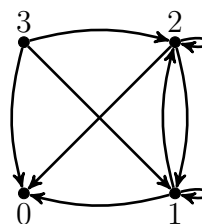
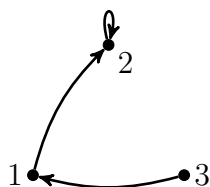


武汉大学计算机学院 《离散数学》第四次练习

§4.1.2 画出下列关系的关系图，并写出关系矩阵：

(1) $A = \{1, 2, 3\}, R = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\};$

(2) $A = \{0, 1, 2, 3\}, R = \{\langle x, y \rangle \mid x \leq 2 \wedge y \geq 1\};$



§4.1.3 设 $|A| = n$ ，则 A 上的不同的一元、二元关系分别又多少个？ A 上的不同的 m 元关系有多少个？

(1) 一元关系： 2^n ；

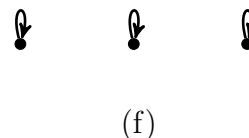
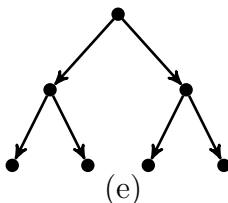
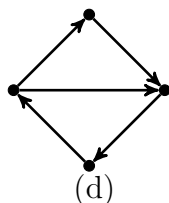
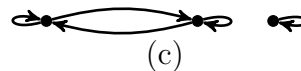
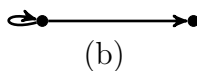
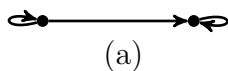
(2) 二元关系： 2^{n^2} ；

(3) m 元关系： 2^{n^m} . □

§4.1.4 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, n \in \mathbb{Z}_+$ ，则 A 上的含元素最少的二元关系是什么？ A 上的含元素最多的二元关系是什么？

解：最少元素的二元关系为空关系 \emptyset ，而最多元素的二元关系为全域关系 A^2 .

§4.2.1 下图中关系分别满足哪些性质：



解：

关系序号	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
a	✓	✗	✗	✓	✓
b	✗	✗	✗	✓	✓
c	✓	✗	✓	✗	✓
d	✗	✓	✗	✓	✗
e	✗	✓	✗	✓	✗
f	✓	✗	✓	✓	✓

□

§4.2.2 设 A 是集合, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 是 A 上的二元关系:

$$R_1 = \{ \langle x, y \rangle \mid x + y = 10 \};$$

$$R_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid xy > 0 \};$$

$$R_3 = \{ \langle x, y \rangle \mid |x - y| = 6 \};$$

$$R_4 = \{ \langle x, y \rangle \mid |x| = |y| \};$$

$$R_5 = \{ \langle x, y \rangle \mid x + 3y = 12 \}.$$

试分析在下面两种情况下, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 的性质:

(1) $A = \{0, 1, 2, \dots, 12\};$

解:

关系	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1	✗	✗	✓	✗	✗
R_2	✗	✗	✓	✗	✓
R_3	✗	✓	✓	✗	✗
R_4	✓	✗	✓	✓	✓
R_5	✗	✗	✓	✗	✗

• R_3 无传递性, 因为 $\langle 0, 6 \rangle \in R_3 \wedge \langle 6, 12 \rangle \in R_3$, 但 $\langle 0, 12 \rangle \notin R_3$;

• R_5 无传递性, 因为 $\langle 12, 0 \rangle \in R_5 \wedge \langle 0, 4 \rangle \in R_5$, 但 $\langle 12, 4 \rangle \notin R_5$.

(2) $A = \mathbb{Z}.$

解:

关系	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1	✗	✗	✓	✗	✗
R_2	✗	✗	✓	✗	✓
R_3	✗	✓	✓	✗	✗
R_4	✓	✗	✓	✗	✓
R_5	✗	✗	✓	✗	✗

□

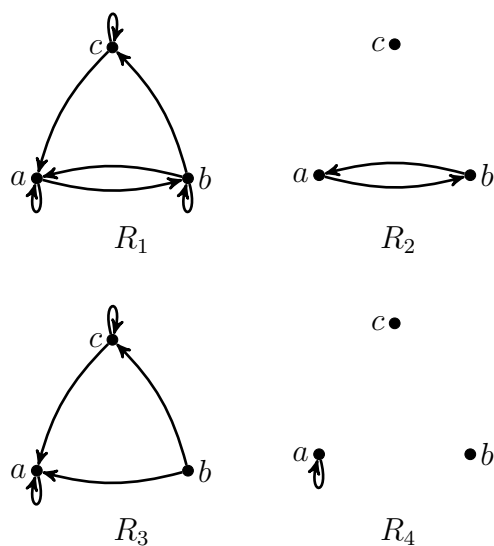
§4.2.5 设 $A = \{a, b, c\}$, $R_i \subseteq A \times A (i = 1, 2, 3, 4)$, 并且:

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{R_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{R_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

画出 $R_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的关系图, 并分析它们的性质.

