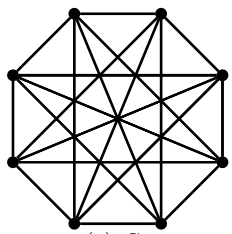
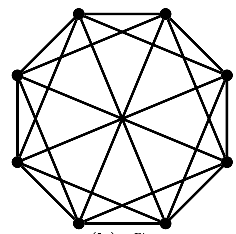
武汉大学计算机学院
《离散数学》第七次练习

§1 设G, H是简单有向图, 试证明$G \cong H$当且仅当$\overline{G} \cong \overline{H}$.

§2 利用上题的结果证明下述两图不同构：

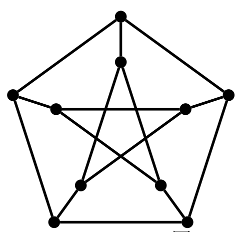


(a) G_1

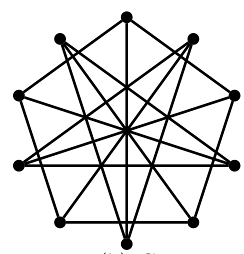


(b) G_2

§3 试证明下述两图同构：



(a) Petersen图

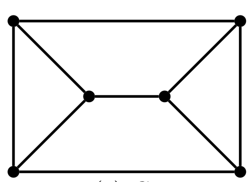


(b) G

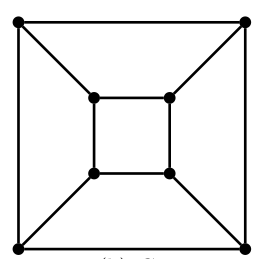
§4 试用图示的方式说明：

(1) G_1可分解3条没有共同边的且长度均为3的基本路径；

(2) G_2可分解4个没有共同边的星$K_{1,3}$, 也可分解为4条没有共同边的且长度均为3的基本路径.



(a) G_1



(b) G_2

§5 试用反正法证明Petersen图没有长度为7的基本回路.

§6 试证明围长不小于4的k正则图G至少有$2k$个结点. (提示：考虑边xy的端点x和y所对应的相邻结点集合$N(x) = \{ z \mid xz \in E \}$和$N(y)$)

§7 设G是非完全简单连通图，试证明对任意的结点$u \in V$，均存在$v, x \in V$使得$\{ u, x, v \}$导出的子图是P_3(3个结点的基本路径).

§8 设G是简单图. 试证明若$u, v \in V$有两条不同的路P和Q，则$P \cup Q$上一定存在一个基本回路.

§9 用反证法证明若n个结点的图G有n条边，则G一定有基本回路.

§10 设G是简单图，试用反证法证明G一定有条长度为δ的基本路径 (考虑最长路小于δ).

§11 设u, v是n阶简单图G的两个结点，设$uv \in E$. 试证明G中含有边uv的三角形至少有$\deg(u) + \deg(v) - n$个. (提示：考虑集合$N(u) - \{ v \}$和$N(v) - \{ u \}$, 利用集合容斥原理)

§12 设G是n阶简单图且$\delta \geqslant (n-1)/2$. 则G的直径不大于2.

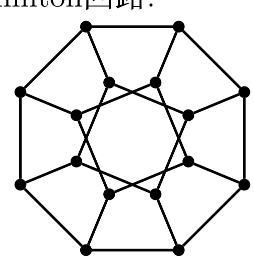
§13 设G是简单图且$\overline{G}$的直径大于或等于3，试证明G的小于或等于3.

§14 设有如下度序列，试判断它们是否可绘图，若可绘图，请画出相应的图.

(1) $5, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 1$;

(2) $5, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 1$.

§15 试为下图找出一条Hamilton回路.

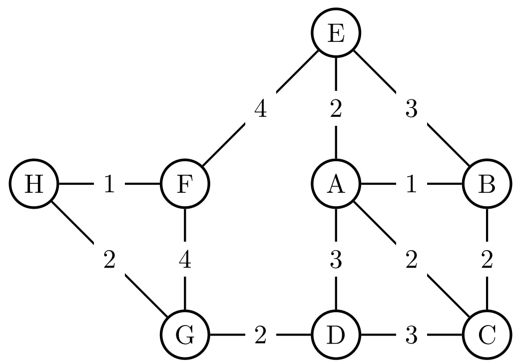


§16 设图G有Hamilton路径, 则对任意的结点子集合$S \subseteq V$有图$G - S$的连通分支数最多是$|S| + 1$.

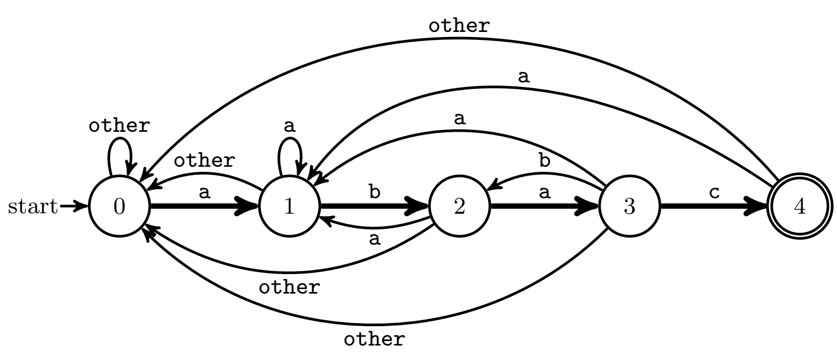
§17 试证明任意的竞赛图都存在Hamilton路径. (提示：用构造法. 从任意有向边作为需构造的Hamilton路径P. 若P不包含某个结点y, 则根据y和路上结点相邻边的方向的讨论，一定可在P上加一条与y相邻的边而得到一个更长的路路径)

§18 试证明$K_{n,n}(n \geqslant 2)$有$n!(n-1)!/2$条Hamilton回路.

§19 用Dijkstra算法求下图结点H到其他结点的最短距离:



$20 现需设计一个对任意的字符串查找是否有子串`abac`的函数`int match(char *s)`，如果发现有子串“`abac`”，则函数返回`1`，否则返回`0`. 常规算法是面对输入`acabac`, 首先用`acab`与需查找的串`abac`进行比较，若不成功再用`caba`, `abac`, 如此下去直到找到为止. 这需要对输入串进行多次扫描, 因而算法的效率不高. 不能用于对扫描时间要求特别苛刻的程序,如病毒的扫描等. 为此特设计如下状态图, 利用该图对输入仅一次扫描即可完成查找(详见KMP算法: `http://en.wikipedia.org/wiki/Knuth-Morris-Pratt_algorithm`):



(1) 将上述状态图转换为流程图；

(2) 利用C语言的控制流结构实现函数`int match(char *s)`.