武汉大学计算机学院

《离散数学》第一次练习

§1.1.2 将下列命题符号化：

(1) 如果天不下雨，那么我去教室.
设P: 天下雨，Q: 我去教室. 则: $\neg P \to Q$.

(2) 如果你去教室，那么我去图书馆.
设P: 你去教室，Q: 我去图书馆. 则: $P \to Q$.

(3) 我去图书馆的必要条件是你去教室.
设P: 你去教室，Q: 我去图书馆. 则: $Q \to P$.

(4) 2是质数，也是偶数.
设P: 2是质数，Q: 2是偶数. 则: $P \wedge Q$.

§1.1.4 设P: 明天是晴天，Q: 我去教室，R: 我去图书馆. 试用日常语言复述下列各命题：

(1) $P \to Q \vee R$.
如果明天是晴天，则我去教室或图书馆.

(2) $Q \to \neg P \wedge \neg R$.
如果我去教室，则明天不是晴天且我没去图书馆.

(3) $P \wedge \neg Q \leftrightarrow R$.
明天是晴天且我不去教室当且仅当我去图书馆.

§1.3.3 下列各式哪些是永真式、永假式或可满足式？

(1) $P \wedge \neg P \to Q$; (永真式)

(2) $P \vee \neg P \to ((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P))$; (永真式)

(3) $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$; (永真式)

(4) $P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow P \wedge Q \vee P \wedge R$; (永真式)

(5) $P \vee \neg Q \to Q$; (可满足式)

(6) $P \wedge Q \to P$; (永真式)

(7) $(P \to P \vee Q) \wedge \neg P$; (可满足式)

(8) $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R)$. (永真式)

§1.3.4 证明下列各式：

(1) $P \to (Q \to P) \Leftrightarrow \neg P \to (P \to Q)$；

证明:

$$
\begin{aligned}
& P \to (Q \to P) \\
\Leftrightarrow\ & P \to (\neg Q \vee P) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \neg Q \vee P \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee P \vee \neg Q \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{T} \vee \neg Q \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{T} \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{T} \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg\neg P \vee \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \to (\neg P \vee Q) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \to (P \to Q)
\end{aligned}
$$

(3) $P \wedge Q \to P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;

证明:

$$
\begin{aligned}
& P \wedge Q \to P \\
\Leftrightarrow\ & \neg(P \wedge Q) \vee P \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee \neg Q) \vee P \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee P) \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{T} \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{T}
\end{aligned}
$$

(5) $(P \to Q) \wedge (R \to Q) \Leftrightarrow P \vee R \to Q$;

证明:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge (R \to Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge \neg R) \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg(P \vee R) \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & P \vee R \to Q
\end{aligned}
$$

§1.3.5 证明下列各式：

(2) $P \to (Q \to R) \Rightarrow (P \to Q) \to (P \to R)$;

证明:

$$\begin{aligned}
& P \to (Q \to R) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \neg Q \vee R \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{T} \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
\Leftrightarrow\ & (P \vee (\neg P \vee R)) \wedge (\neg Q \vee (\neg P \vee R)) \\
\Leftrightarrow\ & (P \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \vee R) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \to R) \\
\Leftrightarrow\ & (P \to Q) \to (\neg Q \vee R)
\end{aligned}$$

(4) $(P \to Q) \to Q \Rightarrow P \vee Q$；

证明:

$$\begin{aligned}
& (P \to Q) \to Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg P \vee Q) \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & (P \wedge \neg Q) \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q) \\
\Rightarrow\ & P \vee Q
\end{aligned}$$

(6) $(Q \to P \wedge \neg P) \wedge (R \to P \wedge \neg P) \Rightarrow R \to Q$；

证明:

$$\begin{aligned}
& (Q \to P \wedge \neg P) \wedge (R \to P \wedge \neg P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg Q \vee \mathbb{F}) \wedge (\neg R \vee \mathbb{F}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg Q \wedge \neg R \\
\Rightarrow\ & \neg R \\
\Rightarrow\ & \neg R \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & R \to Q
\end{aligned}$$

§1.4.1 求下列各式的主析取范式和主合取范式：

(1) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$；

解:

主析取范式:

$$P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q$$

主合取范式：

$$P \vee Q$$

(3) $P \wedge \neg Q \wedge S \to \neg P \wedge Q$；

解:

主析取范式:

$$P \wedge Q \wedge S \wedge \neg P \wedge Q \wedge S \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge S \vee P \wedge Q \wedge \neg S \vee$$

$$\vee\neg P\wedge Q\wedge\neg S\vee P\wedge\neg Q\wedge\neg S\vee\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg S$$

主合取范式：

$$\neg P\vee Q\vee\neg S$$

§1.4.2 求下列各式的主析取范式：

(4) $P\vee(\neg P\to Q\vee(\neg Q\to R))$；

解:

