第 1 章 凸集合

SMaLL

[1] 中国石油大学（华东）
SMaLL 课题组
small.sem.upc.edu.cn
liangxijunsd@163.com

部分课件参考自 S. Boyd
https://stanford.edu/∼boyd/cvxbook/

2023

仿射集

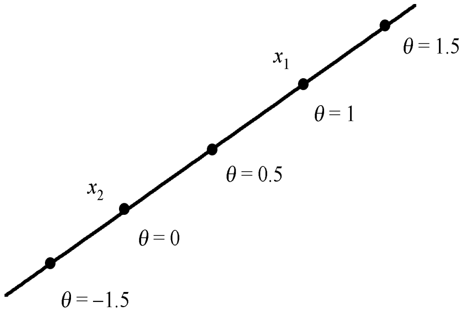
直线: 对两个点 x_1, x_2:

$$x = \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \quad (\theta \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

仿射集

直线: 对两个点 x_1, x_2:

$$x = \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \quad (\theta \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

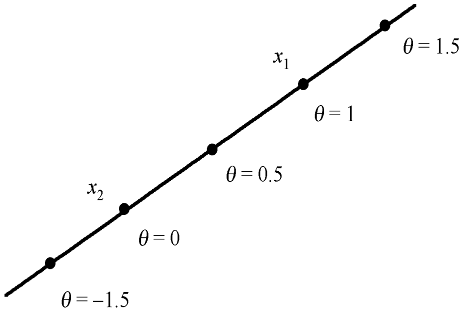


仿射集: 包含通过集合中任意两个不同点的线

仿射集

直线: 对两个点 x_1, x_2:

$$x = \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \quad (\theta \in \mathbb{R}) \tag{1}$$



仿射集: 包含通过集合中任意两个不同点的线

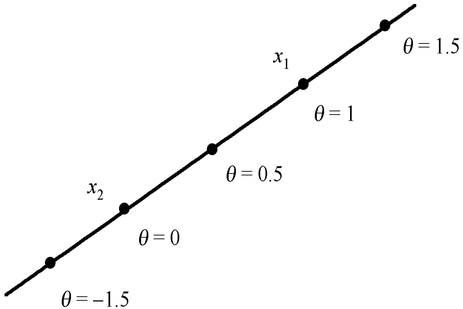
例如: 线性方程的解集 $\{x \mid Ax = b\}$

Q. 每个仿射集都可以表示为线性方程组的解集吗?

仿射集

直线: 对两个点 x_1, x_2:

$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \quad (\theta \in \mathbb{R}) \tag{1}$$



仿射集: 包含通过集合中任意两个不同点的线

例如: 线性方程的解集 $\{x \mid Ax = b\}$

Q. 每个仿射集都可以表示为线性方程组的解集吗?

Q. $x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \quad (\theta \in [0,1])$, 是什么样的集合?

凸集

- **线段:** 在 x_1 和 x_2 之间: 所有点

$$x = \theta x_1 + (1 - \theta) x_2 \tag{2}$$

其中 $0 \leq \theta \leq 1$

凸集

- **线段:** 在 x_1 和 x_2 之间: 所有点

$$x = \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \tag{2}$$

其中 $0 \leq \theta \leq 1$

- **凸集**: 包含集合中任意两点之间的线段

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C \tag{3}$$

凸集

- **线段:** 在 x_1 和 x_2 之间: 所有点

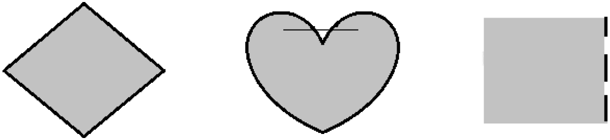
$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \tag{2}$$

其中 $0 \le \theta \le 1$

- **凸集**: 包含集合中任意两点之间的线段

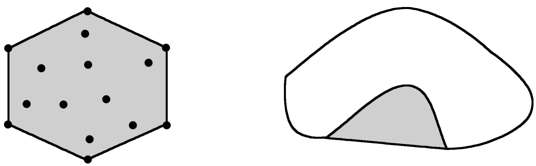
$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \le \theta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C \tag{3}$$

- **例如:** (一个凸集, 两个非凸集)



凸组合和凸包

- **凸组合:** $x_1, \cdots, x_k$ 的凸组合:
$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k \tag{4}$$
其中 $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geq 0$
- **凸包 conv** S:
S 中所有凸组合的集合



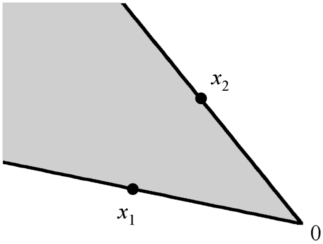
凸锥

- x_1 **和** x_2 **的锥组合（非负线性组合）**：对于点 x_1 和 x_2

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \tag{5}$$

其中 $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0$

- E.g.



