武汉大学计算机学院
《离散数学》第二次练习

§2.1.2 设$A(x,y,z)$： $x+y=z$, $M(x,y,z)$： $x\cdot y=z$, $L(x,y)$： $x<y$, $G(x,y)$： $x>y$, 个体域为自然数，将下列命题符号化：

(1) 没有比0小的自然数；$(\neg\exists xL(x,0))$

(2) $x<z$是$x<y$并且$y<z$的必要条件；$(\forall x\forall y\forall z(L(x,y)\wedge L(y,z)\to L(x,z))))$

(3) 若$x<0$, 那么存在某些z，使得$z<0$, $x\cdot z>y\cdot z$; $(\forall x\forall y(L(x,y)\to \exists z\exists u\exists vL(z,0)\wedge M(x,z,u)\wedge M(y,z,v)\wedge G(u,v)))$

(4) 存在x，对任意y有$x\cdot y=y$; $(\exists x\forall yM(x,y,y))$

(5) 对任意x，存在y使得$x+y=x$。$(\exists x\forall yA(x,y,x))$

注意
i. 一般数学命题，如果没有指明变元出现的方式多般使用全称量词，数学命题符号化时最好没有自由变元出现；
ii. 符号化过程中最好使用原命题，而不是等价命题。如：“没有小于0的自然数”不能翻译为：$\forall x\neg L(x,0)$

§2.2.1 判断下列合式公式中个体变元的出现哪些是约束出现，哪些是自由出现；公式中哪些是自由变元，哪些是约束变元：

(1) $\forall x(P(x)\vee Q(x))\vee R(y)$；($P(x)$和$Q(x)$中的$x$约束出现，是约束变元，$R(y)$中的$y$自由出现，是自由变元)

(2) $\forall x(P(x)\vee Q(x))\vee R(x)$；($P(x)$和$Q(x)$中的$x$约束出现，是约束变元，$R(x)$中的$x$自由出现，是自由变元)

§2.2.2 指出下列公式中约束各个量词的辖域：

(3) $\forall x\forall y(R(x,y)\vee P(y,z))\vee\exists xQ(x)$; $(\forall x\underline{\forall y\underline{(R(x,y)\vee P(y,z))}}\vee\exists x\underline{Q(x)})$

(4) $\forall x\exists yR(x,y)\to\exists y\forall xR(x,y)\vee P(x,y)$.
$(\forall x\underline{\exists y\underline{R(x,y)}}\to\exists y\underline{\forall x\underline{R(x,y)}}\vee P(x,y))$

§2.3.2 构造解释来证明下列公式既非永真式，又非永假式：

(1) $\neg\forall x(P(x)\to Q(x))$；
证明:
设I_1: $\mathcal{D}=\{a\}$, $P(a)=0$, $Q(a)=0$; 则$(P(x)\to Q(x))\big|_{I_1,x=a}=1$, $\therefore$ $\forall x(P(x)\to Q(x))\big|_{I_1}=1$, hence $\neg\forall x(P(x)\to Q(x))\big|_{I_1}=0$.
设I_2: $\mathcal{D}=\{a\}$, $P(a)=0$, $Q(a)=1$; 则$(P(x)\to Q(x))\big|_{I_2,x=a}=0$, $\therefore$ $\forall x(P(x)\to Q(x))\big|_{I_2}=0$, hence $\neg\forall x(P(x)\to Q(x))\big|_{I_2}=1$

(2) $\forall x\forall y(P(x,y)\wedge(Q(y)\to R(x,y))$.
证明:
设I_1: $\mathcal{D}=\{a\}$, $P(a,a)=1$, $Q(a)=1$, $R(a)=0$; 则$(P(x,y)\wedge(Q(y)\to R(x,y)))\big|_{I_1,x=a}=0$, $\therefore\forall x\forall y(P(x,y)\wedge(Q(y)\to R(x,y)))\big|_{I_1}=0$.

设I_2: $\mathcal{D}=\{a\}$, $P(a,a)=1$, $Q(a)=0$, $R(a)=0$; 则$(P(x,y)\wedge(Q(y)\to R(x,y)))\big|_{I_2,x=a}=1$, $\therefore \forall x\forall y(P(x,y)\wedge(Q(y)\to R(x,y)))\big|_{I_2}=1$.

