武汉大学计算机学院
《离散数学》第二次练习

§2.1.1 在一阶逻辑中将下列命题符号化：

(1) 不存在比一切实数都大的实数；
$R(x)$: x是实数；$G(x,y)$: $x>y$: $\neg(\exists x(R(x)\wedge(\forall y(R(y)\to G(x,y)))))$.

(2) 任何两个不同的实数之间必存在另一个实数；
$R(x)$: x是实数；$D(x,y)$: $x\neq y$; $G(x,y)$: $x>y$:
$\forall x\forall y(R(x)\wedge R(y)\wedge D(x,y)\to\exists z(R(z)\wedge(G(x,z)\wedge G(z,y)\vee G(y,z)\wedge G(z,y))))$.

(3) 存在唯一的偶质数;
$E(x)$: x是偶数；$P(x)$: x是质数；$D(x,y)$: $x\neq y$：
$\exists x(E(x)\wedge P(x)\wedge(\forall y(D(x,y)\to\neg(E(y)\wedge P(y)))))$.

(4) 没有既是奇数也是偶数的数;
$E(x)$: x是偶数；$O(x)$: x是奇数：$\neg\exists x(E(x)\wedge O(x))$.

(5) 没有以0为后继的自然数(n的后继为$n+1$)；
$N(x)$: x是自然数；$S(x,y)$: y是x的后继：$\neg\exists x(N(x)\wedge S(x,0))$.
或用中缀谓词"$x=y$"和函数"$\mathrm{succ}(x)$"表示：$\neg\exists x(N(x)\wedge(\mathrm{succ}(x)=0))$.

(6) 每个自然数都有唯一的后继；
$\forall n(N(n)\to\exists m(\mathrm{succ}(n)=m\wedge\forall p(\mathrm{succ}(n)=p\to p=m)))$.

(7) 所有的火车比某些汽车跑得快.
$T(x)$: x是火车；$C(x)$：x是汽车；$F(x,y)$: x比y跑得快：
$\forall x(T(x)\to\exists y(C(y)\wedge F(x,y)))$.

注意 i. 一般数学命题，如果没有指明变元出现的方式多般使用全称量词，数学命题符号化时最好没有自由变元出现；

ii. 符号化过程中最好使用原命题，而不是等价命题。如："没有小于0的自然数"不能翻译为：$\forall x\neg L(x,0)$

§2.2.1 判断下列合式公式中个体变元的出现哪些是约束出现，哪些是自由出现；公式中哪些是自由变元，哪些是约束变元：

(3) $\forall x(P(x)\to\forall yQ(y,z))$；
$P(x)$中x约束出现，是约束变元，$Q(y,z)$中的y约束出现，是约束变元，而z是自由出现，是自由变元.

(4) $\forall x(P(x)\wedge\exists xQ(x))\vee R(x,y)\wedge\forall yR(z,y)$.
($P(x)$和$Q(x)$中的x约束出现，是约束变元，$R(x,y)$中的x和y自由出现，是自由变元；$R(z,y)$中的的z自由出现，是自由变元, 而y约束出现，是约束变元.

§2.2.2 指出下列公式中约束各个量词的辖域：

(1) $\forall x(P(x)\to Q(x,y))\vee\exists xP(x)$;
$\forall x\underline{(P(x)\to Q(x,y))}\vee\exists x\underline{P(x)}$.

(2) $\forall x\exists y(R(x,y)\vee P(y))\wedge Q(y,z)$;
$\underline{(\forall x\exists y\underline{\underline{(R(x,y)\vee P(y))}}}\wedge Q(y,z)$.

§2.3.2 构造解释来证明下列公式既非永真式，又非永假式：

(3) $\forall x(P(x)\to\exists x(Q(x)\wedge P(x)))$;
证明: 设I_1: $\mathcal{D}=\{a\}$, $P(a)=0$; 则$(P(x)\to\exists x(Q(x)\wedge P(x)))\big|_{I_1,x=a}=1$, 即$\forall x(P(x)\to\exists x(Q(x)\wedge P(x)))\big|_{I_1}=1$.
设I_2: $\mathcal{D}=\{a\}$, $P(a)=1$，$Q(a)=0$, 则$(P(x)\to\exists x(Q(x)\wedge P(x)))\big|_{I_2,x=a}=0$, 即$\forall x(P(x)\to\exists x(Q(x)\wedge P(x)))\big|_{I_2}=0$.

