

# 第 1 章 凸集合

SMaLL

<sup>1</sup> 中国石油大学（华东）

SMaLL 课题组

[small.sem.upc.edu.cn](http://small.sem.upc.edu.cn)

liangxijunsd@163.com

部分课件参考自 S. Boyd

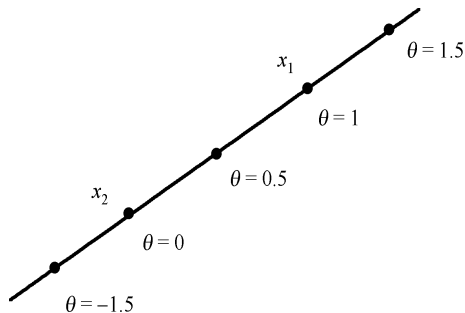
<https://stanford.edu/~boyd/cvxbook/>

2023

# 仿射集

**直线:** 对两个点  $x_1, x_2$ :

$$x = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \quad (\theta \in \mathbb{R}) \quad (1)$$



**仿射集:** 包含通过集合中任意两个不同点的线

**例如:** 线性方程的解集  $\{x \mid Ax = b\}$

Q. 每个仿射集都可以表示为线性方程组的解集吗?

Q.  $x = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \quad (\theta \in [0, 1])$ , 是什么样的集合?

# 凸集

- **线段:** 在  $x_1$  和  $x_2$  之间: 所有点

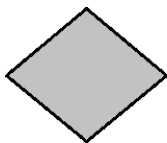
$$x = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \quad (2)$$

其中  $0 \leq \theta \leq 1$

- **凸集:** 包含集合中任意两点之间的线段

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \implies \quad \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C \quad (3)$$

- **例如:** (一个凸集, 两个非凸集)



# 凸组合和凸包

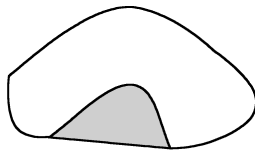
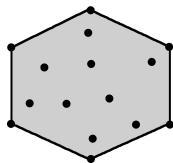
- **凸组合:**  $x_1, \dots, x_k$  的凸组合:

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_k x_k \quad (4)$$

其中  $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1, \theta_i \geq 0$

- **凸包**  $\text{conv } S$ :

$S$  中所有凸组合的集合



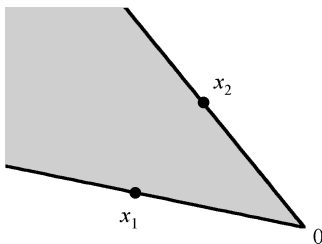
# 凸锥

- $x_1$  和  $x_2$  的锥组合（非负线性组合）：对于点  $x_1$  和  $x_2$

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \quad (5)$$

其中  $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0$

- E.g.



- 凸锥: 包含集合中所有元素的锥组合的集合

# 超平面和半空间

- 二维平面上的一条直线将平面中分成两部分
- 超平面: 具有以下形式的集合  $\{x \mid a^T x = b\}$  ( $a \neq 0$ )
- 半空间: 具有以下形式的集合  $\{x \mid a^T x \leq b\}$  ( $a \neq 0$ ),
- 超平面是仿射集; 半空间是凸的

# 欧氏球和椭球

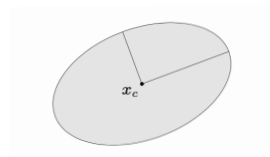
- 二维平面中的圆和椭圆
- (欧几里德) 球: 其中  $x_c$  是球心,  $r$  为半径:

$$B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \leq r\} = \{x_c + ru \mid \|u\|_2 \leq 1\} \quad (6)$$

- 椭球: 具有以下形式的集合

$$\left\{x \mid (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \leq 1\right\} \quad (7)$$

其中  $P \in \mathbf{S}_{++}^n$  (i.e.,  $P$  为对称正定矩阵)



- 另一个表示:  $\{x_c + Au \mid \|u\|_2 \leq 1\}$ ,  $A$  为正定矩阵

# 范数球和范数锥

- **范数:**  $\|\cdot\|$  满足:
  - $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0$  当且仅当  $x = 0$
  - $\|tx\| = |t|\|x\|$  对于  $t \in \mathbb{R}$
  - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- **范数球** 球心  $x_c$  , 半径为  $r$  的范数球:  $\{x \mid \|x - x_c\| \leq r\}$
- **范数锥:**  $\{(x, t) \mid \|x\| \leq t\}$