主析取范式:

$$P\wedge Q\wedge R\vee\neg P\wedge Q\wedge R\vee P\wedge\neg Q\wedge R\vee\neg P\wedge\neg Q\wedge R\vee$$

$$\vee P\wedge Q\wedge\neg R\vee\neg P\wedge Q\wedge\neg R\vee P\wedge\neg Q\wedge\neg R$$

§1.4.3 求下列各式的主合取范式：

(4) $P\vee(\neg P\to Q\vee(\neg Q\to R))$；

解:

主合取范式:

$$P\vee Q\vee R$$

§1.5.1 证明下列推理：

(2) $\neg P\vee Q,\ \neg(Q\wedge R),\ R\vdash\ \neg P$；

证明:

①	$\neg(Q\wedge R)$	引入前提
②	$\neg Q\vee\neg R$	①+恒等变换
③	R	引入前提
④	$\neg Q$	②+ ③+析取三段论
⑤	$\neg P\vee Q$	引入前提
⑥	$\neg P$	④+⑤+析取三段论

(4) $(P\to Q)\to R),\ P\wedge S, Q\wedge T\vdash\ R.$

证明:

①	$Q\wedge T$	引入前提
②	Q	①+ 化简规则
③	$\neg P\vee Q$	附加规则
④	$P\to Q$	③+恒等变换
⑤	$(P\to Q)\to R$	引入前提
⑥	R	④+⑤+三段论

§1.5.2 用附加前提的方法证明下列推理：

(4) $P\to(Q\to R),\ Q\to(R\to S)\ \vdash\ P\to(Q\to S)$；

证明: 两次CP后，附加前提有P和Q，结论为S.

① P 附加前提
② Q 附加前提
③ $P \to (Q \to R)$ 引入前提
④ $Q \to R$ ①+③+三段论
⑤ R ②+④+三段论
⑥ $Q \to (R \to S)$ 引入前提
⑦ $R \to S$ ②+⑥+三段论
⑧ S ⑤+⑦+三段论

§1.5.3 用反证法证明下列推理：

(4) $\neg(P \to Q) \to \neg(R \vee S),\ (Q \to P) \vee \neg R,\ R \vdash\ P \leftrightarrow Q$；

证明:附加前提$\neg(P \leftrightarrow Q)$，结论$\mathbb{F}$.

① $\neg(P \leftrightarrow Q)$ 附加前提
② $\neg((P \to Q) \wedge (Q \to P))$ 恒等变换
③ R 引入前提
④ $R \vee S$ 附加规则
⑤ $\neg(P \to Q) \to \neg(R \vee S)$ 引入前提
⑥ $P \to Q$ ④+⑤+拒取式
⑦ $(Q \to P) \vee \neg R$ 引入前提
⑧ $Q \to P$ ③+⑥+析取三段论
⑨ $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ ⑥+⑧+合取引入
⑩ $((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \wedge \neg((P \to Q) \wedge (Q \to P))$ ②+⑨+合取引入
⑪ $\mathbb{F}$ ⑩+恒等变换

§1.6.2 仅用$\uparrow$等价表达$P \wedge (Q \to R)$：

解1:

$$
\begin{aligned}
& P \wedge (Q \to R) \\
\Leftrightarrow\ & P \wedge (\neg Q \vee R) \\
\Leftrightarrow\ & P \wedge \neg(Q \wedge \neg R) \\
\Leftrightarrow\ & P \wedge \neg(Q \wedge (R \uparrow R)) \\
\Leftrightarrow\ & P \wedge (Q \uparrow (R \uparrow R)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg(P \wedge (Q \uparrow (R \uparrow R)))) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(P \uparrow (Q \uparrow (R \uparrow R))) \\
\Leftrightarrow\ & (P \uparrow (Q \uparrow (R \uparrow R))) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow (R \uparrow R)))
\end{aligned}
$$

解2:

$$\begin{aligned}
& P \wedge (Q \rightarrow R) \\
\Leftrightarrow\quad & P \wedge (\neg Q \vee R) \\
\Leftrightarrow\quad & (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R) \\
\Leftrightarrow\quad & \neg(\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \wedge R)) \\
\Leftrightarrow\quad & \neg(P \wedge \neg Q) \uparrow \neg(P \wedge R) \\
\Leftrightarrow\quad & (P \uparrow \neg Q) \uparrow (P \uparrow R) \\
\Leftrightarrow\quad & (P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow R)
\end{aligned}$$

§1.6.3 证明下列各式：

(2) $\neg(P \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \uparrow \neg Q$

证明:

$$\begin{aligned}
& \neg(P \downarrow Q) \\
\Leftrightarrow\quad & \neg(\neg(P \vee Q)) \\
\Leftrightarrow\quad & \neg(\neg P \wedge \neg Q) \\
\Leftrightarrow\quad & \neg P \uparrow \neg Q
\end{aligned}$$