§2.3.3 判断下列各式是否成立，并证明你的判断：

(3) $\exists xA(x)\to\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\to B(x))$；
证明:

$$\begin{aligned}
& \exists xA(x)\to\forall xB(x)\\
\Leftrightarrow\ & \neg\exists xA(x)\vee\forall xB(x)\\
\Leftrightarrow\ & \forall x\neg A(x)\vee\forall xB(x)\\
\Rightarrow\ & \forall x(\neg A(x)\vee B(x))\\
\Leftrightarrow\ & \forall x(A(x)\to B(x))
\end{aligned}$$

(4) $\forall x(A(x)\to B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\to\forall xB(x)$。
证明: 上式不成立。因为，设解释I: $\mathcal{D}=\{a,b\}$, $A(a)\big|_I=1$, $A(b)\big|_I=0$, $B(a)\big|_I=1$, $B(b)\big|_I=0$, 则$\forall x(A(x)\to B(x))\big|_I=1$, $\exists xA(x)\big|_I=1$, $\forall xB(x)\big|_I=0$, $\therefore$ $(\exists xA(x)\to\forall xB(x))\big|_I=0$, 即存在解释$I$使得前提为真，而结论为假。

§2.3.4 证明下列各式：

(1) $\forall x\forall y(A(x)\vee A(y))\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee\forall yA(y)$；
证明

$$\begin{aligned}
& \forall x\forall y(A(x)\vee A(y))\\
\Leftrightarrow\ & \forall x(A(x)\vee\forall yA(y))\\
\Leftrightarrow\ & \forall xA(x)\vee\forall yA(y)
\end{aligned}$$

(2) $\exists x\exists y(A(x)\wedge B(y))\Rightarrow\exists xA(x)$；
证明

$$\begin{aligned}
& \exists x\exists y(A(x)\wedge B(y))\\
\Leftrightarrow\ & \exists x(A(x)\wedge\exists yB(y))\\
\Leftrightarrow\ & \exists xA(x)\wedge\exists yB(y)\\
\Rightarrow\ & \exists xA(x)
\end{aligned}$$

§2.4.2 求下列各式的前束范式，能不使用换名规则就不用，并求其Skolem范式：

(1) $\forall xP(x)\wedge\neg\exists xQ(x)\vee\exists xQ(x)\wedge\forall yR(y)$；

解:

$$\begin{aligned}
& \forall xP(x) \wedge \neg\exists xQ(x) \vee \exists xQ(x) \wedge \forall yR(y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall xP(x) \wedge \forall x\neg Q(x) \vee \exists xQ(x) \wedge \forall yR(y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists xQ(x) \wedge \forall yR(y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists x(Q(x) \wedge \forall yR(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists x\forall y(Q(x) \wedge R(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists z\forall y(Q(z) \wedge R(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x) \vee \exists z\forall y(Q(z) \wedge R(y))) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x\exists z\forall y(P(x) \wedge \neg Q(x) \vee Q(z) \wedge R(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x\forall y(P(x) \wedge \neg Q(x) \vee Q(f(x)) \wedge R(y)) \quad \text{(Skolem)}
\end{aligned}$$

(2) $\forall xP(x) \vee \neg\exists xQ(x) \wedge \forall xR(x)$；

解:

$$\begin{aligned}
& \forall xP(x) \vee \neg\exists xQ(x) \wedge \forall xR(x) \\
\Leftrightarrow\ & \forall xP(x) \vee \forall x\neg Q(x) \wedge \forall xR(x) \\
\Leftrightarrow\ & \forall xP(x) \vee \forall x(\neg Q(x) \wedge R(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall xP(x) \vee \forall y(\neg Q(y) \wedge R(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x\forall y(P(x) \vee \neg Q(y) \wedge R(y)) \quad \text{(Skolem)}
\end{aligned}$$

§2.5.2 证明下列推理：

(3) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \forall xP(x) \to \forall xQ(x)$；

证明: 用CP规则

① $\forall xP(x)$	附加前提
② $P(x)$	① + US
③ $\forall x(P(x) \to Q(x))$	引入前提
④ $P(x) \to Q(x)$	③ + US
⑤ $Q(x)$	② +④ + 三段论
⑥ $\forall xQ(x)$	⑤ + UG

(4) $\forall x(\neg P(x) \to Q(x)),\ \forall x\neg Q(x),\ \exists x(P(x) \to R(x)) \vdash \exists xR(x)$；

证明:

① $\exists x(P(x) \to R(x))$	引入前提
② $P(a) \to R(a)$	① + ES
③ $\forall x(\neg P(x) \to Q(x))$	引入前提
④ $\neg P(a) \to Q(a)$	③ + US
⑤ $\neg Q(a) \to P(a)$	③ + 恒等变换
⑥ $\neg Q(a) \to R(a)$	② + ⑤ + 析取三段论
⑦ $\forall x\neg Q(x)$	引入前提
⑧ $Q(a)$	⑦ + US

⑨ $R(a)$ ⑥ + ⑧ + 析取三段论

⑩ $\exists x R(x)$ ⑨ + EG

(5) $\forall x(P(x) \to Q(x) \wedge R(x)),\ \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x(Q(x) \wedge R(x))$。

证明:

① $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ 引入前提

② $P(a) \wedge Q(a)$ ① + ES

③ $P(a)$ ② + 化简规则

④ $\forall x(P(x) \to Q(x) \wedge R(x))$ 引入前提

⑤ $P(a) \to Q(a) \wedge R(a)$ ④ + US

⑥ $Q(a) \wedge R(a)$ ③ + ⑤ + 三段论

⑦ $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$ ⑥ + EG