第二章凸函数

SMaLL

[1] 中国石油大学（华东）
SMaLL 课题组：梁锡军
small.sem.upc.edu.cn
liangxijunsd@163.com

2023

第 2 章凸函数 (Convex Functions)

1. 基本性质和示例
2. 保持凸性的运算
3. 共轭函数
4. 次梯度与次微分
5. 对偶

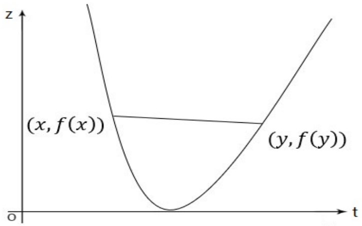
第 2 章凸函数 (Convex Functions)

Sec. 1 基本性质和示例

定义 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是凸函数，如果 **dom** f 是凸集，且

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1-\theta)f(y) \tag{1}$$

任意 $x, y \in \textbf{dom } f, 0 \le \theta \le 1$ $\quad \mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \infty\}$



- 如果 $-f$ 是凸函数，那么 f 是凹函数
- 如果 **dom** f 是凸的并且满足以下式子，那么 f 是严格凸的

$$f(\theta x + (1-\theta)y) < \theta f(x) + (1-\theta)f(y) \tag{2}$$

任意 $x, y \in \textbf{dom } f, x \ne y, 0 < \theta < 1$

讨论

Q. 你知道哪些函数是凸函数或凹函数?

在 $\mathbb{R}$ 上的示例

凸函数:

- 仿射函数: $ax + b$ 在 $\mathbb{R}$, 任意 $a, b \in \mathbb{R}$
- 指数函数: e^{ax}, 任意 $a \in \mathbb{R}$
- 幂函数: x^α on $\mathbb{R}_{++}$, 当 $\alpha \geq 1$ 或 $\alpha \leq 0$ 时
- 绝对值幂函数: $|x|^p$ 在 $\mathbb{R}$, 当 $p \geq 1$ 时
- 负熵函数: $x \log x$ 定义域为 $\mathbb{R}_{++}$

凹函数:

- 仿射函数: $ax + b$ 在 $\mathbb{R}$, 任意 $a, b \in \mathbb{R}$
- 幂函数: x^α 在 $\mathbb{R}_{++}$, 当 $0 \leq \alpha \leq 1$ 时
- 对数函数: $\log x$ 在 $\mathbb{R}_{++}$ 上

在 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上的示例

* 仿射函数是凸的也是凹的;

* 所有范数都是凸的

在 $\mathbb{R}^n$ 上的示例

- 仿射函数 $f(x) = a^T x + b$
- 范数: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$;
  $\|x\|_\infty = \max_k |x_k|$

在 $\mathbb{R}^{m\times n}$($m \times n$ 矩阵) 上的示例

- 仿射函数

$$f(X) = \mathbf{tr}\left(A^T X\right) + b = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}X_{ij} + b \tag{3}$$

- 谱（最大奇异值）范数

$$f(X) = \|X\|_2 = \sigma_{\max}(X) = \left(\lambda_{\max}\left(X^T X\right)\right)^{1/2} \tag{4}$$

扩展值扩展

f 的扩展值扩展 $\tilde{f}$ 是

$$\tilde{f}(x) = f(x), \quad x \in \mathbf{dom}\ f, \quad \tilde{f}(x) = \infty, \quad x \notin \mathbf{dom}\ f \tag{5}$$

经常简化记法;

示例： [凸集的指示函数]

$$I_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \\ \infty, & x \notin C. \end{cases} \tag{6}$$

凸函数限制在直线上

定理 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是凸函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$g(t) = f(x+tv), \quad \textbf{dom}\ g = \{t \mid x+tv \in \textbf{dom}\ f\} \tag{7}$$

是在 t 上的凸函数，对于任意 $x \in \textbf{dom}f, v \in \mathbb{R}^n$

示例 $f:\mathbf{S}^n \to \mathbb{R}$ with $f(X) = \log\det X, \textbf{dom}f = \mathbf{S}^n_{++}$

$$\begin{aligned} g(t) = \log\det(X+tV) &= \log\det X + \log\det\left(I + tX^{-1/2}VX^{-1/2}\right) \\ &= \log\det X + \sum_{i=1}^{n} \log(1+t\lambda_i) \end{aligned} \tag{8}$$

其中 λ_i 是 $X^{-1/2}VX^{-1/2}$ 的特征值

g 在 t 上是凹的 (对于任意 $X \succ 0, V$); $\Rightarrow f$ 是凹的 Ex.