欧氏锥称为二阶锥

-范数球和范数锥是凸的

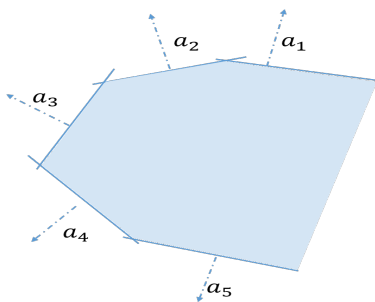


# 多面体

- 有限个线性不等式和等式的解集

$$Ax \preceq b, \quad Cx = d \quad (8)$$

( $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\preceq$  是分量不等式)



- 多面体是有限个半空间和超平面的交集

# 正半定锥

- $\mathbf{S}^n$  表示  $n \times n$  对称矩阵的集合
- $\mathbf{S}_+^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succeq 0\}$ : 表示  $n \times n$  对称半正定矩阵的集合

$$X \in \mathbf{S}_+^n \iff z^T X z \geq 0 \quad \forall z \quad (9)$$

$\mathbf{S}_+^n$  是凸锥

- $\mathbf{S}_{++}^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succ 0\}$ :  $n \times n$  对称正定矩阵的集合

例如:  $\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathbf{S}_+^2$

$$x \geq 0, \quad xz - y^2 \geq 0$$

# 保持凸性的运算

Q: 如何检测一个集合  $C$  是凸集合? 如何构造凸集合?

## 1. 利用定义

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \implies \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C \quad (10)$$

2. 证明  $C$  是通过保持凸性的运算获得的: 简单的凸集合 (超平面、半空间、范数球等)  $\rightarrow$  复杂凸集合

- 交集
- 仿射变换
- 透视函数
- 线性分式映射

# 交集

- 定理：凸集合（任意数量）的交集是凸的。
- 证. 设  $C_1, C_2$  凸集合,  $\forall x_1, x_2 \in C_1 \cap C_2, \theta \in [0, 1]$ , 验证  $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C_1 \cap C_2$

# 仿射变换

- **定义.**  $\mathcal{A} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  为仿射变换:  $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}, \theta \in \mathbb{R}$ , 有
$$\mathcal{A}(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) = \theta \mathcal{A}x_1 + (1 - \theta)\mathcal{A}x_2$$
- 如果  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  是仿射变换, i.e.,  $f(x) = Ax + b$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ 
  1. 在  $f$  下的像集是凸集合

$$S \subseteq \mathbb{R}^n \text{ 凸} \implies f(S) = \{f(x) \mid x \in S\} \text{ 凸} \quad (11)$$

2. 在  $f$  下凸集的逆像  $f^{-1}(C)$  是凸的 ( proof. Ex.)

$$C \subseteq \mathbb{R}^m \text{ 凸} \implies f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in C\} \text{ 凸} \quad (12)$$

证. (1)  $\forall y_1, y_2 \in f(S)$ , 验证  $\theta y_1 + (1 - \theta)y_2 \in f(S)$ ,  $\theta \in (0, 1)$

## 例

- 缩放、平移、投影
- 线性矩阵不等式的解集  $\{x \mid x_1 A_1 + \cdots + x_m A_m \preceq B\}$  ( $A_i, B \in \mathbf{S}^p$ )
- 双曲线锥体  $\{x \mid x^T P x \leq (c^T x)^2, c^T x \geq 0\}$  ( $P \in \mathbf{S}_+^n$ )

- 缩放和平移

$$\alpha S = \{\alpha x \mid x \in S\}, \quad S + a = \{x + a \mid x \in S\}$$

- 凸集在其某些坐标上的投影是凸的: 若  $S \subseteq \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$  是凸的, 那么

$$T = \{x_1 \in \mathbf{R}^m \mid (x_1, x_2) \in S, x_2 \in \mathbf{R}^n\}$$

也是凸的.

