武汉大学2014-2015学年第二学期期末考试高等数学A2试题（A）

一、（8分）设 $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b},\vec{q}=k\vec{a}+\vec{b}$，其中 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，问：

(1) k 为何值时，$\vec{p}\perp\vec{q}$？ (2) k 为何值时，以 $\vec{p},\vec{q}$ 为边的平行四边形面积为6？

解 (1) 因 $\vec{p}\perp\vec{q}$，故 $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$， 即 $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(k\vec{a}+\vec{b})=0$

$$2k|\vec{a}|^2+(2+k)\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=0$$

按 $|\vec{a}|^2=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ |\vec{b}|^2=4$，有 $2k+4=0$，得 $k=-2$ 4分

(2) $|\vec{p}\times\vec{q}|=6$，而 $|\vec{\boldsymbol{p}}\times\vec{\boldsymbol{q}}|=|(2\vec{a}+\vec{b})\times(k\vec{a}+\vec{b})|=|(2-k)\vec{a}\times\vec{b}|=2|2-k|$

故 $|2-k|=3$， 得 $k=5$ 或 $k=-1.$ 8分

二、（8分）设有数量场 $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$，问当 a,b,c 满足什么条件时，才能使函数 $u(x,y,z)$ 在点 $p(1,-2,2)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=\{1,-2,-1\}$ 的方向导数最大?

解 由 $gradu\big|_p=\left\{\dfrac{2x}{a^2},\dfrac{2y}{b^2},-\dfrac{2z}{c^2}\right\}\Bigg|_p=\left\{\dfrac{2}{a^2},-\dfrac{4}{b^2},-\dfrac{4}{c^2}\right\}$，

当 grad$u|_P$ 与 $\boldsymbol{l}$ 方向一致时，$\dfrac{\partial u}{\partial l}\Bigg|_p$ 取最大值。即 $\dfrac{\frac{2}{a^2}}{1}=\dfrac{-\frac{4}{b^2}}{-2}=\dfrac{-\frac{4}{c^2}}{-1}$，得 $\sqrt{2}\,|a|=\sqrt{2}\,|b|=|c|.$

此即为所求之条件。 8分

三、（6分）函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=f(x+y+z)$ 所确定，其中 f 二阶可导，且 $f'\neq1$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解 $z_x=(1+z_x)f'$，$z_x=\dfrac{f'}{1-f'}=-1+\dfrac{1}{1-f'}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(1+z_x)f''}{(1-f')^2}=\frac{f''}{(1-f')^3}\qquad 6\text{分}$$

四、（6分）设 $u=f(x+y+z,xyz)$ 具有一阶连续偏导数，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+2ze^{y^2}=\sin z$ 所确定，求 $\mathrm{d}u$。

解 $\mathrm{d}u=(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)f_1+(yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z)f_2$

$$2x\,\mathrm{d}x+2e^{y^2}\,\mathrm{d}z+4yze^{y^2}\,\mathrm{d}y=\cos z\,\mathrm{d}z$$

消去 $\mathrm{d}z$ 得：$\mathrm{d}u=\left[f_1+yzf_2+(f_1+xyf_2)\dfrac{2x}{\cos z-2e^{y^2}}\right]\mathrm{d}x$

$$+\left[f_1+xzf_2+(f_1+xyf_2)\frac{4yze^{y^2}}{\cos z-2e^{y^2}}\right]\mathrm{d}y\qquad 6\text{分}$$

五、（6分）求曲线 $\begin{cases}ax+by+cz=ab+2bc\\ a^2x^2-b^2y^2+c^2z^2=a^2b^2\end{cases}$ 在点 (b,c,b) 处的切线及法平面方程。(其中 $a\neq0,b\neq0,c\neq0$)

解 由 $\begin{cases}a+by'+cz'=0\\ 2a^2x-2b^2yy'+2c^2zz'=0\end{cases}$，代入点 (b,c,b)

解得 $y'\big|_{(b,c,b)}=\dfrac{a^2-ac}{2bc}$，$z'\big|_{(b,c,b)}=-\dfrac{a^2+ac}{2c^2}$

对应的切线方向向量

$$\vec{S}=\left\{1,\frac{a^2-ac}{2bc},-\frac{a^2+ac}{2c^2}\right\}=\frac{1}{2bc^2}\left\{2bc^2,a^2c-ac^2,-a^2b-abc\right\}$$

切线方程 $\dfrac{x-b}{2bc^2}=\dfrac{y-c}{a^2c-ac^2}=\dfrac{z-b}{-a^2b-abc}$

法平面方程为 $2bc^2(x-b)+(a^2c-ac^2)(y-c)-(a^2b+abc)(z-b)=0$ 6 分

六、(10 分) 设 l_1:$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$，$l_2$:$\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{3}$，试求与直线 l_1,l_2 都垂直且相交的直线的方程。