- **凸锥**: 包含集合中所有元素的锥组合的集合

超平面和半空间

- 二维平面上的一条直面将平面中分成两部分

超平面和半空间

- 二维平面上的一条直面将平面中分成两部分
- 超平面: 具有以下形式的集合 $\{x \mid a^T x = b\}\,(a \neq 0)$
- **半空间**: 具有以下形式的集合 $\{x \mid a^T x \leq b\}\,(a \neq 0)$,

超平面和半空间

- 二维平面上的一条直面将平面中分成两部分
- 超平面: 具有以下形式的集合 $\{x \mid a^T x = b\}\,(a \neq 0)$
- **半空间**: 具有以下形式的集合 $\{x \mid a^T x \leq b\}\,(a \neq 0)$,
- 超平面是仿射集; 半空间是凸的

欧氏球和椭球

- 二维平面中的圆和椭圆

欧氏球和椭球

- 二维平面中的圆和椭圆
- **(欧几里德) 球:** 其中 x_c 是球心, r 为半径:

$$B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \le r\} = \{x_c + ru \mid \|u\|_2 \le 1\} \tag{6}$$

欧氏球和椭球

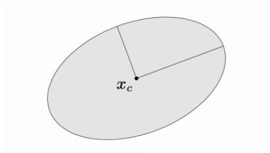
- 二维平面中的圆和椭圆
- **(欧几里德) 球：** 其中 x_c 是球心，r 为半径:

$$B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \le r\} = \{x_c + ru \mid \|u\|_2 \le 1\} \tag{6}$$

- **椭球:** 具有以下形式的集合

$$\left\{x \mid (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \le 1\right\} \tag{7}$$

其中 $P \in \mathbf{S}^n_{++}$($i.e.$, P 为对称正定矩阵)



欧氏球和椭球

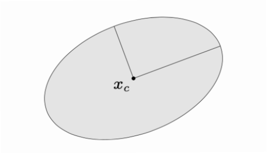
- 二维平面中的圆和椭圆
- **(欧几里德) 球：** 其中 x_c 是球心， r 为半径:

$$B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \le r\} = \{x_c + ru \mid \|u\|_2 \le 1\} \tag{6}$$

- **椭球:** 具有以下形式的集合

$$\left\{x \mid (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \le 1\right\} \tag{7}$$

其中 $P \in \mathbf{S}^n_{++}$($i.e.$, P 为对称正定矩阵)



- 另一个表示: $\{x_c + Au \mid \|u\|_2 \le 1\}$, A 为正定矩阵

范数球和范数锥

- **范数**: $\|\cdot\|$ 满足：
  - $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$
  - $\|tx\| = |t|\|x\|$ 对于 $t \in \mathbb{R}$
  - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

范数球和范数锥

- **范数**: $\|\cdot\|$ 满足：
  - $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$
  - $\|tx\| = |t|\|x\|$ 对于 $t \in \mathbb{R}$
  - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- **范数球** 球心 x_c ， 半径为 r 的范数球： $\{x \mid \|x - x_c\| \leq r\}$

范数球和范数锥

- **范数**: $\|\cdot\|$ 满足：
  - $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$
  - $\|tx\| = |t|\|x\|$ 对于 $t \in \mathbb{R}$
  - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- **范数球** 球心 x_c ，半径为 r 的范数球：$\{x \mid \|x - x_c\| \leq r\}$
- **范数锥:** $\{(x, t) \mid \|x\| \leq t\}$

  欧氏锥称为二阶锥

  -范数球和范数锥是凸的

多面体

- 有限个线性不等式和等式的解集

$$Ax \preceq b, \quad Cx = d \tag{8}$$

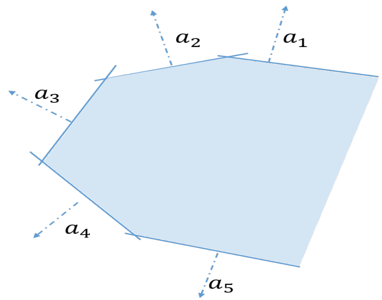
$(A \in \mathbb{R}^{m\times n}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \preceq$ 是分量不等式$)$

