武汉大学计算机学院
《离散数学》第三次练习

§3.1.4 判断下列命题的真伪：

(1) $\varnothing \in A$； ✘

(2) $\varnothing \subseteq A$； ✓

(3) $A \in \{A\}$； ✓

(4) $A \subseteq A$； ✓

(5) $A \in A$； ✘

(6) $A = \{A\}$； ✘

(7) $\varnothing = \{\varnothing\}$。 ✘

§3.3.1 证明下列各式：

(4) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$。
证明:

$$\begin{aligned} & A - (B \cap C) \\ = \ & A \cap \overline{B \cap C} \\ = \ & A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\ = \ & (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\ = \ & (A - B) \cup (A - C) \end{aligned}$$

(5) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$；
证明:

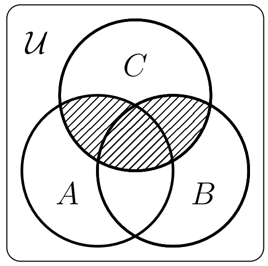
$$\begin{aligned} & (A - B) - C \\ = \ & (A - B) \cap \overline{C} \\ = \ & A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\ = \ & A \cap \overline{B \cup C} \\ = \ & A - (B \cup C) \end{aligned}$$

§3.3.4 化简下列各式：

(2) $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$；
解:

$$\begin{aligned} & ((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A) \\ = \ & (A \cup B) - A && \text{(吸收律)} \\ = \ & (A \cup B) \cap \overline{A} \\ = \ & B \cap \overline{A} \end{aligned}$$

(3) $(A \cap B \cap c) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$。
证明:该集合的文氏图如下：



$$
\begin{aligned}
& \text{原式} \\
= \ & (A \cap C) \cup (B \cap C) \\
= \ & (A \cup B) \cap C
\end{aligned}
$$

§3.3.5 给出下列各式成立的充分必要条件，并加以证明：

(1) $(A - B) \cup (A - C) = A$。
证明: $(A - B) \cup (A - C) = A \cap \overline{B \cap C}$

$$
\begin{aligned}
& A \cap \overline{B \cap C} = A \\
\Longleftrightarrow \quad & A \subseteq \overline{B \cap C} \\
\Longleftrightarrow \quad & A \cap \overline{\overline{B \cap C}} = \varnothing \\
\Longleftrightarrow \quad & A \cap B \cap C = \varnothing
\end{aligned}
$$

$$(\because A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cap \overline{B} = \varnothing)$$

(2) $(A - B) \cup (A - C) = \varnothing$。
证明:

$$
\begin{aligned}
& (A - B) \cup (A - C) = \varnothing \\
\Longleftrightarrow \quad & A \cap \overline{B \cap C} = \varnothing \\
\Longleftrightarrow \quad & A \subseteq B \cap C
\end{aligned}
$$

(3) $(A - B) \cap (A - C) = A$。
证明:

$$
\begin{aligned}
& (A - B) \cap (A - C) = A \\
\Longleftrightarrow \quad & A \cap \overline{B \cup C} = A \\
\Longleftrightarrow \quad & A \subseteq \overline{B \cup C} \\
\Longleftrightarrow \quad & A \cap (B \cup C)
\end{aligned}
$$

(7) $A \cap B = A \cup B$。
证明:
if $A \cap B = A \cup B$, then $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B = A \cap B$, hence $A = A \cap B$;
同理，$B = A \cap B$, 故$A = B$。$\therefore A = B$是$A \cap B = A \cup B$的必要条件。
if $A = B$, then $A \cap B = A \cup B = A = B$, $\therefore A = B$ 是$A \cap B = A \cup B$的充分条件。

(9) $A-B=B-A$。
证明:
if $A-B=B-A$, then $A\cap\overline{B}=B\cap\overline{A}$, hence $A\cap\overline{B}\cap A=B\cap\overline{A}\cap A$, 即$A\cap\overline{B}=\varnothing$，由此$A\subseteq B$; 同理，$A\subseteq B$, 故$A=B$。$\therefore A=B$是$A-B=B-A$的必要条件。
if $A=B$, then $A-B=A-B=\varnothing$, $\therefore A=B$ 是$A-B=B-A$的充分条件。

§3.3.6 给证明下列各式：

(2) $A\cap(\overline{A}\cup B)=A\cap B$。
证明:

$$\begin{aligned} & A\cap(\overline{A}\cup B) \\ = & (A\cap\overline{A})\cup(A\cap B) \\ = & \varnothing\cup(A\cap B) \\ = & A\cap B \end{aligned}$$

§3.4.4 对100名学生调查表明，有32人学日语，20人学法语，45人学英语，15人既学日语又学英语，7人既学日语又学法语，10人既学法语又学英语。30人这三门语言均不学。试求：

(1) 三门语言都学的学生人数；
解:
设学生集合为U, 学日语的学生集合为J，学法语的学生集合为F，学英语的学生集合为E，则$\left|U\right|=100$, $\left|J\right|=32$, $\left|F\right|=20$, $\left|E\right|=45$, $\left|J\cap E\right|=15$, $\left|J\cap F\right|=7$, $\left|F\cap E\right|=10$, $\left|U-(J\cup F\cup E)\right|=30$。这样至少学一门外语的人数$\left|J\cup F\cup E\right|=100-30=70$。
由容斥原理，$\left|J\cup F\cup E\right|=\left|J\right|+\left|F\right|+\left|E\right|-\left|J\cap F\right|-\left|J\cap E\right|-\left|E\cap F\right|+\left|J\cap F\cap E\right|$, $\therefore 70=32+20+45-15-7-10+\left|J\cap F\cap E\right|$, $\left|J\cap F\cap E\right|=5$

(2) 只学日语，只学法语，只学英语的须生人数；
解:
$\because |(J\cap F)\cup(J\cap E)|=|J\cap F|+|J\cap E|-|J\cap F\cap E|=7+15-5=17$,
$\therefore |J-(F\cup E)|=|J-(J\cap(F\cup E))|=|J-((J\cap F)\cup(J\cap E))|=32-17=15$;
$\because |(F\cap E)\cup(F\cap J)|=|F\cap E|+|F\cap J|-|J\cap F\cap E|=10+7-5=12$,
$\therefore |F-(J\cup E)|=|F-(F\cap(J\cup E))|=|F-((F\cap J)\cup(F\cap E))|=32-12=20$;
$\because |(E\cap F)\cup(E\cap J)|=|E\cap F|+|E\cap J|-|J\cap F\cap E|=10+15-5=20$,
$\therefore |F-(J\cup E)|=32-20=12$;

(3) 至少学习两们外语的学生人数。
$|(J\cap F)\cup(J\cap E)\cup(F\cap E)|=|J\cap F|+|J\cap E|+|F\cap E|-3|J\cap F\cap E|+|J\cap F\cap E|=|J\cap F|+|J\cap E|+|F\cap E|-2|J\cap F\cap E|=15+7+10-2*5=22$