集 合 的 基 数

School of Computer
Wuhan University

内容

集合的基数

基数

- 从一到无穷大
- 一一对应——双射

集合的基数

基数

- 从一到无穷大
- 一一对应——双射

自然数的定义

定义-后继集合

- 任意集合S的后继集合定义为：$S^+ = S \cup \{S\}$

例

- $\{a, b\}^+ = \{a, b\} \cup \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a, b\}\}$
- $\varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$
- $(\varnothing^+)^+ = \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\cdots\cdots$

自然数的定义

定义-后继集合

- 任意集合S的后继集合定义为：$S^+ = S \cup \{S\}$

例

- $\{a, b\}^+ = \{a, b\} \cup \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a, b\}\}$
- $\varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$
- $(\varnothing^+)^+ = \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- ……

自然数的定义

定义-后继集合

- 任意集合S的后继集合定义为：$S^+ = S \cup \{S\}$

例

- $\{a, b\}^+ = \{a, b\} \cup \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a, b\}\}$
- $\varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$
- $(\varnothing^+)^+ = \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- ……

自然数的定义

定义-后继集合

- 任意集合S的后继集合定义为：$S^+ = S \cup \{S\}$

例

- $\{a, b\}^+ = \{a, b\} \cup \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a, b\}\}$
- $\varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$
- $(\varnothing^+)^+ = \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- ……

自然数的定义

定义-后继集合

- 任意集合S的后继集合定义为：$S^{+} = S \cup \{S\}$

例

- $\{a, b\}^{+} = \{a, b\} \cup \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a, b\}\}$
- $\varnothing^{+} = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$
- $(\varnothing^{+})^{+} = \{\varnothing\}^{+} = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- ……

自然数的构造

公理

存在集合$\mathbb{N}$满足以下条件:

1. $\varnothing \in \mathbb{N}$;
2. if $n \in \mathbb{N}$, $\quad n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$.

Table: 自然数集合

集合	编号
$\varnothing$	0
$\{\varnothing\}$	1
$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$	2
$\cdots\cdots$	$\cdot\cdot$
$\cdots\cdots$	n
$n \cup \{n\}$	$n+1$
$\cdots\cdots$	$\cdot\cdot$

自然数的构造

公理

存在集合$\mathbb{N}$满足以下条件:

1. $\varnothing \in \mathbb{N}$;
2. if $n \in \mathbb{N}$, $\quad n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$.

Table: 自然数集合

集合	编号
$\varnothing$	0
$\{\varnothing\}$	1
$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$	2
$\cdots\cdots$	$\cdot\cdot$
$\cdots\cdots$	n
$n \cup \{n\}$	$n+1$
$\cdots\cdots$	$\cdot\cdot$

自然数

Peano自然数公理

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. 如果$n \in \mathbb{N}$，则存在惟一的n的后继$n' \in \mathbb{N}$；（后继惟一性）
3. 0不是任何自然数的后继；
4. 如果$n' = m'$，那么$n = m$；（直接前驱惟一性）

Remark

- 常以❷和❹来检验一个序列有没有“自然数性质”，如：
- 序列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$
- 序列 $0, 2, 4, 6, \ldots\ldots, 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots$

自然数

Peano自然数公理

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. 如果$n \in \mathbb{N}$，则存在惟一的n的后继$n' \in \mathbb{N}$; （后继惟一性）
3. 0不是任何自然数的后继;
4. 如果$n' = m'$，那么$n = m$; （直接前驱惟一性）

Remark

- 常以❷和❹来检验一个序列有没有“自然数性质”，如:
- 序列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$
- 序列 $0, 2, 4, 6, \ldots\ldots, 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots$

自然数

Peano自然数公理

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. 如果$n \in \mathbb{N}$，则存在惟一的n的后继$n' \in \mathbb{N}$；（后继惟一性）
3. 0不是任何自然数的后继;
4. 如果$n' = m'$，那么$n = m$；（直接前驱惟一性）

Remark

- 常以❷和❹来检验一个序列有没有“自然数性质”，如：
- 序列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$
- 序列 $0, 2, 4, 6, \ldots\ldots, 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots$

自然数

Peano自然数公理

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. 如果$n \in \mathbb{N}$，则存在惟一的n的后继$n' \in \mathbb{N}$；（后继惟一性）
3. 0不是任何自然数的后继;
4. 如果$n' = m'$，那么$n = m$；（直接前驱惟一性）

Remark

- 常以❷和❹来检验一个序列有没有“自然数性质”，如：
- 序列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$
- 序列 $0, 2, 4, 6, \ldots\ldots, 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots$

自然数

Peano自然数公理

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. 如果$n \in \mathbb{N}$，则存在惟一的n的后继$n' \in \mathbb{N}$;（后继惟一性）
3. 0不是任何自然数的后继;
4. 如果$n' = m'$，那么$n = m$;（直接前驱惟一性）

Remark

- 常以❷和❹来检验一个序列有没有“自然数性质”，如:
- 序列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$
- 序列 $0, 2, 4, 6, \ldots\ldots, 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots$

自然数

Peano自然数公理

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. 如果$n \in \mathbb{N}$，则存在惟一的n的后继$n' \in \mathbb{N}$；（后继惟一性）
3. 0不是任何自然数的后继；
4. 如果$n' = m'$，那么$n = m$；（直接前驱惟一性）

Remark

- 常以❷和❹来检验一个序列有没有“自然数性质”，如：
- 序列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$
- 序列 $0, 2, 4, 6, \ldots\ldots, 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots$

自然数

Peano自然数公理

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. 如果$n \in \mathbb{N}$，则存在惟一的n的后继$n' \in \mathbb{N}$；（后继惟一性）
3. 0不是任何自然数的后继;
4. 如果$n' = m'$，那么$n = m$；（直接前驱惟一性）

Remark

- 常以❷和❹来检验一个序列有没有“自然数性质”，如：
- 序列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$
- 序列 $0, 2, 4, 6, \ldots\ldots, 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots$

自然数的大于和小于

定义-小于

- 若$m, n \in \mathbb{N}$，使得$m \in n$，则称m小于n（或n大于m），记为$m < n$（or： $n > m$）．

定义-自然数初始段

- 集合$\mathbb{N}_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$，称为自然数的前$n$初始段。

自然数的大于和小于

定义-小于

- 若$m, n \in \mathbb{N}$，使得$m \in n$，则称m小于n（或n大于m），记为$m < n$（or： $n > m$）.

定义-自然数初始段

- 集合$\mathbb{N}_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$，称为自然数的前$n$初始段。

等势

定义-等势

- 定义：集合A和集合B等势，iff，集合A和B之间存在双射，记为$A \sim B$；否则，称集合A, B不等势，记为$A \nsim B$.
- 等势关系是一个等价关系。

例

- 例：试证明：集合$(-1,1)$与$(-\infty,\infty)$等势。
- 证：令 $f:(-1,1) \to (-\infty,\infty), f(x) = tan(\frac{\pi}{2}x)$
  $\forall y \in (-\infty,\infty), x = arctan(y) * \frac{2}{\pi}, f(x) = y \ \therefore f$是满射；
  又，$\because$若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) = tan(\frac{\pi}{2}x_1) \neq tan(\frac{\pi}{2}x_2) = f(x_2)$，
  $\therefore f$是单射；

等势

定义-等势

- 定义：集合A和集合B等势，iff，集合A和B之间存在双射，记为$A \sim B$;否则，称集合A, B不等势，记为$A \nsim B$.
- 等势关系是一个等价关系。

例

- 例：试证明：集合$(-1,1)$与$(-\infty,\infty)$等势。
- 证：令 $f:(-1,1) \to (-\infty,\infty), f(x) = tan(\frac{\pi}{2}x)$
  $\forall y \in (-\infty,\infty), x = arctan(y) * \frac{2}{\pi}, f(x) = y$ $\therefore f$是满射；
  又，$\because$若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) = tan(\frac{\pi}{2}x_1) \neq tan(\frac{\pi}{2}x_2) = f(x_2)$,
  $\therefore f$是单射；

等势

定义-等势

- 定义：集合A和集合B等势，iff，集合A和B之间存在双射，记为$A \sim B$;否则，称集合A, B不等势，记为$A \nsim B$.
- 等势关系是一个等价关系。

例

- 例：试证明：集合$(-1, 1)$与$(-\infty, \infty)$等势。
- 证：令 $f: (-1, 1) \to (-\infty, \infty), f(x) = tan(\frac{\pi}{2}x)$
  $\forall y \in (-\infty, \infty), x = arctan(y) * \frac{2}{\pi}, f(x) = y$ $\therefore f$是满射；
  又，$\because$若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) = tan(\frac{\pi}{2}x_1) \neq tan(\frac{\pi}{2}x_2) = f(x_2)$,
  $\therefore f$是单射；

等势

定义-等势

- 定义：集合A和集合B等势，iff，集合A和B之间存在双射，记为$A \sim B$;否则，称集合A, B不等势，记为$A \nsim B$.
- 等势关系是一个等价关系。

例

- 例：试证明：集合$(-1,1)$与$(-\infty,\infty)$等势。
- 证：令 $f:(-1,1) \to (-\infty,\infty), f(x) = tan(\frac{\pi}{2}x)$
  $\forall y \in (-\infty,\infty), x = arctan(y) * \frac{2}{\pi}, f(x) = y \ \therefore f$是满射；
  又，$\because$若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) = tan(\frac{\pi}{2}x_1) \neq tan(\frac{\pi}{2}x_2) = f(x_2)$，
  $\therefore f$是单射；

等势

定义-等势

- 定义：集合A和集合B等势，iff，集合A和B之间存在双射，记为$A \sim B$;否则，称集合A, B不等势，记为$A \nsim B$.
- 等势关系是一个等价关系。