多面体

- 有限个线性不等式和等式的解集

$$Ax \preceq b, \quad Cx = d \tag{8}$$

$(A \in \mathbb{R}^{m \times n}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, \preceq$ 是分量不等式$)$

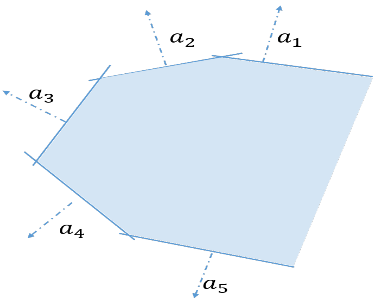


多面体

- 有限个线性不等式和等式的解集

$$Ax \preceq b, \quad Cx = d \tag{8}$$

($A \in \mathbb{R}^{m\times n}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \preceq$ 是分量不等式)



- 多面体是有限个半空间和超平面的交集

正半定锥

- $\mathbf{S}^n$ 表示 $n \times n$ 对称矩阵的集合

正半定锥

- $\mathbf{S}^n$ 表示 $n \times n$ 对称矩阵的集合
- $\mathbf{S}_+^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succeq 0\}$: 表示 $n \times n$ 对称半正定矩阵的集合

$$X \in \mathbf{S}_+^n \iff z^T X z \geq 0 \quad \forall\, z \tag{9}$$

$\mathbf{S}_+^n$ 是凸锥

正半定锥

- $\mathbf{S}^n$ 表示 $n \times n$ 对称矩阵的集合
- $\mathbf{S}^n_+ = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succeq 0\}$: 表示 $n \times n$ 对称半正定矩阵的集合

$$X \in \mathbf{S}^n_+ \Longleftrightarrow z^T X z \geq 0 \quad \forall\, z \tag{9}$$

  $\mathbf{S}^n_+$ 是凸锥
- $\mathbf{S}^n_{++} = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succ 0\}$: $n \times n$ 对称正定矩阵的集合

正半定锥

- $\mathbf{S}^n$ 表示 $n \times n$ 对称矩阵的集合
- $\mathbf{S}_+^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succeq 0\}$: 表示 $n \times n$ 对称半正定矩阵的集合
$$X \in \mathbf{S}_+^n \iff z^T X z \geq 0 \quad \forall\, z \tag{9}$$
$\mathbf{S}_+^n$ 是凸锥
- $\mathbf{S}_{++}^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succ 0\}$: $n \times n$ 对称正定矩阵的集合

例如: $\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathbf{S}_+^2$

$x \geq 0,\ xz - y^2 \geq 0$

保持凸性的运算

Q：如何检测一个集合 C 是凸集合？如何构造凸集合？

1. 利用定义

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C \tag{10}$$

保持凸性的运算

Q：如何检测一个集合 C 是凸集合？如何构造凸集合？

1. 利用定义

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C \tag{10}$$

2. 证明 C 是通过保持凸性的运算获得的：简单的凸集合（超平面、半空间、范数球等）→ 复杂凸集合

保持凸性的运算

Q：如何检测一个集合 C 是凸集合？如何构造凸集合？

1. 利用定义

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C \tag{10}$$

2. 证明 C 是通过保持凸性的运算获得的：简单的凸集合（超平面、半空间、范数球等）$\rightarrow$ 复杂凸集合

- 交集

保持凸性的运算

Q：如何检测一个集合 C 是凸集合？如何构造凸集合？

1. 利用定义

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C \tag{10}$$

2. 证明 C 是通过保持凸性的运算获得的：简单的凸集合（超平面、半空间、范数球等）$\rightarrow$ 复杂凸集合

- 交集
- 仿射变换

保持凸性的运算

Q：如何检测一个集合 C 是凸集合？如何构造凸集合？

1. 利用定义

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \le \theta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C \tag{10}$$

2. 证明 C 是通过保持凸性的运算获得的：简单的凸集合（超平面、半空间、范数球等）$\rightarrow$ 复杂凸集合

- 交集
- 仿射变换
- 透视函数

保持凸性的运算

Q：如何检测一个集合 C 是凸集合？如何构造凸集合？

1. 利用定义

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \le \theta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C \tag{10}$$

