

## 20XX 《离散数学》 考试标准答案

一、 试求下述命题公式 $G$ 的主析取和主合取范式: (10分)

$$(P \rightarrow Q \vee R) \wedge (R \rightarrow \neg P)$$

主析取范式:  $(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$ ;

主合取范式:  $(\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$ .

二、 试证明下列结论的有效性(要求写证明序列): (10分, 5+5)

(1) 前提:  $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ ,  $R \rightarrow (S \rightarrow T)$ ,  $\neg U \rightarrow (S \wedge \neg T)$ , 结论:  $P \rightarrow (Q \rightarrow U)$  (提示: 用CP规则);

**用CP规则证明:**

① $P$	附加前提	⑦ $S \rightarrow T$	⑤ + ⑥ + MP
② $Q$	附加前提	⑧ $\neg S \vee T$	⑦ + T
③ $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	引入前提	⑨ $\neg(S \wedge \neg T)$	⑧ + T
④ $Q \rightarrow R$	① + ③ + MP	⑩ $\neg U \rightarrow (S \wedge \neg T)$	引入前提
⑤ $R$	② + ④ + MP	⑪ $\neg \neg U$	⑨ + ⑩ + MT
⑥ $R \rightarrow (S \rightarrow T)$	引入前提	⑫ $U$	⑪ + T

(2) 前提:  $\exists x \forall y Q(x, y)$ ,  $\forall x (Q(x, x) \rightarrow \exists y R(x, y))$ , 结论:  $\exists x \exists y R(x, y)$ .

**Proof**

① $\exists x \forall y Q(x, y)$	引入前提	前提	
② $\forall y Q(a, y)$	① + ES	⑤ $Q(a, a) \rightarrow \exists y R(a, y)$	④ + US
③ $Q(a, a)$	② + US	⑥ $\exists y R(a, y)$	③ + ⑤ + MP
④ $\forall x (Q(x, x) \rightarrow \exists y R(x, y))$	引入	⑦ $\exists x \exists y R(x, y)$	⑥ + EG

三、 设 $A$ 是非空集合,  $R$ 是集合 $A$ 上的二元关系: (20分, 10+5+5)

(1) 试证明: 如果 $R$ 是传递关系, 则 $R^2 \subseteq R$ ;

**Proof:**  $\forall \langle x, z \rangle \in R^2$ , 根据关系合成的定义,  $\exists y \in A$  且  $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$ , 而关系 $R$ 是传递关系, 所以 $\langle x, z \rangle \in R$ , 故 $R^2 \subseteq R$ .

(2) 试证明: 如果 $R$ 是传递和自反关系, 则 $R^2 = R$ ;

**Proof:**  $R$ 是自反关系,  $\therefore R = 1_A \cup R$ , 则:  $R^2 = (1_A \cup R)^2 = 1_A \cup R \cup R^2$ ,  $R$ 是传递关系, 由题(1)有 $R^2 \subseteq R$ ,  $\therefore 1_A \cup R \cup R^2 = R$ , 故 $R^2 = R$ .

(3) 设 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , 设关系 $R = \{ \langle m, n \rangle \mid m, n \in A \wedge n - m \equiv 1 \pmod{5} \}$ , 试求关系 $R$ 的传递闭包 $t(R)$ .

**解:** 根据定义有 $R = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 0 \rangle \}$ , 其关系图为一 条经过每个结点的有向回路, 故其传递闭包为全域关系, 即 $t(R) = A^2$ .

四、 设 $X$ 和 $Y$ 是两个非空集合,  $f: X \rightarrow Y$ 是集合 $X$ 到集合 $Y$ 的函数: (16分, 6+6+4)

(1) 试证明:  $\forall B \subseteq Y$ , 有 $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ ;

**Proof:**  $\forall y \in f(f^{-1}(B))$ , 则 $\exists x \in f^{-1}(B) \wedge f(x) = y$ . 根据逆像的定义,  $x \in f^{-1}(B)$ , 则 $f(x) \in B$ , 即 $y \in B$ , 故 $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ .

(2) 试证明: 如果 $f$ 是满射, 则 $\forall B \subseteq Y$ , 有 $B = f(f^{-1}(B))$ ;

**Proof:** 根据题(1), 只需证明 $B \subseteq f(f^{-1}(B))$ .  $\forall y \in B$ , 由于 $f$ 是满射, 则 $\exists x \in X \wedge f(x) = y$ , 根据逆像的定义 $x \in f^{-1}(B)$ , 又根据像的定义有 $f(x) \in f(f^{-1}(B))$ , 即 $y \in f(f^{-1}(B))$ . 故 $B \subseteq f(f^{-1}(B))$ .

(3) 设 $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $Y = \{0, 1, 2\}$ , 函数 $g: Y \rightarrow X$ ,  $g(y) = y$ , 试求集合 $\{f \mid f: X \rightarrow Y \wedge f \circ g = 1_Y\}$ 的基数, 其中 $1_Y$ 是 $Y$ 到 $Y$ 上的恒等映射.

**解:** 如果 $f \circ g = 1_Y$ , 则 $f$ 有右逆元, 即 $f$ 是满射, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$ , 这样的 $f$ 有多少, 这要看3和4映射到 $\{1, 2, 3\}$ 有多少可能性, 即 $3^2$ , 故该集合的基数为9.

五、 设 $\langle G, *, e \rangle$ 是一个群,  $|G| = 2009(41 \times 49)$ ; 设 $H$ 和 $K$ 是 $G$ 的两个正规子群且 $|H| = 41 \wedge |K| = 49$ . 在集合 $H \times K$ 上定义运算 $\otimes$ :  $\langle h, k \rangle \otimes \langle h', k' \rangle = \langle h * h', k * k' \rangle$ , 试证明: (24分, 每小题4分)

(1)  $\langle H \times K, \otimes \rangle$ 是一个群并求出该群的阶数;

**Proof:**

- 运算的封闭性:  $\forall \langle h, k \rangle, \langle h', k' \rangle \in H \times K$ ,  $\because H \triangleleft G \wedge K \triangleleft G$ ,  $\therefore h * h' \in H \wedge k * k' \in K$ , 故 $\langle h, k \rangle \otimes \langle h', k' \rangle = \langle h * h', k * k' \rangle \in H \times K$ .
- 运算的结合率:  $\forall \langle h, k \rangle, \langle h', k' \rangle, \langle h'', k'' \rangle \in H \times K$ , 则:

$$\begin{aligned} \langle h, k \rangle \otimes (\langle h', k' \rangle \otimes \langle h'', k'' \rangle) &= \langle h, k \rangle \otimes \langle h' * h'', k' * k'' \rangle \\ &= \langle h * (h' * h''), k * (k' * k'') \rangle \\ &= \langle (h * h') * h'', (k * k') * k'' \rangle \\ &= (\langle h * h', k * k' \rangle) \otimes \langle h'', k'' \rangle \\ &= (\langle h, k \rangle \otimes \langle h', k' \rangle) \otimes \langle h'', k'' \rangle \end{aligned}$$

- 幺元:  $\langle e, e \rangle$ 为幺元:  $\langle e, e \rangle \otimes \langle h, k \rangle = \langle e * h, e * k \rangle = \langle h, k \rangle = \langle h, k \rangle \otimes \langle e, e \rangle$ .
- 逆元:  $\langle h, k \rangle$ 的逆元为 $\langle h^{-1}, k^{-1} \rangle$ ,  $\langle h, k \rangle \otimes \langle h^{-1}, k^{-1} \rangle = \langle h * h^{-1}, k * k^{-1} \rangle = \langle e, e \rangle = \langle h^{-1}, k^{-1} \rangle \otimes \langle h, k \rangle$ .
- 群的阶数即是集合的基数:  $|H| \times |K| = 41 \times 49 = 2009$ .

(2) 利用Langrange定理证明 $H \cap K = \{e\}$ ;

**Proof:** 设 $a \in H \cap K$ , 则根据Langrange定理 $a$ 的阶数是群 $H$ 阶数的因子, 也是群 $K$ 阶数的因子, 即是41和49的公因子, 但是41与49互素, 故 $a$ 的阶数为1, 即 $a = e$ ,  $\therefore H \cap K = \{e\}$ .