例

- 例：试证明：集合$(-1, 1)$与$(-\infty, \infty)$等势。
- 证：令 $f: (-1, 1) \to (-\infty, \infty), f(x) = tan(\frac{\pi}{2}x)$
  $\forall y \in (-\infty, \infty), x = arctan(y) * \frac{2}{\pi}, f(x) = y \ \therefore f$是满射；
  又，$\because$若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) = tan(\frac{\pi}{2}x_1) \neq tan(\frac{\pi}{2}x_2) = f(x_2)$,
  $\therefore f$是单射；

等势

定义-等势

- 定义：集合A和集合B等势，iff，集合A和B之间存在双射，记为$A \sim B$;否则，称集合A, B不等势，记为$A \nsim B$.
- 等势关系是一个等价关系。

例

- 例：试证明：集合$(-1,1)$与$(-\infty,\infty)$等势。
- 证：令 $f: (-1,1) \to (-\infty,\infty), f(x) = tan(\frac{\pi}{2}x)$
  $\forall y \in (-\infty,\infty), x = arctan(y) * \frac{2}{\pi}, f(x) = y \ \therefore f$是满射；
  又，$\because$若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) = tan(\frac{\pi}{2}x_1) \neq tan(\frac{\pi}{2}x_2) = f(x_2)$,
  $\therefore f$是单射；

有限集和无限集

定义-有限集和无限集

- 集合A为有限集，iff，$\exists n \in \mathbb{N}$,使得$\mathbb{N}_n \sim A$，称集合A的基数为n，记为$|A| = n$；反之，集合A称为无限集。

例

- 例：试证明自然数集$\mathbb{N}$是无限集。
- 证明：(反证法)

  设$\mathbb{N}$为有限集，则$\exists f: \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}, (n \in \mathbb{N})$,是双射，

  设$k \in max(f(0), ..., f(n-1)) + 1$，则$k \in \mathbb{N}$，但不存在$x$使$f(x) = k$,

  $\therefore f$不是满射，与f是双射矛盾。

  $\therefore$自然数集$\mathbb{N}$是无限集。

有限集和无限集

定义-有限集和无限集

- 集合A为**有限集**，iff，$\exists n \in \mathbb{N}$,使得$\mathbb{N}_n \sim A$，称集合A的**基数**为n，记为$|A| = n$；反之，集合A称为**无限集**。

例

- 例：试证明自然数集$\mathbb{N}$是无限集。
- 证明：（反证法）

  设$\mathbb{N}$为有限集，则$\exists f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}, (n \in \mathbb{N})$,是双射，

  设$k \in max(f(0), ..., f(n-1)) + 1$，则$k \in \mathbb{N}$，但不存在$x$使$f(x) = k$，

  $\therefore f$不是满射，与f是双射矛盾。

  $\therefore$自然数集$\mathbb{N}$是无限集。

有限集和无限集

定义-有限集和无限集

- 集合A为有限集，iff，$\exists n \in \mathbb{N}$,使得$\mathbb{N}_n \sim A$，称集合A的基数为n，记为$|A| = n$；反之，集合A称为无限集。

例

- 例：试证明自然数集$\mathbb{N}$是无限集。
- 证明：(反证法)

  设$\mathbb{N}$为有限集，则$\exists f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}, (n \in \mathbb{N})$,是双射，

  设$k \in max(f(0), ..., f(n-1)) + 1$，则$k \in \mathbb{N}$，但不存在$x$使$f(x) = k$,

  $\therefore f$不是满射，与f是双射矛盾。

  $\therefore$自然数集$\mathbb{N}$是无限集。

有限集和无限集

定义-有限集和无限集

- 集合A为有限集，iff，$\exists n\in\mathbb{N}$,使得$\mathbb{N}_n\sim A$，称集合A的基数为n，记为$|A|=n$；反之，集合A称为无限集。

例

- 例：试证明自然数集$\mathbb{N}$是无限集。
- 证明：(反证法)

  设$\mathbb{N}$为有限集，则$\exists f:\mathbb{N}_n\to\mathbb{N},(n\in\mathbb{N})$,是双射，

  设$k\in max(f(0),...,f(n-1))+1$，则$k\in\mathbb{N}$，但不存在$x$使$f(x)=k$,

  $\therefore f$不是满射，与f是双射矛盾。

  $\therefore$自然数集$\mathbb{N}$是无限集。

有限集和无限集

定义-有限集和无限集

- 集合A为**有限集**，iff，$\exists n \in \mathbb{N}$,使得$\mathbb{N}_n \sim A$，称集合A的**基数**为n，记为$|A| = n$；反之，集合A称为**无限集**。

例

- 例：试证明自然数集$\mathbb{N}$是无限集。
- 证明：(反证法)

  设$\mathbb{N}$为有限集，则$\exists f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}, (n \in \mathbb{N})$,是双射，

  设$k \in max(f(0), ..., f(n-1)) + 1$，则$k \in \mathbb{N}$，但不存在$x$使$f(x) = k$，

  $\therefore f$不是满射，与f是双射矛盾。

  $\therefore$自然数集$\mathbb{N}$是无限集。

有限集和无限集

定义-有限集和无限集

- 集合A为有限集，iff，$\exists n \in \mathbb{N}$,使得$\mathbb{N}_n \sim A$，称集合A的基数为n，记为$|A| = n$；反之，集合A称为无限集。

例

- 例：试证明自然数集$\mathbb{N}$是无限集。
- 证明：(反证法)

  设$\mathbb{N}$为有限集，则$\exists f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}, (n \in \mathbb{N})$,是双射，

  设$k \in max(f(0), ..., f(n-1)) + 1$，则$k \in \mathbb{N}$，但不存在$x$使$f(x) = k$，

  $\therefore$ f不是满射，与f是双射矛盾。

  $\therefore$自然数集$\mathbb{N}$是无限集。

有限集和无限集

定义-有限集和无限集

- 集合A为有限集，iff，$\exists n \in \mathbb{N}$,使得$\mathbb{N}_n \sim A$，称集合A的基数为n，记为$|A| = n$；反之，集合A称为无限集。

例

- 例：试证明自然数集$\mathbb{N}$是无限集。
- 证明：(反证法)

  设$\mathbb{N}$为有限集，则$\exists f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}, (n \in \mathbb{N})$,是双射，

  设$k \in max(f(0), ..., f(n-1)) + 1$，则$k \in \mathbb{N}$，但不存在$x$使$f(x) = k$，

  $\therefore f$不是满射，与f是双射矛盾。

  $\therefore$自然数集$\mathbb{N}$是无限集。

有限集和无限集的性质

性质

- 任何有限集都不能与其真子集等势。
- 任何无限集都能与其真子集等势。
- 有限集的子集都是有限集。
- 无限集的父集一定是无限集。

有限集和无限集的性质

性质

- 任何有限集都不能与其真子集等势。
- 任何无限集都能与其真子集等势。
- 有限集的子集都是有限集。
- 无限集的父集一定是无限集。

有限集和无限集的性质

性质

- 任何有限集都不能与其真子集等势。
- 任何无限集都能与其真子集等势。
- 有限集的子集都是有限集。
- 无限集的父集一定是无限集。

有限集和无限集的性质

性质

- 任何有限集都不能与其真子集等势。
- 任何无限集都能与其真子集等势。
- 有限集的子集都是有限集。
- 无限集的父集一定是无限集。

性质

定理

有限集的子集都是有限集。

Proof

- 证：设A是有限集，$C \subseteq A$，分两种情况：
  若C是$\varnothing$，则C是有限集；
  若C非空，则A也非空，可将A中的元素列为：
  $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}$，其中$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$
  现构造一个双射函数$g: \mathbb{N}_j \to C, (j \in \mathbb{N})$，算法如下：

1. $i = 0, j = 0$;
2. 检查a_i是否在子集C中，若$a_i \in C$，转❸，否则转❹;
3. $g(j) = a_i, j++, i++$;若$i < n$, 转❷, 否则结束;
4. $i++$;若$i < n$,转❷, 否则结束.

由此构造的g是从$N_j = \{0, 1, \ldots, j-1\}$到$C$的双射，所以$C$是有限集。

性质

定理

有限集的子集都是有限集。

Proof

- 证：设A是有限集，$C \subseteq A$，分两种情况：
  若C是$\varnothing$，则C是有限集；
  若C非空，则A也非空，可将A中的元素列为：
  $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}$，其中$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$
  现构造一个双射函数$g: \mathbb{N}_j \to C, (j \in \mathbb{N})$，算法如下：

1. $i = 0, j = 0$;
2. 检查a_i是否在子集C中，若$a_i \in C$，转❸，否则转❹;
3. $g(j) = a_i, j++, i++$;若$i < n$, 转❷, 否则结束;
4. $i++$;若$i < n$,转❷, 否则结束.

由此构造的g是从$N_j = \{0, 1, \ldots, j-1\}$到$C$的双射，所以$C$是有限集。

性质

定理

有限集的子集都是有限集。

Proof

- 证：设A是有限集，$C \subseteq A$，分两种情况：
  若C是$\varnothing$，则C是有限集；
  若C非空，则A也非空，可将A中的元素列为：
  $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}$，其中$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$
  现构造一个双射函数$g : \mathbb{N}_j \to C, (j \in \mathbb{N})$，算法如下：

1. $i = 0, j = 0$;
2. 检查a_i是否在子集C中，若$a_i \in C$，转❸，否则转❹；
3. $g(j) = a_i, j++, i++$;若$i < n$, 转❷, 否则结束；
4. $i++$;若$i < n$,转❷, 否则结束.