一阶条件

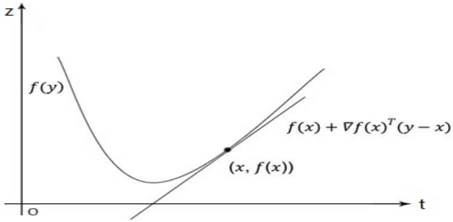
f 是 **可微分的**，即它的梯度

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right) \tag{9}$$

在每个 $x \in \mathbf{dom} f$ 上存在，$\mathbf{dom} f$ 是开放的

定理 [一阶条件 **] 可微凸函数 f 满足不等式

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) \quad \text{任意} x, y \in \mathbf{dom}\ f \tag{10}$$



二阶条件

f 是 **二阶可微的**即 $\mathbf{dom}\ f$ 是开的，且 Hessian 阵 $\nabla^2 f(x) \in \mathbf{S}^n$，

$$\nabla^2 f(x)_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{11}$$

存在于每个点 $x \in \mathbf{dom}\ f$

定理 [二阶条件 **] 在凸有效域上的二次可微函数 f

- f 是凸的，当且仅当

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0 \quad 任意 x \in \mathbf{dom}\ f \tag{12}$$

- 如果 $\nabla^2 f(x) \succ 0$ ，$x \in \mathbf{dom}\ f$, 那么 f 是严格凸的

示例

- **二次函数 **** $f(x) = (1/2)x^T Px + q^T x + r$ ($P \in \mathbf{S}^n$)

$$\nabla f(x) = Px + q, \quad \nabla^2 f(x) = P \tag{13}$$

  是凸函数，当 $P \succeq 0$ 时

- **最小二乘 **** $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$

$$\nabla f(x) = 2A^T(Ax - b), \quad \nabla^2 f(x) = 2A^T A \tag{14}$$

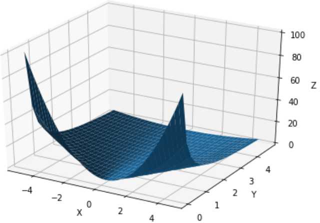
  是凸函数 (对于任意 A)

- **quadratic-over-linear**

$f(x, y) = x^2/y$

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{2}{y^3} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}^T \succeq 0 \tag{15}$$

是凸函数，当 $y > 0$ 时



示例

- **对数和表达式** ** $f(x)=\log\sum_{k=1}^{n}\exp x_k$ 是凸函数

$$\nabla^2 f(x)=\frac{1}{\mathbf{1}^T z}\operatorname{diag}(z)-\frac{1}{(\mathbf{1}^T z)^2}zz^T \quad (z_k=\exp x_k) \tag{16}$$

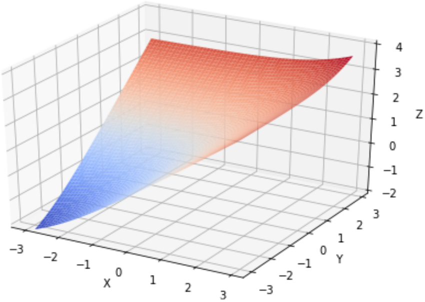
为了展示 $\nabla^2 f(x)\succeq 0$, 我们必须证明对于所有 v , $v^T\nabla^2 f(x)v\geq 0$:

$$v^T\nabla^2 f(x)v=\frac{\left(\sum_k z_k v_k^2\right)\left(\sum_k z_k\right)-\left(\sum_k v_k z_k\right)^2}{\left(\sum_k z_k\right)^2}\geq 0 \tag{17}$$

因为 $\left(\sum_k v_k z_k\right)^2\leq\left(\sum_k z_k v_k^2\right)\left(\sum_k z_k\right)$ (来自柯西-施瓦兹不等式)