解: 关系图如下所示:



关系的性质如下表所示:

关系序号	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1	✓	✗	✗	✗	✗
R_2	✗	✓	✓	✗	✗
R_3	✗	✗	✗	✓	✓
R_4	✗	✗	✓	✓	✓

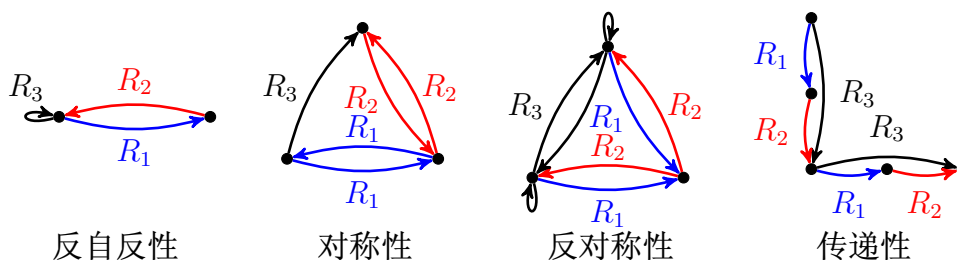
□

§4.3.2 设 A 是集合, $R_1, R_2 \in A^2$, 填写下表并举例说明:

解:

关系属性	$R_1 \cup R_2$	$R_1 \cap R_2$	$R_1 - R_2$	$A^2 - R_1$	$\widetilde{R_1}$	$R_1 \circ R_2$
自反性	T	T	F	F	T	T
反自反性	T	T	T	F	T	F
对称性	T	T	T	T	T	F
反对称性	F	T	T	F	T	F
传递性	F	T	F	F	T	F

$R_1 \circ R_2$ 的反例: (图中 $R_3 = R_1 \circ R_2$)



□

§4.3.4 设 $R, S \subseteq A \times A$, R 和 S 都是对称的. 证明 $R \circ S$ 是对称的当且仅当 $R \circ S = S \circ R$.

证明: R 和 S 都是对称的, 则 $\widetilde{R} = R \wedge \widetilde{S} = S$.

$$\begin{aligned}
 & R \circ S \text{ 是对称关系} \\
 \iff & \widetilde{R \circ S} = R \circ S \\
 \iff & \widetilde{S} \circ \widetilde{R} = R \circ S \\
 \iff & S \circ R = R \circ S
 \end{aligned}$$

§4.3.5 设 A 是集合, $R \subseteq A \times A$. 证明:

(1) R 是反自反关系当且仅当 $\mathbb{1}_A \cap R = \emptyset$;

R 是反自反关系

$$\iff \forall x \in A, \langle x, x \rangle \notin R$$

$$\iff \forall x \in A, \langle x, x \rangle \in \overline{R}$$

$$\iff \mathbb{1}_A \subseteq \overline{R}$$

$$\iff \mathbb{1}_A \cap \overline{\overline{R}} = \emptyset$$

$$\iff \mathbb{1}_A \cap R = \emptyset$$

(2) R 是反对称反关系当且仅当 $R \cap \tilde{R} \subseteq \mathbb{1}_A$;

R 是反对称关系

$$\iff \forall \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R, x = y$$

$$\iff \forall \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in \tilde{R}, x = y$$

$$\iff \forall \langle x, y \rangle \in R \cap \tilde{R}, \langle x, y \rangle \in \mathbb{1}_A$$

$$\iff R \cap \tilde{R} \subseteq \mathbb{1}_A$$

(3) R 是传递关系的充分必要条件是 $R^2 \subseteq R$.

