武汉大学2016-2017学年第二学期期末考试高等数学A2试题（A）

1、（8分）单位圆O的圆周上有相异两点P,Q，$\angle POQ=\theta,a,b$为正的常数，求$\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^2}[a+b-\left|a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}\right|]$。

2、（8分）求过点$M(-4,-5,3)$，且与两条直线$l_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$和$l_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$都相交的直线方程。

3、（10分）求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$

4、（10分）在椭球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点，使函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在该点沿曲面$x^2-y^2-z^2=0$在点$(1,1,0)$处的法线方向的方向导数最大。

5、（10分）设$z=f(u,v)$具有二阶连续偏导数，其中$u=e^x\cos y,v=e^x\sin y$，试证明：若$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$。

6、（10 分）设$u=u(x+y,xz)$，其中$y=y(x)$，$z=z(x)$是由方程$z=xf(x+y)$和$F(x,y,z)=0$确定的函数，其中f、u、F分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求$\mathrm{d}u$.

7、（8分）设$f(u)$具有连续的一阶导数，L是从$A(2,0)$沿直线到$B(1,\sqrt{3})$的线段，试求

$$I=\int_L\left[\frac{xf(r)}{r}-\frac{y}{x^2}\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{x}+\frac{yf(r)}{r}\right]\mathrm{d}y,\quad 其中\quad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

8、（10分）设有向量场$\vec{F}=\{x^2yz^2,\frac{1}{z}\arctan\frac{y}{z}-xy^2z^2,\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{z}+z(1+xyz)\}$，

（1）计算$div\vec{F}\mid_{(1,1,1)}$的值。

（2）设空间区域Ω由锥面$y^2+z^2=x^2$与球面$x^2+y^2+z^2=a^2,x^2+y^2+z^2=4a^2$所围成$(x>0)$，其中$a$为正常数，记$\Omega$表面的外侧为$\Sigma$，计算积分

$$I=\oiint_\Sigma\vec{F}d\vec{s}=\oiint_\Sigma x^2yz^2dydz+[\frac{1}{z}\arctan\frac{y}{z}+xy^2]dzdx+[\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{z}+z(1+xyz)]dxdy$$

9、（8分）设$f(x)$是以2π为周期的可微周期函数，又设$f'(x)$连续，a_0，a_n，$b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$是$f(x)$的 Fourier 系数。求证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

10、（10分）试将函数$f(x)=\ln(1+x+x^2)$展开成关于 x 的幂级数。

11、（8分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上的导数$f'(x)$连续，且$f(1)-f(0)=1$，试证：$\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\ge 1$。

武汉大学2016-2017学年第二学期期末考试高等数学A2试题（A）参考解答

1、（8分）单位圆O的圆周上有相异两点P,Q，$\angle POQ=\theta,a,b$为正的常数，求$\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^2}[a+b-\left|a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}\right|]$。

解　由 $\left|a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}\right|^2=a^2+b^2+2ab\cos\theta$

故有 $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^2}[a+b-\left|a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}\right|]$。$=\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^2}(a+b-\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta})$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{2ab(1-\cos\theta)}{\theta^2(a+b+\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta})}=\frac{ab}{2(a+b)}$$

2、（8分）求过点$M(-4,-5,3)$，且与两条直线$l_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$和$l_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$都相交的直线方程。

解　l_1过点$P_1(-1,-3,2)$，方向向量为$\overrightarrow{S_1}=\{3,-2,-1\}$

l_2过点$P_2(2,-1,1)$，方向向量为$\overrightarrow{S_2}=\{2,3,-5\}$

由M及l_1所确定的平面法向量为 $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{P_1M}\times\overrightarrow{S_1}=4\{1,0,3\}$

故此平面方程为$\pi_1:x+3z-5=0$

由M及l_2所确定的平面法向量为 $\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{P_2M}\times\overrightarrow{S_2}=2\{7,-13,-5\}$

故此平面方程为$\pi_2:7x-13y-5z-22=0$

所求直线为π_1,π_2交线　即 $\begin{cases}x+3z-5=0\\7x-13y-5z-22=0\end{cases}$

3、（10分）求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$

解　$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时，x^2为无穷小量，$\left|\frac{2y^2}{x^2+y^2}\right|\le 2$，有界

则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}=0$

4、（10分）在椭球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点，使函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在该点沿曲面$x^2-y^2-z^2=0$在点$(1,1,0)$处的法线方向的方向导数最大。

解：　由曲面$x^2-y^2-z^2=0$在点$(1,1,0)$处的法线方向向量为：

$\{2x,-2y,-2z\}|_{(1,1,0)}=2\{1,-1,0\}$其单位向量为：$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{1,-1,0\}$

函数$f(x,y,z)$的方向导数的表达式为$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$。

其中$\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}=2\{x,y,z\}$　因此 $\frac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{2}(x-y)$。

于是，按照题意，即求函数$\sqrt{2}(x-y)$在条件$2x^2+2y^2+z^2=1$下的最大值。设

$$F(x,y,z,\lambda)=\sqrt{2}(x-y)+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1),$$

