UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ingeniería
Departamento de Economia, Organización y legal

7114 Modelos y Optimización 1

Este es un modesto aporte para los alumnos de la fácultad de ingeniería de la UBA de las carreras de licenciatura en análsis de sistemas e ingeniería informática. De ninguna manéra pretende ser una guía de estudio, ni remplaza las clases presenciales, el material oficial de la catedra esta disponible en el web site de la máteria.
wwww.ModelosUno.com.ar

Autor: Isaac Edgar Camacho Ocampo
Carrera: Licenciatura en Análisis de sistemas

Buenos Aires, 2020

Si se encuentra algún error u omisión en este resúmen por favor colaborar en
https://github.com/IsaacEdgarCamacho/Apuntes/tree/master/7114Modelos1
o escribirme a
icamacho@fi.uba.ar

Índice general

RESUMEN

El enfoque de la materia se puede dividir en dos partes, y para aprobar, es necesario desarrollar la habilidad de resolver problemas, es por eso que en este apunte, no desarrollaré teoria ni daré definiciones que se pueden hallar en los textos de la materia o en la bibliografía, sino que resolveré la mayor cantidad de ejercicios propuestos en las guías de trabajo, los mismos fuerón resueltos en mi carácter de alumno, de manera que pueden tener errores pero considero que puede ser de utilidad para aquellos estudiantes que cursan por primera vez una materia de programación matemática.

- Programación lineal continua
  - Aprender a modelar problemas complejos
  - Aprender a resolverlos atravéz del método simplex
  - Hacer un análisis económico de los resultados obtenidos
- Programación lineal Entera
  - Aprender a modelar problemas complejos
  - Problemas combinatorios
  - Complejidad computacional inherente a esos problemas
  - Aprender a resolverlos atravéz de métodos como Branch and Bound, Branch and cut y Heuristicas

La vida nos suele colocar, todo el tiempo, ante la disyuntiva de tener que elegir entre varios caminos. A veces esa libertad de decisión es una experiencia dramática, por las cosas que están en juego.

Es que cada elección trae aparejadas consecuencias, efectos que impactan en uno mismo y en otras personas. En la vida empresarial las decisiones clave descansan en quienes cumplen funciones gerenciales.

La contratación de empleados, la recisión de un contrato con el cliente más importante, la ampliación o remodelación de la línea de producción, la toma de un crédito, por ejemplo, pasa por ellos.

Pero también sobre los gerentes pesan determinaciones dramáticas, como el cierre de la empresa, el llamado a concurso de acreedores, o vender todo y empezar de nuevo.

Y como se sabe, toda decisión entraña un riesgo, porque existe la posibilidad de equivocarse. Es que nadie tiene garantías sobre el futuro, ya que lo que ocurra realmente puede desmentir todos los cálculos.

En este sentido, las decisiones gerenciales pueden llevar al éxito de la organización o a su fracaso. Si son acertadas, garantizan la sustentabilidad y el desarrollo si no, conducen al peor final.

Los expertos definen a la decisión como el resultado de un proceso mental-cognitivo de una persona o de un grupo de individuos. Se conoce como toma de decisiones al proceso que consiste en concretar la elección entre distintas alternativas.

Capítulo 1

CLASE NRO 1 - INTRODUCCIÓN.

1.1. Investigación Operativa

La Investigación Operativa es una disciplina moderna que utiliza modelos matemáticos, estadísticos y algoritmos para modelar y resolver problemas complejos, determinando la solución óptima y mejorando la toma de decisiones. Esta materia también recibe el nombre de Investigación de Operaciones, Investigación Operacional o Ciencias de la Administración.

Actualmente la Investigación Operativa incluye gran cantidad de ramas como la Programación Lineal, Programación No Lineal, Programación Dinámica, Simulación, Teoría de Colas, Teoría de Inventarios, Teoría de Grafos, etc.

1.2. Definición aceptada por la SADIO

La sociedad argentina de Investigación Operativa dice que ésta es la aplicación de ciencia moderna a problemas complejosque aparecen en la dirección y administración de sistemas constituidos por hombres, materiales, equipos y dinero en la industria, el comercio, el gobierno y la defensa. Su característica primordial es la elaboración de modelos científicos que mediante la incorporación de factores de riesgo e incertidumbre permitan evaluar decisiones, políticas y alternativas. Su objeto es auxiliar al directivo o al administrativo en la selección científica de susdecisiones.

1.3. Modélos

1.3.1. ¿Que es modelizar?

Es hacer una simplificacion de la realidad y nosotros trabajamos con esa simplificacion ya que la realidad es muy compleja.

1.3.2. ¿Para que hacer un modelo?

- **Economia de recursos:** Al igual que en la ingenieria civil cuando se hacen planos para representar una obra (ya que no seria lógico hacer el edificio y ante un error rehacerlo), cuando modelamos un problema usando programacion lineal y dada la escazes de recursos, es mas eficiente trabajar sobre modelos.

- **Eficiencia**: de nuevo so no tengo recursos limitantes entonces trabajo sobre la realidad y no modelo nada.
- **simplicidad**: puedo mediante abstracción lograr un modelo mas sencillo y eliminar la complejidad inherente del problema.
- **En resumen es mejor que hacer multiples ensayos.**

Los modélos se aplican a problemas de desición y este existe cuando existen formas alternativas de actuar, con distintos resultados y diferentes eficiencias para lograr el objetivo es decir existen dudas respecto del curso alternativo a utilizar.

1.4. Elementos de un modelo

1.4.1. Hipótesis y supuestos:

Para simplificar el modelo se delimita el sistema en estudio a través de las hipótesis y supuestos simplificativos. Así se comienza a transformar el sistema físico en un modelo simbólico. Las hipótesis deben ser probadas científicamente. Los supuestos son hipótesis que no pueden probarse.

Ejemplos: Si estamos modelando una panaderia, y el recurso agua no es limitante y por otro no se dice nada de la venta de lo producido podemos agregar las hipotesis

1. *Hay agua suficiente para todos los procesos*
2. *Se vende todo lo que se produce*

1.4.2. Objetivo:

Mide la eficiencia de nuestro sistema y lo que buscamos es hallar la merjo solucion. El objetivo surge como respuesta a tres preguntas:
¿Qué hacer? es decir que es lo que queremos determinar.
¿Cuándo? (período de tiempo) puede ser un mes o año o un periodo t si no se especifica.
¿Para qué? para maximizar ganancias, o minimizar costos, nunca ambos a la vez.

1.4.3. Actividad

Proceso unitario que se realiza en el sistema físico caracterizado por consumir recursos y/o generar un resultado económico y/o indicar un estado, por ejemplo producir un bien o indicar si se finalizó un proceso.

1.4.4. Variables

Son las que miden o indican el estado de una actividad. Las que miden pueden ser continuas o enteras. Las que indican son, generalmente, variables (0,1) o bivalentes

1.5. Programación lineal

La programación lineal es el campo de la programación matemática dedicado a maximizar o minimizar una función lineal, denominada función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones expresadas mediante un sistema de ecuaciones o inecuaciones también lineales.