- 两个集合的和

$$S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1, y \in S_2\}$$

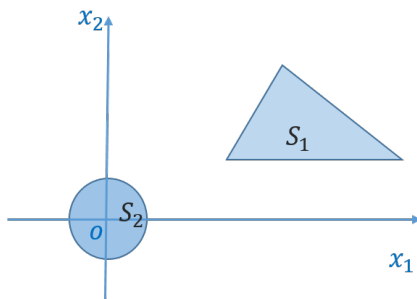


图: 思考  $S_1 + S_2 = ?$ ,  $S_2 = \epsilon \mathbf{B}$

## 例. 仿射变换与凸集

- 如果  $S_1$  和  $S_2$  是凸的, 那么  $S_1 + S_2$  也是凸的.

证明. 如果  $S_1$  和  $S_2$  是凸的, 那么乘积或笛卡尔乘积也是凸的

$$S_1 \times S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$$

该集合在线性函数下的图像  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  是总和  $S_1 + S_2$ .

- 部分和  $S_1, S_2 \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ , 定义为

$$S = \{(x, y_1 + y_2) \mid (x, y_1) \in S_1, (x, y_2) \in S_2\}$$

其中  $x \in \mathbf{R}^n$  且  $y_i \in \mathbf{R}^m$ .

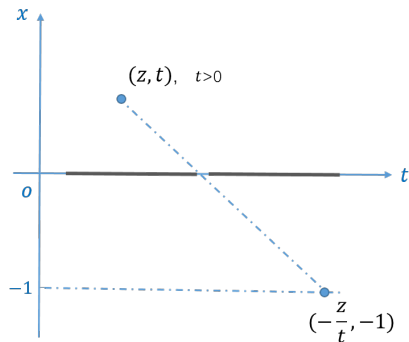
- 当  $m = 0$ , 部分和  $\rightarrow$  交集  $S_1$  和  $S_2$ ;
- 当  $n = 0$ , 部分和  $\rightarrow$  集合加法.
- 两个凸集的部分和仍是凸集

# 透视函数 (选讲)

透视函数  $P: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$P(x, t) = x/t, \quad P = \{(x, t) \mid t > 0\} \quad (13)$$

透视下凸集的图像和逆像是凸集.



透视函数: 针孔照相机的动作



# 透视函数和线性分式映射

线性分式映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  :

$$f(x) = \frac{Ax + b}{c^T x + d}, \quad f = \{x \mid c^T x + d > 0\} \quad (14)$$

命题 线性分式映射下凸集的图像和逆像是凸集。

# 广义不等式：动机

Q. 比较两个大小  $a$  和  $b$ ?

- 两个数字  $a, b$

$$2 < 3$$

- $a, b \in \mathbb{R}^2$

$$(1, 2) \prec (3, 4)$$

- $A, B \in \mathbf{S}^n$  ?

# 广义不等式：动机

Q. 比较  $a$  和  $b$ ?

- 两个真实数字  $a, b$

$$2 < 3 \Leftrightarrow 3 - 2 \in \text{整数 } K, K = [0, \infty)$$

- $a, b \in \mathbb{R}^2$

$$(1, 2) \prec (3, 4) \Leftrightarrow (3, 4) - (1, 2) \in \text{整数 } K, K = \mathbb{R}_+^2$$

- $A, B \in \mathbf{S}^n$  ?

$$A \prec B \Leftrightarrow B - A \in \text{整数 } K, K = \mathbf{S}_+^n$$

# 广义不等式

定义. 凸锥  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  称为 **正常锥 (proper cone)**, 若

- $K$  是封闭的 (有边界)
- $K$  是实心的 (内部不是空的)
- $K$  不包含直线

## 实例

- 非负整数  $K = \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$
- 半正定锥  $K = \mathbf{S}_+^n$
- $[0, 1]$  上的非负多项式:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \dots + x_n t^{n-1} \geq 0, t \in [0, 1]\} \quad (15)$$

# 广义不等式

广义不等式由正常锥  $K$  定义:

$$x \preceq_K y \iff y - x \in K, \quad x \prec_K y \iff y - x \in \text{整数}K \quad (16)$$

## 实例

- 分量不等式 ( $K = \mathbb{R}_+^n$ )

$$x \preceq_{\mathbb{R}_+^n} y \iff x_i \leq y_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (17)$$