则由$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\sqrt{2}+4\lambda x=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=-\sqrt{2}+4\lambda y=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2\lambda z=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=2x^2+2y^2+z^2-1=0\end{cases}$ 得$z=0$以及$x=-y=\pm\dfrac{1}{2}$，

即得驻点为$M_1=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$与$M_2=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$。

因最大值必存在，故只需比较 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_1}=\sqrt{2}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_2}=-\sqrt{2}$，

的大小。由此可知$M_1=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$为所求。

5、（10 分）设$z=f(u,v)$具有二阶连续偏导数，其中$u=e^x\cos y,v=e^x\sin y$，试证明：若$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$。

证明 $z_x=f_u'\cdot e^x\cos y+f_v'\cdot e^x\sin y;\ \ z_y=-f_u'\cdot e^x\sin y+f_v'\cdot e^x\cos y$

$z_{xx}=f_u'\cdot e^x\cos y+f_v'\cdot e^x\sin y+f_{uu}''\cdot e^{2x}\cos^2 y+2f_{uv}''e^{2x}\sin y\cos y++f_{vv}''\cdot e^{2x}\sin^2 y$

$z_{yy}=-f_u'\cdot e^x\cos y-f_v'\cdot e^x\sin y+f_{uu}''\cdot e^{2x}\sin^2 y-2f_{uv}''e^{2x}\sin y\cos y++f_{vv}''\cdot e^{2x}\cos^2 y$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)=0$$

6、（10 分）设$u=u(x+y,xz)$，其中$y=y(x)$，$z=z(x)$是由方程$z=xf(x+y)$和$F(x,y,z)=0$确定的函数，其中f、u、F分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求$\mathrm{d}u$．

解：法一：令 $v=x+y,w=xz$

由$du=\dfrac{\partial u}{\partial v}dy+(z\dfrac{\partial u}{\partial w}+\dfrac{\partial u}{\partial v})dx+x\dfrac{\partial u}{\partial w}dz=\dfrac{\partial u}{\partial v}dy+(xf\dfrac{\partial u}{\partial w}+\dfrac{\partial u}{\partial v})dx+x\dfrac{\partial u}{\partial w}dz$

又$\begin{cases}z=xf(x+y)\\F(x,y,z)=0\end{cases}$，方程分别关于$x$求偏导数，$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=f+x(1+\dfrac{dy}{dx}f')\\ \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{dy}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{dz}{dx}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\end{cases}$

，整理方程得，$\begin{cases}-x\cdot f'\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=f+xf'\\ F_y\dfrac{dy}{dx}+F_z\dfrac{dz}{dx}=-F_x\end{cases}$，当$\begin{vmatrix}-xf' & 1\\F_y & F_z\end{vmatrix}=-xF_zf'-F_y\neq 0$，

$$dy=\frac{1}{-xF_zf'-F_y}\begin{vmatrix}f+xf' & 1\\-F_x & F_z\end{vmatrix}dx=\frac{(f+xf')F_z+F_x}{-xF_zf'-F_y}dx,$$

$$dz=\frac{1}{-xF_zf'-F_y}\begin{vmatrix}-xf' & f+xf'\\F_y & -F_x\end{vmatrix}dx=\frac{(f+xf')F_y-xF_xf'}{xF_zf'+F_y}dx.$$

故有 $du=[\frac{\partial u}{\partial v}(\frac{(f+xf')F_z+F_x}{-xF_zf'-F_y}+1)+x\frac{\partial u}{\partial w}(f+\frac{(f+xf')F_y-xF_xf'}{xF_zf'+F_y})]dx$

法二：（全微分法）令 $v=x+y,w=xz$

由 $du=\frac{\partial u}{\partial v}dy+(z\frac{\partial u}{\partial w}+\frac{\partial u}{\partial v})dx+x\frac{\partial u}{\partial w}dz=\frac{\partial u}{\partial v}dy+(xf\frac{\partial u}{\partial w}+\frac{\partial u}{\partial v})dx+x\frac{\partial u}{\partial w}dz$

方程组中的方程两边分别求微分，$\begin{cases}dz=fdx+x(dx+dy)f'\\F_xdx+F_ydy+F_zdz=0\end{cases}$，

整理得$\begin{cases}-xf'dy+dz=(f+xf')dx\\F_ydy+F_zdz=-F_xdx\end{cases}$，当$\begin{vmatrix}-xf' & 1\\F_y & F_z\end{vmatrix}=-xF_zf'-F_y\neq 0$时，

$dy=\frac{1}{-xF_zf'-F_y}\begin{vmatrix}(f+xf')dx & 1\\-F_xdx & F_z\end{vmatrix}=\frac{(f+xf')F_z+F_x}{-xF_zf'-F_y}dx$，

$dz=\frac{1}{-xF_zf'-F_y}\begin{vmatrix}-xf' & (f+xf')dx\\F_y & -F_xdx\end{vmatrix}=\frac{(f+xf')F_y-xF_xf'}{xF_zf'+F_y}dx$。