1.5.1. Programación Lineal Continua

1.5.2. Programación Lineal Entera

Es una tecnica que permite modelar y resolver problemas cuya caracterıstica principal es que el conjunto de soluciones factibles es discreto.

- **OR lógico**

$$Y_{or} \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \leq \quad nY_{or}$$

- **AND lógico**

$$nY_{and} \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \leq \quad (n-1) + Y_{and}$$

1.5.3. Supuestos básicos de la Programación Lineal Continua

Proporcionalidad

Tanto el beneficio como el uso de recursos son directamente proporcionales al nivel de actividad

Aditividad

No existen interacciones entre las actividades que cambien la medida total de la efectividad o el uso total de algún recurso

Divisibilidad

Las unidades de actividad pueden dividirse en niveles fraccionarios cualesquiera, de modo que pueden permitirse valores no enteros para las variables

Certeza

Todos los parámetros del modelo son constantes conocidas

1.6. Centros de producción

1.6.1. Armado vs Mezcla

1.7. Conceptos previos

1. **Eficiencia:** Producir mas con menos recursos o productividad.
2. **Eficacia:** Lograr el resultado aunque se consuman muchos recursos.
3. **Costo de oportunidad:** Es el costo de producir una unidad de un bien.
4. **Contribucion marginal:** Ganancia neta.

1.8. Primer caso de estudio

La panadería la Higiénica elabora en forma absolutamente artesanal y con elementos orgánicos, baguettes y pan de campo.
Los ingredientes principales son harina, agua,sal y levadura. Para hacer una baguette hacen falta 100 gr de harina, 60 cc de agua, 10 gr de levadura y para hacer un pan de campo hacen falta 250 gr de harina, 200 cc de agua, 12 gr de levadura.
Usa harina integral y cuenta con 100 kg, el agua la traen desde Mendoza y tiene 80 litros, de levadura hay 8 kg. La sal es marina y tiene una bolsa de 50 kg.
Las baguettes se entregan en bolsitas de papel de las que tiene 450 unidades. Las ganancias unitarias son de \$0.30 y de \$0.80 para las baguettes y los panes respectivamente. Se quiere programar el trabajo del día de mañana.

Capítulo 2

Práctica 1 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

Modelos y Optimización I (71.14)

Guía de ejercicios prácticos (y útiles)

Modelos y Optimización I (71.14)

Guía de Trabajos Prácticos

La cátedra resume en esta guía todos los problemas que se considera permiten la suficiente ejercitación para alcanzar un buen conocimiento de la materia. Dentro de cada tema se presentan: un índice de temas a tratar, problemas tipo resueltos y problemas a resolver.

Solicitamos a los alumnos que nos hagan llegar sus observaciones y comentarios a través de sus ayudantes de trabajos prácticos, con el objeto de efectuar futuras correcciones y agregados que se consideren de interés. Dedicamos esta guía a todos los que colaboraron en su elaboración, con sugerencias y propuestas, y especialmente a quien comenzó con la tarea de recopilación, el ingeniero Horacio Malenqui.

Prólogo a la Segunda Edición

Esta segunda edición se realiza en base a las observaciones y comentarios recibidos de los alumnos y docentes de la cátedra.

Se han corregido errores y se han ampliado las explicaciones de los ***Problemas Tipo****. Asimismo, hemos eliminado algunos problemas e incorporado otros, tratando de actualizarla y mejorarla al mismo tiempo.*

Por otro lado se han modificado los datos de algunos ejercicios para facilitar su resolución numérica manual o automática.

Se agradece especialmente el trabajo realizado por la Lic. Silvia Ramos y por el Sr. Esteban Santellán quienes hicieron posible esta nueva edición.

Agosto 1993

Prólogo a la Tercera Edición

Más de ocho años pasaron ya desde la última actualización de esta Guía. Mucho tiempo. Y fueron ustedes, sus lectores, los que nos "recordaron" que estábamos en falta. Esto es bueno, pues confirma el sentir de nuestra cátedra: enseñar implica estar dispuestos a escuchar, para poder seguir aprendiendo.

Y escuchamos. Por ejemplo, diversas sugerencias y correcciones, las cuales hoy plasmamos en esta nueva Edición, agregando tanto Problemas para resolver como Problemas Tipo. Además, hemos actualizado muchos de ellos y facilitado su traslado a la práctica, al dedicarle más espacio a su resolución a través de software.

En este tiempo también, hemos escuchado, y observado, cómo los desganos y sinsabores de la vida cotidiana afectan cada vez más el aprendizaje en clase. Cómo impactan de forma tal, que nos olvidamos de que estamos en una Facultad para hacer algo que queremos y que, en el corto o en el largo plazo, esperamos nos dé alguna satisfacción. Por esta razón, les proponemos que permitan que esta Guía los "guíe" en el aprendizaje de la materia, sabiendo que están haciendo algo para ustedes. Y eso, hoy más que nunca, es muy bueno.

Febrero 2002

Nuestro agradecimiento a quienes llevaron a cabo el proceso de reforma de la guía que originó esta tercera edición: el líder del proyecto, Lic. Diego Sadras y sus colaboradores, el Lic. Pablo Colombo y el Lic. Pablo Echevarría. También a todos los docentes y alumnos que con sus sugerencias nos dan la oportunidad de mejorar día tras día. Esta edición es de todos ustedes.

"Los hombres vulgares –decía Ortega— están siempre satisfechos de sí mismos. Dan por buenos sus gustos, preferencias y opiniones, sin reflexionar demasiado. No se exigen nada, no se remiten a instancias superiores, se conforman con lo que buenamente encuentran en su cabeza y están encantados de ser como son.

Por el contrario, los hombres excelentes viven exigiéndose, no le encuentran sabor a la vida si no se ponen al servicio de una empresa superior y trascendente. Estos hombres desestiman lo que no les cuesta esfuerzo y sólo aceptan como digno de ellos lo que está aún por encima y les reclama un estirón para alcanzarlo. Esta es la vida como disciplina, la vida noble."