由此构造的g是从$N_j = \{0, 1, \ldots, j-1\}$到$C$的双射，所以$C$是有限集。

性质

定理

有限集的子集都是有限集。

Proof

- 证：设A是有限集，$C \subseteq A$，分两种情况：
  若C是$\varnothing$，则C是有限集；
  若C非空，则A也非空，可将A中的元素列为：
  $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}$，其中$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$
  现构造一个双射函数$g : \mathbb{N}_j \to C, (j \in \mathbb{N})$，算法如下：

1. $i = 0, j = 0$;
2. 检查a_i是否在子集C中，若$a_i \in C$，转❸，否则转❹;
3. $g(j) = a_i, j++, i++$;若$i < n$, 转❷, 否则结束;
4. $i++$;若$i < n$,转❷, 否则结束.

由此构造的g是从$N_j = \{0, 1, \ldots, j-1\}$到$C$的双射，所以$C$是有限集。

性质

定理

有限集的子集都是有限集。

Proof

- 证：设A是有限集，$C \subseteq A$，分两种情况：
  若C是$\varnothing$，则C是有限集；
  若C非空，则A也非空，可将A中的元素列为：
  $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}$，其中$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$
  现构造一个双射函数$g : \mathbb{N}_j \to C, (j \in \mathbb{N})$，算法如下：

1. $i = 0, j = 0$;
2. 检查a_i是否在子集C中，若$a_i \in C$，转③，否则转④;
3. $g(j) = a_i, j++, i++$;若$i < n$, 转②, 否则结束;
4. $i++$;若$i < n$,转②, 否则结束.

由此构造的g是从$N_j = \{0, 1, \ldots, j-1\}$到$C$的双射，所以$C$是有限集。

性质

定理

有限集的子集都是有限集。

Proof

- 证：设A是有限集，$C \subseteq A$，分两种情况：
  若C是$\varnothing$，则C是有限集；
  若C非空，则A也非空，可将A中的元素列为：
  $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}$，其中$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$
  现构造一个双射函数$g : \mathbb{N}_j \to C, (j \in \mathbb{N})$，算法如下：

1. $i = 0, j = 0$;
2. 检查a_i是否在子集C中，若$a_i \in C$，转❸，否则转❹;
3. $g(j) = a_i, j++, i++$;若$i < n$, 转❷, 否则结束;
4. $i++$;若$i < n$,转❷, 否则结束.

由此构造的g是从$N_j = \{0, 1, \ldots, j-1\}$到$C$的双射，所以$C$是有限集。

性质

定理

有限集的子集都是有限集。

Proof

- 证：设A是有限集，$C \subseteq A$，分两种情况：
  若C是$\varnothing$，则C是有限集；
  若C非空，则A也非空，可将A中的元素列为：
  $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}$，其中$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$
  现构造一个双射函数$g : \mathbb{N}_j \to C, (j \in \mathbb{N})$，算法如下：

1. $i = 0, j = 0$;
2. 检查a_i是否在子集C中，若$a_i \in C$，转❸，否则转❹;
3. $g(j) = a_i, j++, i++$;若$i < n$, 转❷, 否则结束;
4. $i++$;若$i < n$,转❷, 否则结束.

由此构造的g是从$N_j = \{0, 1, \ldots, j-1\}$到$C$的双射，所以$C$是有限集。

性质

定理

有限集的子集都是有限集。

Proof

- 证：设A是有限集，$C \subseteq A$，分两种情况：
  若C是$\varnothing$，则C是有限集；
  若C非空，则A也非空，可将A中的元素列为：
  $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}$，其中$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$
  现构造一个双射函数$g : \mathbb{N}_j \to C, (j \in \mathbb{N})$，算法如下：

1. $i = 0, j = 0$;
2. 检查a_i是否在子集C中，若$a_i \in C$，转❸，否则转❹;
3. $g(j) = a_i, j++, i++$;若$i < n$, 转❷, 否则结束;
4. $i++$;若$i < n$,转❷, 否则结束.

由此构造的g是从$N_j = \{0, 1, \ldots, j-1\}$到$C$的双射，所以$C$是有限集。

性质

定理

有限集的子集都是有限集。

Proof

- 证：设A是有限集，$C \subseteq A$，分两种情况：
  若C是$\varnothing$，则C是有限集；
  若C非空，则A也非空，可将A中的元素列为：
  $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}$，其中$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$
  现构造一个双射函数$g : \mathbb{N}_j \to C, (j \in \mathbb{N})$，算法如下：

1. $i = 0, j = 0$;
2. 检查a_i是否在子集C中，若$a_i \in C$，转❸，否则转❹;
3. $g(j) = a_i, j++, i++$;若$i < n$, 转❷, 否则结束;
4. $i++$;若$i < n$,转❷, 否则结束.

由此构造的g是从$N_j = \{0, 1, \ldots, j-1\}$到$C$的双射，所以$C$是有限集。

性质

定理

有限集的子集都是有限集。

Proof

- 证：设A是有限集，$C \subseteq A$，分两种情况：
  若C是$\varnothing$，则C是有限集；
  若C非空，则A也非空，可将A中的元素列为：
  $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}$，其中$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$
  现构造一个双射函数$g : \mathbb{N}_j \to C, (j \in \mathbb{N})$，算法如下：

1. $i = 0, j = 0$;
2. 检查a_i是否在子集C中，若$a_i \in C$，转❸，否则转❹;
3. $g(j) = a_i, j++, i++$;若$i < n$, 转❷, 否则结束;
4. $i++$;若$i < n$,转❷, 否则结束.

由此构造的g是从$N_j = \{0, 1, \ldots, j-1\}$到$C$的双射，所以$C$是有限集。

可数集和不可数集

定义-可数无限集

- 集合A为可数无限集，iff，集合A与自然数集$\mathbb{N}$等势，其基数用$\aleph_0$表示（读作阿列夫零），记为$|A| = \aleph_0$.

例

- 集合$\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}$的基数均为$\aleph_0$.

定义-不可数集

- 集合A是不可数集，iff, A不是有限集且不是可数无限集。
- 集合可分为：
  - 可数集——有限集和可数无限集
  - 不可数集

可数集和不可数集

定义-可数无限集

- 集合A为可数无限集，iff，集合A与自然数集$\mathbb{N}$等势，其基数用$\aleph_0$表示（读作阿列夫零），记为$|A| = \aleph_0$.

例

- 集合$\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}$的基数均为$\aleph_0$.

定义-不可数集

- 集合A是不可数集，iff, A不是有限集且不是可数无限集。
- 集合可分为：
  - 可数集——有限集和可数无限集
  - 不可数集

可数集和不可数集

定义-可数无限集

- 集合A为可数无限集，iff，集合A与自然数集$\mathbb{N}$等势，其基数用$\aleph_0$表示（读作阿列夫零），记为$|A| = \aleph_0$.

例

- 集合$\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}$的基数均为$\aleph_0$.

定义-不可数集

- 集合A是不可数集，iff, A不是有限集且不是可数无限集。
- 集合可分为：
  - 可数集——有限集和可数无限集
  - 不可数集

可数集和不可数集

定义-可数无限集

- 集合A为可数无限集，iff，集合A与自然数集$\mathbb{N}$等势，其基数用$\aleph_0$表示（读作阿列夫零），记为$|A| = \aleph_0$.

例

- 集合$\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}$的基数均为$\aleph_0$.

定义-不可数集

- 集合A是不可数集，iff, A不是有限集且不是可数无限集。
- 集合可分为：
  - 可数集——有限集和可数无限集
  - 不可数集

可数集和不可数集

定义-可数无限集

- 集合A为可数无限集，iff，集合A与自然数集$\mathbb{N}$等势，其基数用$\aleph_0$表示（读作阿列夫零），记为$|A| = \aleph_0$.

例

- 集合$\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}$的基数均为$\aleph_0$.

定义-不可数集

- 集合A是不可数集，iff, A不是有限集且不是可数无限集。
- 集合可分为：
  - 可数集——有限集和可数无限集
  - 不可数集

可数集和不可数集

定义-可数无限集

- 集合A为可数无限集，iff，集合A与自然数集$\mathbb{N}$等势，其基数用$\aleph_0$表示（读作阿列夫零），记为$|A| = \aleph_0$.

例

- 集合$\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}$的基数均为$\aleph_0$.

定义-不可数集

- 集合A是不可数集，iff, A不是有限集且不是可数无限集。
- 集合可分为：
  - 可数集——有限集和可数无限集
  - 不可数集

可数无限集判别

定理

- 定理：集合A为可数无限集，iff，A的全部元素可以无重复地排列为一个序列$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$
- 证明：$\Longleftarrow$
  集合A可表示为$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，则$a_n$与自然数$n$对应，
  即可定义从A到$\mathbb{N}$的双射，$f: A \to \mathbb{N}, f(a_n) = n$,
  $\therefore A$ 为可数无限集。
  $\Longrightarrow$
  若A为可数无限集，则存在双射$f: \mathbb{N} \to A, f(n) = a_n$,
  即$f(n)$对应的元素为a_n,
  $\therefore A$ 的元素可以无重复地排列为$f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$
  即排列为$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$

注

- "重复排列"等价于"无重复排列"。(构造算法)
- 此序列具有"自然数性质"。

可数无限集判别

定理

- 定理：集合A为可数无限集，iff，A的全部元素可以无重复地排列为一个序列$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$
- 证明：$\Longleftarrow$

  集合A可表示为$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，则$a_n$与自然数$n$对应，即可定义从$A$到$\mathbb{N}$的双射，$f: A \to \mathbb{N}, f(a_n) = n$，

  $\therefore A$ 为可数无限集。

  $\Longrightarrow$

  若A为可数无限集，则存在双射$f: \mathbb{N} \to A, f(n) = a_n$，

  即$f(n)$对应的元素为a_n，

  $\therefore A$ 的元素可以无重复地排列为$f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$

  即排列为$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$

注

- “重复排列”等价于“无重复排列”。(构造算法)
- 此序列具有“自然数性质”。

可数无限集判别

定理

- 定理：集合A为可数无限集，iff，A的全部元素可以无重复地排列为一个序列$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$
- 证明：$\Longleftarrow$
  集合A可表示为$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，则$a_n$与自然数$n$对应，
  即可定义从A到$\mathbb{N}$的双射，$f: A \to \mathbb{N}, f(a_n) = n$,
  $\therefore A$ 为可数无限集。
  $\Longrightarrow$
  若A为可数无限集，则存在双射$f: \mathbb{N} \to A, f(n) = a_n$,
  即$f(n)$对应的元素为a_n,
  $\therefore A$ 的元素可以无重复地排列为$f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$
  即排列为$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$

注

- “重复排列”等价于“无重复排列”。(构造算法)
- 此序列具有“自然数性质”。

可数无限集判别

定理

- 定理：集合A为可数无限集，iff，A的全部元素可以无重复地排列为一个序列$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$.
- 证明：$\Longleftarrow$
  集合A可表示为$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，则$a_n$与自然数$n$对应，
  即可定义从A到$\mathbb{N}$的双射，$f : A \to \mathbb{N}, f(a_n) = n$,
  $\therefore A$ 为可数无限集。
  $\Longrightarrow$
  若A为可数无限集，则存在双射$f : \mathbb{N} \to A, f(n) = a_n$,
  即$f(n)$对应的元素为a_n,
  $\therefore A$ 的元素可以无重复地排列为$f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$
  即排列为$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$.

