第八章空间解析几何测试试卷

1、设$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1, 2\vec{a} + 5\vec{b} \perp 4\vec{a} - 3\vec{b}$，求$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$及以$2\vec{a} + 5\vec{b}$与$4\vec{a} - 3\vec{b}$为边的三角形的面积。

2、求过点$\left(-1,-4,3\right)$并与下面两直线 $l_1: \begin{cases} 2x - 4y + z = 1 \\ x + 3y = -5 \end{cases}$ $l_2: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 - t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ 都垂直的直线方程。

3、求由曲面$z = 3 - x^2 - 2y^2, z = 2x^2 + y^2$所围成的立体在$xoy$平面上的投影区域。

4、求直线$l: \dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z}{-1}$在平面$\pi: 2x - y - 3z + 6 = 0$上的投影直线的方程。

5、试证明两直线$l_1: \begin{cases} 2x + 3y - z - 1 = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$,和 $l_2: \begin{cases} x + 5y + 4z - 3 = 0 \\ x + 2y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$相交，并求二直线所确定的平面方程。

6、证明：$\begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0 \\ x^2 - 4y^2 = 2z \end{cases}$是两条直线，并求其对称式方程。

7、试证明两直线$l_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-8}{-2}$，$l_2: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-2}{4}$相交，并求过这二直线的平面方程。

8、求曲线$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = ax \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$ 在三个坐标平面上的投影曲线方程。

9、求过点$M(0,0,1)$和$N(3,0,0)$，且与xoy平面成$\dfrac{\pi}{3}$角的平面方程。

10、设平面与原点的距离为6，且在坐标轴上的截距之比为$a:b:c = 1:3:2$，求此平面的方程。

11、三个坐标面在平面$3x - y + 4z - 12 = 0$上截得一个三角形ABC，从z轴上的一个顶点C作此三角形对边AB的垂线，求此垂线的方程。

12、求过点$P_0(2,-1,3)$与直线$l: \dfrac{x-5}{-1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-2}{2}$垂直相交的直线方程。

第八章空间解析几何测试试卷解答

1、设$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, 2\vec{a}+5\vec{b} \perp 4\vec{a}-3\vec{b}$，求$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$及以$2\vec{a}+5\vec{b}$与$4\vec{a}-3\vec{b}$为边的三角形的面积。

解一 $(2\vec{a}+5\vec{b})\cdot(4\vec{a}-3\vec{b})=0 \quad 8-15+14\cos\theta=0,\ \cos\theta=\frac{1}{2},\ \theta=\frac{\pi}{3}$

$S=\frac{1}{2}\left|(2\vec{a}+5\vec{b})\times(4\vec{a}-3\vec{b})\right|=\frac{1}{2}\left|-26\vec{a}\times\vec{b}\right|=13\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{13}{2}\sqrt{3}$

解二：$\theta=\frac{\pi}{3}$ $\qquad \left|2\vec{a}+5\vec{b}\right|=\sqrt{4+25+10}=\sqrt{39}$

$\left|4\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{16+9-12}=\sqrt{13}$ 所以 $S=\frac{1}{2}\sqrt{39}\sqrt{13}=\frac{13}{2}\sqrt{3}$

2、求过点$(-1,-4,3)$并与下面两直线 $l_1:\begin{cases}2x-4y+z=1\\ x+3y=-5\end{cases}$ $l_2:\begin{cases}x=2+4t\\ y=-1-t\\ z=-3+2t\end{cases}$ 都垂直的直线方程。

解 l_1方向向量为 $\overrightarrow{S_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=\{-3,1,10\}$ $\qquad l_2$方向向量为 $\overrightarrow{S_2}=\{4,-1,2\}$

故所求直线的方向向量为 $\vec{S}=\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}=\{12,46,-1\}$，故直线为：$\frac{x+1}{12}=\frac{y+4}{46}=\frac{z-3}{-1}$

3、求由曲面$z=3-x^2-2y^2, z=2x^2+y^2$所围成的立体在xoy平面上的投影区域。

解 交线$\begin{cases}z=3-x^2-2y^2\\ z=2x^2+y^2\end{cases}$在$xoy$平面上的投影曲线为 $\begin{cases}3-x^2-2y^2=2x^2+y^2\\ z=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 故所求投影区域为 $\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$

4、求直线l:$\frac{x-1}{9}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z}{-1}$在平面π:$2x-y-3z+6=0$上的投影直线的方程。

解 过l垂直π的平面法向量为

$\overrightarrow{n_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 9 & -4 & -1\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}=\{11,25,-1\}$ 则π_1方程为$11x+25y-z+14=0$

故投影直线为 $\begin{cases}11x+25y-z+14=0\\ 2x-y-3z+6=0\end{cases}$

5、试证明两直线$l_1:\begin{cases}2x+3y-z-1=0\\ x+y-3z=0\end{cases}$,和 $l_2:\begin{cases}x+5y+4z-3=0\\ x+2y+2z-1=0\end{cases}$相交，并求二直线所