- 矩阵不等式 ( $K = \mathbf{S}_+^n$ )

$$X \preceq_{\mathbf{S}_+^n} Y \iff Y - X \text{ 半正定} \quad (18)$$

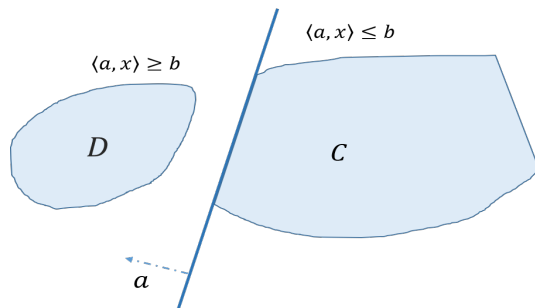
特性:  $\preceq_K$  的很多特性与  $\leq$  在  $\mathbb{R}$  上的性质相似, e.g.,

$$x \preceq_K y, \quad u \preceq_K v \implies x + u \preceq_K y + v \quad (19)$$

# 超平面分割定理

定理. [超平面分割定理] 如果  $C$  和  $D$  是非空不相交凸集, 则存在  $a \neq 0, b$ :

$$a^T x \leq b \forall x \in C, \quad a^T x \geq b \forall x \in D \quad (20)$$



定义 若 (20) 成立, 称超平面  $\{x \mid a^T x = b\}$  分离  $C$  和  $D$

定义. 严格的分离 若存在  $a \neq 0, b$ :  $a^T x < b, \forall x \in C, \quad a^T x > b \forall x \in D$ , 称超平面  $\{x \mid a^T x = b\}$  严格的分离集合  $C$  和  $D$

例子 [点和闭凸集的严格分离] 假设  $C$  是一个闭凸集,  $x_0 \notin C$   
 $\Rightarrow x_0$  和  $C$  可以严格分开.

推论 闭凸集是包含它的所有半空间的交集。

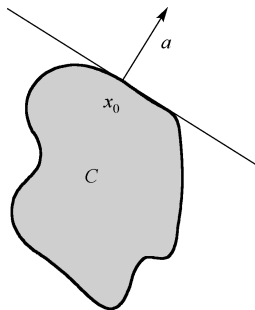
# 支撑超平面定理

定义.  $C$  在边界点  $x_0$  处的**支撑超平面**:

$$\{x \mid a^T x = a^T x_0\} \quad (21)$$

对于所有的  $x \in C$  当  $a \neq 0$  并且  $a^T x \leq a^T x_0$

**定理** [支撑超平面定理] 如果  $C$  是凸的  $\Rightarrow C$  的每个边界点上存在一个支撑超平面.





# 支撑超平面

取  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ . 考虑其支撑超平面（线）

$\text{epi} f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq |x|\}$  at  $(0, 0)$ .

- 直线的斜率是多少？
- 切线蕴含导数  $\rightarrow$  支撑超平面蕴含凸函数的（次）微分.

$$\partial f(0) = [-1, 1].$$

# 对偶锥与广义不等式

- 定义.  $K$  的对偶锥:

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\} \quad (22)$$

- 示例

- 负值集合.  $K = \mathbb{R}_+^n : K^* = \mathbb{R}_+^n$
  - 半正定锥.  $K = \mathbf{S}_+^n : K^* = \mathbf{S}_+^n$
  - 标准圆锥面  $K = \{(x, t) \mid \|x\|_2 \leq t\} : K^* = \{(x, t) \mid \|x\|_2 \leq t\}$
  - 标准圆锥面  $K = \{(x, t) \mid \|x\|_1 \leq t\} : K^* = \{(x, t) \mid \|x\|_\infty \leq t\}$
  - 前三个例子是锥 **自对偶锥**
- 正常锥的对偶锥是正常锥, 因此定义了广义不等式

$$y \succeq_{K^*} 0 \iff y^T x \geq 0 \text{ 对于所有 } x \succeq_K 0 \quad (23)$$

# 总结：凸集

- 定义. 仿射集与凸集
- 例子. 超平面、半空间、球、椭球和椭圆、多面体  
凸锥:  $\mathbf{R}_+^n, \mathbf{S}_+^n$ , 范数锥
- 保持凸性的操作
  - 交: 例 ♣♣ 多面体, 半正定矩阵  $\mathbf{S}_+^n$
  - 仿射变换的图像 (和逆图像)  
例, ♣♣  $\alpha S, S + a, S_1 + S_2$   
例, 部分和, 线性矩阵不等式的解集, 椭球
  - 透视映射:  $P(x, t) = x/t, t > 0$ , 透视映射的图像 (和逆图像)
  - 线性分数映射:  $f(x) = \frac{Ax+b}{c^T x+d}, c^T x + d > 0$ .
- 广义不等式
  - 正常锥: 闭的, 实心的, 不含直线 例,  $\mathbf{R}_+^n, \mathbf{S}_+^n$
  - 广义不等式:  $x \preceq_K y \Leftrightarrow y - x \in K, \quad x \prec_K y \Leftrightarrow y - x \in \text{int } K$
  - 最小元和极小元