(3) 利用(2)的结论证明 $\forall h \in H, k \in K$ , 有 $h * k = k * h$  (提示: 考虑 $h * k * h^{-1} * k^{-1}$ );

**Proof:**  $\because K \triangleleft G$ ,  $\therefore h * k * h^{-1} \in K$ , So  $h * k * h^{-1} * k^{-1} \in K$ , 同理,  $\because H \triangleleft G$ ,  $\therefore k * h^{-1} * k^{-1} \in H$ , So  $h * k * h^{-1} * k^{-1} \in H$ , 这样 $h * k * h^{-1} * k^{-1} \in H \cap K = \{e\}$ .  $\therefore h * k * h^{-1} * k^{-1} = e$ , 即 $h * k * (k * h)^{-1} = e$ , 故 $h * k = k * h$ .

- (4) 函数  $f: H \times K \longrightarrow G$ ,  $f(\langle h, k \rangle) = h * k$  是群  $\langle H \times K, \otimes \rangle$  到群  $\langle G, * \rangle$  的同态;

**Proof:** 设  $\langle h, k \rangle, \langle h', k' \rangle \in H \times K$  则:

$$\begin{aligned} f(\langle h, k \rangle \otimes \langle h', k' \rangle) &= f(\langle h * h', k * k' \rangle) \\ &= h * h' * k * k' \quad (\text{by def}) \\ &= h * k * h' * k' \quad (\text{by (3)}) \\ &= f(\langle h, k \rangle) * f(\langle h', k' \rangle) \end{aligned}$$

故  $f$  是群  $\langle H \times K, \otimes \rangle$  到群  $\langle G, * \rangle$  的同态。

- (5) 设  $f$  的同态核  $\ker(f)$  为集合  $\{\langle h, k \rangle \mid \langle h, k \rangle \in H \times K \wedge f(\langle h, k \rangle) = e\}$ , 则  $\ker(f) = \{\langle e, e \rangle\}$ ;

**Proof:** 设  $\langle h, k \rangle \in \ker(f)$ , 则  $f(\langle h, k \rangle) = e$ , 即  $h * k = e$ ,  $\therefore h = k^{-1}$ , So  $h \in H \cap K$ , 即  $h = e$ ; 同理  $k = e$ . 故  $\ker(f) = \{\langle e, e \rangle\}$ .

- (6)  $f$  是群  $\langle H \times K, \otimes \rangle$  到群  $\langle G, * \rangle$  的同构。

**Proof:**

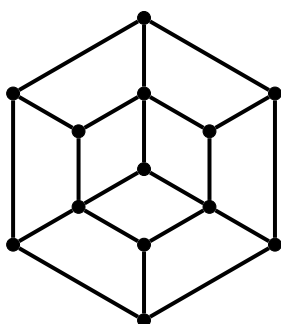
- $f$  是同态: 由题(4).
- $f$  是单射: 设  $f(\langle h, k \rangle) = f(\langle h', k' \rangle)$ ,  $\therefore f$  是同态,  $\therefore f(\langle h, k \rangle \otimes \langle h', k' \rangle^{-1}) = e$ , 由题(5),  $\langle h, k \rangle \otimes \langle h', k' \rangle^{-1} = \langle e, e \rangle$ , 即  $\langle h, k \rangle = \langle h', k' \rangle$ , 故  $f$  是单射。
- $f$  是满射: 群  $H \times K$  和群  $G$  的阶数均为 2009, 而  $f$  是单射, 所以  $f(H \times K)$  的基数也是 2009, 即  $f(H \times K) = G$ , 故  $f$  是满射。

- 六、设  $G(n, m)$  为  $n$  个结点  $m$  条边的简单无向图, 如果图  $G$  的每个结点的度数均为  $r$ , 且  $r$  是奇数, 试证明  $n$  一定是偶数, 且  $m$  是  $r$  的倍数。 (10分)

