) \Leftrightarrow \neg P$
  3. $\Sigma(1) \Leftrightarrow P$
  4. $\Sigma(0,1) \Leftrightarrow \neg P \vee P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (含所有极小项)
- $n=2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2}=16$个；
- $n=3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3}=256$个；

# 主析取范式个数-例

**例**

- $n = 1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1} = 4$个：
  1. $\Sigma(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ （不含任何极小项）
  2. $\Sigma(0) \Leftrightarrow \neg P$
  3. $\Sigma(1) \Leftrightarrow P$
  4. $\Sigma(0,1) \Leftrightarrow \neg P \vee P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ （含所有极小项）
- $n = 2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2} = 16$个；
- $n = 3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3} = 256$个；

# 主析取范式个数-例

**例**

- $n=1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1}=4$个：
  1. $\Sigma(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ (不含任何极小项)
  2. $\Sigma(0) \Leftrightarrow \neg P$
  3. $\Sigma(1) \Leftrightarrow P$
  4. $\Sigma(0,1) \Leftrightarrow \neg P \vee P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (含所有极小项)
- $n=2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2}=16$个；
- $n=3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3}=256$个；

# 主析取范式个数-例

**例**

- $n=1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1}=4$个：
  1. $\Sigma(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ (不含任何极小项)
  2. $\Sigma(0) \Leftrightarrow \neg P$
  3. $\Sigma(1) \Leftrightarrow P$
  4. $\Sigma(0,1) \Leftrightarrow \neg P \vee P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (含所有极小项)
- $n=2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2}=16$个；
- $n=3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3}=256$个；

## 主析取范式个数-例

**例**

- $n=1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1}=4$个：
  1. $\Sigma(\emptyset)\Leftrightarrow\mathbb{F}$ （不含任何极小项）
  2. $\Sigma(0)\Leftrightarrow\neg P$
  3. $\Sigma(1)\Leftrightarrow P$
  4. $\Sigma(0,1)\Leftrightarrow\neg P\vee P\Leftrightarrow\mathbb{T}$ （含所有极小项）
- $n=2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2}=16$个；
- $n=3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3}=256$个；

# 主析取范式和主合取范式-对偶性

## Canonical Forms

- 主析取范式-Canonical Disjunctive Normal Form (CDNF)
- 主合取范式-Canonical Conjunctive Normal Form (CCNF)

| 主析取范式 | 主合取范式 |
|---|---|
| 基本积 | 基本和 |
| 析取范式(基本积之和) | 合取范式(基本和之积) |
| 极小项<br>$n$个变元有$2^n$个极小项<br>其下标使该极小项为真 | 极大项<br>$n$个变元有$2^n$个极大项<br>其下标使该极大项为假 |
| 主析取范式是极小项的和 | 主合取范式是极大项的积 |
| 求主析取范式的方法 | 求主合取范式的方法 |
| 其中的所有的极小项的下标对应使该公式为真的解释 | 其中的所有的极大项的下标对应使该公式为假的解释 |

# 主析取范式和主合取范式-对偶性

## Canonical Forms

- 主析取范式-Canonical Disjunctive Normal Form (CDNF)
- 主合取范式-Canonical Conjunctive Normal Form (CCNF)

| 主析取范式 | 主合取范式 |
|---|---|
| 基本积 | 基本和 |
| 析取范式(基本积之和) | 合取范式(基本和之积) |
| 极小项<br>$n$个变元有$2^n$个极小项<br>其下标使该极小项为真 | 极大项<br>$n$个变元有$2^n$个极大项<br>其下标使该极大项为假 |
| 主析取范式是极小项的和 | 主合取范式是极大项的积 |
| 求主析取范式的方法 | 求主合取范式的方法 |
| 其中的所有的极小项的下标对应使该公式为真的解释 | 其中的所有的极大项的下标对应使该公式为假的解释 |

# 极小项、极大项性质

**极小项**

- $n$个变元可以构成$2^n$个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为1；
- 任意两个极小项的合取式真值永为0；
- 全体极小项的析取式真值永为1。

**极大项**

- $n$个变元可以构成$2^n$个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为0；
- 任意两个极大项的析取式真值永为1；
- 全体极大项的合取式真值永为0。

# 极小项、极大项性质

### 极小项

- $n$个变元可以构成$2^n$个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为$1$；
- 任意两个极小项的合取式真值永为$0$；
- 全体极小项的析取式真值永为$1$。

### 极大项

- $n$个变元可以构成$2^n$个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为$0$；
- 任意两个极大项的析取式真值永为$1$；
- 全体极大项的合取式真值永为$0$。

# 极小项、极大项性质

### 极小项

- $n$个变元可以构成$2^n$个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为$1$；
- 任意两个极小项的合取式真值永为$0$；
- 全体极小项的析取式真值永为$1$。