Alejandro Dolina
Crónicas del Ángel Gris

Bibliografía

1- *Hillier / Lieberman "Introducción a la investigación de operaciones" Ed. Mc Graw Hill*
2- *Wayne L. Winston - Investigación de Operaciones.*
3- *Hamdy A. Taha "Investigación de Operaciones" Ed. Wiley*
4- *Judea Pearl – Heuristics. Ed. Addison Wesley*
5- *Palma y Lacalle "Programación lineal, Método Simplex, Resolución de Problemas" Ed. Macchi*
6- *I. Marín, R.J. Palma, y C. Lara " La programación lineal en el proceso de decisión" Ed. Macchi*
7- *S. I. Gass "Programación lineal, Métodos y Aplicaciones" Ed. CECSA*
8- *H. Sasieni, A Yaspan y L. Friedman "Investigación de Operaciones" – Ed. Limusa*
9- *A. Kaufman "Métodos y Modelos de la Investigación de operaciones" Tomo 1. Ed CECSA*
10- *R. L. Ackoff y M. W. Sasieni "Fundamentos de la investigación de Operaciones" Ed. Limusa*
11- *G. B. Dantzig "Linear Programming and extensions" – Univ. Princeton – New Jersey*
12- *I. Marín "Métodos de exploración dirigida" Ed. Macchi – Buenos Aires, 1980*
13- *I. Marín, R. Palma, H. Rojo "Programación lineal, modelización y enunciados" Ed. Macchi*
14- *I. Marín, V. Rodríguez, O. Perino "Programación Lineal. Conceptos y Aplicaciones" Ed. Macchi*
15- *J. M. Vergara "Programación matemática y cálculo económico, teoría y aplicaciones" Ed. Vicens*
16- *H. P. Williams "Model Building in mathematical programming" Ed. Wiley*

☞ *En nuestra página en Internet, se pueden encontrar links relacionados.*

Pautas para el uso de la Guía de Trabajos Prácticos

La guía de trabajos prácticos presentada contiene diversos problemas sobre los temas desarrollados en las clases teórico-prácticas de la materia.

Cada tema contiene: uno o varios ***Problemas Tipo*** *y varios* ***Problemas para resolver****.*

Problemas Tipo

Son problemas representativos que se muestran analizados y resueltos. El objetivo es facilitar al alumno su iniciación en cada uno de los temas.

Esto se relaciona fuertemente con el método didáctico empleado, el cual se basa sustancialmente en la participación activa de los alumnos en clase. Por este motivo es necesario que los mismos trabajen sobre los problemas tipo y así, posteriormente, en la resolución de los ejercicios propuestos para cada ocasión. De esta forma, se posibilitará una mejor comprensión de los temas actuando como catalizador positivo de la participación en clase y de la asimilación de los temas.

Problemas para resolver

En cada tema se enuncian varios problemas para resolver. No es necesario que el alumno resuelva todos los ejercicios para saber el tema. Los ejercicios que no se hayan resuelto durante el cuatrimestre servirán como práctica para los coloquios finales.

Durante las clases prácticas grupales, será el ayudante a cargo del grupo quien determinará los ejercicios a realizar de acuerdo con las dificultades y falencias que detecte durante las mismas.

Debe quedar claro que en los planteos de programación lineal no existe una única solución posible. Un mismo enunciado puede ser planteado de diversas maneras (cada una con sus hipótesis particulares) y todas ellas ser correctas, siempre que no se modifique ningún aspecto del enunciado dado.

Para un óptimo aprovechamiento del tiempo de estas clases, los alumnos deberán traer planteados los problemas indicados por su ayudante. De esta manera podrán presentarle sus dificultades en cada resolución y el grupo podrá profundizar el análisis de los diversos planteos obtenidos. Así se enriquecerá la clase, ya que para cada enunciado se planteará no una, sino varias formas de resolverlo. Y al verlo desde diversos puntos de vista se hace más fácil la comprensión y el dominio del tema en estudio.

Cuando se encuentren serias dificultades para resolver un ejercicio, se podrán consultar los problemas tipo buscando soluciones similares dentro de los enunciados. Una vez resuelto el problema, se deberá buscar dentro de los problemas para resolver, un enunciado similar para reafirmar los conceptos aprehendidos.

Nunca *puede considerarse sabido un tema, con sólo haber leído y comprendido* ***problemas resueltos*** *por otra persona. Únicamente resolviendo una a una las dificultades que se van presentando al realizar el planteo de un problema, pueden irse incorporando los distintos conceptos de programación lineal.*

Al consultar el calendario, se verá que no todos los problemas que se incluyen en la guía están propuestos para resolver. Éstos son los que se consultan en clase (no se pueden resolver todos por falta de tiempo). Esto no quiere decir que la clase de *trabajo grupal consista en una resolución de problemas. Lo principal es que los alumnos traigan los problemas propuestos resueltos para poder aprovechar las clases. Además es importante que los alumnos se acostumbren a que la resolución de los ejercicios debe efectuarse en forma prolija, clara y, en el caso de los modelos, a identificar cada grupo de inecuaciones en forma precisa junto con sus variables correspondientes.*

Breve descripción del programa LINDO

Introducción

Los ejemplos de esta guía se realizaron con el software LINDO (Linear Interactive and Discrete Optimizer) 6.1, que permite resolver modelos de Programación Lineal Continua y/o Entera y hacer el correspondiente análisis de sensibilidad. En el sitio http://www.lindo.com puede bajarse una versión académica que permite modelos de hasta 300 variables (a lo sumo 30 enteras) y 150 restricciones.

Ingreso de un modelo simple

Vamos a ingresar el modelo de la figura en LINDO:

$$4X + 3Y \text{ £ } 10$$
$$3X + 5Y \text{ £ } 12$$
$$Z = 2X + 3Y \rightarrow \text{Máx.}$$

El modelo debe comenzar por la función objetivo precedida de MAX o MIN según se la quiera maximizar o minimizar respectivamente. Puede constar de una o más líneas y se separa del resto del modelo mediante la expresión SUBJECT TO (puede abreviarse como ST) que indica que la función objetivo esta "sujeta a" las restricciones que se indicarán a continuación.

```
MAX 2X + 3Y
ST
```

Seguidamente se ingresan las restricciones (aunque pueden estar separadas por espacios, se suelen ingresar en líneas separadas para mejorar la legibilidad). El modelo finaliza con la expresión END.

```
!Restricciones
MP) 4X + 3Y < 10
MO) 3X + 5Y < 12
END
```

Las reglas que tuvimos en cuenta al hacer este trabajo son:

- *Cada término, en cualquier restricción (o en la función objetivo), contiene: [+|–] [coef.] [nombre_variable], siempre en ese orden (no necesariamente separados por blancos). El signo más (+) también es opcional, así como el coeficiente, si fuera 1.*
- *El nombre de la variable debe comenzar con una letra y puede contener hasta 8 caracteres alfanuméricos.*
- *Todos los términos variables deben ir a la izquierda de la inecuación y cada término independiente a la derecha. Si el modelo no estuviera formulado de esta manera, se deberá operar y pasar de términos hasta llegar a la misma.*
- *Como no se pueden utilizar desigualdades estrictas LINDO admite el uso de estos signos en vez de los que incluyen igualdad ("<" equivale a "£" y ">" a "³").*
- *Las ecuaciones se pueden rotular con un nombre que debe seguir las reglas usadas para denominar las variables. Luego del mismo se incluye un paréntesis de cierre. Esto simplifica notablemente la comprensión de los reportes.*