示例

- $f(x) = \log(e^x + e^y)$ 的图像

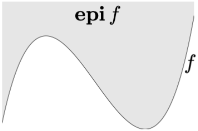


- **几何平均 **** $f(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$ 在 $\mathbb{R}^n_{++}$ 上是凹的 (与对数和表达式的证明相似)

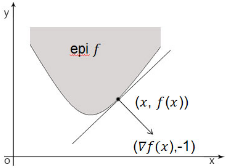
上图（Epigraph）

函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的 **epigraph** 定义为:

$$\textbf{epi}\ f=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid x\in\textbf{dom}\ f, f(x)\le t\right\} \tag{18}$$



定理 [凸函数的 Epigraph]** f 是凸函数，当且仅当 **epi** f 是一个凸集.



上图的一个支撑超平面

下水平集

f 的**下水平集**- α :$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$C_\alpha = \{x \in \mathbf{dom}\ f \mid f(x) \leq \alpha\} \tag{19}$$

凸函数的下水平集是凸的 (反之，逆命题未必成立)

Jensen 不等式

- **基本不等式:** 如果 f 是凸函数, 那么对于 $0 \le \theta \le 1$ 有

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1-\theta)f(y) \tag{20}$$

- **扩展:** 如果 f 是凸函数, 那么

$$f(\mathbf{E}z) \le \mathbf{E}f(z) \tag{21}$$

  对于任何随机变量 z

- 基本不等式是离散分布的特例

$$\mathbf{prob}(z = x) = \theta, \quad \mathbf{prob}(z = y) = 1 - \theta \tag{22}$$

Sec. 2 保持凸性的运算

检验函数凸性的实用方法

1. 验证定义（通常通过限制到直线来简化）
2. 对于两次可微函数，验证 $\nabla^2 f(x) \succeq 0$
3. 证明 f 是通过保持凸性的运算从简单凸函数获得的
    - 非负加权求和
    - 复合仿射函数
    - 逐点最大和逐点上确界
    - 复合运算
    - 最小化
    - 透视函数（Perspective function）

正加权和 & 复合仿射函数

- **非负倍数:** 如果 f 是凸函数,αf 是凸函数, $\alpha \geq 0$
- **求和:** 如果 f_1, f_2 都是凸函数, $f_1 + f_2$ 是凸函数 (扩展到无限和、积分)
- **复合仿射函数:** 如果 f 是凸函数, $f(Ax + b)$ 是凸函数

示例

- 线性不等式的对数和

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log\left(b_i - a_i^T x\right), \qquad \mathbf{dom}\ f = \{x \mid a_i^T x < b_i, i = 1, \ldots, m\} \tag{23}$$

- (任意) 仿射函数的范数: $f(x) = \|Ax + b\|$

逐点最大值

定理 如果 $f_1,\ldots,f_m$ 都是凸函数, 则 $f(x)=\max\{f_1(x),\ldots,f_m(x)\}$ 是凸函数.

示例:

- 分段线性函数: $f(x)=\max_{i=1,\ldots,m}\left(a_i^T x+b_i\right)$ 是凸函数
- x 的 r 个最大分量之和 $x\in\mathbb{R}^n$:

$$f(x)=x_{[1]}+x_{[2]}+\cdots+x_{[r]} \tag{24}$$

  是凸函数 ($x_{[i]}$ 是 x) 第 i 个最大分量

- 证明:

$$f(x)=\max\left\{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_r} \mid 1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n\right\} \tag{25}$$

逐点上确界← 逐点最大值

定理 如果 $f(x, y)$ 关于 x 是凸的，对任意 $y \in \mathcal{A}$, 则

$$g(x) = \sup_{y \in \mathcal{A}} f(x, y). \tag{26}$$

也是凸函数

证. $f_i(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq f(x_1) + (1-\theta)f(x_2)$, $i = 1, \cdots, m$, $\theta \in (0, 1)$

示例

- 集合的支持函数 C : $S_C(x) = \sup_{y \in C} y^T x$ 是凸的
- 到集合中最远点的距离 C (选讲) :

$$f(x) = \sup_{y \in C} \|x - y\| \tag{27}$$

- 对称矩阵的最大特征值: for $X \in \mathbf{S}^n$,

$$\lambda_{\max}(X) = \sup_{\|y\|_2 = 1} y^T X y \tag{28}$$

标量函数组合

定理 给定函数 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 和 $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = h(g(x)) \tag{29}$$

f 是凸函数如果

- g 是凸函数, h 是凸函数, $\tilde{h}$ 非减;
- g 是凹函数, h 是凸函数, $\tilde{h}$ 非减.