证明: 必要性:

R 是传递关系

$$\implies t(R) = R$$

$$\implies \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R$$

$$\implies R^2 \subseteq R$$

充分性:

$$\begin{aligned}
& R^2 \subseteq R \\
\implies & R^3 = R^2 \circ R \subseteq R \circ R \subseteq R \\
\implies & \forall i \geq 2, R^i \subseteq R \\
\implies & R \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R \subseteq R \\
\implies & \bigcup_{i=1}^{\infty} R = R \\
\implies & R \text{ 是传递关系.}
\end{aligned}$$

§4.3.6 设 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的二元关系, 证明:

(1) $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2);$

证明: $r(R) = \mathbb{1}_A \cup R.$

$$\begin{aligned}
& r(R_1 \cup R_2) \\
&= \mathbb{1}_A \cup R_1 \cup R_2 \\
&= (\mathbb{1}_A \cup R_1) \cup (\mathbb{1}_A \cup R_2) \\
&= r(R_1) \cup r(R_2)
\end{aligned}$$

(2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2);$

证明: $s(R) = R \cup \widetilde{R}.$

$$\begin{aligned}
& s(R_1 \cup R_2) \\
&= R_1 \cup R_2 \cup \widetilde{R_1 \cup R_2} \\
&= R_1 \cup R_2 \cup \widetilde{R_1} \cup \widetilde{R_2} \\
&= (R_1 \cup \widetilde{R_1}) \cup (R_2 \cup \widetilde{R_2}) \\
&= s(R_1) \cup s(R_2)
\end{aligned}$$

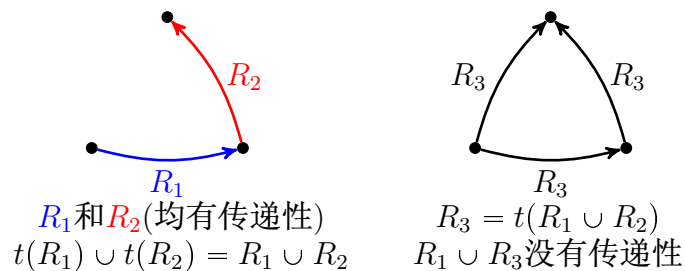
(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2);$

证明:

$\because R_1 \subseteq R_1 \cup R_2 \subseteq t(R_1 \cup R_2), \therefore t(R_1 \cup R_2)$ 是包含 R_1 的传递关系, 而 $t(R_1)$ 是包含 R_1 的最小传递关系, 故 $t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2);$ 同理 $t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2),$ 故 $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2).$

(4) 举反例证明: $t(R_1) \cup t(R_2) \neq t(R_1 \cup R_2)$;

反例:



□

§4.3.7 $R_1, R_2 \subseteq A \times A, A \neq \emptyset$. 证明:

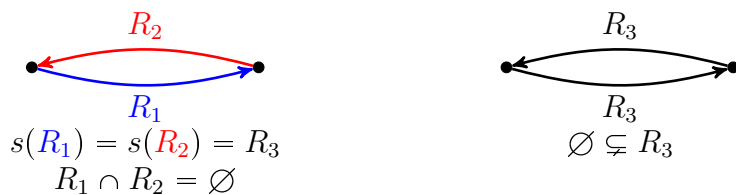
(2) $s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1) \cap s(R_2)$;

证明:

$$\begin{aligned}
 & s(R_1) \cap s(R_2) \\
 = & (R_1 \cup \widetilde{R_1}) \cap (R_2 \cup \widetilde{R_2}) \\
 = & (R_1 \cap R_2) \cup (\widetilde{R_1} \cap \widetilde{R_2}) \cup (R_1 \cap \widetilde{R_2}) \cup (\widetilde{R_1} \cap R_2) \\
 \supseteq & (R_1 \cap R_2) \cup (\widetilde{R_1} \cap \widetilde{R_2}) \\
 = & (R_1 \cap R_2) \cup \widetilde{R_1 \cap R_2} \\
 = & s(R_1 \cap R_2)
 \end{aligned}$$

(3) 举反例证明 $s(R_1 \cap R_2) \neq s(R_1) \cap s(R_2)$;

反例:



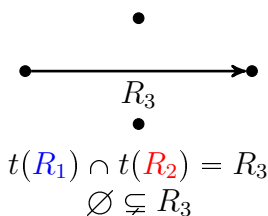
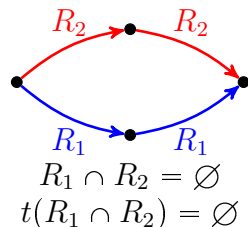
(4) $t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \cap t(R_2)$;