2. 证明 C 是通过保持凸性的运算获得的：简单的凸集合（超平面、半空间、范数球等）$\to$ 复杂凸集合

- 交集
- 仿射变换
- 透视函数
- 线性分式映射

交集

- 定理：凸集合（任意数量）的交集是凸的。

交集

- 定理：凸集合（任意数量）的交集是凸的。
- 证. 设 C_1, C_2 凸集合，$\forall x_1, x_2 \in C_1 \cap C_2$, $\theta \in [0,1]$, 验证 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C_1 \cap C_2$

仿射变换

- **定义.** $\mathcal{A}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 为仿射变换：$\forall x_1,x_2\in\mathcal{X}$, $\theta\in\mathbb{R}$, 有
  $\mathcal{A}(\theta x_1+(1-\theta)x_2)=\theta\mathcal{A}x+(1-\theta)\mathcal{A}x_2$
- 如果 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是仿射变换, i.e., $f(x)=Ax+b$ ， $A\in\mathbb{R}^{m\times n}, b\in\mathbb{R}^m$
  1. 在 f 下的像集是凸集合
  $$S\subseteq\mathbb{R}^n \text{ 凸} \Longrightarrow f(S)=\{f(x)\mid x\in S\} \text{ 凸} \tag{11}$$
  2. 在 f 下凸集的逆像 $f^{-1}(C)$ 是凸的 (proof. Ex.)
  $$C\subseteq\mathbb{R}^m\text{凸} \Longrightarrow f^{-1}(C)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid f(x)\in C\} \text{ 凸} \tag{12}$$

证. (1) $\forall y_1,y_2\in f(S)$, 验证 $\theta y_1+(1-\theta)y_2\in f(S)$, $\theta\in(0,1)$

例

- 缩放、平移、投影
- 线性矩阵不等式的解集 $\{x\mid x_1A_1+\cdots+x_mA_m\preceq B\}$ ($A_i,B\in\mathbf{S}^p$)
- 双曲线锥体 $\left\{x\mid x^TPx\leq\left(c^Tx\right)^2, c^Tx\geq0\right\}$ ($P\in\mathbf{S}_+^n$)

- 缩放和平移

$$\alpha S = \{\alpha x \mid x \in S\}, \quad S + a = \{x + a \mid x \in S\}$$

- 缩放和平移

$$\alpha S = \{\alpha x \mid x \in S\}, \quad S + a = \{x + a \mid x \in S\}$$

- 凸集在其某些坐标上的投影是凸的: 若 $S \subseteq \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ 是凸的, 那么

$$T = \{x_1 \in \mathbf{R}^m \mid (x_1, x_2) \in S, x_2 \in \mathbf{R}^n\}$$

  也是凸的.

- 两个集合的和

$$S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1, y \in S_2\}$$

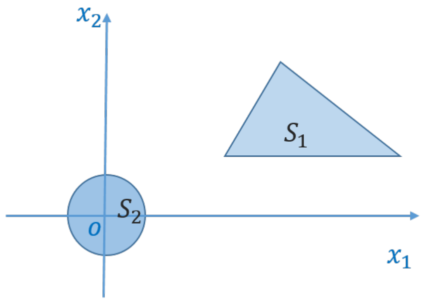


图: 思考 $S_1 + S_2 =?$, $S_2 = \epsilon \mathbf{B}$

- 两个集合的和

$$S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1, y \in S_2\}$$

- 两个集合的和

$$S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1, y \in S_2\}$$

例. 仿射变换与凸集

- 如果 S_1 和 S_2 是凸的, 那么 $S_1 + S_2$ 也是凸的.

  证明. 如果 S_1 和 S_2 是凸的, 那么乘积或笛卡尔乘积也是凸的

  $$S_1 \times S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$$

  该集合在线性函数下的图像 $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ 是总和 $S_1 + S_2$.

- 部分和 $S_1, S_2 \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, 定义为

  $$S = \{(x, y_1 + y_2) \mid (x, y_1) \in S_1, (x, y_2) \in S_2\}$$

  其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 且 $y_i \in \mathbf{R}^m$.

  - 当 $m = 0$, 部分和 $\to$ 交集 S_1 和 S_2;
  - 当 $n = 0$, 部分和 $\to$ 集合加法.
  - 两个凸集的部分和仍是凸集

透视函数 (选讲)

透视函数 $P:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$

$$P(x,t)=x/t,\quad P=\{(x,t)\mid t>0\} \tag{13}$$

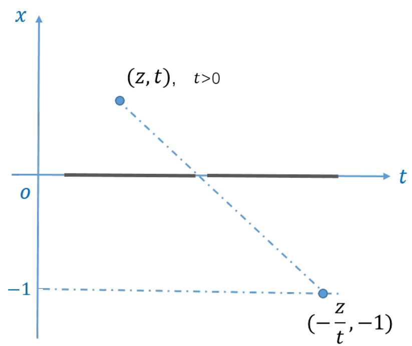
透视下凸集的图像和逆像是凸集.

