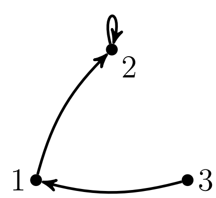
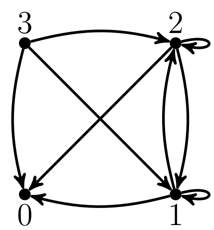
武汉大学计算机学院
《离散数学》第四次练习

§4.1.2 画出下列关系的关系图，并写出关系矩阵：

(1) $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{\langle 2, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$;

(2) $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $R = \{\langle x, y\rangle \mid x \leqslant 2 \wedge y \geqslant 1\}$;





§4.1.3 设$|A| = n$，则A上的不同的一元、二元关系分别又多少个？A上的不同的m元关系有多少个？

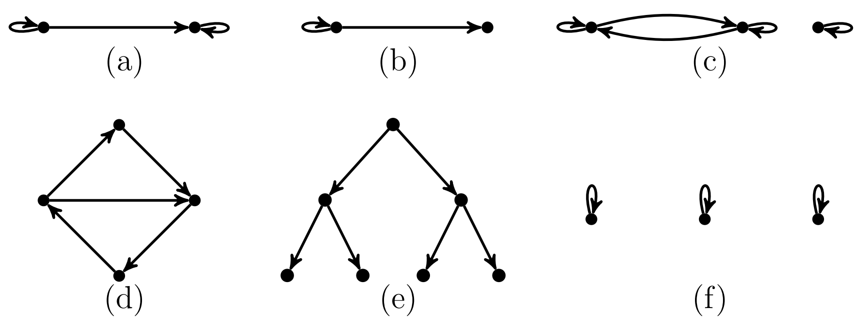
(1) 一元关系：2^n；

(2) 二元关系：2^{n^2}；

(3) m元关系：2^{n^m}. $\square$

§4.1.4 设$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, 则A上的含元素最少的二元关系是什么？A上的含元素最多的二元关系是什么？
解: 最少元素的二元关系为空关系$\varnothing$, 而最多元素的二元关系为全域关系A^2.

§4.2.1 下图中关系分别满足哪些性质：



解:

关系序号	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
a	✓	✗	✗	✓	✓
b	✗	✗	✗	✓	✓
c	✓	✗	✓	✗	✓
d	✗	✓	✗	✓	✗
e	✗	✓	✗	✓	✗
f	✓	✗	✓	✓	✓

□

§4.2.2 设A是集合，R_1, R_2, R_3, R_4, R_5是A上的二元关系：
$R_1 = \{\langle x, y\rangle \mid x + y = 10\}$;
$R_2 = \{\langle x, y\rangle \mid xy > 0\}$;
$R_3 = \{\langle x, y\rangle \mid |x - y| = 6\}$;
$R_4 = \{\langle x, y\rangle \mid |x| = |y|\}$;
$R_5 = \{\langle x, y\rangle \mid x + 3y = 12\}$.
试分析在下面两种情况下，R_1, R_2, R_3, R_4, R_5的性质：

(1) $A = \{0, 1, 2, \ldots, 12\}$;

解:

关系	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1	✗	✗	✓	✗	✗
R_2	✗	✗	✓	✗	✓
R_3	✗	✓	✓	✗	✗
R_4	✓	✗	✓	✓	✓
R_5	✗	✗	✓	✗	✗

- R_3无传递性，因为$\langle 0, 6\rangle \in R_3 \wedge \langle 6, 12\rangle \in R_3$，但$\langle 0, 12\rangle \notin R_3$;
- R_5无传递性，因为$\langle 12, 0\rangle \in R_5 \wedge \langle 0, 4\rangle \in R_5$，但$\langle 12, 4\rangle \notin R_5$.

(2) $A = \mathbb{Z}$.

解:

关系	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1	✗	✗	✓	✗	✗
R_2	✗	✗	✓	✗	✓
R_3	✗	✓	✓	✗	✗
R_4	✓	✗	✓	✗	✓
R_5	✗	✗	✓	✗	✗

□

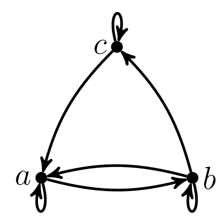
§4.2.5 设$A = \{a, b, c\}$, $R_i \subseteq A \times A (i = 1, 2, 3, 4)$, 并且：

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

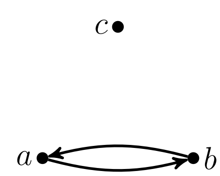
$$M_{R_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

画出$R_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$的关系图，并分析它们的性质.