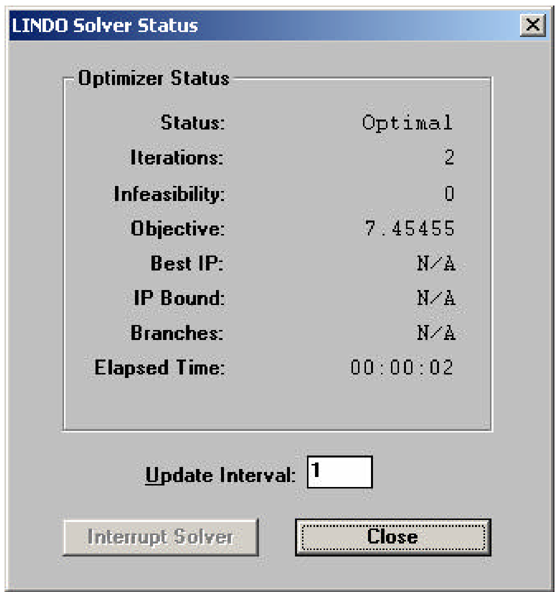
- *Pueden incluirse comentarios para mejorar la legibilidad del modelo anteponiendo un signo de admiración (cierre) a los mismos para que LINDO lo ignore al compilar el modelo.*

Aquí tenemos el modelo terminado:

```
MAX 2X + 3Y
ST
!Restricciones
MP) 4X + 3Y < 10
MO) 3X + 5Y < 12
END
```

El resultado de la corrida

Una vez completado el modelo se compila mediante la opción Compile Model del menú Solve y se ejecuta con la opción Solve del mismo menú. Puede omitirse el paso de la compilación (Solve compila automáticamente en caso de ser necesario) aunque el mismo evita la mayoría de los "cuelgues" en los últimos sistemas Windows.



Al resolver el modelo el programa abre un cuadro con el estado de la solución y algunos datos acerca de la misma. Los posibles estados (status) son:

- ***Infeasible**: el modelo es incompatible (no tiene solución válida). Previamente se presenta un cuadro que explica la situación (NO FEASIBLE SOLUTION…).*
- ***Unbounded**: el modelo es un poliedro abierto (el funcional no está restringido). Previamente se presenta un cuadro que explica la situación (UNBOUNDED SOLUTION …).*
- ***Optimal**: se llegó a una solución óptima. Se presenta la posibilidad de realizar un análisis de sensibilidad del rango de variación de los coeficientes de la función objetivo y los términos independientes de las restricciones.*

En todos los casos, una vez que se cierran los cuadros emergentes se podrá ver el reporte de la corrida que se muestra a continuación.

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      7.454545

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         X         1.272727          0.000000
         Y         1.636364          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        MP)         0.000000          0.090909
        MO)         0.000000          0.545455