解 所求直线 l 的方向向量为 $\vec{S}=\{-4,-1,3\}$，l,l_1 所确定平面 π_1 法向量为 $\overrightarrow{n_1}=\{2,7,5\}$

π_1 方程为 $2x+7y+5z-12=0$，l,l_2 所确定的平面 π_2 法向量为 $\overrightarrow{n_2}=\{3,-9,1\}$ 5 分

π_2 方程为 $3x-9y+z+8=0$，故 l 为 π_1，π_2 交线，即 $\begin{cases}2x+7y+5z-12=0\\3x-9y+z+8=0\end{cases}$ 10 分

七、(10 分) 设 $z=x^3+\alpha x^2+2\gamma xy+\beta y^2+\alpha\beta^{-1}(\gamma x+\beta y)$，试证：当 $\alpha\beta\neq\gamma^2$ 时，函数 z 有一个且仅有一个极值，又若 $\beta<0$，则该极值必为极大值。

证明 由 $\begin{cases}z_x=3x^2+2\alpha x+2\gamma y+\alpha\gamma\beta^{-1}=0\\z_y=2\gamma x+2\beta y+\alpha=0\end{cases}$，解得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{-2}{3\beta}(\alpha\beta-\gamma^2)=\mu$ 5 分

$$D=\begin{pmatrix}z_{xx}&z_{xy}\\z_{yx}&z_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x+2\alpha&2\gamma\\2\gamma&2\beta\end{pmatrix},|D|_{x=0}=4(\alpha\beta-\gamma^2),|D|_{x=\mu}=4(\gamma^2-\alpha\beta)$$

在 $\alpha\beta\neq\gamma^2$ 的条件下，以上二式中必有且仅有一式大于零，这说明函数 z 有且仅有一个极值。因为 $z_{yy}=2\beta$，所以当 $\beta<0$ 时，必为极大值。 10 分

八、(12 分) 计算 $\displaystyle\oiint_{\Sigma}x^2dydz-y^2dzdx+z^2dxdy$ 其中 Σ 是立体 Ω 的表面的外侧，立体 Ω 由球面 $x^2+y^2+z^2=3R^2$ 与单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=R^2$ 及平面 $z=0$ 所围 成的含有 oz 轴正半轴的那部分。

解 由对称性，$\displaystyle\oiint_{\Sigma}x^2dydz=0$ $\displaystyle\oiint_{\Sigma}y^2dzdx=0$

Σ 分成三部分：球面部分 Σ_1，单叶双曲面部分 Σ_2，平面部分 Σ_3。

Σ_1 在 xoy 面上的投影域为 D_1：$x^2+y^2\leqslant 2R^2$,

$$\therefore\iint_{\Sigma_1}z^2dxdy=\iint_{D_1}(3R^2-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}R}(13R^2-r^2)rdr=4\pi R^4$$

Σ_2 在 xoy 面上的投影域为 D_2：$R^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 2R^2$,

$$\therefore\iint_{\Sigma_2}z^2dxdy=\iint_{D_2}(x^2+y^2-R^2)dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}R}(r^2-R^2)rdr=-\frac{\pi}{2}R^4$$ 9 分

Σ_3 在 xoy 面上投影域为 D_3：$x^2+y^2\leqslant R^2$.

$$\therefore\iint_{\Sigma_3}z^2dxdy=-\iint_{\Sigma_3}0\cdot dxdy==\iint_{\Sigma}=4\pi R^4+(-\frac{\pi}{2}Ra^4)=\frac{7}{2}\pi R^4$$ 12 分

或由高斯公式 原式 $=\displaystyle\oiint_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}2z\,\mathrm{d}v$ 9 分

$$=\int_0^R 2z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{xy}(1)}\mathrm{d}\sigma_{xy}+\int_{\mathrm{R}}^{\sqrt{3}R} 2z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{xy}(2)}\mathrm{d}\sigma_{xy}$$

$$=\int_0^R 2z\cdot\pi(z^2+R^2)\,\mathrm{d}z+\int_{\mathrm{R}}^{\sqrt{3}R} 2z\cdot\pi(3R^2-z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$=\pi R^4\left(\frac{1}{2}+1\right)+\pi\left(3R^2z^2-\frac{1}{2}z^4\right)\Big|_R^{\sqrt{3}R}$$

$$=\pi R^4\left(\frac{1}{2}+1+9-\frac{9}{2}-3+\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}\pi R^4$$ 12 分

九、（12 分）确定常数λ，使得在不包含 X 轴的单连域内，曲线积分

$\int_L\frac{x}{y}(x^2+2xy+2y^2)^\lambda dx-\frac{x^2}{y^2}(x^2+2xy+2y^2)^\lambda dy=\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关，并在上述条件下，求积分 $\int_{(-3,3)}^{(-1,1)}Pdx+Qdy$ 之值。