### 极大项

- $n$个变元可以构成$2^n$个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为$0$；
- 任意两个极大项的析取式真值永为$1$；
- 全体极大项的合取式真值永为$0$。

# 极小项、极大项性质

## 极小项

- $n$个变元可以构成$2^n$个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为$1$；
- 任意两个极小项的合取式真值永为$0$；
- 全体极小项的析取式真值永为$1$。

## 极大项

- $n$个变元可以构成$2^n$个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为$0$；
- 任意两个极大项的析取式真值永为$1$；
- 全体极大项的合取式真值永为$0$。

# 极小项、极大项性质

**极小项**

- $n$个变元可以构成$2^n$个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为$1$；
- 任意两个极小项的合取式真值永为$0$；
- 全体极小项的析取式真值永为$1$。

**极大项**

- $n$个变元可以构成$2^n$个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为$0$；
- 任意两个极大项的析取式真值永为$1$；
- 全体极大项的合取式真值永为$0$。

# 极小项、极大项性质

## 极小项

- $n$个变元可以构成$2^n$个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为$1$；
- 任意两个极小项的合取式真值永为$0$；
- 全体极小项的析取式真值永为$1$。

## 极大项

- $n$个变元可以构成$2^n$个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为$0$；
- 任意两个极大项的析取式真值永为$1$；
- 全体极大项的合取式真值永为$0$。

# 极小项、极大项性质

## 极小项

- $n$个变元可以构成$2^n$个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为$1$；
- 任意两个极小项的合取式真值永为$0$；
- 全体极小项的析取式真值永为$1$。

## 极大项

- $n$个变元可以构成$2^n$个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为$0$；
- 任意两个极大项的析取式真值永为$1$；
- 全体极大项的合取式真值永为$0$。

# 极小项、极大项性质

## 极小项

- $n$个变元可以构成$2^n$个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为$1$；
- 任意两个极小项的合取式真值永为$0$；
- 全体极小项的析取式真值永为$1$。

## 极大项

- $n$个变元可以构成$2^n$个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，惟一使得其真值为$0$；
- 任意两个极大项的析取式真值永为$1$；
- 全体极大项的合取式真值永为$0$。

# 主合取范式求解例题

## 恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad (补入)$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad (展开)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad (化简)$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

## 恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \qquad (补入)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \qquad (展开化简)$$

$$\Leftrightarrow M_0 \vee M_2 \vee M_4 \Leftrightarrow \Pi(0,2,4) \qquad (标记)$$

# 主合取范式求解例题

## 恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R$ (补入)

$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$

$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R$ (展开)

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$ (化简)

$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$

## 恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)})$ (补入)

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$ (展开化简)

$\Leftrightarrow M_0 \vee M_2 \vee M_4 \Leftrightarrow \Pi(0, 2, 4)$ (标记)

# 主合取范式求解例题

## 恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R$ **(补入)**

$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$

$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R$ (展开)

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$ (化简)

$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$

## 恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)})$ (补入)

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$ (展开化简)

$\Leftrightarrow M_0 \vee M_2 \vee M_4 \Leftrightarrow \Pi(0, 2, 4)$ (标记)

# 主合取范式求解例题

## 恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

## 恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \quad \text{(展开化简)}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \vee M_2 \vee M_4 \Leftrightarrow \Pi(0,2,4) \quad \text{(标记)}$$

# 主合取范式求解例题

## 恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

## 恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \quad \text{(展开化简)}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \vee M_2 \vee M_4 \Leftrightarrow \Pi(0,2,4) \quad \text{(标记)}$$

# 主合取范式求解例题

## 恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$$

## 恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \qquad \text{(展开化简)}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \vee M_2 \vee M_4 \Leftrightarrow \Pi(0, 2, 4) \qquad \text{(标记)}$$

# 主合取范式求解例题

## 恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R$ (补入)

$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$

$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R$ (展开)

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$ (化简)

$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$

## 恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)})$ (补入)

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$ (展开化简)

$\Leftrightarrow M_0 \vee M_2 \vee M_4 \Leftrightarrow \Pi(0,2,4)$ (标记)

# 主合取范式求解例题

## 恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$$

## 恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \quad \text{(展开化简)}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \vee M_2 \vee M_4 \Leftrightarrow \Pi(0, 2, 4) \quad \text{(标记)}$$

# 主合取范式求解例题

## 恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$$

## 恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \quad \text{(展开化简)}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \vee M_2 \vee M_4 \Leftrightarrow \Pi(0, 2, 4) \quad \text{(标记)}$$

# 主合取范式求解例题

## 恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$

## 恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ (合取范式)

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \quad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \quad \text{(展开化简)}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \vee M_2 \vee M_4 \Leftrightarrow \Pi(0,2,4) \quad \text{(标记)}$$