 NO. ITERATIONS=       2


 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
        X       2.000000          2.000000         0.200000
        Y       3.000000          0.333333         1.500000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
        MP     10.000000         6.000000         2.800000
        MO     12.000000         4.666667         4.500000
```

El mismo contiene en primer lugar una indicación de la cantidad de pasos efectuados hasta llegar al óptimo y el valor de la función objetivo en el mismo (OBJECTIVE FUNCTION VALUE).

Seguidamente se detallan los valores (VALUE) de las variables reales del problema y sus correspondientes costos de oportunidad (REDUCED COST).

Luego se presentan los valores de las variables "slack" (SLACK OR SURPLUS), así como el valor marginal (DUAL PRICES) correspondiente a cada uno de los recursos (o restricciones) a los que corresponden.

A continuación se muestra, en caso de haber seleccionado la opción de análisis de sensibilidad, el valor actual de los coeficientes del funcional para cada variable del problema y sus rangos de variación positiva y negativa (OBJ COEFFICIENT RANGES).

Por último se tiene un análisis similar para cada una de las restricciones del problema, con el valor actual del término independiente de la restricción y sus rangos de variación positiva y negativa (RIGHTHAND SIDE RANGES).

Otros comandos

Los siguientes comandos permiten agregar características al modelo. Se ubican luego del término END.

- *GIN: indica que la variable que lo sigue es entera (General INteger)*
- *INT: indica que la variable que lo sigue es bivalente.*
- *SUB: establece un limite superior para el valor de la variable que lo sigue. Equivale a una restricción de máximo en el modelo pero permite ahorrársela (si hay un límite en la cantidad de ecuaciones que puede manejar el programa) y trabaja en forma más eficiente.*

- *SLB: establece un límite inferior para el valor de la variable que lo sigue. Comparte todas las características de SUB.*

Herramientas para la corrección de errores

Cuando no se puede obtener un resultado óptimo se debe analizar qué es lo que provoca esta situación. La herramienta para hacer esto es el comando Debug del menú Solve. El mismo puede devolver restricciones (para los problemas incompatibles) o variables (para los que son poliedros abiertos), divididas en dos grupos:

- *Necesarias (NECESSARY SET): el submodelo formado por este conjunto es incompatible. Para corregirlo, basta con eliminar (o modificar) un solo elemento del mismo.*
- *Suficientes (SUFFICIENT SET): el modelo tiene una solución óptima eliminando (o modificando) cualquiera de ellas. Si el modelo no tiene solución por un error en una restricción, esta aparecerá listada en este conjunto.*

Una vez que se hayan corregido todos los conjuntos que se presentaron el modelo tendrá una solución óptima.

Sugerencias

- ☞ *Si se tiene un modelo pasado al LINDO sin rótulos para las ecuaciones y se quiere obtener en forma rápida una numeración para las mismas se puede usar el comando Formulation del menú Reports. El resultado del mismo es el planteo del modelo, en el que aparecerán rotuladas las restricciones con números sucesivos desde el 2 (ya que el 1 es la función objetivo).*

- ☞ *Si bien LINDO no valida que los nombres de las restricciones sean distintos entre sí o de los nombres de las variables reales (ya que solamente los usa para emitir el reporte) es una buena práctica no repetir los mismos para evitar confusiones posteriores.*

- ☞ *Se recomienda ser muy cuidadoso al pasar el modelo al LINDO. Es muy común cometer errores en los nombres de las variables, lo que genera 2 variables distintas. En ese sentido suele ser muy útil dar un vistazo al reporte de la solución y verificar que no se esté violando alguna de las restricciones.*

- ☞ *Se debe evitar utilizar coeficientes con gran diferencia de escala, ya que esto puede provocar errores de redondeo en la resolución del problema. En caso de encontrarse con un modelo que tiene algunos coeficientes muy grandes (pequeños) respecto de los demás se recomienda dividir (multiplicar) la ecuación completa por una constante para acercarlo a los valores de los demás coeficientes del problema. En este caso, aparecerá el mensaje "POORLY SCALED MODEL".*

- ☞ *Para referencias adicionales se recomienda consultar la ayuda del programa (comandos, mensajes, reglas, ver las tablas de simplex, etcétera).*

1. Modelización Básica y Resolución Gráfica

Temario

1- Análisis del enunciado del problema.
2- Resumen de la situación a resolver.
3- Identificación de incógnitas: su significado y unidades.
4- Planteo del sistema de inecuaciones correspondientes.
5- Disposición del sistema de ejes coordenados. Escalas.
6- Identificación de los semiplanos definidos por cada inecuación. Identificación de la recta límite.
7- Identificación del recinto de soluciones.
8- Pendiente del funcional. Rectas de isocosto e isobeneficio.
9- Solución óptima.
10- Obtención algebraica de los valores de las incógnitas para la solución óptima.
11- Significado de las variables slacks. Planteo del sistema de ecuaciones correspondiente al problema.
12- Valor de las variables slacks para la solución óptima.
13- Análisis gráfico de la variación en las restricciones existentes: aumento o disminución de disponibilidades.
14- Análisis gráfico de la inclusión de nuevas restricciones.
15- Análisis gráfico de variaciones en el funcional.

Problema Tipo Nº 1

Un fabricante de bombones entrega sus productos en cajas de un kilogramo, en dos variedades: A y B.

La caja tipo A contiene 300 gramos de bombones de licor, 500 gramos de bombones de nuez y 200 gramos de bombones de fruta. La caja tipo B contiene 400 gramos, 200 gramos y 400 gramos de cada tipo de bombón, respectivamente.

La utilidad por cada caja de bombones tipo A es de \$ 120, y por cada caja de tipo B es de \$ 90.

El fabricante dispone de 100 kilogramos de bombones de licor, 120 kilogramos de bombones de nuez, 100 kilogramos de bombones de fruta.