透视函数 (选讲)

透视函数 $P : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$

$$P(x,t) = x/t, \quad P = \{(x,t) \mid t > 0\} \tag{13}$$

透视下凸集的图像和逆像是凸集.



透视函数: 针孔照相机的动作

透视函数和线性分式映射

线性分式映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$f(x) = \frac{Ax + b}{c^T x + d}, \qquad f = \{x \mid c^T x + d > 0\} \tag{14}$$

命题 线性分式映射下凸集的图像和逆像是凸集。

广义不等式：动机

Q. 比较两个大小 a 和 b?

- 两个数字 a, b

  $2 < 3$

- $a, b \in \mathbb{R}^2$

  $(1, 2) \prec (3, 4)$

- $A, B \in \mathbf{S}^n$?

广义不等式：动机

Q. 比较 a 和 b?

- 两个真实数字 a, b
  $2 < 3 \Leftrightarrow 3 - 2 \in$ **整数**K, $K = [0, \infty)$
- $a, b \in \mathbb{R}^2$
  $(1, 2) \prec (3, 4) \Leftrightarrow (3, 4) - (1, 2) \in$ **整数**K, $K = \mathbb{R}^2_+$
- $A, B \in \mathbf{S}^n$?
  $A \prec B \Leftrightarrow B - A \in$ **整数**K, $K = \mathbf{S}^n_+$

广义不等式

定义. 凸锥 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 称为 **正常锥 (proper cone)**, 若

- K 是封闭的 (有边界)
- K 是实心的 (内部不是空的)
- K 不包含直线

广义不等式

定义. 凸锥 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 称为 **正常锥 (proper cone)**, 若

- K 是封闭的 (有边界)
- K 是实心的 (内部不是空的)
- K 不包含直线

实例

- 非负整数 $K = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$

广义不等式

定义. 凸锥 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 称为 **正常锥 (proper cone)**, 若

- K 是封闭的 (有边界)
- K 是实心的 (内部不是空的)
- K 不包含直线

实例

- 非负整数 $K = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$
- 半正定锥 $K = \mathbf{S}^n_+$

广义不等式

定义. 凸锥 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 称为 **正常锥 (proper cone)**, 若

- K 是封闭的 (有边界)
- K 是实心的 (内部不是空的)
- K 不包含直线

实例

- 非负整数 $K = \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$
- 半正定锥 $K = \mathbf{S}_+^n$
- $[0,1]$ 上的非负多项式:

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \cdots + x_n t^{n-1} \geq 0, t \in [0,1]\right\} \tag{15}$$

广义不等式

广义不等式由正常锥 K 定义:

$$x \preceq_K y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in K, \qquad x \prec_K y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in \textbf{整数} K \tag{16}$$

实例

广义不等式

广义不等式由正常锥 K 定义:

$$x \preceq_K y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in K, \qquad x \prec_K y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in \textbf{整数} K \tag{16}$$

实例

- 分量不等式 $(K = \mathbb{R}^n_+)$

$$x \preceq_{\mathbb{R}^n_+} y \quad \Longleftrightarrow \quad x_i \leq y_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{17}$$

广义不等式

广义不等式由正常锥 K 定义:

$$x \preceq_K y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in K, \qquad x \prec_K y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in \textbf{整数} K \tag{16}$$

实例

- 分量不等式 $(K = \mathbb{R}_+^n)$

$$x \preceq_{\mathbb{R}_+^n} y \quad \Longleftrightarrow \quad x_i \leq y_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{17}$$

- 矩阵不等式 $(K = \mathbf{S}_+^n)$

$$X \preceq_{\mathbf{S}_+^n} Y \Longleftrightarrow Y - X \text{ 半正定} \tag{18}$$

广义不等式

广义不等式由正常锥 K 定义:

$$x \preceq_K y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in K, \qquad x \prec_K y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in \textbf{整数} K \tag{16}$$

实例

- 分量不等式 $(K = \mathbb{R}^n_+)$

$$x \preceq_{\mathbb{R}^n_+} y \quad \Longleftrightarrow \quad x_i \le y_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{17}$$