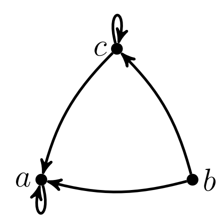
解：关系图如下所示：



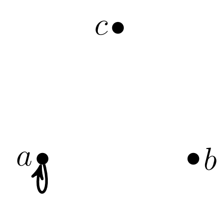
R_1



R_2



R_3



R_4

关系的性质如下表所示:

关系序号	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1	✓	✗	✗	✗	✗
R_2	✗	✓	✓	✗	✗
R_3	✗	✗	✗	✓	✓
R_4	✗	✗	✓	✓	✓

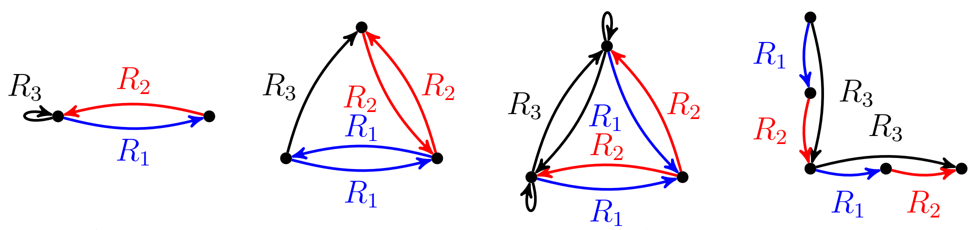
□

§4.3.2 设A是集合，$R_1, R_2 \in A^2$，填写下表并举例说明：

解:

关系属性	$R_1\cup R_2$	$R_1\cap R_2$	R_1-R_2	A^2-R_1	$\widetilde{R_1}$	$R_1\circ R_2$
自反性	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
反自反性	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
对称性	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
反对称性	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
传递性	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$

$R_1\circ R_2$**的反例**：(图中$R_3=R_1\circ R_2$)



反自反性　　对称性　　反对称性　　传递性

□

§4.3.4 设$R,S\subseteq A\times A$, R和S都是对称的. 证明$R\circ S$是对称的当且仅当$R\circ S=S\circ R$.

证明: R和S都是对称的, 则$\widetilde{R}=R\wedge\widetilde{S}=S$.

$$\begin{aligned}
& R\circ S\text{是对称关系}\\
\Longleftrightarrow\quad & \widetilde{R\circ S}=R\circ S\\
\Longleftrightarrow\quad & \widetilde{S}\circ\widetilde{R}=R\circ S\\
\Longleftrightarrow\quad & S\circ R=R\circ S
\end{aligned}$$

§4.3.5 设A是集合, $R\subseteq A\times A$. 证明:

(1) R是反自反关系当且仅当$\mathbb{1}_A \cap R = \varnothing$;

$$
\begin{aligned}
& R\text{是反自反关系} \\
\iff\ & \forall x \in A, \langle x, x\rangle \notin R \\
\iff\ & \forall x \in A, \langle x, x\rangle \in \overline{R} \\
\iff\ & \mathbb{1}_A \subseteq \overline{R} \\
\iff\ & \mathbb{1}_A \cap \overline{\overline{R}} = \varnothing \\
\iff\ & \mathbb{1}_A \cap R = \varnothing
\end{aligned}
$$

(2) R是反对称反关系当且仅当$R \cap \widetilde{R} \subseteq \mathbb{1}_A$;

$$
\begin{aligned}
& R\text{是反对称关系} \\
\iff\ & \forall \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R, x = y \\
\iff\ & \forall \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in \widetilde{R}, x = y \\
\iff\ & \forall \langle x, y\rangle \in R \cap \widetilde{R}, \langle x, y\rangle \in \mathbb{1}_A \\
\iff\ & R \cap \widetilde{R} \subseteq \mathbb{1}_A
\end{aligned}
$$

(3) R是传递关系的充分必要条件是$R^2 \subseteq R$.
证明: 必要性：

$$
\begin{aligned}
& R\text{是传递关系} \\
\Longrightarrow\ & t(R) = R \\
\Longrightarrow\ & \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \\
\Longrightarrow\ & R^2 \subseteq R
\end{aligned}
$$