注

- “重复排列”等价于“无重复排列”。(构造算法)
- 此序列具有“自然数性质”。

可数无限集判别

定理

- 定理：集合A为可数无限集，iff，A的全部元素可以无重复地排列为一个序列$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$
- 证明：$\Longleftarrow$
  集合A可表示为$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，则$a_n$与自然数$n$对应，
  即可定义从A到$\mathbb{N}$的双射，$f: A \to \mathbb{N}, f(a_n) = n$,
  $\therefore A$ 为可数无限集。
  $\Longrightarrow$
  若A为可数无限集，则存在双射$f: \mathbb{N} \to A, f(n) = a_n$,
  即$f(n)$对应的元素为a_n,
  $\therefore A$ 的元素可以无重复地排列为$f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$
  即排列为$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$

注

- “重复排列”等价于“无重复排列”。（构造算法）
- 此序列具有“自然数性质”。

可数无限集判别

定理

- 定理：集合A为可数无限集，iff，A的全部元素可以无重复地排列为一个序列$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$
- 证明：$\Longleftarrow$
  集合A可表示为$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，则$a_n$与自然数$n$对应，
  即可定义从A到$\mathbb{N}$的双射，$f: A \to \mathbb{N}, f(a_n) = n$,
  $\therefore A$ 为可数无限集。
  $\Longrightarrow$
  若A为可数无限集，则存在双射$f: \mathbb{N} \to A, f(n) = a_n$,
  即$f(n)$对应的元素为a_n,
  $\therefore A$ 的元素可以无重复地排列为$f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$
  即排列为$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$

注

- “重复排列”等价于“无重复排列”。(构造算法)
- 此序列具有“自然数性质”。

可数无限集判别

定理

- 定理：集合A为可数无限集，iff，A的全部元素可以无重复地排列为一个序列$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$
- 证明：$\Longleftarrow$
  集合A可表示为$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，则$a_n$与自然数$n$对应，
  即可定义从A到$\mathbb{N}$的双射，$f: A \to \mathbb{N}, f(a_n) = n$,
  $\therefore A$ 为可数无限集。
  $\Longrightarrow$
  若A为可数无限集，则存在双射$f: \mathbb{N} \to A, f(n) = a_n$,
  即$f(n)$对应的元素为a_n,
  $\therefore A$ 的元素可以无重复地排列为$f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$
  即排列为$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$

注

- “重复排列”等价于“无重复排列”。(构造算法)
- 此序列具有“自然数性质”。

可数无限集判别

定理

- 定理：集合A为可数无限集，iff，A的全部元素可以无重复地排列为一个序列$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$
- 证明：$\Longleftarrow$
  集合A可表示为$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，则$a_n$与自然数$n$对应，
  即可定义从A到$\mathbb{N}$的双射，$f: A \to \mathbb{N}, f(a_n) = n$,
  $\therefore A$ 为可数无限集。
  $\Longrightarrow$
  若A为可数无限集，则存在双射$f: \mathbb{N} \to A, f(n) = a_n$,
  即$f(n)$对应的元素为a_n,
  $\therefore A$ 的元素可以无重复地排列为$f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$
  即排列为$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$

注

- “重复排列”等价于“无重复排列”。(构造算法)
- 此序列具有“自然数性质”。

可数无限集判别

定理

- 定理：集合A为可数无限集，iff，A的全部元素可以无重复地排列为一个序列$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$
- 证明：$\Longleftarrow$
  集合A可表示为$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，则$a_n$与自然数$n$对应，
  即可定义从A到$\mathbb{N}$的双射，$f: A \to \mathbb{N}, f(a_n) = n$,
  $\therefore A$ 为可数无限集。
  $\Longrightarrow$
  若A为可数无限集，则存在双射$f: \mathbb{N} \to A, f(n) = a_n$,
  即$f(n)$对应的元素为a_n,
  $\therefore A$ 的元素可以无重复地排列为$f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$
  即排列为$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$

注

- “重复排列”等价于“无重复排列”。（构造算法）
- 此序列具有“自然数性质”。

可数无限集判别

定理

- 定理：集合A为可数无限集，iff，A的全部元素可以无重复地排列为一个序列$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$
- 证明：$\Longleftarrow$
  集合A可表示为$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，则$a_n$与自然数$n$对应，
  即可定义从A到$\mathbb{N}$的双射，$f : A \to \mathbb{N}, f(a_n) = n$,
  $\therefore A$ 为可数无限集。
  $\Longrightarrow$
  若A为可数无限集，则存在双射$f : \mathbb{N} \to A, f(n) = a_n$,
  即$f(n)$对应的元素为a_n,
  $\therefore A$ 的元素可以无重复地排列为$f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$
  即排列为$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$

注

- “重复排列”等价于“无重复排列”。（构造算法）
- 此序列具有“自然数性质”。

可数无限集判别

定理

- 定理：集合A为可数无限集，iff，A的全部元素可以无重复地排列为一个序列$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$
- 证明：$\Longleftarrow$
  集合A可表示为$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，则$a_n$与自然数$n$对应，
  即可定义从A到$\mathbb{N}$的双射，$f: A \to \mathbb{N}, f(a_n) = n$,
  $\therefore A$ 为可数无限集。
  $\Longrightarrow$
  若A为可数无限集，则存在双射$f: \mathbb{N} \to A, f(n) = a_n$,
  即$f(n)$对应的元素为a_n,
  $\therefore A$ 的元素可以无重复地排列为$f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$
  即排列为$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$

注

- “重复排列”等价于“无重复排列”。(构造算法)
- 此序列具有“自然数性质”。

可数无限集判别

定理

- 定理：集合A为可数无限集，iff，A的全部元素可以无重复地排列为一个序列$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$
- 证明：$\Longleftarrow$
  集合A可表示为$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，则$a_n$与自然数$n$对应，
  即可定义从A到$\mathbb{N}$的双射，$f : A \rightarrow \mathbb{N}, f(a_n) = n$，
  $\therefore A$ 为可数无限集。
  $\Longrightarrow$
  若A为可数无限集，则存在双射$f : \mathbb{N} \rightarrow A, f(n) = a_n$，
  即$f(n)$对应的元素为a_n，
  $\therefore A$ 的元素可以无重复地排列为$f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$
  即排列为$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$

注

- “重复排列”等价于“无重复排列”。(构造算法)
- 此序列具有“自然数性质”。

枚举的定义

定义-枚举

- 集合A的枚举是从自然数集$\mathbb{N}$($\mathbb{N}$的初始段)到A的一个满射函数；若该满射也是单射，则是一个无重复枚举，若为非单射，则是重复枚举。
- 通常，枚举f表示为$< f(0), f(1), f(2), ..., f(n), ... >$
- 集合A是可数的，iff，集合A可枚举。

枚举的定义

定义-枚举

- 集合A的枚举是从自然数集$\mathbb{N}$($\mathbb{N}$的初始段)到A的一个满射函数；若该满射也是单射，则是一个无重复枚举，若为非单射，则是重复枚举。
- 通常，枚举f表示为$< f(0), f(1), f(2), ..., f(n), ... >$
- 集合A是可数的，iff，集合A可枚举。

枚举的定义

定义-枚举

- 集合A的枚举是从自然数集$\mathbb{N}$($\mathbb{N}$的初始段)到A的一个满射函数；若该满射也是单射，则是一个无重复枚举，若为非单射，则是重复枚举。
- 通常，枚举f表示为$< f(0), f(1), f(2), ..., f(n), ... >$
- 集合A是可数的，iff，集合A可枚举。

枚举

Table：$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$的枚举

$<0,0>_{0}$	$<0,1>_{1}$	$<0,2>_{3}$	$\dots$	$\dots$
$<1,0>_{2}$	$<1,1>_{4}$	$<1,2>$	$\dots$	$\dots$
$<2,0>_{5}$	$<2,1>$	$<2,2>$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$<m,n>$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

例

- $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$是可数无限集.
- $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(m,n)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+m$

枚举

Table: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$的枚举

$<0,0>_0$	$<0,1>_1$	$<0,2>_3$	$\dots$	$\dots$
$<1,0>_2$	$<1,1>_4$	$<1,2>$	$\dots$	$\dots$
$<2,0>_5$	$<2,1>$	$<2,2>$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$<m,n>$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

例

- $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$是可数无限集.
- $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(m,n)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+m$

例子

Table: $\mathbb{Q}_+$的枚举(一)

$1/1_0$	$1/2_1$	$1/3_3$	...
$2/1_2$	$2/2_4$	$2/3$	...
$3/1_5$	$3/2$	$3/3$	...
...	...	...	...
...	...	m/n	...
...	...	...	...