- 矩阵不等式 $(K = \mathbf{S}^n_+)$

$$X \preceq_{\mathbf{S}^n_+} Y \Longleftrightarrow Y - X \text{ 半正定} \tag{18}$$

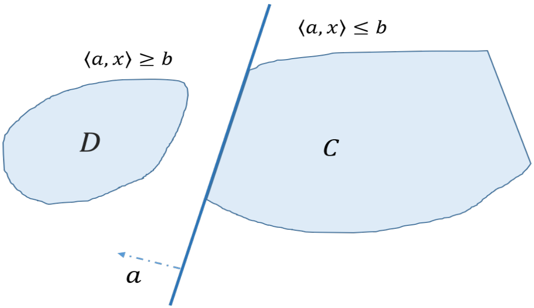
特性: $\preceq_K$ 的很多特性与 $\le$ 在 $\mathbb{R}$ 上的性质相似, *e.g.*,

$$x \preceq_K y, \quad u \preceq_K v \quad \Longrightarrow \quad x + u \preceq_K y + v \tag{19}$$

超平面分割定理

定理. [超平面分割定理] 如果 C 和 D 是非空不相交凸集，则存在 $a \neq 0, b$:

$$a^T x \leq b \forall x \in C, \quad a^T x \geq b \forall x \in D \tag{20}$$

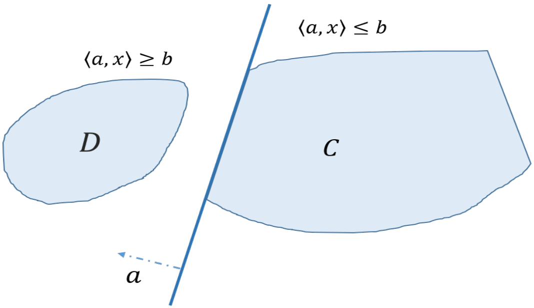


定义 若 (20) 成立，称超平面 $\{x \mid a^T x = b\}$ 分离 C 和 D

超平面分割定理

定理. [超平面分割定理] 如果 C 和 D 是非空不相交凸集，则存在 $a \neq 0, b$:

$$a^T x \leq b \forall x \in C, \quad a^T x \geq b \forall x \in D \tag{20}$$



定义 若 (20) 成立，称超平面 $\{x \mid a^T x = b\}$ 分离 C 和 D

定义. 严格的分离 若存在 $a \neq 0, b$: $a^T x < b, \forall x \in C, \quad a^T x > b \forall x \in D$，称超平面 $\{x \mid a^T x = b\}$ 严格的分离集合 C 和 D

例子 [点和闭凸集的严格分离] 假设 C 是一个闭凸集, $x_0 \notin C$
$\Rightarrow$ x_0 和 C 可以严格分开.

例子 [点和闭凸集的严格分离] 假设 C 是一个闭凸集, $x_0 \notin C$
$\Rightarrow x_0$ 和 C 可以严格分开.

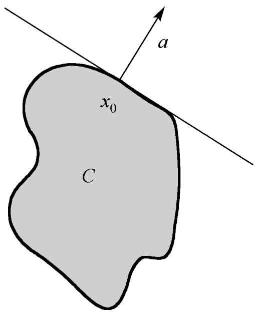
推论 闭凸集是包含它的所有半空间的交集。

支撑超平面定理

定义. C 在边界点 x_0 处的**支撑超平面**:

$$\{x \mid a^T x = a^T x_0\} \tag{21}$$

对于所有的 $x \in C$ 当 $a \neq 0$ 并且 $a^T x \leq a^T x_0$



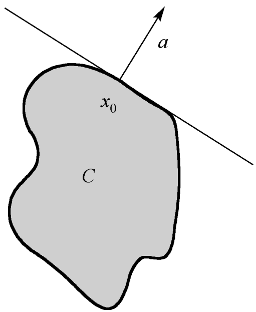
支撑超平面定理

定义. C 在边界点 x_0 处的**支撑超平面**:

$$\{x \mid a^T x = a^T x_0\} \tag{21}$$

对于所有的 $x \in C$ 当 $a \neq 0$ 并且 $a^T x \leq a^T x_0$

定理 [支撑超平面定理] 如果 C 是凸的 $\Rightarrow$ C 的每个边界点上存在一个支撑超平面.



支撑超平面

取 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. 考虑其支撑超平面（线）
$\text{epi}f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 | t \geq |x|\}$ at $(0, 0)$.

- 直线的斜率是多少?