充分性：

$$
\begin{aligned}
& R^2 \subseteq R \\
\Longrightarrow\ & R^3 = R^2 \circ R \subseteq R \circ R \subseteq R \\
\Longrightarrow\ & \forall i \geqslant 2, R^i \subseteq R \\
\Longrightarrow\ & R \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R \subseteq R \\
\Longrightarrow\ & \bigcup_{i=1}^{\infty} R = R \\
\Longrightarrow\ & R\text{是传递关系}.
\end{aligned}
$$

§4.3.6 设R_1和R_2是非空集合A上的二元关系，证明：

(1) $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$;
证明: $r(R) = \mathbb{1}_A \cup R$.

$$
\begin{aligned}
& r(R_1 \cup R_2) \\
= \ & \mathbb{1}_A \cup R_1 \cup R_2 \\
= \ & (\mathbb{1}_A \cup R_1) \cup (\mathbb{1}_A \cup R_2) \\
= \ & r(R_1) \cup r(R_2)
\end{aligned}
$$

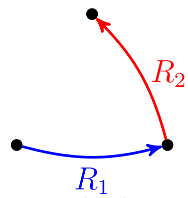
(2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$;
证明: $s(R) = R \cup \widetilde{R}$.

$$
\begin{aligned}
& s(R_1 \cup R_2) \\
= \ & R_1 \cup R_2 \cup \widetilde{R_1 \cup R_2} \\
= \ & R_1 \cup R_2 \cup \widetilde{R_1} \cup \widetilde{R_2} \\
= \ & (R_1 \cup \widetilde{R_1}) \cup (R_2 \cup \widetilde{R_2}) \\
= \ & s(R_1) \cup s(R_2)
\end{aligned}
$$

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$;
证明:
$\because R_1 \subseteq R_1 \cup R_2 \subseteq t(R_1 \cup R_2)$, $\therefore t(R_1 \cup R_2)$是包含$R_1$的传递关系, 而$t(R_1)$是包含$R_1$的最小传递关系，故$t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$; 同理$t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$，故$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$.

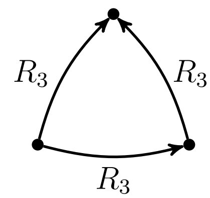
(4) 举反例证明：$t(R_1) \cup t(R_2) \neq t(R_1 \cup R_2)$；

反例:



R_1和R_2(均有传递性)

$t(R_1) \cup t(R_2) = R_1 \cup R_2$



$R_3 = t(R_1 \cup R_2)$

$R_1 \cup R_3$没有传递性

$\square$

§4.3.7 $R_1,\ R_2 \subseteq A \times A,\ A \neq \varnothing$. 证明：

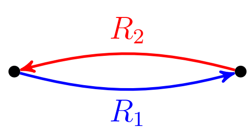
(2) $s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1) \cap s(R_2)$;

证明:

$$
\begin{aligned}
& s(R_1) \cap s(R_2) \\
= \ & (R_1 \cup \widetilde{R_1}) \cap (R_2 \cup \widetilde{R_2}) \\
= \ & (R_1 \cap R_2) \cup (\widetilde{R_1} \cap \widetilde{R_2}) \cup (R_1 \cap \widetilde{R_2}) \cup (\widetilde{R_1} \cap R_2) \\
\supseteq \ & (R_1 \cap R_2) \cup (\widetilde{R_1} \cap \widetilde{R_2}) \\
= \ & (R_1 \cap R_2) \cup \widetilde{R_1 \cap R_2} \\
= \ & s(R_1 \cap R_2)
\end{aligned}
$$

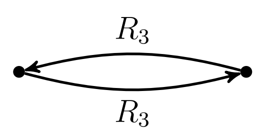
(3) 举反例证明$s(R_1 \cap R_2) \neq s(R_1) \cap s(R_2)$;

反例:



$s(R_1) = s(R_2) = R_3$

$R_1 \cap R_2 = \varnothing$



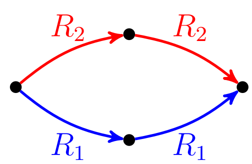
$\varnothing \subsetneq R_3$

(4) $t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \cap t(R_2)$;