确定的平面方程。

解 l_1 过点 $P_1(-1,1,0)$，方向向量为 $\overrightarrow{S_1}=\{-8,5,-1\}$

l_2 过点 $P_2(-1,0,1)$，方向向量为 $\overrightarrow{S_2}=\{2,2,-3\}$　　$\vec{n}=\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}=-13\{1,2,2\}$

过 P_1 以 $\vec{n}$ 为法向量的平面方程为　$\pi: x+2y+2z-1=0$

P_2 满足上方程，故 l_2 也在平面 π 上　于是 l_1，l_2 相交，且 π 即为所求平面。

6、证明：$\begin{cases}2x-12y-z+16=0\\x^2-4y^2=2z\end{cases}$ 是两条直线，并求其对称式方程。

证明 消去 z，得 $(x-2y+4)(x+2y-8)=0$　故原曲线方程为两直线

$l_1:\begin{cases}2x-12y-z+16=0\\x-2y+4=0\end{cases}$，　$l_2:\begin{cases}2x-12y-z+16=0\\x+2y-8=0\end{cases}$

l_1 过点 $(-2,1,0)$，方向向量为　$\overrightarrow{S_1}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-12&-1\\1&-2&0\end{vmatrix}=\{-2,-1,8\}$

故 l_1 对称式方程为　$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-8}$

l_2 过点 $(4,2,0)$，方向向量为 $\overrightarrow{S_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-12&-1\\1&2&0\end{vmatrix}=\{2,-1,16\}$，

故 l_2 对称式方程为　$\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{16}$

7、试证明两直线 $l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-8}{-2}$，$l_2:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-2}{4}$ 相交，并求过这二直线的平面方程。

解 l_1 过点 $P_1(0,5,8)$，方向向量为 $\overrightarrow{S_1}=\{1,3,-2\}$

l_2 过点 $P_2(-1,3,2)$，方向向量为 $\overrightarrow{S_2}=\{2,5,4\}$　　$\vec{n}=\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}=\{22,-8,-1\}$

过 P_1 以 $\vec{n}$ 为法向量的平面方程为　$\pi: 22x-8y-z+48=0$

P_2 满足上方程，故 l_2 也在平面 π 上　于是 l_1，l_2 相交，且 π 即为所求平面。

8、求曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2=ax\\x^2+y^2+z^2=a^2\end{cases}$ 在三个坐标平面上的投影曲线方程。

解　在 xoy 平面上，投影曲线为　$\begin{cases}x^2+y^2=ax\\z=0\end{cases}$

在 xoz 平面上，投影曲线为 $\begin{cases} z^2+ax=a^2 \\ y=0 \end{cases}$

在 yoz 平面上，投影曲线为 $\begin{cases} y^2-z^2+\dfrac{z^4}{a^2}=0 \\ x=0 \end{cases}$

9、求过点 $M(0,0,1)$ 和 $N(3,0,0)$，且与 xoy 平面成 $\dfrac{\pi}{3}$ 角的平面方程。

解 M,N 为平面与 z 轴，x 轴的交点，设所求平面方程为π：$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{1}=1$

法向量为 $\vec{n}=\{\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{b},1\}$，由 π 与 xoy 平面成 $\dfrac{\pi}{3}$ 角

故 $\cos\dfrac{\pi}{3}=\left|\cos(\widehat{\vec{n},\vec{k}})\right|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{k}|}{|\vec{n}||\vec{k}|}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{b^2}}}$　　解得：$b=\pm\dfrac{3}{\sqrt{26}}$

故平面方程为：$x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0$

10、设平面与原点的距离为 6，且在坐标轴上的截距之比为 $a:b:c=1:3:2$，求此平面的方程。

解 设平面方程为：$\dfrac{x}{\lambda}+\dfrac{y}{3\lambda}+\dfrac{z}{2\lambda}=1$　　即 $6x+2y+3z-6\lambda=0$

原点到平面的距离为　$d=\dfrac{6}{7}|\lambda|$

由条件 $d=6$，解得 $\lambda=\pm7$　　故平面方程为　$6x+2y+3z\pm42=0$

11、三个坐标面在平面 $3x-y+4z-12=0$ 上截得一个三角形 ABC，从 z 轴上的一个顶点 C 作此三角形对边 AB 的垂线，求此垂线的方程。

解　平面与坐标轴的交点为 $A(4,0,0),B(0,-12,0),C(0,0,3)$　从 C 作 AB 的垂线，设垂足为 D　　则 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AB}$，故 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，解得 $\lambda=-\dfrac{1}{10}$

从而 $\overrightarrow{CD}=\left\{-\dfrac{18}{5},\dfrac{6}{5},3\right\}$　　　所求直线为 $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-3}{-5}$

12、求过点 $P_0(2,-1,3)$ 与直线 l:$\dfrac{x-5}{-1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-2}{2}$ 垂直相交的直线方程。

解 过 P_0 与 l 垂直的平面为 π：$x-2z+4=0$　　l 参数方程为 $\begin{cases} x=5-t \\ y=0 \\ z=2+2t \end{cases}$

代入 π 方程，解得 $t=1$，故 l，π 交点为 $P_1(4,0,4)$

故所求直线方程为 $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{1}$