- 证明 (当 $n = 1$, 函数 g, h 可微)

$$f''(x) = h''(g(x))g'(x)^2 + h'(g(x))g''(x) \tag{30}$$

- 注意: 单调性必须适用于扩展值扩展 $\tilde{h}$

示例:

- 如果 g 是凸函数, $\exp g(x)$ 是凸函数
- 如果 g 是凹函数且为正, $1/g(x)$ 是凸函数

向量组合

给定函数 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ 和 $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = h(g(x)) = h\left(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_k(x)\right) \tag{31}$$

f 是凸函数如果

- g_i 是凸函数, h 是凸函数, $\tilde{h}$ 在每个参数中非减
- g_i 是凹函数, h 是凸函数, $\tilde{h}$ 在每个参数中非减

证明 (当 $n=1$, 函数 g, h 可微)

$$f''(x) = g'(x)^T \nabla^2 h(g(x)) g'(x) + \nabla h(g(x))^T g''(x) \tag{32}$$

示例

- 如果 g_i 是凹函数且为正, 则 $\sum_{i=1}^m \log g_i(x)$ 是凹函数
- 如果 g_i 是凸函数, 则 $\log \sum_{i=1}^m \exp g_i(x)$ 是凸函数

最小化

如果 $f(x, y)$ 在 (x, y) 上是凸函数，且 C 是一个凸集, 则

$$g(x) = \inf_{y \in C} f(x, y) \tag{33}$$

是凸函数

示例:

- $f(x, y) = x^T A x + 2x^T B y + y^T C y$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \succeq 0, \quad C \succ 0 \tag{34}$$

  在 y 上最小化，令 $g(x) = \inf_y f(x, y) = x^T \left(A - BC^{-1}B^T\right) x$ g 是凸函数, 因此 Schur 补 $A - BC^{-1}B^T \succeq 0$

- 到集合的距离: 如果 S 是凸函数，则 $\mathbf{dist}(x, S) = \inf_{y \in S} \|x - y\|$ 是凸函数

透视函数（Perspective function）

定义 函数的 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的 **透视**是函数 $g:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x,t) = tf(x/t), \quad \mathbf{dom}\, g = \{(x,t) \mid x/t \in \mathbf{dom} f, t > 0\} \tag{35}$$

命题：如果 f 是凸函数，则 g 是凸函数

- $f(x) = x^T x$ 是凸函数; 那么 $g(x,t) = x^T x/t$ 是凸函数当 $t > 0$ 时
- 负对数函数 $f(x) = -\log x$ 是凸的; 那么相对熵 $g(x,t) = t\log t - t\log x$ 在 $\mathbb{R}^2_{++}$ 上也是凸的
- 如果 f 是凸函数, 那么

$$g(x) = \left(c^T x + d\right) f\left((Ax+b)/\left(c^T x + d\right)\right) \tag{36}$$

也是凸函数，其中 $\left\{x \mid c^T x + d > 0, (Ax+b)/\left(c^T x + d\right) \in \mathbf{dom} f\right\}$

Sec. 3 共轭函数

定义 函数 f 的**共轭函数**为

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbf{dom} f} \left(y^T x - f(x) \right) \tag{37}$$

- f^* 是凸的 (即使 f 不是凸的)
- 将在第 5 章中运用

共轭函数

示例：

- 负对数函数：$f(x) = -\log x$

$$
\begin{aligned}
f^*(y) &= \sup_{x>0}(xy + \log x) \\
&= \begin{cases} -1-\log(-y) & y<0 \\ \infty & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned} \tag{38}
$$

- 严格凸二次型：$f(x) = (1/2)x^TQx$ ，$Q \in \mathbf{S}^n_{++}$

$$
\begin{aligned}
f^*(y) &= \sup_{x}\left(y^Tx - (1/2)x^TQx\right) \\
&= \frac{1}{2}y^TQ^{-1}y
\end{aligned} \tag{39}
$$