证明:

$$\begin{aligned}
 & R_1 \cap R_2 \subseteq R_1 \wedge R_1 \cap R_2 \subseteq R_2 \\
 \implies & \forall i > 0 (R_1 \cap R_2)^i \subseteq R_1^i \wedge (R_1 \cap R_2)^i \subseteq R_2^i \\
 \implies & \bigcup_{i=1}^{\infty} (R_1 \cap R_2)^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_1^i \wedge \bigcup_{i=1}^{\infty} (R_1 \cap R_2)^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_2^i \\
 \implies & t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \wedge t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_2) \\
 \implies & t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \cap t(R_2)
 \end{aligned}$$

(5) 举反例证明 $t(R_1 \cap R_2) \neq t(R_1) \cap t(R_2)$;

反例:



□

§4.3.9 设 A 是集合, $R \subseteq A^2$, 若 $\forall x \forall y \forall z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$, 则称 R 为反传递关系:

(1) 试举一反传递关系的例子;

例子: $A = \{a, b\}$, $R = \{\langle a, b \rangle\}$, 因为前提为假, 所以蕴涵式为真, 即满足反传递关系的条件.

(2) 证明: R 是反传递关系, iff, $R^2 \cap R = \emptyset$.

证明:

\implies 设 $\langle x, z \rangle \in R \cap R^2$, 则 $\exists y, xRy \wedge yRz$, 由于 R 是反传递关系, $\therefore xRz$, 矛盾; $\therefore R \cap R^2 = \emptyset$;

\Leftarrow 反证法: 设 R 不是反传递关系, 则:

$\exists x, y, z \in A \wedge xRy \wedge yRz \wedge xRz$, 这样 $xR^2z \wedge xRz$, 即 $\langle x, z \rangle \in R \cap R^2$, 与条件矛盾.

□

§4.4.1 设 A 是有 n 个元素的集合, 那么

(1) A 上的最大等价关系有多少个元素? 它的秩等于多少?

答: 全域关系 $A \times A$ 是 A 上的最大等价关系, 它的秩是 1;

(2) A 上的最小等价关系有多少个元素? 它的秩等于多少?

答: 恒等关系 1_A 是 A 上的最小等价关系, 它的秩是 n .

§4.4.2 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的等价关系, 下列关系是否等价关系, 不是请举反例说明:

(1) $A \times A - R_1$:

答: 不是, $\because 1_A \not\subseteq A \times A - R_1$;

(2) $R_1 - R_2$:

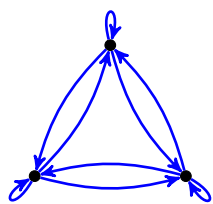
答: 不是, $\because 1_A \not\subseteq R_1 - R_2$;

(3) R_1^2 :

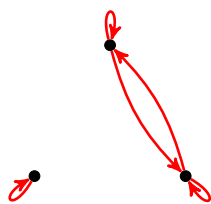
答: 是的, 因为 R 是等价关系, 则 $R^2 = R$;

(4) $r(R_1 - R_2)$:

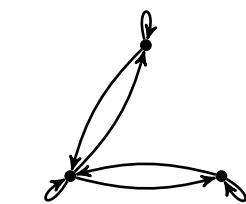
答: 不是, 反例如下:



R_1



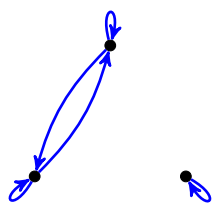
R_2



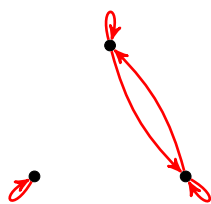
$r(R_1 - R_2)$ 无传递性

(5) $R_1 \circ R_2$:

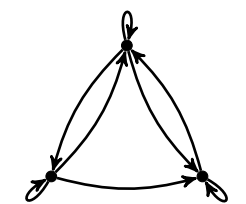
答: 不是, 反例如下:



R_1



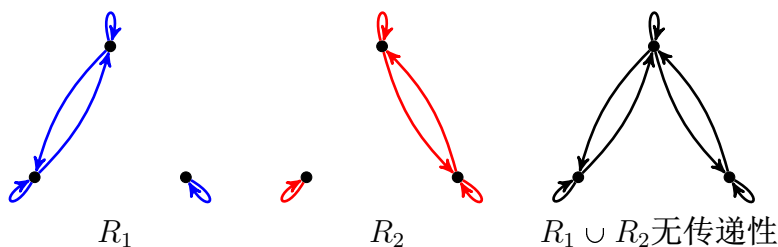
R_2



$R_1 \circ R_2$ 无对称性

(6) $R_1 \cup R_2$:

答: 不是, 反例如下:



□

§4.4.3 设 A 是集合, $R \subseteq A^2$, 若(1) R 是自反的; (2) R 是循环的, 即:

$$\forall x \forall y \forall z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow zRx)$$

则 R 是等价关系.