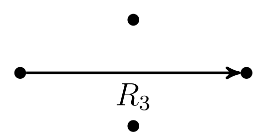
证明:

$$
\begin{aligned}
& R_1 \cap R_2 \subseteq R_1 \wedge R_1 \cap R_2 \subseteq R_2 \\
\Longrightarrow\ & \forall i > 0\, (R_1 \cap R_2)^i \subseteq R_1^i \wedge (R_1 \cap R_2)^i \subseteq R_2^i) \\
\Longrightarrow\ & \bigcup_{i=1}^{\infty}(R_1 \cap R_2)^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_1^i \wedge \bigcup_{i=1}^{\infty}(R_1 \cap R_2)^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_2^i \\
\Longrightarrow\ & t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \wedge t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_2) \\
\Longrightarrow\ & t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \cap t(R_2)
\end{aligned}
$$

(5) 举反例证明$t(R_1 \cap R_2) \neq t(R_1) \cap t(R_2)$;
反例:



$R_1 \cap R_2 = \varnothing$
$t(R_1 \cap R_2) = \varnothing$



$t(R_1) \cap t(R_2) = R_3$
$\varnothing \subsetneq R_3$

$\square$

§4.3.9 设A是集合，$R \subseteq A^2$，若$\forall x \forall y \forall z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow x \not R z)$，则称$R$为反传递关系：

(1) 试举一反传递关系的例子;
例子: $A = \{a, b\}$, $R = \{\langle a, b\rangle\}$，因为前提为假，所以蕴涵式为真，即满足反传递关系的条件.

(2) 证明：R是反传递关系，iff，$R^2 \cap R = \varnothing$.
证明:

$\Longrightarrow$ 设$\langle x, z\rangle \in R \cap R^2$，则$\exists y$, $xRy \wedge yRz$，由于R是反传递关系，$\therefore x \not R z$，矛盾；$\therefore R \cap R^2 = \varnothing$；

$\Longleftarrow$ 反证法：设R不是反传递关系，则：
$\exists x, y, z \in A \wedge xRy \wedge yRz \wedge xRz$，这样$xR^2z \wedge xRz$，即$\langle x, z\rangle \in R \cap R^2$，与条件矛盾。

$\square$

§4.4.1 设A是有n个元素的集合，那么

(1) A上的最大等价关系有多少个元素？它的秩等于多少？
答: 全域关系$A \times A$是A上的最大等价关系，它的秩是1;

(2) A上的最小等价关系有多少个元素？它的秩等于多少？
答: 恒等关系$\mathbb{1}_A$是A上的最小等价关系，它的秩是n.

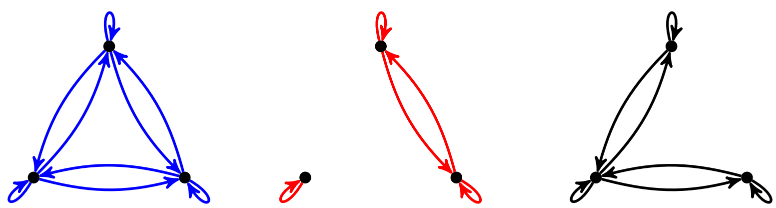
§4.4.2 设R_1和R_2是集合A上的等价关系，下列关系是否等价关系，不是请举反例说明：

(1) $A \times A - R_1$:
答: 不是，$\because$ $\mathbb{1}_A \nsubseteq A \times A - R_1$;

(2) $R_1 - R_2$:
答: 不是，$\because$ $\mathbb{1}_A \nsubseteq R_1 - R_2$;

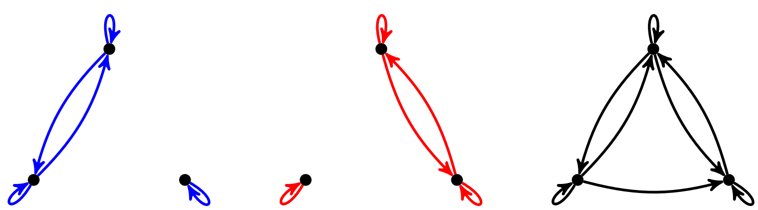
(3) R_1^2:
答: 是的，因为R是等价关系，则$R^2 = R$;