(4) $\exists P(x)\to\forall x(P(x)\vee\exists yQ(x,y))$.
证明: 设I_1: $\mathcal{D}=\{a\}$, $P(a)=0$; 则$P(x)\to\forall x(P(x)\vee\exists y\big|_{I_1,x=a}=1$, 即$\exists xP(x)\to\forall x(P(x)\vee\exists yQ(x,y))\big|_{I_1}=1$.
设I_2: $\mathcal{D}=\{a,b\}$, $P(a)=1$, $P(b)=0$, $Q(a,a)=Q(a,b)=Q(b,a)=Q(b,b)=0$; $P(x)\big|_{I_2,x=a}=1$, 即$\exists xP(x)\big|_{I_2}=1$; $P(x)\vee\exists yQ(x,y)\big|_{I_2,x=b}=0$, 即$\forall x(P(x)\vee\exists yQ(x,y))\big|_{I_2}=0$. 故$\exists xP(x)\to\forall x(P(x)\vee\exists yQ(x,y))\big|_{I_2}=0$.

§2.3.3 判断下列各式是否成立，并证明你的判断：

(1) $\forall x(A(x)\to B(x))\Rightarrow\forall xA(x)\to\forall xB(x)$；
证明: 上式不成立。因为，设解释I: $\mathcal{D}=\{a,b\}$, $A(a)\big|_I=1$, $A(b)\big|_I=0$, $B(a)\big|_I=1$, $B(b)\big|_I=1$, 则$\forall x(A(x)\to B(x))\big|_I=1$, $\forall xA(x)\big|_I=0$, $\forall xB(x)\big|_I=1$, $\therefore$ $(\forall xA(x)\to\forall xB(x))\big|_I=0$, 即存在解释$I$使得前提为真，而结论为假。

(2) $\forall xA(x)\to\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\to B(x))$;
证明: 上式不成立。因为，设解释I: $\mathcal{D}=\{a,b\}$, $A(a)\big|_I=1$, $A(b)\big|_I=0$, $B(a)\big|_I=0$, $B(b)\big|_I=1$, 则$\forall xA(x)\big|_I=0$, $\forall xA(x)\to\forall xB(x)\big|_I=1$; $A(x)\to B(x)\big|_{I,x=a}=0$, $\therefore$ $\forall x(A(x)\to B(x))\big|_I=0$, 即存在解释$I$使得前提为真，而结论为假。

§2.3.4 证明下列各式：

(3) $\forall x\forall y(A(x)\wedge B(y))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall yB(y)$；
证明

$$\begin{aligned}&\forall x\forall y(A(x)\wedge B(y))\\ \Leftrightarrow\ &\forall x(A(x)\wedge\forall yB(y))\\ \Leftrightarrow\ &\forall xA(x)\wedge\forall yB(y)\end{aligned}$$

(4) $\exists x\exists y(A(x)\to B(y))\Leftrightarrow\forall xA(x)\to\exists yB(y)$；

证明

$$
\begin{aligned}
& \exists x \exists y(A(x) \to B(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x \exists y(\neg A(x) \vee B(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg A(x) \vee \exists y B(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x \neg A(x) \vee \exists y B(y) \\
\Leftrightarrow\ & \neg \forall x A(x) \vee \exists y B(y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x A(x) \to \exists y B(y)
\end{aligned}
$$

(5) $\forall x \forall y(A(x) \to B(y)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \to \forall x B(x)$.
证明

$$
\begin{aligned}
& \forall x \forall y(A(x) \to B(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \forall y(\neg A(x) \vee B(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(\neg A(x) \vee \forall y B(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \neg A(x) \vee \forall y B(y) \\
\Leftrightarrow\ & \neg \exists x A(x) \vee \forall y B(y) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x A(x) \to \forall y B(y) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x A(x) \to \forall x B(x)
\end{aligned}
$$

§2.4.2 求下列各式的前束范式，能不使用换名规则就不用，并求其Skolem范式：

(3) $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists x Q(x,y) \wedge \forall y R(y)$；
解:

$$
\begin{aligned}
& \forall x \exists y P(x,y) \to \exists x Q(x,y) \wedge \forall y R(y) \\
\Leftrightarrow\ & \neg \forall x \exists y P(x,y) \vee \exists x Q(x,y) \wedge \forall y R(y) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x \forall y \neg P(x,y) \vee \exists x Q(x,y) \wedge \forall y R(y) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\forall y \neg P(x,y) \vee Q(x,y) \wedge \forall y R(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\forall z \neg P(x,z) \vee Q(x,y) \wedge \forall t R(t)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x \forall z \forall t(\neg P(x,z) \vee Q(x,y) \wedge R(t)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall z \forall t(\neg P(a,z) \vee Q(a,y) \wedge R(t)) \quad \text{(Skolem)}
\end{aligned}
$$