解　记 $t=x^2+2xy+2y^2$，$P=\frac{x}{y}t^\lambda$，$Q=-\frac{x^2}{y^2}t^\lambda$，

$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}t^\lambda+\frac{x}{y}\lambda\cdot t^{\lambda-1}\cdot(2x+4y)$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2x}{y^2}t^\lambda-\frac{x^2}{y^2}\lambda t^{\lambda-1}(2x+2y)$　　8 分

由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，得 $\frac{xt^{\lambda-1}}{y^2}t=-\frac{2\lambda xt^{\lambda-1}}{y^2}\cdot t$，即 $1=-2\lambda$，$\lambda=-\frac{1}{2}$，

故当 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 时，积分 $\int_L\frac{xy\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}y}{y^2(x^2+2xy+2y^2)^{\frac{1}{2}}}$ 与路径无关。

取 L_1：$x+y=0$，y 从 3 至 1。

$$\int_L\frac{xy\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}y}{y^2(x^2+2xy+2y^2)^{\frac{1}{2}}}=\int_{L_1}\frac{xy\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}y}{y^2(x^2+2xy+2y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\int_3^1\frac{(-y)\cdot y(-\mathrm{d}y)-y^2\,\mathrm{d}y}{y^2(y^2)^{\frac{1}{2}}}=0$$ 12 分

十、（10 分）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\frac{x^{n-1}}{3^n}$ 在 $(-3,\ 3)$ 内的和函数。

解 法一

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\cdot\frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{3^n}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^{n+\frac{1}{2}}}{3^n}\right)'=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x^{3/2}}{1-\frac{x}{3}}\right)'=2\cdot\left(\frac{x^{3/2}}{3-x}\right)'=\frac{(9-x)\sqrt{x}}{(3-x)^2}$$

故　　$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\cdot\frac{x^{n-1}}{3^n}=\frac{9-x}{(3-x)^2}$　　（$s(0)=1$ 上式也对）　10 分

解法二　设 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\cdot\frac{x^{n-1}}{3^n}$ 在 $(-3,\ 3)$ 内的和函数为 $s(x)$，于是

$$s(x)=3\cdot\frac{1}{3}+5\cdot\frac{x}{3^2}+7\cdot\frac{x^2}{3^3}+\cdots+(2n+1)\frac{x^{n-1}}{3^n}+\cdots$$

$$\frac{x}{3}s(x)=3\cdot\frac{x}{3^2}+5\cdot\frac{x^2}{3^3}+7\cdot\frac{x^3}{3^4}+\cdots(2n+1)\frac{x^n}{3^{n+1}}+\cdots$$

两式相减得： $\left(1-\frac{x}{3}\right)s(x)=1+2\cdot\frac{x}{3^2}+2\cdot\frac{x^2}{3^3}+\cdots+2\cdot\frac{x^{n-1}}{3^n}+\cdots=1+\frac{\frac{2x}{3^2}}{1-\frac{x}{3}}$

故而 $s(x)=\frac{9-x}{(3-x)^2}$ 10 分

十一、（6 分）设级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在[0，1]上收敛，证明：当 $a_0=a_1=0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛。

证明 因为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 x=1 点收敛，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛。

那么，存在 M>0，使得 $|a_n|\le \mathrm{M}$

而 $f\left(\frac{1}{n}\right)=a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}+\cdots$ 当 $a_0=a_1=0$ 时，有

$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}+\cdots$，当 $n\ge 2$ 以后，$f\left(\frac{1}{n}\right)$ 是绝对收敛的，所以

$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le\frac{|a_2|}{n^2}+\frac{|a_3|}{n^3}\cdots+\frac{|a_k|}{n^k}+\cdots\le \mathrm{M}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\cdots\right)\sim\frac{\mathrm{M}}{n^2}$ 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛 6 分

十二、（6 分）设 $f(x,y)$ 在单位圆上有连续的偏导数，且在边界上取值为零，计算极限：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi}\iint_D\frac{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}dxdy$$

其中 D 为圆环域：$\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1$.

解 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，则

$$\frac{\partial f}{\partial\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\rho\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\rho\sin\theta=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$$

于是 $I=\iint_D\frac{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}dxdy=\iint_D\frac{\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}}{\rho^2}\rho d\rho d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\varepsilon^1\frac{\partial f}{\partial\rho}d\rho=\int_0^{2\pi}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\Big|_\varepsilon^1 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\theta$$

因 $f(x,y)$ 在单位圆的边界上取值为零，故 $f(\cos\theta,\sin\theta)=0$，再利用定积分的中值定理，

可知 $I=-\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\theta=-2\pi f(\varepsilon\cos\theta^*,\varepsilon\sin\theta^*),\theta^*\in[0,2\pi]$，

故 $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi}\iint_D\frac{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{\varepsilon\to 0}f(\varepsilon\cos\theta^*,\varepsilon\sin\theta^*)=f(0,0).$ 6 分