Se desea definir la cantidad de cajas de cada tipo que debe armar en esta situación para que su beneficio sea máximo.

Resolución del problema

1. *Identificación de las incógnitas con sus unidades*

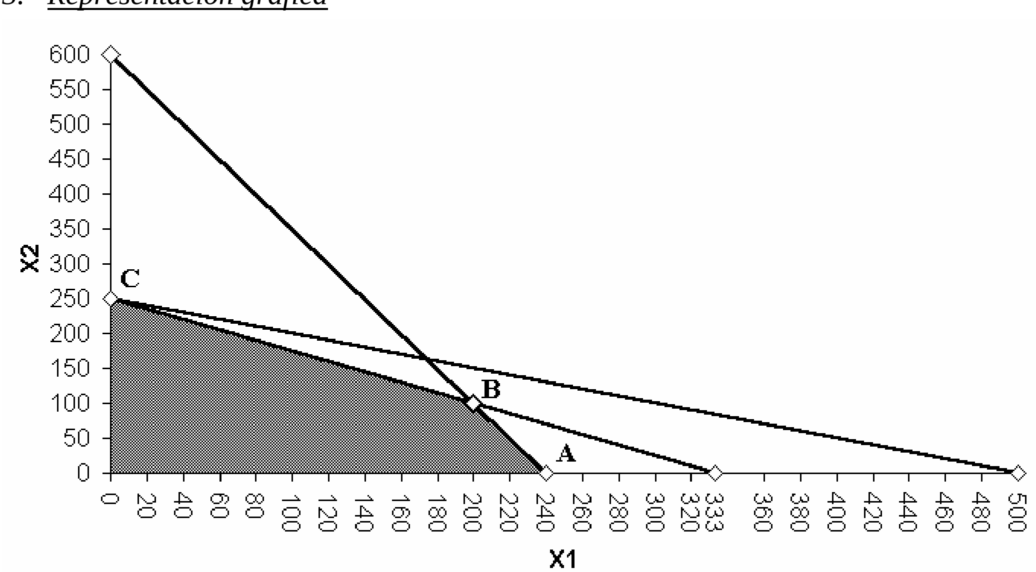
   X_1: Producción de cajas tipo A *un: Nº de cajas/período*

   X_2: Producción de cajas tipo B *un: Nº de cajas/período*

2. *Planteo de las inecuaciones y funcional*

   $0{,}3\ X_1 + 0{,}4\ X_2$ £ 100 ← *Licor*
   $0{,}5\ X_1 + 0{,}2\ X_2$ £ 120 ← *Nuez*
   $0{,}2\ X_1 + 0{,}4\ X_2$ £ 100 ← *Fruta*
   C.N.N. X_1, X_2 ³ 0
   $Z = 120\ X_1 + 90\ X_2$ → *Máx*

3. *Representación gráfica*



4. *Obtener algebraicamente los valores de X_1, X_2 y Z en vértices*

Punto 0		$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$Z = 0$
Punto A	$0{,}5\, X_1 + 0{,}2\, X_2 = 120$ $X_2 = 0$	$X_1 = 240$	$X_2 = 0$	$Z = 28800$
Punto B	$0{,}5\, X_1 + 0{,}2\, X_2 = 120$ $0{,}3\, X_1 + 0{,}4\, X_2 = 100$	$X_1 = 200$	$X_2 = 100$	$Z = 33000$
Punto C	$0{,}3\, X_1 + 0{,}4\, X_2 = 100$ $X_1 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 250$	$Z = 22500$

El punto C, por tratarse de un extremo "degenerado", puede definirse también con alguno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0{,}3\, X_1 + 0{,}4\, X_2 &= 100 \\ 0{,}2\, X_1 + 0{,}4\, X_2 &= 100 \end{aligned} \qquad \text{ó} \qquad \begin{aligned} 0{,}2\, X_1 + 0{,}4\, X_2 &= 100 \\ X_1 &= 0 \end{aligned}$$

5. *Variables Slacks – Planteo de Ecuaciones*

$$\begin{aligned} 0{,}3\, X_1 + 0{,}4\, X_2 + X_3 &= 100 \\ 0{,}5\, X_1 + 0{,}2\, X_2 + X_4 &= 120 \\ 0{,}2\, X_1 + 0{,}4\, X_2 + X_5 &= 100 \end{aligned}$$

Variable Slack	***Descripción***	***Unidad***
X_3	*Sobrante de bombones de licor*	*kilogramos/período*
X_4	*Sobrante de bombones de nuez*	*kilogramos/período*
X_5	*Sobrante de bombones de fruta*	*kilogramos/período*

$$0\begin{cases} X_1=0 \\ X_2=0 \end{cases} \quad A\begin{cases} X_2=0 \\ X_4=0 \end{cases} \quad B\begin{cases} X_4=0 \\ X_3=0 \end{cases} \quad C\begin{cases} X_3=0 \\ X_5=0 \end{cases} \quad C'\begin{cases} X_5=0 \\ X_1=0 \end{cases} \quad C''\begin{cases} X_1=0 \\ X_3=0 \end{cases}$$

6. *Hallar algebraicamente el valor de las variables en el óptimo*

El punto extremo B, óptimo del problema, se define por la anulación de las variables X_3 y X_4. Por lo tanto, el valor del resto de las variables en el óptimo, surge del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 0{,}3\, X_1 + 0{,}4 X_2 &= 100 \\ 0{,}5\, X_1 + 0{,}2 X_2 &= 120 \\ 0{,}2\, X_1 + 0{,}4 X_2 + X_5 &= 100 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de todas las variables y el funcional, en el óptimo, será:

X_1 = 200 *Cajas bombones tipo "A"/período*

X_2 = 100 *Cajas bombones tipo "B'/período*

X_3 = 0 *Kgs. Bombones de licor/período*

X_4 = 0 *Kgs. Bombones de nuez /período*

X_5 = 20 *Kgs. Bombones de fruta/período*

Z = 33.000 *$/período*

Problema Tipo Nº 2

Una empresa automotriz está equipada para producir automóviles y camiones. Su planta fabril está organizada en cuatro departamentos: estampado, montaje de motores, línea de montaje de automotores y línea de montaje de camiones. Las capacidades de cada departamento están limitadas de la siguiente forma:

Estampado puede producir 25.000 autos ó 35.000 camiones por año.

Montaje de motores puede producir 33.333 autos ó 16.667 camiones por año

Montaje de autos: 25.000 por año.

Montaje de camiones: 15.000 por año.

Se desea producir como mínimo 12.000 autos y 8.000 camiones por año, estimándose asimismo en 18.000 unidades la cantidad demandada máxima anual de automóviles.

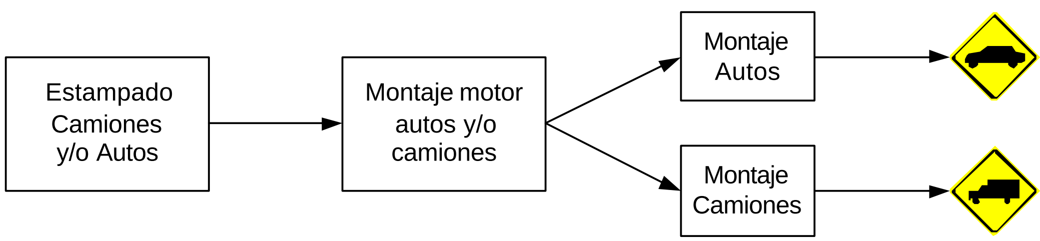
El margen de beneficios es de 150.000 $ por auto y 125.000 $ por camión.

Se desea conocer el plan de producción que haga máximo el margen total de beneficio.

Resolución del problema

1. *Representación gráfica del subsistema a modelizar*

   ➢ *Fábrica – Subsistema Producción*



2. *Objetivo del problema*

Determinar el plan de producción de autos y camiones para el próximo año, de manera de maximizar la ganancia total de la empresa.

3. *Hipótesis*

   a- *No hay stock ni inicial ni final. Se vende todo lo que se produce.*

   b- *No existen costos fijos en el sistema producción.*

   c- *Se vende al contado.*

   d- *Se planifica a moneda constante.*

   e- *Los excedentes de caja no se los trabaja a interés.*

   f- *Las capacidades son prácticas, es decir, están afectadas por las paradas*

   g- *No hay restricciones ni de Mano de Obra, ni de Producción, ni de MP.*

   h- *No hay mermas en los procesos productivos.*

   i- *Se produce un solo tipo de auto y un solo modelo de camión.*

4. *Variables*

Variable	**Descripción**	**Unidad**
X_1	Cantidad de autos a producir	unidades/año
X_2	Cantidad de camiones a producir	unidades/año

5. *Restricciones que debe cumplir el modelo*

   1- Capacidad de estampado (autos y/o camiones)

   2- Capacidad de motores (autos y/o camiones)

   3- Capacidad de montaje autos.

   4- Capacidad de montaje camiones.

   5- Demanda mínima y máxima de autos.

   6- Demanda mínima camiones.

De 1, la capacidad de estampado se debe expresar entre unidades iguales, vale decir, en autos o en camiones.

Si 35.000 camiones = 25.000 autos → 1 camión = 0,71 autos.

La ecuación la podríamos expresar como

$$X_1 \frac{autos}{año} + 0{,}71 \frac{autos}{camión} * X_2 \frac{camiones}{año} \leq 25.000 \frac{autos}{año}$$

ó

$$X_1 \frac{autos}{año} * 1{,}4 \frac{camiones}{auto} + X_2 \frac{camiones}{año} \leq 35.000 \frac{camiones}{año}$$

De esta forma la ecuación es homogénea en unidades.

En la restricción 2, 33.333 autos = 16.667 camiones → 1 auto = 0,5 camión, entonces sería:

$$X_1 \frac{autos}{año} + 2 \frac{autos}{camión} * X_2 \frac{camiones}{año} \leq 33.333 \frac{autos}{año}$$

ó

$$X_1 \frac{autos}{año} * 0{,}5 \frac{camiones}{auto} + X_2 \frac{camiones}{año} \leq 16.667 \frac{camiones}{año}$$

La 3: X_1 £ 25.000 ; *La 4:* X_2 £ 15.000

La 5: X_1 ³ 12.000 ; *La 6:* X_2 ³ 8.000

X_1 £ 18.000

☞ *Nota: Ver que la ecuación 3 no restringe el modelo, sino que es redundante ya que existe la 5:* X_1 £ 18.000.

C.N.N. X_1 ³ 0; X_2 ³ 0

6. *Funcional*