(4) $r(R_1 - R_2)$:
答: 不是，反例如下：



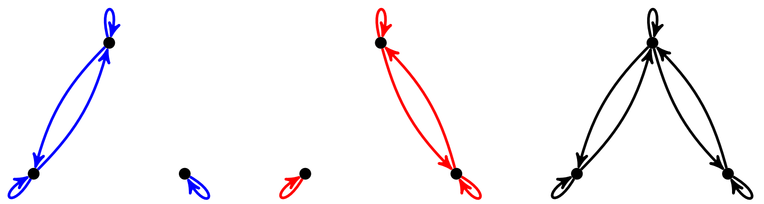
R_1 R_2 $r(R_1 - R_2)$无传递性

(5) $R_1 \circ R_2$:
答: 不是，反例如下：



R_1 R_2 $R_1 \circ R_2$无对称性

(6) $R_1 \cup R_2$:
答: 不是，反例如下：



R_1 R_2 $R_1 \cup R_2$无传递性

$\square$

§4.4.3 设A是集合，$R \subseteq A^2$，若(1) R是自反的；(2) R是循环的，即：
$$\forall x \forall y \forall z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \to zRx)$$
则R是等价关系.

证明:

(i) 对称性：设xRy, 根据R的自反性，yRy, $\because$ R是循环关系, $\therefore$ yRx，对称性成立；

(ii) 传递性：设$xRy \wedge yRz$，则zRx, 而由上得知R是对称的，$\therefore$ xRz，即R是传递关系.

$\square$

§4.4.4 设R_1是$A(\neq \varnothing)$上的自反和传递二元关系，$R_2 \subseteq A \times A$, 且满足
$$\langle x, y \rangle \in R_2 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1 \wedge \langle y, x \rangle \in R_1.$$
则R_2是A上的等价关系.

证明 :

(i) 对称性：$\because$ $R_2 = R_1 \cap \widetilde{R_1}$, $\therefore$ $\widetilde{R_2} = \widetilde{R_1 \cap \widetilde{R_1}} = \widetilde{R_1} \cap R_1 = R_2$, 即$R_2$是对称关系；

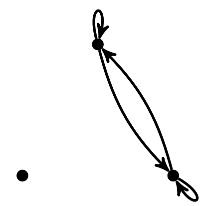
(ii) 自反性：$\because$ R_1是自反的，$\therefore$ $\mathbb{1}_A \subseteq R_1 \wedge \mathbb{1}_A \subseteq \widetilde{R_1}$, 即$\mathbb{1}_A \subseteq R_1 \cap \widetilde{R_1} = R_2$, 故$R_2$是自反关系；

(iii) 传递性：$\because$ R_1和$\widetilde{R_1}$是自反和传递关系，$\therefore$ $R_1^2 = R_1 \wedge \widetilde{R_1}^2 = \widetilde{R_1}$. $\because$ $R_1 \cap \widetilde{R_1}$是自反关系，$\therefore$ $R_1 \cap \widetilde{R_1} \subseteq (R_1 \cap \widetilde{R_1})^2$; 而另一方面$R_1 \cap \widetilde{R_1} \subseteq R_1$, $\therefore$ $(R_1 \cap \widetilde{R_1})^2 \subseteq R_1^2$. 同理$(R_1 \cap \widetilde{R_1})^2 \subseteq \widetilde{R_1}^2$. 即$(R_1 \cap \widetilde{R_1})^2 \subseteq R_1 \cap \widetilde{R_1}$. 故$(R_1 \cap \widetilde{R_1})^2 = R_1 \cap \widetilde{R_1}$, 及$R_2$是传递关系.

$\square$

§4.4.5 有人说等价关系的定义中的自反性可以不要，因为自反性可由对称性和传递性推出，即$aRb \Longrightarrow bRa \Longrightarrow aRa \wedge bRb$, 这个

推理正确吗？为什么？
答: 不正确，因为对任意的a可能不存在b使得aRb，这样的a就不能推出aRa. 如下图的关系具有对称和传递性，但是没有自反性.



