20XX 级期末考试参考答案

一、 试求下述命题公式G的主析取和主合取范式： (10分)

$$P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$

主析取范式: $(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$;
主合取范式: $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$.

二、 试证明下列结论的有效性(**要求写证明序列**)： (12分，6+6)

(1) 前提：$P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q$, $P \rightarrow R$, $R \rightarrow \neg S$, 结论：$S \rightarrow Q$;
用$\boldsymbol{CP}$规则证明：

①	S	附加前提	⑥	$\neg P \vee Q$	⑤+加法式
②	$R \rightarrow \neg S$	引入前提	⑦	$\neg(P \wedge \neg Q)$	⑥+$\mathbb{T}$
③	$\neg R$	②+②+MT	⑧	$P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q$	引入前提
④	$P \rightarrow R$	引入前提	⑨	$\neg P \wedge Q$	⑦+⑧+析取三段论
⑤	$\neg P$	③+④+MT	⑩	Q	⑨+化简规则

(2) 前提：$\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$, $\exists x P(x)$, 结论：$\exists x(P(x) \wedge R(x))$
Proof

①	$\exists x P(x)$	引入前提	④	$P(a) \rightarrow (Q(a) \wedge R(a))$	③+US
②	$P(a)$	②+ES	⑤	$Q(a) \wedge R(a)$	②+④+MP
③	$\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))$	引入前提	⑥	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	⑤+EG

三、 设集合$A = \{0, 1, 2, 3\}$，设A上的二元关系$\mathcal{R} = \{\langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$：
(12分，4+4+4)

(1) 试问$\mathcal{R}$是否为自反关系，反自反关系，对称关系，反对称关系和传递关系；
解： $\mathcal{R}$为反自反关系，反对称关系和传递关系。

(2) 试求集合$\mathcal{B} = \{S \mid S$是A上的偏序关系, 且$\mathcal{R} \subseteq S\}$的基数；
解： 包含关系$\mathcal{R}$的偏序关系的$Hasse$图只可能形如“$|$”，“$\diamond$”或“$\times$”，并且$3, 1, 2$自底向上排列，这样将“0”放置在上述三个$Hasse$图的可能性分别是4, 1和2，故包含$\mathcal{R}$的偏序关系共有7个，即$|\mathcal{B}| = 7$ 。

(3) 试分别求出集合A上的对称关系和反对称关系的总数。
解：

① 对称关系: 考虑关系矩阵元素对m_{ij}和m_{ji}（$i \neq j$）取值的可能性为: $\langle 0, 0\rangle$, $\langle 1, 1\rangle$, 而m_{ii}的取值可能也是0, 1,故可以定义的对称关系数为$2^{4+3+2+1} = 1024$;

② 反对称关系: 考虑关系矩阵元素对m_{ij}和m_{ji}（$i \neq j$）取值的可能性为: $\langle 0,0\rangle$, $\langle 1,0\rangle$和$\langle 0,1\rangle$, 而m_{ii}的取值可能是0, 1,故可以定义的对称关系数为$3^{3+2+1} \times 2^4 = 11664$。

四、 设$\langle G,*\rangle$是一个群，$\mathcal{R}$是G上的二元关系，$\mathcal{R} = \{\langle x,y\rangle \mid \exists a \in G,\ 使得\ y = a * x * a^{-1}\}$，试证明：$R$是$G$上的等价关系。 (6分)

***Proof*:**

① 自反性：$x\mathcal{R}x$, $\because x = e * x * e^{-1}$;

② 对称性：设$x\mathcal{R}y$, 则$\exists a \in G$, $y = a * x * a^{-1}$, $\therefore x = a^{-1} * y * a = a^{-1} * y * (a^{-1})^{-1}$, 故$y\mathcal{R}x$;

③ 传递性：设$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$, 则$\exists a, b \in G \wedge y = \wedge y = a*x*a^{-1} \wedge z = b*y*b^{-1}$，$\therefore z = b * y * b^{-1} = b * a * x * a^{-1} * b^{-1} = (b * a) * x * (b * a)^{-1}$. 故$x\mathcal{R}z$.

五、 设集合$N_9 = \{0, 1, 2, \cdots, 7, 8\}$, $+_9$是模9加法，则$\langle N_9, +_9\rangle$是一个阶数为9的循环群: (14分，5+5+4)

(1) 试求群N_9所有的子群;
解： N_9, $\{0, 3, 6\}$ 和$\{0\}$;

(2) 试求群N_9每个元素的阶数
解： $|0| = 1$, $|1| = 9$, $|2| = 9$, $|3| = 3$, $|4| = 9$, $|5| = 9$, $|6| = 3$, $|7| = 9$, $|8| = 9$;

(3) 试求群N_9所有的生成元。
解： 6个生成元，分别是$1, 2, 4, 5, 7, 8$.

六、 设$G = \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,$ 其中$: a, b \in \mathbb{R},$ 且$a \neq 0\}$: (24分，每小题4分)

(1) 试证明：$\langle G, \circ\rangle$是一个群, 其中$\circ$是函数的合成运算;

***Proof*:**

① 运算是可结合的：函数的合成运算是可结合的;

② 运算的封闭性：设$\forall f, g \in G$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$ ($a \neq 0$, $c \neq 0$)，则$(f \circ g)(x) = acx + ad + b$, 即线性函数的合成还是线性函数，故$f \circ g \in G$;

③ 幺元：$\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x) = x = 1 \times x + 0$, 故合成运算的幺元$\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \in G$;

④ 逆元：$\forall f \in G$, $f(x) = ax + b (a \neq 0)$, 设函数$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$, 则$g \in G$，且$g \circ f = f \circ g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$, 故$G$中的每个元素都有逆元，并且逆元在$G$中;