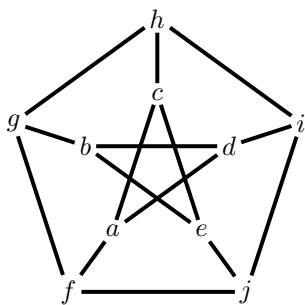
**Proof:**  $\therefore$  每个结点的度数均为  $r$ ,  $\therefore rn = 2m$ , 而  $r$  是奇数,  $rn$  是偶数, 所以  $n$  一定是偶数, 且  $m$  一定是  $r$  的倍数。

- 七、设有如下三个简单无向图:

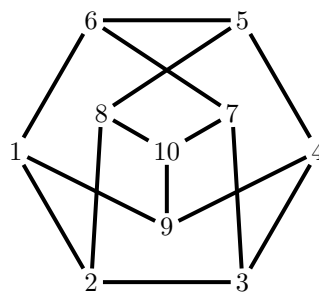
(10分, 5+5)



(a)



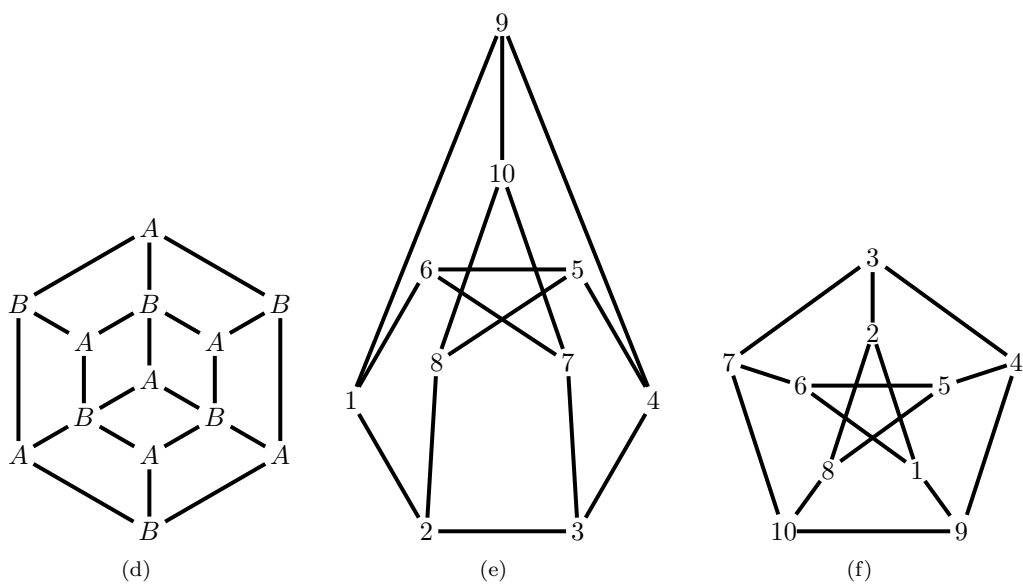
(b)



(c)

- (1) 试利用结点着色的方法证明图(a)没有哈密顿回路;

**Proof:** 该图存在一将相邻节点着色不同的颜色A色与B色的方案, 如下图所示。则哈密顿回路所经历的结点对应的颜色序列为  $ABAB \dots AB$  (其中第一个A是回路的始点和终点), 但是A色结点有7个, B色节点只有6个, 故不存在哈密顿回路。



- (2) 已知图(b)与图(c)同构，设 $f$ 为图(b)的结点集合 $\{a, b, \dots, j\}$ 到图(c)的结点集合 $\{1, 2, \dots, 10\}$ 的同构函数，已知 $f(a) = 8$ ;  $f(b) = 6$ 。试写出剩余结点的对应关系。

**解1:** 图(c)经过移动结点后如图(e)所示，故同构 $f$ 为： $f(a) = 8, f(b) = 6, f(c) = 10, f(d) = 5, f(e) = 7, f(f) = 2, f(g) = 1, f(h) = 9, f(i) = 4, f(j) = 3$ 。

**解2:** 图(c)经过移动结点后如图(f)所示，故同构 $f$ 为： $f(a) = 8, f(b) = 6, f(c) = 2, f(d) = 5, f(e) = 1, f(f) = 10, f(g) = 7, f(h) = 3, f(i) = 4, f(j) = 9$ 。