武汉大学2015-2016学年第二学期期末考试

高等数学（弘毅班）A2（A卷解答）

1、（9分）设长方体三条棱长为$|OA|=5,|OB|=3,|OC|=4$，OM为对角线，求$\overline{OA}$在$\overline{OM}$上的投影。

解 OM与棱OA的夹角记作α，又$|OM|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$，

有$\cos\alpha=\dfrac{|OA|}{|OM|}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 故 $\left(\overline{OA}\right)_{\overline{OM}}=\dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{OM}}{|\overline{OM}|}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$

2、（7分）求函数$u=e^{-2y}\ln(x+z)$在点$(e,1,0)$沿曲面$z=x^2-e^{3y-1}$法线方向的方向导数。

解 $\vec{n}=\pm\left\{2x,-3e^{3y-1},-1\right\}\Big|_{(e,1,0)}=\pm\left\{2e,-3e^2,-1\right\}$ 记 $|\vec{n}|=\sqrt{9e^4+4e^2+1}$

$$\cos\alpha=\pm\frac{2e}{|\vec{n}|},\ \cos\beta=\mp\frac{3e^2}{|\vec{n}|},\ \cos\gamma=\mp\frac{1}{|\vec{n}|}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(e,1,0)}=\left.\frac{e^{-2y}}{x+z}\right|_{(e,1,0)}=e^{-3}\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(e,1,0)}=-2e^{-2y}\ln(x+z)\Big|_{(e,1,0)}=-2e^{-2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(e,1,0)}=\left.\frac{e^{-2y}}{x+z}\right|_{(e,1,0)}=e^{-3}\quad \frac{\partial u}{\partial n}=\pm\left[\frac{2e}{|\vec{n}|}\cdot e^{-3}-\frac{3e^2}{|\vec{n}|}(-2e^{-2})-\frac{1}{|\vec{n}|}\cdot e^{-3}\right]=\pm\frac{2e^{-2}+6-e^{-3}}{|\vec{n}|}$$

3、（10分）设$z=z(x,y)$由方程$z=x+y\varphi(z)$所确定，其中φ二阶可导，且$1-y\varphi'(z)\neq 0$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1-y\varphi'(z)}$ $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y\varphi''(z)z_x}{\left[1-y\varphi'(z)\right]^2}=\dfrac{y\varphi''(z)}{\left[1-y\varphi'(z)\right]^3}$

4、（9分）求函数$z=2x^2+3y^2+4x-8$在闭域$D\colon x^2+y^2\le 4$上的最大值和最小值。

解 由$\begin{cases} z_x=4x+4=0 \\ z_y=6y=0 \end{cases}$，得D内驻点(－1，0)

且 $z(-1,0)=-10$

在边界$x^2+y^2=4$上，$z_1=-x^2+4x+4\ \ (-2\le x\le 2)$

$z_1'=-2x+4\ge 0\ \ ,z_1(-2)=-8\ \ ,z_1(2)=8$

比较后可知，函数z在点$(-1,0)$处取最小值$z(-1,0)=-10$

在点$(2,0)$处取最大值$z(2,0)=8$。

5、（10分）设Ω是由$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$及$z=0$所围的闭区域，试将$\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2)d\upsilon$分别化成球面、柱面坐标下的三次积分式。

解 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 f(r^2\sin^2\varphi)r^2\sin\varphi dr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{\sqrt{1-r^2}}f(r^2)dz$

6、（9分）求二元可微函数$\varphi(x,y)$，满足$\varphi(0,1)=1$，并使曲线积分

$I_1=\int_L(3xy^2+x^3)dx+\varphi(x,y)dy$ 及 $I_2=\int_L\varphi(x,y)dx+(3xy^2+x^3)dy$ 都与积分路径无关。

解　由I_1与积分路径无关，得 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=6xy$,得$\varphi(x,y)=3x^2y+C(y)$.

又由I_2与积分路径无关，得 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=3x^2+C'(y)=3y^2+3x^2$, 得$C(y)=y^3+C_1$.

故$\varphi(x,y)=3x^2y+y^3+C_1$.由$\varphi(0,1)=1$,知$C_1=0$.故$\varphi(x,y)=3x^2y+y^3$.