证明:

- (i) 对称性: 设 xRy , 根据 R 的自反性, yRy , $\therefore R$ 是循环关系, $\therefore yRx$, 对称性成立;
- (ii) 传递性: 设 $xRy \wedge yRz$, 则 zRx , 而由上得知 R 是对称的, $\therefore xRz$, 即 R 是传递关系.

□

§4.4.4 设 R_1 是 $A (\neq \emptyset)$ 上的自反和传递二元关系, $R_2 \subseteq A \times A$, 且满足

$$\langle x, y \rangle \in R_2 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1 \wedge \langle y, x \rangle \in R_1.$$

则 R_2 是 A 上的等价关系.

证明:

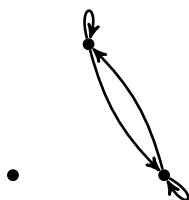
- (i) 对称性: $\because R_2 = R_1 \cap \widetilde{R_1}$, $\therefore \widetilde{R_2} = \widetilde{R_1 \cap \widetilde{R_1}} = \widetilde{R_1} \cap R_1 = R_2$, 即 R_2 是对称关系;
- (ii) 自反性: $\because R_1$ 是自反的, $\therefore 1_A \subseteq R_1 \wedge 1_A \subseteq \widetilde{R_1}$, 即 $1_A \subseteq R_1 \cap \widetilde{R_1} = R_2$, 故 R_2 是自反关系;
- (iii) 传递性: $\because R_1$ 和 $\widetilde{R_1}$ 是自反和传递关系, $\therefore R_1^2 = R_1 \wedge \widetilde{R_1}^2 = \widetilde{R_1}$. $\because R_1 \cap \widetilde{R_1}$ 是自反关系, $\therefore R_1 \cap \widetilde{R_1} \subseteq (R_1 \cap \widetilde{R_1})^2$; 而另一方面 $R_1 \cap \widetilde{R_1} \subseteq R_1$, $\therefore (R_1 \cap \widetilde{R_1})^2 \subseteq R_1^2$. 同理 $(R_1 \cap \widetilde{R_1})^2 \subseteq \widetilde{R_1}^2$. 即 $(R_1 \cap \widetilde{R_1})^2 \subseteq R_1 \cap \widetilde{R_1}$. 故 $(R_1 \cap \widetilde{R_1})^2 = R_1 \cap \widetilde{R_1}$, 及 R_2 是传递关系.

□

§4.4.5 有人说等价关系的定义中的自反性可以不要, 因为自反性可由对称性和传递性推出, 即 $aRb \implies bRa \implies aRa \wedge bRb$, 这个

推理正确吗? 为什么?

答: 不正确, 因为对任意的 a 可能不存在 b 使得 aRb , 这样的 a 就不能推出 aRa . 如下图的关系具有对称和传递性, 但是没有自反性.



□

§4.4.8 R 是 $A = \{1, 2, \dots, 6\}$ 上的等价关系:

$$R = 1_A \cup \{\langle 1, 5 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 6, 3 \rangle\}$$

求 R 诱导的划分 π .

解: $\pi = \{\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}\}$.

□

§4.4.10 设 π_1 和 π_2 是非空集合 A 上的划分, 下列哪些不是 A 的划分, 为什么?

(1) $\pi_1 \cup \pi_2$;

答: 不是, 求并后的集簇破坏了俩俩相交为空或相等的性质. 如 $A = \{1, 2, 3\}$, $\pi_1 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\pi_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$, 则在 $\pi_1 \cup \pi_2$ 中 $\{1\} \neq \{1, 2\} \cap \{1\} \cap \{1, 2\} \neq \emptyset$.