   150.000 X_1 + 125.000 X_2 → *Máx*

☞ *Nota: Observar que, como se trata de un beneficio, está expresado en $/unidad de tiempo, en este caso $/año.*

Observar que el problema puede tener otros funcionales acorde a otros objetivos:

Objetivo	**Funcional**
Maximizar ventas de camiones	X_2 ➔ *Máx*
Minimizar producción de autos	X_1 ➔ *Mín*
Minimizar capacidad ociosa de estampado	$X_1 + 0{,}71\ X_2$ ➔ *Máx*
etc.	*etc.*

7. *Análisis posterior*

¿Qué pasa si no se cumple alguna hipótesis (3.a - 3.i)?

a) Si no se vende todo lo que se produce hay que abrir las variables X_1 *y* X_2*:*

X_1' → *cantidad de autos a producir* — X_1'' → *cantidad de autos a vender*

X_2' → *cantidad de camiones a producir* — X_2'' → *cantidad de camiones a vender*

y opcionalmente, agregar:

S_{i1} → *cantidad inicial de autos en stock* — S_{f1} → *cantidad final de autos en stock*

S_{i2} → *cantidad inicial de camiones en stock* — S_{f2} → *cantidad final de camiones stock*

i- Si no es necesario considerar stocks, las ecuaciones a incorporar serían:

$$X_1' \ ³ \ X_1''$$
$$X_2' \ ³ \ X_2''$$

ii- Caso contrario:

$$S_{i1} + X_1' = S_{f1} + X_1''$$
$$S_{i2} + X_2' = S_{f2} + X_2''$$

donde las variables que representan stocks deben figurar también en otras restricciones o en el funcional, de lo contrario no tiene sentido para el modelo haberlas agregado.

En cualquier caso, las capacidades de línea de montaje de autos y camiones serían:

$$X_1' \ £ \ 25.000 \ [autos/año]$$
$$X_2' \ £ \ 15.000 \ [camiones/año]$$

análogamente, debería reemplazarse en las restricciones de capacidad de estampado y montaje de motores las variables X_1 *y* X_2 *por* X_1' *y* X_2'*. Mientras que las restricciones de demanda quedarían:*

$$12.000 \ £ \ X_1'' \ £ \ 18.000 \ [autos/año]$$
$$X_2'' \ ³ \ 8.000 \ [camiones/año]$$

b) Si se consideraran los costos fijos, habría que agregarlos en el funcional

$$Z = 150.000\ X_1 + 125.000\ X_2 - \text{Costos fijos} \ ➔ \ \text{Máx}$$

c) Si no se vende al contado, y se quiere el ingreso a valores actuales, hay que dividir el precio por un coeficiente mayor a 1 (pérdida por interés).

Ej: si se vende a 360 días e "i" es la tasa a 360 días.

$$Z = 150.000\ X_1/(1 + i) + 125.000\ X_2/(1 + i) \ ➔ \ \text{Máx}$$

d) Si hubiera inflación habría que multiplicar los coeficientes de Z por 1a tasa anual de inflación, para obtener el valor actualizado al año.

e) *Si suponemos que cada auto que se vende genera un excedente de caja de "b" \$/u y cada camión "c" \$/u, y este excedente se trabaja a una tasa "i".*

$$Z = 150.000\ X_1 + 125.000\ X_2 + (b\ X_1)i + (c\ X_2)i \Rightarrow Máx$$

f) *Si las capacidades pudieran afectarse por 'paradas', habría que conocer un valor estimativo del porcentaje de pérdida de tiempo útil que estas provocan.*

Ej: Se usa un 10% linea montaje motor para preparar los equipos, entonces

$$X_1 + 2\ X_2 \text{ £ } 0{,}9 * 33.333$$

g) *Habría que conocer el consumo unitario por auto y camión de cada uno de estos recursos y sus disponibilidades anuales, y agregar las restricciones correspondientes al modelo.*

h) *Si hubiera mermas en la producción, se deberían afectar los coeficientes tecnológicos de los procesos que las tuvieran.*

i) *Si se consideraran más modelos de autos y/o camiones, habría que trabajar con más variables. (Probablemente una para cada modelo)*

☞ *Sugerencia: Partir del problema inicial, e ir agregando todas la restricciones que surgen del no cumplimiento de las hipótesis 3.a a 3.i.*

Problema Tipo Nº 3

Dos aditivos "1" y "2" deben ser empleados para mejorar la calidad de una nafta. Se deben cumplir las siguientes condiciones:

a- Como los aditivos no producen combustión es conveniente, para evitar la formación de depósitos en el carburador, que por cada 10 litros de gasolina no se agregue más de 1/2 litro de aditivos.

b- La cantidad de aditivo "2" más dos veces la cantidad de aditivo 1 debe ser, como mínimo, 1/2 litro por cada 10 litros de gasolina. De esta manera se logra una nafta de color óptimo.

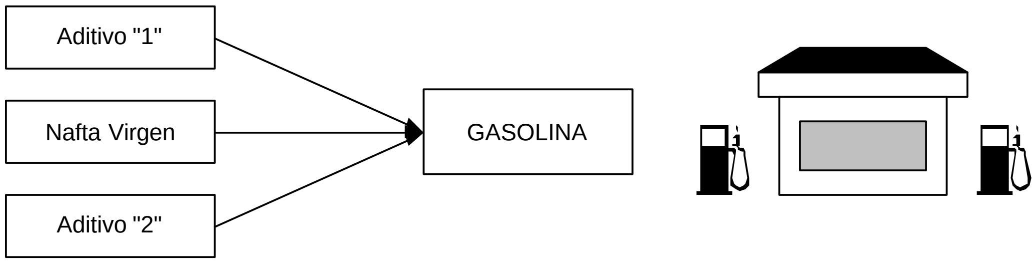
c- Agregar un litro de aditivo "1" significa que a la nafta se agregan 10 unidades de octanaje y agregar un litro de aditivo "2", 20 unidades de octanaje.

La nafta sin aditivos posee un octanaje de 84 y se quiere que, como mínimo, la gasolina obtenida posea un número de octanos superior a 90.

El costo del aditivo "1" es de 153 \$/litro y el del "2", 400 \$/litro.

Resolución del problema

1. *Representación gráfica del subsistema a modelizar*



2. *Objetivo del problema*

Determinar la cantidad de cada uno de los aditivos a agregar a la nafta virgen por cada 10 litros de gasolina de manera de minimizar los costos.

3. *Hipótesis*
   - *No hay mermas en el proceso de mezcla.*
   - *No hay costo en el proceso de mezcla.*
   - *La relación de octanos es lineal.*
   - *No hay costo de M.O.*
   - *Todas las naftas vírgenes que pueda usar tienen igual costo.*
   - *El aumento en unidades de octanaje de los aditivos se considera por cantidad agregada cada 10 litros de gasolina.*

4. *Variables*

X_1 = *Cantidad de aditivo "1" a agregar a la nafta por c/10 lts. [litros / 10 litros]*

X_2 = *Cantidad de aditivo "2" a agregar a la nafta por c/10 lts. [litros / 10 litros]*

5. *Restricciones que se deben cumplir*

1- No agregar más de 0,5 litros de aditivos cada 10 litros de gasolina.

2- Relación entre el aditivo "1" y "2" por el color de la gasolina.

3- Número total de octanos de la gasolina.

6. *Inecuaciones*

1- Aditivo "1" + Aditivo "2" + Nafta virgen = 10 litros de gasolina.

La restricción dice que el agregado total de aditivos no puede ser superior a 1/2 litro, entonces:

$X_1 + X_2$ £ 0,5 [litros / 10 litros]

2- Para obtener una coloración final óptima:

2 $X_1 + X_2$ ³ 0,5 [litros / 10 litros]

3- Dado que partimos de 84 octanos debemos mejorar por lo menos en 6, por lo que debemos agregar aditivos "1" y "2" para que se cumpla esto:

$$10\frac{un}{lt} * X_1 \frac{lts}{10\,lts} + 20\frac{un}{lt} * X_2 \frac{lts}{10\,lts} \geq 6\frac{lts}{10\,lts}$$

C.N.N.: $X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$