7、(9 分）设$f(x)$在$[-L,L]$内有连续的导函数，且$f(-L)=f(L)$。已知$f(x)$展成以$2L$为周期的傅立叶级数的系数为a_0,a_n,b_n，$n=1,2,3,\cdots$。试用a_0,a_n,b_n表示$f'(x)$的傅立叶系数A_0,A_n,B_n，$n=1,2,3,\cdots$。

解 由傅立叶系数的计算公式 $A_0=\dfrac{1}{L}\int_{-L}^{L}f'(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{L}f(x)\Big|_{-L}^{L}=0$

$$A_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_{-L}^{L}+\frac{n\pi}{L^2}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{n\pi}{L}b_n\qquad,n=1,2,3,\cdots$$

$$B_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_{-L}^{L}-\frac{n\pi}{L^2}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{n\pi}{L}a_n\qquad,n=1,2,3,\cdots$$

8、(9 分）设函数$f(z),g(z)$都是可微函数，求曲线$x=f(z),y=g(z)$在对应于$z=z_0$点处的切线方程和法平面方程。

解 $z=z_0$对应点$\left(f(z_0),g(z_0),z_0\right)$ 对应的切线方向向量 $\vec{S}=\left\{f'(z_0),g'(z_0),1\right\}$

切线方程 $\dfrac{x-f(z_0)}{f'(z_0)}=\dfrac{y-g(z_0)}{g'(z_0)}=\dfrac{z-z_0}{1}$

法平面方程 $f'(z_0)[x-f(z_0)]+g'(z_0)[y-g(z_0)]+(z-z_0)=0$

9、(7 分）计算曲面积分$I=\oiint_\Sigma xydxdz+xy^2dydz$ 其中Σ是曲面$x=y^2+z^2$与平面$y=0,z=0$及$x=1$在第一卦限所围成立体的表面的内侧。

解　由 Gauss 公式

$$I=\oiint_\Sigma xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-\iiint_V(y^2+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_{r^2}^1(r^2\cos^2\theta+x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\left[r^2\cos^2\theta\cdot x+\frac{x^2}{2}\right]_{r_2}^1\mathrm{d}r$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\left[r^3\cos^2\theta\cdot\left(1-r^2\right)+\frac{r}{2}(1-r^2)\right]\mathrm{d}r=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(\frac{1}{12}\cos^2\theta+\frac{1}{6}\right)\mathrm{d}\theta$$
$$=-\left(\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{5}{48}\pi$$

10、(7 分）试求函数$f\left(x\right)=\arctan x$在点$x_0=0$的泰勒级数展开式，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$之值。

解　由于　$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^{2n}$　　$x\in\left(-1,\ 1\right)$

所以 $\quad f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x\in[-1,\ \ 1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

11、（8 分）设有直线 l_1:$\frac{x}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$,$l_2$:$\begin{cases}z=5x-6\\z=4y+3\end{cases}$,$l_3$:$\begin{cases}y=2x-4\\z=3y+5\end{cases}$，求平行于 l_1 而分别与 l_2,l_3 相交的直线的方程。

解　设过 l_2 平行于 l_1 的平面方程为 π_1：$z-5x+6+\lambda(z-4y-3)=0$

由平行于 l_1，解得 $\lambda=-\frac{19}{3}$　　故 π_1 为 $15x-76y+16z-75=0$

设过 l_3 平行 l_1 的平面方程为 π_2：$z-2x+4+\mu(z-3y-5)=0$

由平行 l_1，解得 $\mu=-\frac{7}{2}$　　　　故 π_2 为 $4x-21y+5z-43=0$

故所求直线方程为 $\quad\begin{cases}15x-76y+16z-75=0\\4x-21y+5z-43=0\end{cases}$

12、（6 分）设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})$ 收敛，又级数 $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ 绝对收敛，试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nV_n$ 收敛。

证明　设 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})=S$，又 $S_n=(u_1-u_0)+\cdots+(u_n-u_{n-1})=(u_n-u_0)$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=S+u_0$　　根据收敛数列必有界，即存在 $M>0$，使

$|u_n|\le M$，从而有 $|u_nV_n|\le M|V_n|$　　于是 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_nV_n|$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nV_n$ 收敛。