Table: $\mathbb{Q}_+$的枚举(二)

$1/1_0$	$1/2_1$	$1/3_4$	...
$2/1_3$	$2/2_2$	$2/3_5$	...
$3/1_8$	$3/2_7$	$3/3_6$	...
...	...	...	...
...	...	m/n	...
...	...	...	...

例

- $\mathbb{Q}_+$是可数无限集。
- 是有重复的序列，等价于无重复的序列。

例子

Table: $\mathbb{Q}_+$的枚举(一)

$1/1_0$	$1/2_1$	$1/3_3$	...
$2/1_2$	$2/2_4$	$2/3$	...
$3/1_5$	$3/2$	$3/3$	...
...	...	...	...
...	...	m/n	...
...	...	...	...

Table: $\mathbb{Q}_+$的枚举(二)

$1/1_0$	$1/2_1$	$1/3_4$	...
$2/1_3$	$2/2_2$	$2/3_5$	...
$3/1_8$	$3/2_7$	$3/3_6$	...
...	...	...	...
...	...	m/n	...
...	...	...	...

例

- $\mathbb{Q}_+$是可数无限集。
- 是有重复的序列，等价于无重复的序列。

例子

例

- 字母表$\Sigma = \{a, b\}$，其中$a \prec b$，则Σ^*是可数无限集。
  Σ^*的元素可以排成序列$\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots$，则$|\Sigma^*| = \aleph_0$

词典序和标准序

设有限字母表Σ指定了字母线序，对于$s, t \in \Sigma^*$

- 词典序$\preccurlyeq$ ($s \prec t$)
  1. s是空串；或者
  2. s是t的前缀；或者
  3. $s = zu, t = zv$，（$z \in \Sigma^*$是s, t的最长公共前缀），且在字母线序中u的第一个字符前于v的第一个字符.
- 标准序$\preccurlyeq$ ($s \prec t$)
  1. $||s|| < ||t||$，或者
  2. $||s|| = ||t||$，且在词典序中s前于t.

例子

例

- 字母表$\Sigma = \{a, b\}$，其中$a \prec b$，则Σ^*是可数无限集。
  Σ^*的元素可以排成序列$\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots$，则$|\Sigma^*| = \aleph_0$

词典序和标准序

设有限字母表Σ指定了字母线序，对于$s, t \in \Sigma^*$

- 词典序$\preccurlyeq$ $(s \prec t)$
  1. s是空串；或者
  2. s是t的前缀；或者
  3. $s = zu, t = zv$，（$z \in \Sigma^*$是s, t的最长公共前缀），且在字母线序中u的第一个字符前于v的第一个字符.
- 标准序$\preccurlyeq$ $(s \prec t)$
  1. $||s|| < ||t||$，或者
  2. $||s|| = ||t||$，且在词典序中s前于t.

例子

例

- 字母表$\Sigma=\{a,b\}$，其中$a\prec b$，则Σ^*是可数无限集。
  Σ^*的元素可以排成序列$\epsilon,a,b,aa,ab,ba,bb,\ldots$，则$|\Sigma^*|=\aleph_0$

词典序和标准序

设有限字母表Σ指定了字母线序，对于$s,t\in\Sigma^*$

- 词典序$\preccurlyeq$ $(s\prec t)$
  1. s是空串；或者
  2. s是t的前缀；或者
  3. $s=zu,t=zv$，($z\in\Sigma^*$是s,t的最长公共前缀)，且在字母线序中u的第一个字符前于v的第一个字符.
- 标准序$\preccurlyeq$ $(s\prec t)$
  1. $||s||<||t||$，或者
  2. $||s||=||t||$，且在词典序中s前于t.

例子

例

- 字母表$\Sigma = \{a, b\}$，其中$a \prec b$，则Σ^*是可数无限集。
  Σ^*的元素可以排成序列$\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots$，则$|\Sigma^*| = \aleph_0$

词典序和标准序

设有限字母表Σ指定了字母线序，对于$s, t \in \Sigma^*$

- 词典序$\preccurlyeq$ ($s \prec t$)
  1. s是空串；或者
  2. s是t的前缀；或者
  3. $s = zu, t = zv$,（$z \in \Sigma^*$是s, t的最长公共前缀），且在字母线序中u的第一个字符前于v的第一个字符.
- 标准序$\preccurlyeq$ ($s \prec t$)
  1. $||s|| < ||t||$，或者
  2. $||s|| = ||t||$，且在词典序中s前于t.

例子

例

- 字母表$\Sigma = \{a, b\}$，其中$a \prec b$，则Σ^*是可数无限集。
  Σ^*的元素可以排成序列$\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots$，则$|\Sigma^*| = \aleph_0$

词典序和标准序

设有限字母表Σ指定了字母线序，对于$s, t \in \Sigma^*$

- 词典序$\preccurlyeq$（$s \prec t$）
  1. s是空串；或者
  2. s是t的前缀；或者
  3. $s = zu, t = zv$,（$z \in \Sigma^*$是s, t的最长公共前缀），且在字母线序中u的第一个字符前于v的第一个字符.
- 标准序$\preccurlyeq$（$s \prec t$）
  1. $||s|| < ||t||$，或者
  2. $||s|| = ||t||$，且在词典序中s前于t.

例子

例

- 字母表$\Sigma = \{a, b\}$，其中$a \prec b$，则Σ^*是可数无限集。
  Σ^*的元素可以排成序列$\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots$，则$|\Sigma^*| = \aleph_0$

词典序和标准序

设有限字母表Σ指定了字母线序，对于$s, t \in \Sigma^*$

- 词典序$\preccurlyeq$ ($s \prec t$)
  1. s是空串；或者
  2. s是t的前缀；或者
  3. $s = zu, t = zv$,（$z \in \Sigma^*$是s, t的最长公共前缀），且在字母线序中u的第一个字符前于v的第一个字符.
- 标准序$\preccurlyeq$ ($s \prec t$)
  1. $||s|| < ||t||$，或者
  2. $||s|| = ||t||$，且在词典序中s前于t.

例子

例

- 字母表$\Sigma = \{a, b\}$，其中$a \prec b$，则Σ^*是可数无限集。
  Σ^*的元素可以排成序列$\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots$，则$|\Sigma^*| = \aleph_0$

词典序和标准序

设有限字母表Σ指定了字母线序，对于$s, t \in \Sigma^*$

- 词典序$\preccurlyeq$ $(s \prec t)$
  1. s是空串；或者
  2. s是t的前缀；或者
  3. $s = zu, t = zv$,（$z \in \Sigma^*$是s, t的最长公共前缀），且在字母线序中u的第一个字符前于v的第一个字符.
- 标准序$\preccurlyeq$ $(s \prec t)$
  1. $||s|| < ||t||$，或者
  2. $||s|| = ||t||$，且在词典序中s前于t.

例子

例

- 字母表$\Sigma = \{a, b\}$，其中$a \prec b$，则Σ^*是可数无限集。
  Σ^*的元素可以排成序列$\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots$，则$|\Sigma^*| = \aleph_0$

词典序和标准序

设有限字母表Σ指定了字母线序，对于$s, t \in \Sigma^*$

- 词典序$\preccurlyeq$ $(s \prec t)$
  1. s是空串；或者
  2. s是t的前缀；或者
  3. $s = zu, t = zv$，（$z \in \Sigma^*$是s, t的最长公共前缀），且在字母线序中u的第一个字符前于v的第一个字符.
- 标准序$\preccurlyeq$ $(s \prec t)$
  1. $||s|| < ||t||$，或者
  2. $||s|| = ||t||$，且在词典序中s前于t.

例子

例

- 字母表$\Sigma = \{a, b\}$，其中$a \prec b$，则Σ^*是可数无限集。
  Σ^*的元素可以排成序列$\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots$，则$|\Sigma^*| = \aleph_0$

词典序和标准序

设有限字母表Σ指定了字母线序，对于$s, t \in \Sigma^*$

- 词典序$\preccurlyeq$ $(s \prec t)$
  1. s是空串；或者
  2. s是t的前缀；或者
  3. $s = zu, t = zv$，（$z \in \Sigma^*$是s, t的最长公共前缀），且在字母线序中u的第一个字符前于v的第一个字符.
- 标准序$\preccurlyeq$ $(s \prec t)$
  1. $||s|| < ||t||$，或者
  2. $||s|| = ||t||$，且在词典序中s前于t.

可数集的性质（一）

性质

1. 可数集的任何子集都是可数集.
2. 可数个可数集的并集是可数集.