(4) $\exists y \forall x(P(x) \to Q(x,y)) \to (\exists y R(y) \to \exists z P(z))$；

解:

$$
\begin{aligned}
& \exists y\forall x(P(x)\to Q(x,y))\to(\exists yR(y)\to\exists zP(z))\\
\Leftrightarrow\ & \exists y\forall x(\neg P(x)\vee Q(x,y))\to(\neg\exists yR(y)\vee\exists zP(z))\\
\Leftrightarrow\ & \exists y\forall x(\neg P(x)\vee Q(x,y))\to(\forall y\neg R(y)\vee\exists zP(z))\\
\Leftrightarrow\ & \neg\exists y\forall x(\neg P(x)\vee Q(x,y))\vee\forall y\exists z(\neg R(y)\vee P(z))\\
\Leftrightarrow\ & \forall y\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x,y))\vee\forall y\exists z(\neg R(y)\vee P(z))\\
\Leftrightarrow\ & \forall x\exists z(P(z)\wedge\neg Q(z,x))\vee\forall y\exists z(\neg R(y)\vee P(z))\\
\Leftrightarrow\ & \forall x\forall y(\exists z(P(z)\wedge\neg Q(z,x))\vee\exists z(\neg R(y)\vee P(z)))\\
\Leftrightarrow\ & \forall x\forall y\exists z((P(z)\wedge\neg Q(z,x))\vee\neg R(y)\vee P(z))\\
\Leftrightarrow\ & \forall x\forall y((P(f(x,y))\wedge\neg Q(f(x,y),x))\vee\neg R(y)\vee P(f(x,y)))\quad\text{(Skolem)}
\end{aligned}
$$

(5) $\forall xP(x)\to\exists xQ(x)$；
解:

$$
\begin{aligned}
& \forall xP(x)\to\exists xQ(x)\\
\Leftrightarrow\ & \neg\forall xP(x)\vee\exists xQ(x)\\
\Leftrightarrow\ & \exists x\neg P(x)\vee\exists xQ(x)\\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg P(x)\vee Q(x))\\
\Leftrightarrow\ & \neg P(a)\vee Q(a)\quad\text{(Skolem)}
\end{aligned}
$$

§2.5.2 证明下列推理：

(1) $\forall x(P(x)\to Q(x))\wedge\forall y\neg Q(y)\Rightarrow\forall x\neg P(x)$；
证明:

① $\forall x(P(x)\to Q(x))$	引入前提
② $P(x)\to Q(x)$	① + US
③ $\forall y\neg Q(y)$	引入前提
④ $\neg Q(x)$	③ + US
⑤ $\neg P(x)$	② +④ + MP
⑥ $\forall x\neg P(x)$	⑤ + UG

(2) $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\Rightarrow\exists x(P(x)\vee Q(x))$；
证明:

① $\exists x(P(x))$	引入前提
② $P(a)$	① + ES
③ $P(a)\vee Q(a)$	①+附加规则
④ $\exists x(P(x)\vee Q(x))$	③ + ES

(6) $\forall x(P(x)\to Q(x)\vee R(x)),\ \neg\exists x(P(x)\wedge R(x))\vdash\forall x(P(x)\to Q(x))$;
证明:

① $\forall x(P(x)\to Q(x)\vee R(x))$	引入前提
② $P(x)\to(Q(x)\vee R(x))$	① + US

③ $\neg\exists x(P(x) \land R(x))$ 引入前提

④ $\forall x(P(x) \to \neg R(x))$ ③+恒等变换

⑤ $P(x) \to \neg R(x)$ ④ + US

⑥ $P(x)$ 附加前提

⑦ $Q(x) \lor R(x)$ ②+⑥ + MP

⑧ $\neg R(x)$ ⑤+⑥ + MP

⑨ $Q(x)$ ⑦+⑧ + 析取三段论

⑩ $P(x) \to Q(x)$ ⑦+⑨ +CP

⑪ $\forall x(P(x) \to Q(x))$ ⑩ +UG

(7) $\exists x(P(x) \land Q(x)),\ \forall y(P(x) \to R(x)) \vdash \exists x(R(x) \land Q(x))$.

证明:

① $\exists x(P(x) \land Q(x))$ 引入前提

② $P(a) \land Q(a)$ ① + ES

③ $P(a)$ ②+化简规则

④ $Q(a)$ ②+化简规则

⑤ $\forall y(P(x) \to R(x))$ 引入前提

⑥ $P(a) \to R(a)$ ⑤ + US

⑦ $R(a)$ ③+⑥ + MP

⑧ $R(a) \land Q(a)$ ⑦+⑦ + 合取引入

⑨ $\exists x(R(x) \land Q(x))$ ⑧+EG