支撑超平面

取 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. 考虑其支撑超平面（线）
$\text{epi}f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 | t \geq |x|\}$ at $(0, 0)$.

- 直线的斜率是多少?
- 切线蕴含导数 $\to$ 支撑超平面蕴含凸函数的（次）微分.

$$\partial f(0) = [-1, 1].$$

对偶锥与广义不等式

- 定义. K 的**对偶锥**:
$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\} \tag{22}$$

对偶锥与广义不等式

- 定义. K 的**对偶锥**:

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\} \tag{22}$$

- 示例

对偶锥与广义不等式

- 定义. K 的**对偶锥**:

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\} \tag{22}$$

- 示例
  - 负值集合. $K = \mathbb{R}^n_+ : K^* = \mathbb{R}^n_+$

SMaLL Statistical Machine Learning Lyceum

对偶锥与广义不等式

- 定义. K 的**对偶锥**:

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\} \tag{22}$$

- 示例
  - 负值集合. $K = \mathbb{R}^n_+ : K^* = \mathbb{R}^n_+$
  - 半正定锥. $K = \mathbf{S}^n_+ : K^* = \mathbf{S}^n_+$

对偶锥与广义不等式

- 定义. K 的**对偶锥**:

$$K^* = \left\{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\right\} \tag{22}$$

- 示例
  - 负值集合. $K = \mathbb{R}^n_+ : K^* = \mathbb{R}^n_+$
  - 半正定锥. $K = \mathbf{S}^n_+ : K^* = \mathbf{S}^n_+$
  - 标准圆锥面 $K = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\} : K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\}$

对偶锥与广义不等式

- 定义. K 的**对偶锥**:

$$K^* = \left\{ y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K \right\} \tag{22}$$

- 示例
    - 负值集合. $K = \mathbb{R}_+^n : K^* = \mathbb{R}_+^n$
    - 半正定锥. $K = \mathbf{S}_+^n : K^* = \mathbf{S}_+^n$
    - 标准圆锥面 $K = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\} : K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\}$
    - 标准圆锥面 $K = \{(x,t) \mid \|x\|_1 \leq t\} : K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_\infty \leq t\}$

对偶锥与广义不等式

- 定义. K 的**对偶锥**:

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\} \tag{22}$$

- 示例
  - 负值集合. $K = \mathbb{R}^n_+ : K^* = \mathbb{R}^n_+$
  - 半正定锥. $K = \mathbf{S}^n_+ : K^* = \mathbf{S}^n_+$
  - 标准圆锥面 $K = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\} : K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\}$
  - 标准圆锥面 $K = \{(x,t) \mid \|x\|_1 \leq t\} : K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_\infty \leq t\}$
  - 前三个例子是锥 **自对偶锥**

对偶锥与广义不等式

- 定义. K 的**对偶锥**:

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\} \tag{22}$$

- 示例
  - 负值集合. $K = \mathbb{R}^n_+ : K^* = \mathbb{R}^n_+$
  - 半正定锥. $K = \mathbf{S}^n_+ : K^* = \mathbf{S}^n_+$
  - 标准圆锥面 $K = \{(x, t) \mid \|x\|_2 \leq t\} : K^* = \{(x, t) \mid \|x\|_2 \leq t\}$
  - 标准圆锥面 $K = \{(x, t) \mid \|x\|_1 \leq t\} : K^* = \{(x, t) \mid \|x\|_\infty \leq t\}$
  - 前三个例子是锥 **自对偶**锥
- 正常锥的对偶锥是正常锥，因此定义了广义不等式

$$y \succeq_{K^*} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y^T x \geq 0 \text{ 对于所有} x \succeq_K 0 \tag{23}$$

总结：凸集

总结：凸集

- 定义. 仿射集与凸集
- 例子. 超平面、半空间、球、椭球和椭圆、多面体

  凸锥: $\mathbf{R}^n_+$, $\mathbf{S}^n_+$, 范数锥
- 保持凸性的操作
  - 交：例♣♣ 多面体，半正定矩阵 $\mathbf{S}^n_+$
  - 仿射变换的图像（和逆图像）

    例,♣♣ αS, $S + a$, $S_1 + S_2$

    例, 部分和，线性矩阵不等式的解集，椭球
  - 透视映射: $P(x, t) = x/t$, $t > 0$，透视映射的图像（和逆图像）
  - 线性分数映射: $f(x) = \frac{Ax+b}{c^T x+d}$, $c^T x + d > 0$.