# 总结：凸集

- 超平面分割定理

- 定义. ♣ (严格) 分离的凸集  $C$  和  $D$
- 定义. ♣  $x_0 \in \text{bd } C$  处的支撑超平面  $C$ :

$$\{x | \langle a, x \rangle = a^T x_0\},$$

其中  $\langle a, x \rangle \leq a^T x_0, \forall x \in C$

- 例如, 闭凸集和外面与其不相交的一个点可以严格分离。

推论: 闭凸集是包含它的所有半空间的交集。

- 定理. 凸集  $C \Rightarrow C$  的每个边界点上均存在一个支撑超平面

- 对偶锥与广义不等式

- 对偶锥  $K$ : ♣  $K^* = \{y | \langle y, x \rangle \geq 0, \forall x \in K\}$ .
- 例,  $(\mathbb{R}_+^n)^* = \mathbb{R}_+^n$ ,  $(\mathbf{S}_+^n)^* = \mathbf{S}_+^n$
- 例,  $\rightarrow$  范数  $\|\cdot\|_1$  对应的范数锥的对偶锥:  $\|\cdot\|_\infty$  对应的锥 ♣

# 练习题 I

1. 证明：所有  $n$  阶半正定矩阵的全体构成凸锥。
2. 证明一个集合是凸集当且仅当它与任意直线的交是凸的。证明一个集合是仿射的，当且仅当它与任意直线的交是仿射的。
3. 两个平行的超平面  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b_1\}$  和  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b_2\}$  之间的距离是多少？
4. 半空间的 Voronoi 描述。令  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  为  $\mathbf{R}^n$  上互异的两点。证明所有距离  $\mathbf{a}$  比距离  $\mathbf{b}$  近（Euclid 范数下）的点的集合，即  $\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2\}$ ，是一个超平面。用形如  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq d$  的不等式进行显式表示并绘出图像。
5. 设  $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^n$  为一个凸集且  $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{C}$ . 令  $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathbf{R}$  满足  $\theta_i \geq 0, \theta_1 + \dots + \theta_k = 1$ .  
证明  $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \in \mathbf{C}$ . （凸性的定义是指此式在  $k = 2$  时成立；你需要证明对任意  $k$  的情况。提示：对  $k$  进行归纳。）

## 练习题 II

6. 证明如果  $\mathbf{S}_1$  和  $\mathbf{S}_2$  是  $\mathbf{R}^{m \times n}$  中的凸集, 那么它们的部分和

$$\mathbf{S} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{R}^n, (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) \in \mathbf{S}_1, (\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \in \mathbf{S}_2\}$$

也是凸的。

7. 支撑超平面。(a) 将闭凸集  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^2 \mid x_1 x_2 \geq 1\}$  表示为半空间的交集。

(b) 令  $\mathbf{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}$  表示  $\mathbf{R}^n$  空间中的单位  $\ell_\infty$ -范数球, 并令  $\hat{\mathbf{x}}$  为  $\mathbf{C}$  的边界上的点。显式地写出集合  $\mathbf{C}$  在  $\hat{\mathbf{x}}$  处的支撑超平面。

8. 支撑超平面定理的逆定理。设集合  $\mathbf{C}$  是闭的、含有非空内部并且在其边界上的每一点都有支撑超平面。证明  $\mathbf{C}$  是凸集。

9. 给出两个不相交的闭凸集不能被严格分离的例子。

10. 支撑函数。集合  $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^n$  的支撑函数定义为

$$\mathbf{S}_{\mathbf{C}}(\mathbf{y}) = \sup \{\mathbf{y}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{C}\}$$

(我们允许  $\mathbf{S}_{\mathbf{C}}(\mathbf{y})$  取值为  $+\infty$ .) 设  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  是  $\mathbf{R}^n$  上的闭凸集。证明  $\mathbf{C} = \mathbf{D}$  当且仅当它们的支撑函数相等。

11. 计算  $\{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} > 0\}$  的对偶锥, 其中  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 。