(2) $\pi_1 \cap \pi_2$;

答: 是, 设 $B \in \pi_1$, 根据习题§4.4.7有 $\{C \cap B \mid C \in \pi_2 \wedge C \cap B \neq \emptyset\}$ 是 B 的划分, 这样 $\bigcup_{B \in \pi_1} \{C \cap B \mid C \in \pi_2 \wedge C \cap B \neq \emptyset\}$ 是 A 的划分, 即 $\pi_1 \cap \pi_2$ 是 A 的划分.

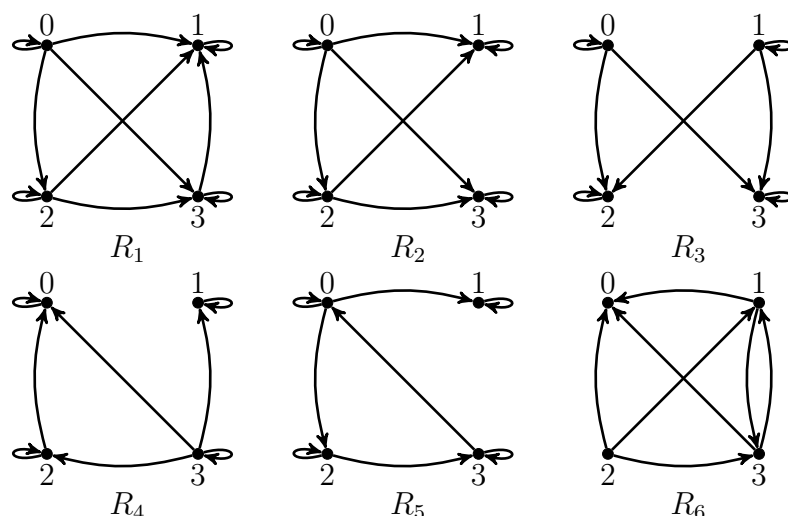
(3) $\pi_1 - \pi_2$;

答: 不是. 如果 $\pi_1 = \pi_2$, 则 $\pi_1 - \pi_2 = \emptyset$. 显然不是划分.

(4) $\pi_1 \cap (\pi_2 - \pi_1) \cup \pi_2$.

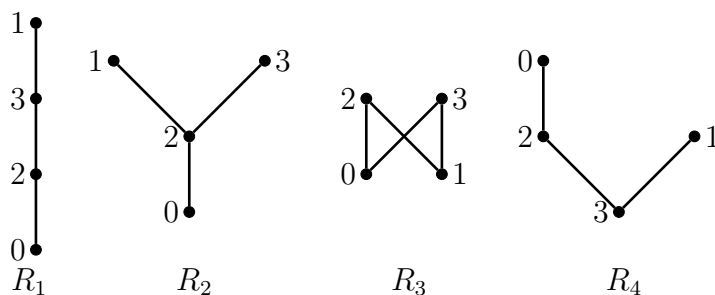
答: 是. $\because \pi_1 \cap (\pi_2 - \pi_1) \cup \pi_2 = \pi_2$.

§4.5.2 设 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $R_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 是 A 上的二元关系, 其关系图如下所示.



解:

(1) R_5, R_6 不是偏序关系, 其他的Hass图如下:



(2) 无拟序关系, R_1 是良序关系。

□

§4.5.4 $R \subseteq A^2$, $B \subseteq A$, $R' = R \cap B^2 \subseteq B^2$, 下列命题哪些是真?

(1) R 是偏序关系, 则 R' 也是;

答: 该命题为真. 可以验证 R' 作为 B 上的关系也满足自反性、反对称性和传递性; 注意 R' 如果作为 A 上的关系, 并且当 $B \subsetneq A$ 时, 则不满足自反性, 所以不是 A 上的偏序关系.

(2) R 是拟序关系, 则 R' 也是;

答: 该命题为真. 可以验证 R' 作为 B 上的关系也满足反对称性和传递性; 注意 R' 如果作为 A 上的关系, 并且当 $B \subsetneq A$ 时, 则不满足自反性, 所以不是 A 上的偏序关系.

(3) R 是全序关系, 则 R' 也是;

答: 该命题为假. 如 $A = \{0, 1, 2\}$, $0 \leq 1 \leq 2$, $B = \{0, 2\}$,
则 $R' = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$ 不是全序关系.

(4) R 是良序关系, 则 R' 也是;

~~答: 该命题为假. 因为不能保证全序.~~

□