总结：凸集

- 广义不等式
  - 正常锥: 闭的, 实心的, 不含直线 例, $\mathbf{R}_+^n$, $\mathbf{S}_+^n$
  - 广义不等式: $x \preceq_K y \Leftrightarrow y - x \in K, \quad x \prec_K y \Leftrightarrow y - x \in int\, K$
  - 最小元和极小元

总结：凸集

- 超平面分割定理
  - 定义.♣ （严格）分离的凸集 C 和 D
  - 定义.♣ $x_0 \in \mathbf{bd}\, C$ 处的支撑超平面 C:
    $$\{x | \langle a, x\rangle = a^T x_0\},$$
    其中 $\langle a, x\rangle \leq a^T x_0, \forall x \in C$
  - 例如, 闭凸集和外面与其不相交的一个点可以严格分离。
    推论：闭凸集是包含它的所有半空间的交集。
  - 定理. 凸集 $C \Rightarrow C$ 的每个边界点上均存在一个支撑超平面
- 对偶锥与广义不等式
  - 对偶锥 K:♣ $K^* = \{y | \langle y, x\rangle \geq 0, \forall x \in K\}$.
  - 例, $(\mathbb{R}^n_+)^* = \mathbb{R}^n_+$, $(\mathbf{S}^n_+)^* = \mathbf{S}^n_+$
  - 例, $\rightarrow$ 范数 $\|\cdot\|_1$ 对应的范数锥的对偶锥：$\|\cdot\|_\infty$ 对应的锥 ♣

练习题 I

1. 证明：所有 n 阶半正定矩阵的全体构成凸锥.
2. 证明一个集合是凸集当且仅当它与任意直线的交是凸的。证明一个集合是仿射的，当且仅当它与任意直线的交是仿射的。
3. 两个平行的超平面 $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b_1\}$ 和 $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b_2\}$ 之间的距离是多少?
4. 半空间的 Voronoi 描述。令 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为 $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ 上互异的两点。证明所有距离 $\mathbf{a}$ 比距离 $\mathbf{b}$ 近（Euclid 范数下）的点的集合，即 $\{\mathbf{x} \| \mathbf{x}-\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2\}$, 是一个超平面。用形如 $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq d$ 的不等式进行显式表示并绘出图像。
5. 设 $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ 为一个凸集且 $x_1, \cdots, x_k \in \mathbf{C}$. 令 $\theta_1, \cdots, \theta_k \in \boldsymbol{R}$ 满足 $\theta_i \geq 0, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$.
   证明 $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \in \mathbf{C}$. （凸性的定义是指此式在 $k = 2$ 时成立; 你需要证明对任意 k 的情况。提示：对 k 进行归纳。）

练习题 II

6. 证明如果 $\mathbf{S_1}$ 和 $\mathbf{S}_2$ 是 $\mathbf{R^{m\times n}}$ 中的凸集, 那么它们的部分和

$$\mathbf{S} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y_1} + \mathbf{y}_2) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R^m}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y_2} \in \mathbf{R^n}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) \in \mathbf{S_1}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \in \mathbf{S_2}\}$$

也是凸的。

7. 支撑超平面。(a) 将闭凸集 $\left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^2 \mid x_1 x_2 \geq 1\right\}$ 表示为半空间的交集。(b) 令 $\mathbf{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R^n} \mid \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 空间中的单位 $\ell_\infty-$ 范数球, 并令 $\hat{\mathbf{x}}$ 为 $\mathbf{C}$ 的边界上的点。显式地写出集合 $\mathbf{C}$ 在 $\hat{\mathbf{x}}$ 处的支撑超平面。

8. 支撑超平面定理的逆定理。设集合 $\mathbf{C}$ 是闭的、含有非空内部并且在其边界上的每一点都有支撑超平面。证明 C 是凸集。

9. 给出两个不相交的闭凸集不能被严格分离的例子。

10. 支撑函数。集合 $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R^n}$ 的支撑函数定义为

$$\mathbf{S}_{\mathbf{C}}(\mathbf{y}) = \sup\left\{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{C}\right\}$$

(我们允许 $\mathbf{S}_{\mathbf{C}}(\mathbf{y})$ 取值为 $+\infty$.) 设 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的闭凸集。证明 $\mathbf{C} = \mathbf{D}$ 当且仅当它们的支撑函数相等。

11. 计算 $\{\mathrm{Ax} \mid \mathbf{x} > 0\}$ 的对偶锥, 其中$\mathrm{A} \in \mathbf{R}^{\mathrm{mxn}}$.