次梯度

定义 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是凸函数，如果 x^* 满足

$$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x \rangle \qquad \forall z \in \mathbf{R}^n \tag{40}$$

则称向量 x^* 为凸函数 f 在点 x 处的次梯度

- 当 f 在 x 处有限时，它有明显的几何意义：
  仿射函数 $h(z) = f(x) + (x^*)^T(z - x)$ 的图形是凸集 $epif$ 在点 $(x, f(x))$ 处的非垂直的支撑超平面

定理 设 S 是一个开凸集，函数 $f: S \to R$ 是凸函数。当且仅当对所有的 $\omega \in \mathbf{S}$，存在 z 满足

$$f(\mu) \geq f(\omega) + \langle \mu - \omega, z \rangle \qquad \forall \mu \in \mathbf{S} \tag{41}$$

依据此引理，对于恰当凸函数，$f(\omega)$ 为最小值的充要条件是

$0 \in \partial f(\omega)$，即零向量是 f 在 ω 处的次梯度。

次微分

定义 在 x 的所有次梯度的集合称为 f 在 x 的次微分，记为 $\partial f(x)$

- $\partial f(x)$ 可以是空集，也可以只由一个向量组成, 如果不为空，则称 f 在 x 处次可微。如果 f 在 ω 处是可微的，那么 $\partial f(\omega)$ 只包含一个元素，即 f 在 ω 处的梯度。
- 凸函数的次微分总是非空，因为凸函数总是存在次梯度

对偶关系

定理 对于任意正常凸函数 f 和任意向量 x, 关于向量 x^* 的下列四个条件彼此等价:

- $x^* \in \partial f(x)$
- $z^T x^* - f(z)$ 在 $z = x$ 处取到关于 z 的上界
- $f(x) + f^*(x^*) \leq x^T x^*$
- $f(x) + f^*(x^*) = x^T x^*$
  如果 $(\mathrm{cl} f)(x) = f(x)$ ，这个相互等价条件的列表中还可以增加以下三个条件:
- $x \in \partial f^*(x^*)$
- $x^T z^* - f^*(z^*)$ 在 $z^* = x^*$ 处取到关于 z^* 中的上界
- $x^* \in \partial(\mathrm{cl} f)(x)$

总结: 凸函数.

- 定义
  - 定义 1. ♣ f 是凸函数: $f(\theta x+(1-\theta)y) \leq \theta f(x)+(1-\theta)f(y)$, $\forall x, y \in \mathrm{dom} f$, $\theta \in (0,1)$.

    严格凸
  - 定义 2.♣ f 是凸函数当且仅当 $\mathbf{epi}\, f$ 是一个凸集.
  - Jensen 不等式.

    f 是凸函数 $\Rightarrow f(\mathbb{E}\mathbf{X}) \leq \mathbb{E}f(\mathbf{X})$
- 凸函数的示例 ♣
  - $\mathbb{R}$ 上的示例: $ax+b$, e^{ax} $(a \in \mathbb{R})$, x^α, $x>0$, $\alpha \geq 1$, $x\log x$, $-\log x$
  - $\mathbb{R}^n$ 上的示例: $\langle a, x\rangle + b$, $\|x\|_p$
  - $\mathbb{R}^{m\times n}$ 的示例: $\mathrm{tr}(A^TX)+b$, $\|X\|_2 = \lambda_{\max}(X^TX)^{1/2}$
  - 其他:

    凸集上的指示函数: $I_C(x)$
- 性质
  - 性质.♣ 凸函数 f 对直线的限制: $g(t) = f(x+tv)$, $v \in \mathbb{R}^n$

    e.g. $f(X) = \log\det X$ 是凹函数

总结: 凸函数.