(2) 设$N = \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x + b,$ 其中$: b \in \mathbb{R}\}$, 试证明$\langle N, \circ\rangle$ 是G的子群;

***Proof*:**

① 集合N非空：$\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \in N$;

② “差”运算的封闭性：设$f(x) = x+b$, $g(x) = x+d$，则$g^{-1}(x) = x-d$, $\therefore f \circ g^{-1}(x) = x + b - d$，故$f \circ g^{-1} \in N$;

③ 根据子群的等价定义有$N \leqslant G$。

(3) 试证明: N是S的正规子群; (**提示**：证明$\forall f\in G, fNf^{-1}\subseteq N$)

Proof:

① $\forall f\in G, fNf^{-1}\subseteq N$：$\forall f\in G,\ f(x)=ax+b,\ \forall g\in N,\ g(x)=x+d$；则$(f\circ g\circ f^{-1})(x)=(f\circ g)(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a})=f(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}+d)=x-b+ad+d$，即$f\circ g\circ f^{-1}\in N$，故$fNf^{-1}\subseteq N$；

② 根据正规子群的等价定义有$N\lhd G$.

(4) 试用性质法表示商群G/N；

解： $G/N=\{\{f\,|\,f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ b\in\mathbb{R}\}\,|\,a\in\mathbb{R}_+\}$

(5) 设$\mathbb{R}_+$是非零实数集合, 则$\langle\mathbb{R}_+,\times\rangle$构成一群, 设函数$\varphi: G\longrightarrow\mathbb{R}_+,\ \varphi(f)=a$, 其中$f(x)=ax+b$, 试证明函数$\varphi$是群$\langle G,\circ\rangle$到群$\langle\mathbb{R}_+,\times\rangle$上的满同态(满射+同态);

Proof:

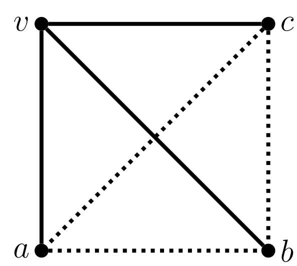
① 满射：$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \exists f\in G,\ f(x)=tx,\ \varphi(f)=t$；

② 同态：设$f,g\in G$，$f(x)=ax+b,\ g(x)=cx+d$, 则$(f\circ g)(x)=acx+ad+b$，$\therefore\varphi(f\circ g)=ac=\varphi(f)\times\varphi(g)$.

(6) 试证明G/N与$\mathbb{R}_+$同构。

Proof: $\ker(\varphi)=\varphi^{-1}(\{1\})=\{f\,|\,f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x+b, b\in\mathbb{R}\}=N$ （注：也可用此来证N是正规子群），根据同态标准分解定理：$G/\ker(\varphi)\cong\varphi(G)$，而$\varphi$是满射，即$\varphi(G)=\mathbb{R}_+$，$\ker(\varphi)=N$，故$G/N\cong\mathbb{R}_+$。

七、 设G是6个结点的简单无向图，证明：G含有一个K_3子图，或者G的补图含有一个K_3子图。 (6分)



Proof:

① 设v是K_6中的任一结点；则$\deg(v)=5$, 所以从v引出的5条边一定有三条边是属于G或三条边属于$\overline{G}$，不妨设三条边属于G, 如上图实线所示，记为(v,a), (v,b)和(v,c)；

② *if* (a,b), (b,c)和(c,a)其中之一属于G，如(a,b)，则(v,a,b,v)是一条属于G的基本回路，即G有K_3子图；否则：

③ (a,b), (b,c)和(c,a)三边均不属于G，如上图用虚线表示，则三角形$\triangle abc$是$\overline{G}$的子图，即$\overline{G}$有一个K_3的子图。

八、 完全二元树是每个结点的出度恰好等于2或者0的有向树。试证明：若完全二元树的树叶数为l，边数为m，则$m=2(l-1)$。 (10分)

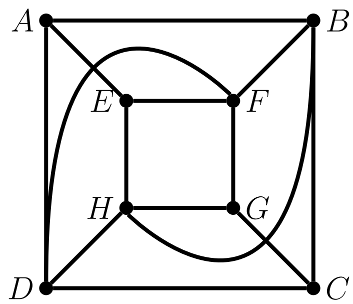
Proof: 对树叶数l用归纳法，

① $l=1$；完全二元树只可能是孤立点，即$m=0$，故$m=2(l-1)$；

② 归纳假设：设树叶数小于l的完全二元树满足公式；

③ 设T是完全二元树，T树叶数为l，边数为m，且$l > 1$，则T的树根一定有左右儿子，设T_1和T_2 分别是树根左右儿子对应的子树，则T_1和T_2也是完全二元树；设l_1和l_2分别是T_1和T_2对应树叶数，则$l_1 < l \wedge l_2 < l$，且$l_1 + l_2 = l$；设设m_1和m_2分别是T_1和T_2对应边数，则$m_1 + m_2 + 2 = m$；根据归纳假设有：$m_1 = 2(l_1 - 1)$，$m_2 = 2(l_2 - 1)$，两式左右分别相加有：$m_1 + m_2 = 2(l_1 + l_2 - 2)$，即$m_1 + m_2 + 2 = 2(l_1 + l_2 - 1)$，故$m = 2(l - 1)$。

九、 试证明下图不是平面图： (6分)



Proof1： 利用平面图的必要条件$m < \frac{p}{p-2}(n-2)$（其中p是最小基本回路的长度），有原图中$m = 14$，$n = 8$，$p = 4$，代入不等式有$14 < 2(8-2) = 12$，不等式不成立，故原图不是平面图。
Proof2： 用$Kuratowski$定理，删除结点A和E后，该图两度同构$K_{3,3}$（如下图所示），故原图不是平面图。