证明：分两种情况：见下表

Table：有限个可数集

$A0$	$a00_0$	$a01_{n+1}$	$a02$	$\dots$
$A1$	$a10_1$	$a11_{n+2}$	$a12$	$\dots$
$A2$	$a20_2$	$a21_{n+3}$	$a22$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
An	$an0_n$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Table：可数无限个可数集

$A0$	$a00_0$	$a01_1$	$a02_3$	$\dots$
$A1$	$a10_2$	$a11_4$	$a12$	$\dots$
$A2$	$a20_5$	$a21$	$a22$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
An	$an0$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

可数集例子

定理

- 若A, B是可数集，则$A \times B$是可数集；
- 若A是可数集，则A^n是可数集
- 例子

① $\mathbb{Q}$是可数集

② $\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n$是可数集；

③ 有理系数的所有(n次)多项式的集合是可数集；

④ 以有理数为元素的所有$m \times n$矩阵（任意有限维的矩阵）的集合是可数集。

可数集例子

定理

- 若A, B是可数集，则$A \times B$是可数集；
- 若A是可数集，则A^n是可数集
- 例子

① $\mathbb{Q}$是可数集

② $\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n$是可数集；

③ 有理系数的所有(n次)多项式的集合是可数集；

④ 以有理数为元素的所有$m \times n$矩阵（任意有限维的矩阵）的集合是可数集。

可数集例子

定理

- 若A, B是可数集，则$A \times B$是可数集；
- 若A是可数集，则A^n是可数集
- 例子

1. $\mathbb{Q}$是可数集
2. $\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n$是可数集；
3. 有理系数的所有(n次)多项式的集合是可数集；
4. 以有理数为元素的所有$m \times n$矩阵（任意有限维的矩阵）的集合是可数集。

可数集例子

定理

- 若A, B是可数集，则$A \times B$是可数集；
- 若A是可数集，则A^n是可数集
- 例子

① $\mathbb{Q}$是可数集

② $\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n$是可数集；

③ 有理系数的所有(n次)多项式的集合是可数集；

④ 以有理数为元素的所有$m \times n$矩阵（任意有限维的矩阵）的集合是可数集。

可数集例子

定理

- 若A, B是可数集，则$A \times B$是可数集；
- 若A是可数集，则A^n是可数集
- 例子

① $\mathbb{Q}$是可数集

② $\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n$是可数集；

③ 有理系数的所有(n次)多项式的集合是可数集；

④ 以有理数为元素的所有$m \times n$矩阵（任意有限维的矩阵）的集合是可数集。

可数集例子

定理

- 若A, B是可数集，则$A \times B$是可数集;
- 若A是可数集，则A^n是可数集
- 例子

① $\mathbb{Q}$是可数集

② $\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n$是可数集;

③ 有理系数的所有(n次)多项式的集合是可数集;

④ 以有理数为元素的所有$m \times n$矩阵（任意有限维的矩阵）的集合是可数集。

可数集例子

定理

- 若A, B是可数集，则$A \times B$是可数集；
- 若A是可数集，则A^n是可数集
- 例子

① $\mathbb{Q}$是可数集

② $\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n$是可数集；

③ 有理系数的所有(n次)多项式的集合是可数集；

④ 以有理数为元素的所有$m \times n$矩阵（任意有限维的矩阵）的集合是可数集。

可数集性质（二）

定理

- 定理：任一无限集A，必会有可数无限子集。
- 证明：
  若A为无限集，则A非空，可任取出一元素$a_1 \in A$，
  $A - \{a_1\}$仍为无限集，再取出一元素$a_2 \in A - \{a_1\}$，
  所得集合仍为无限集；
  如此继续，得A的可数无限子集$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\}$。

可数集性质（二）

定理

- 定理：任一无限集A，必会有可数无限子集。
- 证明：

  若A为无限集，则A非空，可任取出一元素$a_1 \in A$，
  $A - \{a_1\}$仍为无限集，再取出一元素$a_2 \in A - \{a_1\}$，
  所得集合仍为无限集；
  如此继续，得A的可数无限子集$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\}$。

可数集性质（二）

定理

- 定理：任一无限集A，必会有可数无限子集。
- 证明：

  若A为无限集，则A非空，可任取出一元素$a_1 \in A$，

  $A - \{a_1\}$仍为无限集，再取出一元素$a_2 \in A - \{a_1\}$，

  所得集合仍为无限集；

  如此继续，得A的可数无限子集$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\}$。

可数集性质（二）

定理

- 定理：任一无限集A，必会有可数无限子集。
- 证明：

  若A为无限集，则A非空，可任取出一元素$a_1 \in A$,

  $A - \{a_1\}$仍为无限集，再取出一元素$a_2 \in A - \{a_1\}$,

  所得集合仍为无限集；

  如此继续，得A的可数无限子集$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\}$。

可数集性质（二）

定理

- 定理：任一无限集A，必会有可数无限子集。
- 证明：

  若A为无限集，则A非空，可任取出一元素$a_1 \in A$，

  $A - \{a_1\}$仍为无限集，再取出一元素$a_2 \in A - \{a_1\}$，

  所得集合仍为无限集；

  如此继续，得A的可数无限子集$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\}$。

可数集性质（二）

定理

- 定理：任一无限集A，必会有可数无限子集。
- 证明：

  若A为无限集，则A非空，可任取出一元素$a_1 \in A$，

  $A - \{a_1\}$仍为无限集，再取出一元素$a_2 \in A - \{a_1\}$，

  所得集合仍为无限集；

  如此继续，得A的可数无限子集$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\}$。

可数集性质（三）

定理

- 定理：任一无限集M，必与自己的某真子集等势。
- 证明：

  由上可得M有可数无限子集$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，

  令$M - A = B$，

  定义函数$f : M \to M - \{a_0\}$；

  ① $f(a_n) = a_{n+1}; (a_n \in A)$；

  ② $f(b) = b; (b \in B)$；

  则，易证f是双射，$\therefore M \sim M - \{a_0\}$

  证毕。

可数集性质（三）

定理

- 定理：任一无限集M，必与自己的某真子集等势。
- 证明：

  由上可得M有可数无限子集$A=\{a_0,a_1,a_2,......\}$，

  令$M-A=B$,

  定义函数$f:M\to M-\{a_0\}$;

  ① $f(a_n)=a_{n+1};(a_n\in A)$;

  ② $f(b)=b;(b\in B)$;

  则，易证f是双射，$\therefore M\sim M-\{a_0\}$

  证毕。

可数集性质（三）

定理

- 定理：任一无限集M，必与自己的某真子集等势。
- 证明：

  由上可得M有可数无限子集$A=\{a_0,a_1,a_2,\ldots\ldots\}$，

  令$M-A=B$,

  定义函数$f:M\to M-\{a_0\}$;

  ① $f(a_n)=a_{n+1};(a_n\in A)$;

  ② $f(b)=b;(b\in B)$;

  则，易证f是双射，$\therefore M\sim M-\{a_0\}$

  证毕。

可数集性质（三）

定理

- 定理：任一无限集M，必与自己的某真子集等势。
- 证明：

  由上可得M有可数无限子集$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，

  令$M - A = B$,

  定义函数$f: M \to M - \{a_0\}$;

  ① $f(a_n) = a_{n+1}; (a_n \in A)$;

  ② $f(b) = b; (b \in B)$;

  则，易证f是双射，$\therefore M \sim M - \{a_0\}$

  证毕。

可数集性质（三）

定理

- 定理：任一无限集M，必与自己的某真子集等势。
- 证明：

  由上可得M有可数无限子集$A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$，

  令$M - A = B$,

  定义函数$f: M \to M - \{a_0\}$;

  ① $f(a_n) = a_{n+1}; (a_n \in A)$;

  ② $f(b) = b; (b \in B)$;

  则，易证f是双射，$\therefore M \sim M - \{a_0\}$

  证毕。

可数集性质（三）

定理

- 定理：任一无限集M，必与自己的某真子集等势。
- 证明：

由上可得M有可数无限子集$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，

令$M - A = B$,

定义函数$f: M \to M - \{a_0\}$;

① $f(a_n) = a_{n+1}; (a_n \in A)$;

② $f(b) = b; (b \in B)$;

则，易证f是双射，$\therefore M \sim M - \{a_0\}$

证毕。

可数集性质（三）

定理

- 定理：任一无限集M，必与自己的某真子集等势。
- 证明：

  由上可得M有可数无限子集$A=\{a_0,a_1,a_2,\ldots\ldots\}$，

  令$M-A=B$,

  定义函数$f: M\rightarrow M-\{a_0\}$;

  ① $f(a_n)=a_{n+1};(a_n\in A)$;

  ② $f(b)=b;(b\in B)$;

  则，易证f是双射，$\therefore M\sim M-\{a_0\}$

  证毕。

可数集性质（三）

定理

- 定理：任一无限集M，必与自己的某真子集等势。
- 证明：

  由上可得M有可数无限子集$A=\{a_0,a_1,a_2,\ldots\ldots\}$，

  令$M-A=B$,

  定义函数$f: M\to M-\{a_0\}$;

  ① $f(a_n)=a_{n+1};(a_n\in A)$;

  ② $f(b)=b;(b\in B)$;

  则，易证f是双射，$\therefore M\sim M-\{a_0\}$

  证毕。

可数集性质（三）

定理

- 定理：任一无限集M，必与自己的某真子集等势。
- 证明：

  由上可得M有可数无限子集$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，

  令$M - A = B$,

  定义函数$f : M \to M - \{a_0\}$;

  ① $f(a_n) = a_{n+1}; (a_n \in A)$;

  ② $f(b) = b; (b \in B)$;

  则，易证f是双射，$\therefore M \sim M - \{a_0\}$

  证毕。

不可数集

定义-可数无限集

- 集合A为可数无限集，iff，集合A与自然数集$\mathbb{N}$等势，其基数用$\aleph_0$表示（读作“阿列夫零”），记为$|A| = \aleph_0$.

例

- 集合$\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}$的基数均为$\aleph_0$.

定义-不可数集

- 集合A是不可数集，iff, A不是有限集，且不是可数无限集。
- 集合可分为：
  - 可数集：有限集和可数无限集
  - 不可数集

不可数集

定义-可数无限集

- 集合A为可数无限集，iff，集合A与自然数集$\mathbb{N}$等势，其基数用$\aleph_0$表示（读作“阿列夫零”），记为$|A| = \aleph_0$.

例

- 集合$\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}$的基数均为$\aleph_0$.

定义-不可数集

- 集合A是不可数集，iff, A不是有限集，且不是可数无限集。
- 集合可分为：
  - 可数集：有限集和可数无限集
  - 不可数集

不可数集

定义-可数无限集

- 集合A为可数无限集，iff，集合A与自然数集$\mathbb{N}$等势，其基数用$\aleph_0$表示（读作“阿列夫零”），记为$|A| = \aleph_0$.

例

- 集合$\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}$的基数均为$\aleph_0$.

定义-不可数集

- 集合A是不可数集，iff, A不是有限集，且不是可数无限集。
- 集合可分为：
  - 可数集：有限集和可数无限集
  - 不可数集

不可数集

定义-可数无限集

- 集合A为可数无限集，iff，集合A与自然数集$\mathbb{N}$等势，其基数用$\aleph_0$表示（读作“阿列夫零”），记为$|A| = \aleph_0$.