$\square$

§4.4.8 R是$A = \{1, 2, \ldots, 6\}$上的等价关系：

$$R = \mathbb{1}_A \cup \{\langle 1,5\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 6,3\rangle\}$$

求R诱导的划分π.
解: $\pi = \{\{1,5\}, \{2,4\}, \{3,6\}\}$. $\square$

§4.4.10 设π_1和π_2是非空集合A上的划分，下列哪些不是A的划分，为什么？

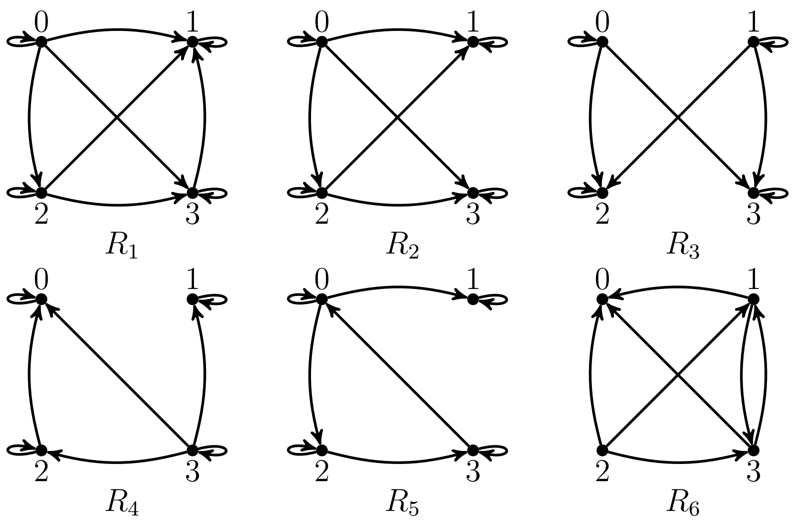
(1) $\pi_1 \cup \pi_2$;
答: 不是，求并后的集簇破坏了俩俩相交为空或相等的性质. 如$A = \{1,2,3\}$, $\pi_1 = \{\{1\},\{2,3\}\}$, $\pi_2 = \{\{1,2\},\{3\}\}$, 则在$\pi_1 \cup \pi_2$中$\{1\} \neq \{1,2\} \wedge \{1\} \cap \{1,2\} \neq \varnothing$.

(2) $\pi_1 \cap \pi_2$;
答: 是，设$B \in \pi_1$, 根据习题§4.4.7有$\{C \cap B \mid C \in \pi_2 \wedge C \cap B \neq \varnothing\}$是$B$的划分，这样$\bigcup_{B \in \pi_1} \{C \cap B \mid C \in \pi_2 \wedge C \cap B \neq \varnothing\}$是$A$ 的划分，即$\pi_1 \cap \pi_2$是A的划分.

(3) $\pi_1 - \pi_2$;
答: 不是. 如果$\pi_1 = \pi_2$, 则$\pi_1 - \pi_2 = \varnothing$. 显然不是划分.

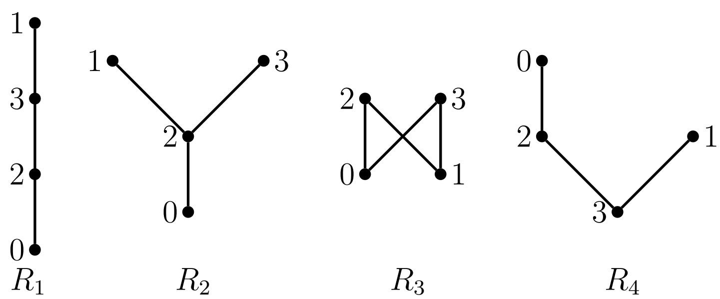
(4) $\pi_1 \cap (\pi_2 - \pi_1) \cup \pi_2$.
答: 是. $\because \pi_1 \cap (\pi_2 - \pi_1) \cup \pi_2 = \pi_2$.

§4.5.2 设$A = \{0, 1, 2, 3\}$, $R_i (i = 1, 2, \ldots, 6)$是$A$上的二元关系，其关系图如下所示.



解:

(1) R_5, R_6不是偏序关系，其他的Hass图如下：



(2) 无拟序关系，R_1是良序关系。

□

§4.5.4 $R \subseteq A^2$，$B \subseteq A$, $R' = R \cap B^2 \subseteq B^2$，下列命题哪些是真？

(1) R是偏序关系，则R'也是；
答：该命题为真. 可以验证R'作为B上的关系也满足自反性、反对称性和传递性；注意R'如果作为A上的关系，并且当$B \subsetneq A$时，则不满足自反性，所以不是A上的偏序关系.

(2) R是拟序关系，则R'也是；
答：该命题为真. 可以验证R'作为B上的关系也满足反对称性和传递性；注意R'如果作为A上的关系，并且当$B \subsetneq A$时，则不满足自反性，所以不是A上的偏序关系.