故有 $du=[\frac{\partial u}{\partial v}(\frac{(f+xf')F_z+F_x}{-xF_zf'-F_y}+1)+x\frac{\partial u}{\partial w}(f+\frac{(f+xf')F_y-xF_xf'}{xF_zf'+F_y})]dx$

7、（8 分）设 $f(u)$ 具有连续的一阶导数，L 是从 $A(2,0)$ 沿直线到 $B(1,\sqrt{3})$ 的线段，试求

$$I=\int_L\left[\frac{xf(r)}{r}-\frac{y}{x^2}\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{x}+\frac{yf(r)}{r}\right]\mathrm{d}y,\quad \text{其中}\quad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

解 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{xy}{r^2}f'(r)-\frac{xy}{r^3}f(r)-\frac{1}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故在右半平面（$x>0$）积分与路径无关.

取 $L_1:x^2+y^2=4$ 或 $\begin{cases}x=2\cos t,\\y=2\sin t,\end{cases}$ t 从 0 至 $\frac{\pi}{3}$

则 $I=\int_{L_1}\frac{f(2)}{2}(xdx+ydy)+\frac{-ydx+xdy}{x^2}$

$$=0+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{-2\sin t\cdot(-2\sin t)+2\cos t\cdot 2\cos t}{4\cos^2 t}dt=tgt\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}.$$

8、（10 分）设有向量场 $\vec{F}=\{x^2yz^2,\frac{1}{z}\arctan\frac{y}{z}-xy^2z^2,\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{z}+z(1+xyz)\}$，

（1）计算 $div\vec{F}\mid_{(1,1,1)}$ 的值。

（2）设空间区域 Ω 由锥面 $y^2+z^2=x^2$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,x^2+y^2+z^2=4a^2$ 所围成 $(x>0)$，其中 a 为正常数，记 Ω 表面的外侧为 Σ，计算积分

$$I=\oiint_\Sigma\vec{F}d\vec{s}=\oiint_\Sigma x^2yz^2dydz+[\frac{1}{z}\arctan\frac{y}{z}+xy^2]dzdx+[\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{z}+z(1+xyz)]dxdy$$

解 （1）令 $P=x^2yz^2,Q=\frac{1}{z}\arctan\frac{y}{z}-xy^2z^2,R=\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{z}+z(1+xyz)$，

故有 $\frac{\partial P}{\partial x}=2xyz^2$，$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+(\frac{y}{z})^2}-2xyz^2$，$\frac{\partial R}{\partial y}=-\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+(\frac{y}{z})^2}+(1+2xyz)$，

故有 $(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})=1+2xyz$

所以$div\vec{F}\mid_{(1,1,1)}=(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\mid_{(1,1,1)}=(1+2xyz)\mid_{(1,1,1)}=3$

（2）记Ω为Σ所围区域，则有高斯公式得：

$$I=\iiint_{\Omega}(1+2xyz)dxdydz=\iiint_{\Omega}dxdydz+2\iiint_{\Omega}xyzdxdydz=\iiint_{\Omega}r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_a^2 r^2\sin\varphi dr=\frac{7}{3}a^3(2-\sqrt{2})\pi$$

（由于Ω关于xoz面对称，xyz是域Ω上的奇函数，故有$\iiint_{\Omega}xyzdxdydz=0$）

9、（8 分）设$f(x)$是以2π为周期的可微周期函数，又设$f'(x)$连续，a_0，a_n，$b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$是$f(x)$的 Fourier 系数。求证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

解　由分步积分法，对$n=1,2,3,\cdots$，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{f(\pi)-f(-\pi)}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

又由$f'(x)$连续，故存在$M>0$，使当$x\in[-\pi,\pi]$时，$|f'(x)|\le M$。从而

$$|a_n|\le\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)\sin nx|\,\mathrm{d}x\le\frac{2M}{n}\to 0\qquad |b_n|\le\frac{|f(\pi)-f(-\pi)|}{n\pi}+\frac{2M}{n}\to 0,\quad n\to\infty$$

10、（10 分）试将函数$f(x)=\ln(1+x+x^2)$展开成关于 x 的幂级数。

解　由于　$f(x)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)$　利用　$\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad x\in(-1,1)$　得

$$f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{3k+1}}{3k+1}+\frac{x^{3k+2}}{3k+2}-\frac{2x^{3k+3}}{3(k+1)}\right)\quad x\in(-1,\ \ 1)$$

11、（8 分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上的导数$f'(x)$连续，且$f(1)-f(0)=1$，试证：$\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\ge 1$。

证　由$[f'(x)-f'(y)]^2\ge 0$，由重积分的性质，有

$$0\le\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1[f'(x)-f'(y)]^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y-2\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f'(y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1[f'(y)]^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x-2\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f'(y)\mathrm{d}y+\int_0^1[f'(y)]^2\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x-2\left[\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

故　$\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\ge\left[\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right]^2=1$