例

- 集合$\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}$的基数均为$\aleph_0$.

定义-不可数集

- 集合A是不可数集，iff, A不是有限集，且不是可数无限集。
- 集合可分为：
  - 可数集：有限集和可数无限集
  - 不可数集

不可数集

定义-可数无限集

- 集合A为可数无限集，iff，集合A与自然数集$\mathbb{N}$等势，其基数用$\aleph_0$表示（读作“阿列夫零”），记为$|A| = \aleph_0$.

例

- 集合$\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}$的基数均为$\aleph_0$.

定义-不可数集

- 集合A是不可数集，iff, A不是有限集，且不是可数无限集。
- 集合可分为：
  - 可数集：有限集和可数无限集
  - 不可数集

不可数集

定义-可数无限集

- 集合A为可数无限集，iff，集合A与自然数集$\mathbb{N}$等势，其基数用$\aleph_0$表示（读作“阿列夫零”），记为$|A| = \aleph_0$.

例

- 集合$\mathbb{N}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}$的基数均为$\aleph_0$.

定义-不可数集

- 集合A是不可数集，iff, A不是有限集，且不是可数无限集。
- 集合可分为：
  - 可数集：有限集和可数无限集
  - 不可数集

Cantor对角线法

集合$[0,1]\subseteq\mathbb{R}$是不可数集（对角线法证明）

- 证明：$[0,1]$是不可数集。
- 证：（反证法）

  假设$[0,1]$为可数无限集，则$\mathbb{N}$与$[0,1]$之间存在双射f，

  则可将f的值顺序排列为十进制小数：

  $f(0)=0.a_{00}a_{01}a_{02}\ldots\ldots$

  $f(1)=0.a_{10}a_{11}a_{12}\ldots\ldots$

  $f(2)=0.a_{20}a_{21}a_{22}\ldots\ldots$

  $\ldots\ldots$

  $f(n)=0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots\ldots$，现构造一个实数：

  $$r=0.b_0b_1b_2\ldots\ldots b_n\ldots\text{，其中 } b_i=\begin{cases}1, & \text{if} \quad a_{ii}\neq 1\\ 2, & \text{if} \quad a_{ii}=1\end{cases}$$

  则，$r\in[0,1]$，但$r\notin f(\mathbb{N})$，所以f不是双射，矛盾。证毕。

Cantor对角线法

集合$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$是不可数集（对角线法证明）

- 证明：$[0,1]$是不可数集。
- 证：（反证法）

假设$[0,1]$为可数无限集，则$\mathbb{N}$与$[0,1]$之间存在双射f，

则可将f的值顺序排列为十进制小数：

$f(0) = 0.a_{00}a_{01}a_{02}\ldots\ldots$

$f(1) = 0.a_{10}a_{11}a_{12}\ldots\ldots$

$f(2) = 0.a_{20}a_{21}a_{22}\ldots\ldots$

$\ldots\ldots$

$f(n) = 0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots\ldots$ ，现构造一个实数：

$$r = 0.b_0 b_1 b_2 \ldots\ldots b_n \ldots \text{ ，其中 } b_i = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad a_{ii} \neq 1 \\ 2, & \text{if} \quad a_{ii} = 1 \end{cases}$$

则，$r \in [0,1]$，但$r \notin f(\mathbb{N})$，所以f不是双射，矛盾。证毕。

Cantor对角线法

集合$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$是不可数集（对角线法证明）

- 证明：$[0,1]$是不可数集。
- 证：（反证法）

  假设$[0,1]$为可数无限集，则$\mathbb{N}$与$[0,1]$之间存在双射f，

  则可将f的值顺序排列为十进制小数：

  $f(0) = 0.a_{00}a_{01}a_{02}\ldots\ldots$

  $f(1) = 0.a_{10}a_{11}a_{12}\ldots\ldots$

  $f(2) = 0.a_{20}a_{21}a_{22}\ldots\ldots$

  ……

  $f(n) = 0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots\ldots$，现构造一个实数：

  $$r = 0.b_0 b_1 b_2 \ldots\ldots b_n \ldots \text{，其中 } b_i = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad a_{ii} \neq 1 \\ 2, & \text{if} \quad a_{ii} = 1 \end{cases}$$

  则，$r \in [0,1]$，但$r \notin f(\mathbb{N})$，所以f不是双射，矛盾。证毕。

Cantor对角线法

集合$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$是不可数集（对角线法证明）

- 证明：$[0,1]$是不可数集。
- 证：（反证法）

  假设$[0,1]$为可数无限集，则$\mathbb{N}$与$[0,1]$之间存在双射f,

  则可将f的值顺序排列为十进制小数：

  $f(0) = 0.a_{00}a_{01}a_{02}\ldots\ldots$

  $f(1) = 0.a_{10}a_{11}a_{12}\ldots\ldots$

  $f(2) = 0.a_{20}a_{21}a_{22}\ldots\ldots$

  $\ldots\ldots$

  $f(n) = 0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots\ldots$ ，现构造一个实数：

  $$r = 0.b_0b_1b_2\ldots\ldots b_n\ldots \text{，其中 } b_i = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad a_{ii} \neq 1 \\ 2, & \text{if} \quad a_{ii} = 1 \end{cases}$$

  则，$r \in [0,1]$，但$r \notin f(\mathbb{N})$，所以f不是双射，矛盾。证毕。

Cantor对角线法

集合$[0,1]\subseteq\mathbb{R}$是不可数集（对角线法证明）

- 证明：$[0,1]$是不可数集。
- 证：（反证法）

  假设$[0,1]$为可数无限集，则$\mathbb{N}$与$[0,1]$之间存在双射f，

  则可将f的值顺序排列为十进制小数：

  $f(0)=0.a_{00}a_{01}a_{02}\ldots\ldots$

  $f(1)=0.a_{10}a_{11}a_{12}\ldots\ldots$

  $f(2)=0.a_{20}a_{21}a_{22}\ldots\ldots$

  $\ldots\ldots$

  $f(n)=0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots\ldots$ ，现构造一个实数：

  $$r=0.b_0b_1b_2\ldots\ldots b_n\ldots\text{ ，其中 } b_i=\begin{cases}1, & \text{if} \quad a_{ii}\neq 1\\ 2, & \text{if} \quad a_{ii}=1\end{cases}$$

  则，$r\in[0,1]$，但$r\notin f(\mathbb{N})$，所以f不是双射，矛盾。证毕。

Cantor对角线法

集合$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$是不可数集（对角线法证明）

- 证明：$[0,1]$是不可数集。
- 证：（反证法）

  假设$[0,1]$为可数无限集，则$\mathbb{N}$与$[0,1]$之间存在双射f，

  则可将f的值顺序排列为十进制小数：

  $f(0) = 0.a_{00}a_{01}a_{02}\ldots\ldots$

  $f(1) = 0.a_{10}a_{11}a_{12}\ldots\ldots$

  $f(2) = 0.a_{20}a_{21}a_{22}\ldots\ldots$

  $\ldots\ldots$

  $f(n) = 0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots\ldots$，现构造一个实数：

  $$r = 0.b_0b_1b_2\ldots\ldots b_n\ldots \text{，其中 } b_i = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad a_{ii} \neq 1 \\ 2, & \text{if} \quad a_{ii} = 1 \end{cases}$$

  则，$r \in [0,1]$，但$r \notin f(\mathbb{N})$，所以f不是双射，矛盾。证毕。

Cantor对角线法

集合$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$是不可数集（对角线法证明）

- 证明：$[0,1]$是不可数集。
- 证：（反证法）

  假设$[0,1]$为可数无限集，则$\mathbb{N}$与$[0,1]$之间存在双射f，

  则可将f的值顺序排列为十进制小数：

  $f(0) = 0.a_{00}a_{01}a_{02}\ldots\ldots$

  $f(1) = 0.a_{10}a_{11}a_{12}\ldots\ldots$

  $f(2) = 0.a_{20}a_{21}a_{22}\ldots\ldots$

  $\ldots\ldots$

  $f(n) = 0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots\ldots$ ，现构造一个实数：

  $$r = 0.b_0b_1b_2\ldots\ldots b_n\ldots \text{ ，其中 } b_i = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad a_{ii} \neq 1 \\ 2, & \text{if} \quad a_{ii} = 1 \end{cases}$$

  则，$r \in [0,1]$，但$r \notin f(\mathbb{N})$，所以f不是双射，矛盾。证毕。

Cantor对角线法

集合$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$是不可数集（对角线法证明）

- 证明：$[0,1]$是不可数集。
- 证：（反证法）

  假设$[0,1]$为可数无限集，则$\mathbb{N}$与$[0,1]$之间存在双射f，

  则可将f的值顺序排列为十进制小数：

  $f(0) = 0.a_{00}a_{01}a_{02}\ldots\ldots$

  $f(1) = 0.a_{10}a_{11}a_{12}\ldots\ldots$

  $f(2) = 0.a_{20}a_{21}a_{22}\ldots\ldots$

  $\ldots\ldots$

  $f(n) = 0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots\ldots$，现构造一个实数：

  $$r = 0.b_0b_1b_2\ldots\ldots b_n\ldots \text{，其中 } b_i = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad a_{ii} \neq 1 \\ 2, & \text{if} \quad a_{ii} = 1 \end{cases}$$

  则，$r \in [0,1]$，但$r \notin f(\mathbb{N})$，所以f不是双射，矛盾。证毕。

Cantor对角线法

集合$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$是不可数集（对角线法证明）

- 证明：$[0,1]$是不可数集。
- 证：（反证法）

  假设$[0,1]$为可数无限集，则$\mathbb{N}$与$[0,1]$之间存在双射f，

  则可将f的值顺序排列为十进制小数：

  $f(0) = 0.a_{00}a_{01}a_{02}\ldots\ldots$

  $f(1) = 0.a_{10}a_{11}a_{12}\ldots\ldots$

  $f(2) = 0.a_{20}a_{21}a_{22}\ldots\ldots$

  $\ldots\ldots$

  $f(n) = 0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots\ldots$ ，现构造一个实数：