- 定理
  - 定理 (一阶条件♣♣)
    函数 $f \in \mathcal{C}^1$ 是凸函数 $\Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x), \forall x, y \in \mathrm{dom} f.$
  - 定理 (二阶条件♣)
    函数 $f \in \mathcal{C}^2$ 是凸函数 $\Leftrightarrow \nabla^2 f(x) \succeq 0, \forall x \in \mathrm{dom} f.$
    函数 $f \in \mathcal{C}^2$ 是 严格凸的 $\Leftarrow \nabla^2 f(x) \succ 0, \forall x \in \mathrm{dom} f$
- 凸函数的示例
  - 二次函数:♣♣ $f(x) = \frac{1}{2}x^T Px + c^T x + r,\ P \succeq 0$
  - 最小二乘:♣♣ $f(x) = \|Ax - b\|^2$
  - 对数和表达式: $f(x) = \log \sum_{i=1}^n e^{x_i}$

  其他示例
  - 二次超线性函数: $f(x, y) = x^2/y,\ y > 0$
  - 几何平均: $f(x) = (\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n},\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$
  - 矩阵分数函数: $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{F}^n_{++} \to \mathbb{R},\ f(x, Y) = x^\top Y^{-1} x$

总结: 凸函数.

- 保持凸性的运算

  $f, f_1, \cdots, f_m$: 凸函数 $\Rightarrow$ 以下均是凸的:

  - αf, $\alpha > 0$
  - $f_1 + f_2$ $\rightarrow$ 无限求和
  - $f(Ax + b)$

    e.g., $f(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log(b_i - a_i^T x)$, $a_i^T x < b$, $i = 1, \cdots, m$.
  - 逐点最大值: $f(x) = \max\{f_1(x), \cdots, f_m(x)\}$

    e.g., x 上的 r 个最大分量求和 $\in \mathbb{R}^n$ ♣♣
  - 逐点上确界: $g(x) \overset{\text{def}}{=} \sup_{y \in \mathcal{A}} f(x, y)$

    $f(x, y)$ 是关于 x 凸的对每个 $y \in \mathcal{A}$,

    e.g., 支持函数,♣♣ $\lambda_{\max}(X)$ ♣♣
  - 最小化: $g(x) = \inf_{y \in C} f(x, y)$

    $f(x, y)$: 在 (x, y) 上凸的, C: 凸集

    e.g.,♣♣ $\mathrm{dist}(x, S)$
  - 复合运算:♣ $h(g(x))$, g: 凸的, h: 凸的, 上升的

总结: 凸函数.

- 共轭函数
  - 定义.♣ $f^*(x^*) = \sup_x(\langle x^*, x\rangle - f(x))$
  - e.g., 计算以下各项的共轭函数:♣♣

    $f(x) = -\log x,$

    $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx, \ Q \in \mathbf{S}^n_{++},$

    $f(x) = I_C(x),$

    $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, $\|\cdot\|$ 是一个范数,
- 凸函数的次微分
  - 定义.♣ $\partial f(x) = \{x^* | f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle, \forall y\}$
  - e.g.,♣♣ $f(x) = \|x\|_1, \to \partial f(x) = ?$
- 对偶
  - 定理: 四个等价条件

总结: 凸函数.

- 凸集和凸函数

凸集	凸函数
epi$f$ 凸函数	f 凸函数
部分和 $\{t_1 + t_2 \mid (x, t_1) \in \text{epi}f_1,\ (x, t_2) \in \text{epi}f_2\}$	$f = f_1 + f_2$
$\text{epi}f = \mathcal{A}\,\text{epi}f_1$ $\mathcal{A} : (x, \frac{t}{\alpha}) \mapsto (x, t)$	$f = \alpha f_1$
$\text{epi}f = \text{prog}_x \text{epi}g$	$f(x) = \inf_{y \in C} g(x, y)$
$\text{epi}f = \text{epi}f_1 \cap \text{epi}f_2$	$f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$
$\text{epi}f = \mathcal{A}\,\text{epi}g$ $\mathcal{A} : (x, \alpha) \mapsto (x, h(\alpha))$ $\text{epi}g = \mathcal{A}^{-1}\text{epi}f$ $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n+1+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ $\mathcal{A}(u, v, w) = (u, w)/v$	$f(x) = h(g(x))$ 透视函数 $g(x, t) = tf(\frac{x}{t}),\ t > 0$
$\text{epi}f = \text{epi}f_1 + \text{epi}f_2$	卷积下确界: $f = f_1 \Box f_2$ $f(x) = \inf_{x_1 + x_2 = x} f_1(x_1) + f_2(x_2)$
$\text{epi}f = \lambda \text{epi}f_1$	右乘法 $(f\lambda)(x) = \lambda \cdot f(\lambda^{-1} x)$