  $r = 0.b_0b_1b_2\ldots\ldots b_n\ldots$ ，其中 $b_i = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad a_{ii} \neq 1 \\ 2, & \text{if} \quad a_{ii} = 1 \end{cases}$

  则，$r \in [0,1]$，但$r \notin f(\mathbb{N})$，所以f不是双射，矛盾。证毕。

Cantor对角线法

集合$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$是不可数集（对角线法证明）

- 证明：$[0,1]$是不可数集。
- 证：（反证法）

  假设$[0,1]$为可数无限集，则$\mathbb{N}$与$[0,1]$之间存在双射f，

  则可将f的值顺序排列为十进制小数：

  $f(0)=0.a_{00}a_{01}a_{02}\ldots\ldots$

  $f(1)=0.a_{10}a_{11}a_{12}\ldots\ldots$

  $f(2)=0.a_{20}a_{21}a_{22}\ldots\ldots$

  $\ldots\ldots$

  $f(n)=0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots\ldots$ ，现构造一个实数：

  $$r=0.b_0b_1b_2\ldots\ldots b_n\ldots \text{，其中 } b_i=\begin{cases}1, & \textbf{if} \quad a_{ii}\neq 1\\ 2, & \textbf{if} \quad a_{ii}=1\end{cases}$$

  则，$r\in[0,1]$，但$r\notin f(\mathbb{N})$，所以f不是双射，矛盾。证毕。

Cantor对角线法

集合$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$是不可数集（对角线法证明）

- 证明：$[0,1]$是不可数集。
- 证：（反证法）

  假设$[0,1]$为可数无限集，则$\mathbb{N}$与$[0,1]$之间存在双射f，

  则可将f的值顺序排列为十进制小数：

  $f(0) = 0.a_{00}a_{01}a_{02}\ldots\ldots$

  $f(1) = 0.a_{10}a_{11}a_{12}\ldots\ldots$

  $f(2) = 0.a_{20}a_{21}a_{22}\ldots\ldots$

  $\ldots\ldots$

  $f(n) = 0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots\ldots$ ，现构造一个实数：

  $$r = 0.b_0b_1b_2\ldots\ldots b_n\ldots \text{，其中 } b_i = \begin{cases} 1, & \textbf{if} \quad a_{ii} \neq 1 \\ 2, & \textbf{if} \quad a_{ii} = 1 \end{cases}$$

  则，$r \in [0,1]$，但$r \notin f(\mathbb{N})$，所以f不是双射，矛盾。证毕。

Cantor对角线法

集合$[0,1]\subseteq\mathbb{R}$是不可数集（对角线法证明）

- 证明：$[0,1]$是不可数集。
- 证：（反证法）

  假设$[0,1]$为可数无限集，则$\mathbb{N}$与$[0,1]$之间存在双射f，

  则可将f的值顺序排列为十进制小数：

  $f(0)=0.a_{00}a_{01}a_{02}\ldots\ldots$

  $f(1)=0.a_{10}a_{11}a_{12}\ldots\ldots$

  $f(2)=0.a_{20}a_{21}a_{22}\ldots\ldots$

  $\ldots\ldots$

  $f(n)=0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots\ldots$，现构造一个实数：

  $$r=0.b_0b_1b_2\ldots\ldots b_n\ldots\text{，其中 } b_i=\begin{cases}1, & \textbf{if} \quad a_{ii}\neq 1\\ 2, & \textbf{if} \quad a_{ii}=1\end{cases}$$

  则，$r\in[0,1]$，但$r\notin f(\mathbb{N})$，所以f不是双射，矛盾。证毕。

  $[0,1]$不是可数无限集或有限集，$[0,1]$是不可数集

不可数集

定义

- 任一集合A具有连续统（Continuum）势，iff，A与集合$[0,1]$等势，A的基数为$\mathfrak{c}$，即$|A| = \mathfrak{c}$.

例-具有连续统势的集合

1. $[a, b]$
2. $(0, 1)$
3. $\mathbb{R}$

不可数集

定义

- 任一集合A具有连续统（Continuum）势，iff，A与集合$[0,1]$等势，A的基数为$\mathfrak{c}$，即$|A|=\mathfrak{c}$.

例-具有连续统势的集合

1. $[a,b]$
2. $(0,1)$
3. $\mathbb{R}$

不可数集

定义

- 任一集合A具有连续统（**Continuum**）势，**iff**，A与集合$[0,1]$等势，A的基数为$\mathfrak{c}$，即$|A| = \mathfrak{c}$.

例-具有连续统势的集合

1. $[a, b]$
2. $(0, 1)$
3. $\mathbb{R}$

不可数集

定义

- 任一集合A具有连续统（Continuum）势，iff，A与集合$[0,1]$等势，A的基数为$\mathfrak{c}$，即$|A| = \mathfrak{c}$.

例-具有连续统势的集合

1. $[a, b]$
2. $(0, 1)$
3. $\mathbb{R}$

不可数集

Example

- 试证明：集合$(0,1)$与$[0,1]$等势。
- 证明：

  令$A=\{0,1,1/2,1/3,......,1/n,......\}$，则 $A\subseteq[0,1]$,

  设$f:[0,1]\longrightarrow(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases}1/2 & \text{if} \quad x=0\\ 1/(n+2) & \text{if} \quad x=1/n,(n\geqslant 1,n\in\mathbb{N})\\ x & \text{if} \quad x\in[0,1]-A\end{cases}$$

容易证明f是双射，$\therefore$集合$(0,1)$与$[0,1]$等势。

不可数集

Example

- 试证明：集合$(0,1)$与$[0,1]$等势。
- 证明：

令$A=\{0,1,1/2,1/3,......,1/n,......\}$，则 $A\subseteq[0,1]$,

设$f:[0,1]\longrightarrow(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases}1/2 & \text{if} \quad x=0\\ 1/(n+2) & \text{if} \quad x=1/n,(n\geqslant 1,n\in\mathbb{N})\\ x & \text{if} \quad x\in[0,1]-A\end{cases}$$

容易证明f是双射，$\therefore$集合$(0,1)$与$[0,1]$等势。

不可数集

Example

- 试证明：集合$(0,1)$与$[0,1]$等势。
- 证明：

  令$A=\{0,1,1/2,1/3,......,1/n,......\}$，则 $A\subseteq[0,1]$,

  设$f:[0,1]\longrightarrow(0,1)$

  $$f(x)=\begin{cases}1/2 & \text{if} \quad x=0\\ 1/(n+2) & \text{if} \quad x=1/n,(n\geqslant 1,n\in\mathbb{N})\\ x & \text{if} \quad x\in[0,1]-A\end{cases}$$

  容易证明f是双射，$\therefore$集合$(0,1)$与$[0,1]$等势。

不可数集

Example

- 试证明：集合$(0,1)$与$[0,1]$等势。
- 证明：

  令$A=\{0,1,1/2,1/3,......,1/n,......\}$，则 $A\subseteq[0,1]$,

  设$f:[0,1]\longrightarrow(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases}1/2 & \text{if} \quad x=0\\ 1/(n+2) & \text{if} \quad x=1/n,(n\geqslant 1,n\in\mathbb{N})\\ x & \text{if} \quad x\in[0,1]-A\end{cases}$$

  容易证明f是双射，$\therefore$集合$(0,1)$与$[0,1]$等势。

不可数集

Example

- 试证明：集合$(0,1)$与$[0,1]$等势。
- 证明：

  令$A=\{0,1,1/2,1/3,......,1/n,......\}$，则 $A\subseteq[0,1]$,

  设$f:[0,1]\longrightarrow(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases}1/2 & \text{if} \quad x=0\\ 1/(n+2) & \text{if} \quad x=1/n,(n\geqslant 1,n\in\mathbb{N})\\ x & \text{if} \quad x\in[0,1]-A\end{cases}$$

  容易证明f是双射，$\therefore$集合$(0,1)$与$[0,1]$等势。

不可数集

Example

- 试证明：集合$(0,1)$与$[0,1]$等势。
- 证明：

  令$A=\{0,1,1/2,1/3,......,1/n,......\}$，则 $A\subseteq[0,1]$,

  设$f:[0,1]\longrightarrow(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases}1/2 & \text{if} \quad x=0\\ 1/(n+2) & \text{if} \quad x=1/n,(n\geqslant 1,n\in\mathbb{N})\\ x & \text{if} \quad x\in[0,1]-A\end{cases}$$

  容易证明f是双射，$\therefore$集合$(0,1)$与$[0,1]$等势。

Continuum hypothesis

连续统假设

- 连续统假设——在$\aleph_0$和$\mathfrak{c}$之间不存在其它的“无穷大”基数?
- 连续统假设是否成立依赖于集合论的公理如何选择。
- https://en.wikipedia.org/wiki/Continuum_hypothesis

Continuum hypothesis

连续统假设

- 连续统假设——在$\aleph_0$和$\mathfrak{c}$之间不存在其它的“无穷大”基数?
- 连续统假设是否成立依赖于集合论的公理如何选择。
- https://en.wikipedia.org/wiki/Continuum_hypothesis

Continuum hypothesis

连续统假设

- 连续统假设——在$\aleph_0$和$\mathfrak{c}$之间不存在其它的“无穷大”基数?
- 连续统假设是否成立依赖于集合论的公理如何选择。
- https://en.wikipedia.org/wiki/Continuum_hypothesis

小结

1. 可数集合和不可数集合
    - 自然数的定义
    - 等势
    - 有限集和无限集
    - 可数集
    - 不可数集