Funcional: $Z = 153\ X_1 + 400\ X_2$ *[$ / 10 lts.]* ➔ *Mín*

☞ *Nota: Un planteo más general puede ser:*

X_1: *Cantidad de aditivo "1" a agregar a una producción N*

X_2: *Cantidad de aditivo "2" a agregar a una producción N*

V: Cantidad de nafta virgen a agregar a una producción N

$N = X_1 + X_2 + V$

$N \leq M$ *(En el supuesto de demanda máxima)*

$N \geq m$ *(En el supuesto de demanda mínima)*

La restricción 1 sería

$$X_1 + X_2 \leq \frac{0{,}5}{10}\left[X_1 + X_2 + V\right]$$

La restricción 2 sería

$$2X_1 + X_2 \leq \frac{0{,}5}{10}\left[X_1 + X_2 + V\right]$$

La restricción 3 sería

$$10X_1 + 20X_2 \geq 6\left[X_1 + X_2 + V\right]$$

Fijarse que haciendo $M \rightarrow \infty$

$m = 0$

$N = 10$ *obtenemos el planteo propuesto.*

Si hubiéramos definido las variables así:

X_1 = *% de Aditivo "1"*

X_2 = *% de Aditivo "2"*

La 1 sería $X_1 + X_2 \leq 5\%$

La 2 sería $2X_1 + X_2 \geq 5\%$

La 3 no se puede manejar con inecuaciones de Programación Lineal

☞ *Indicar qué sucede si no se cumplen cada una de las hipótesis*

☞ *Resolver gráficamente.*

"Los errores suelen ser el puente entre la inexperiencia y la sabiduría."
Phyllis Theroux

Problemas para resolver

1.1.

Una pequeña empresa de productos químicos debe consumir más de 40 M^3/mes de un determinado alcohol, debido a que ha firmado un contrato con la municipalidad de la zona (este alcohol es producido allí mismo). En compensación recibe beneficios impositivos.

Produce dos tipos de fertilizantes: A y B. En la tabla siguiente se da la información básica:

	Producto A	**Producto B**
Consumo de alcohol	3 M^3/unidad	2/3 M^3/unidad
Consumo de ciclohexano	1 tn/unidad	2 tn/unidad

Disponibilidad de ciclohexano: 20 tn. por mes.

Con estas restricciones, y sabiendo que la contribución marginal es 1.200 $/u para el producto A y 400 $/u para el producto B, ¿cuál es el plan óptimo de producción?

1.2.

Hay tres máquinas disponibles para la producción de dos productos. Cada uno de ellos requiere los tiempos de proceso que se indican en la tabla siguiente (expresados en horas/unidad).

Producto	**Máq. A**	**Máq. B**	**Máq. C**
1	2	3	4
2	4	2	2
Disponibilidad (hs/mes)	80	60	100

El esquema del proceso productivo es el siguiente:

- Ambos productos deben pasar sucesivamente por las tres máquinas (en el orden "A→B→C") para quedar totalmente terminados. Una máquina puede procesar un solo producto por vez.
- El precio de venta de 1 es de 60 $/u y el de 2 es de 50 $/u. Se planea la operación para el mes que viene.

¿Cuál es el uso óptimo de estos recursos frente al objetivo de maximizar las ventas?

☞ *Pregunta adicional: ¿Es conveniente conseguir 20 horas/mes más de equipo B?*

1.3.

Se desea definir las cantidades a fabricar de dos productos, A y B cuyo procesamiento se realiza en dos centros de máquinas, conociéndose los datos referentes a los tiempos de proceso y disponibilidades en los centros. Se sabe además que debe cumplirse con un pedido mínimo de 50 unidades de A. Al mismo tiempo, la producción de B debe ser por lo menos cuatro veces superior a la producción de A.

Se conocen los márgenes brutos de beneficio de cada producto.

		Producto		Disponibilidad
		A	B	
Tiempos unitarios	Máquina I	1	0,4	200
	Máquina II	0,5	1	200
Margen bruto unitario		12	8	

1.4.

La empresa Seventeen SRL se dedica a la fabricación de manteles de mesa. Fabrica dos modelos que se adaptan al 90% de las mesas argentinas: el redondo y el rectangular. Cada uno de estos modelos consume 2 y 3 m^2 de tela, respectivamente. Además deben ser cortados y cosidos a mano, tarea que lleva una hora para los manteles rectangulares y dos para los redondos (es más complejo el corte). Por último, a los manteles rectangulares se les deben colocar cuatro esquineros de refuerzo.

Semanalmente se pueden conseguir 600 m^2 de tela, 600 esquineros y 500 horas de corte y costura. Los márgenes de ganancias son de $8 para los manteles redondos y $10 para los rectangulares.

¿Qué es lo mejor que puede hacer Seventeen con esta información?

1.5.

Es necesario alimentar racionalmente un rebaño de cabezas de ganado.

Los alimentos deben contener imprescindiblemente, cuatro componentes nutritivos: A, B, C y D.

Se encuentran disponibles en el mercado dos alimentos M y N cuyas propiedades son:

- Un kilogramo de alimento M contiene 100 gr. de nutriente A, 100 gr. de C, y 200 gr. de D.
- Un kilogramo de alimento N contiene 100 gr. de nutriente B, 200 gr. de C y 100 gr. de D.

Cada animal debe consumir como mínimo, por día, 400 gr. de nutriente A, 600 gr. de B, 2.000 gr. de C y 1.700 gr. de D.

El alimento M cuesta 10 $/kg, y el N cuesta 4 $/kg.

¿Qué cantidad de alimentos M y N debe suministrarse a cada animal diariamente para que la ración sea la más económica?

1.6.

Dado el siguiente sistema de inecuaciones:

$$
\begin{aligned}
4 X_1 - 2 X_2 &\leq 4 \\
4 X_1 + 2 X_2 &\leq 8 \\
X_1 + X_2 &\geq 1
\end{aligned}
$$

Y el funcional:

$$Z = 8 X_1 + 4 X_2 \rightarrow \text{Máx}$$

Se pide:

a- Encontrar un enunciado compatible con el mismo.

b- Resolverlo gráficamente.

c- Indicar la o las soluciones del problema que optimicen el funcional.

d- Dar el valor de las variables débiles o slacks, sus unidades y significado en cada uno de los vértices del poliedro.

2.1. Resolución Guia 1

Toda la guía 1 se trata de resolver problemas de programación lineal continua, son problemas sencillos de planificación de producción con restricciones de demanda mínima o recursos limitados, resolver los ejercicios significa plantear el modelo matemático con todos sus elementos, no hay que hallar la solucion exacta, eso lo haremos con el algoritmo simplex más adelante.

2.1.1. Ejercicio 1.1

Objetivo: determinar la cantidad de productos A y B a fabricar en un mas para maximizar las ganancias.
Hipótesis:

1. no existen mérmas en el proceso de producción.

2. todo lo que se produce se vende, es decir que la demanda no es limitante.

3. no existe acumulación de stock.

Variables :

- $P_a[\frac{unidades}{mes}]$: cantidad fabricada de producto tipo A

- $P_b[\frac{unidades}{mes}]$: cantidad fabricada de producto tipo B

Inecuaciones:

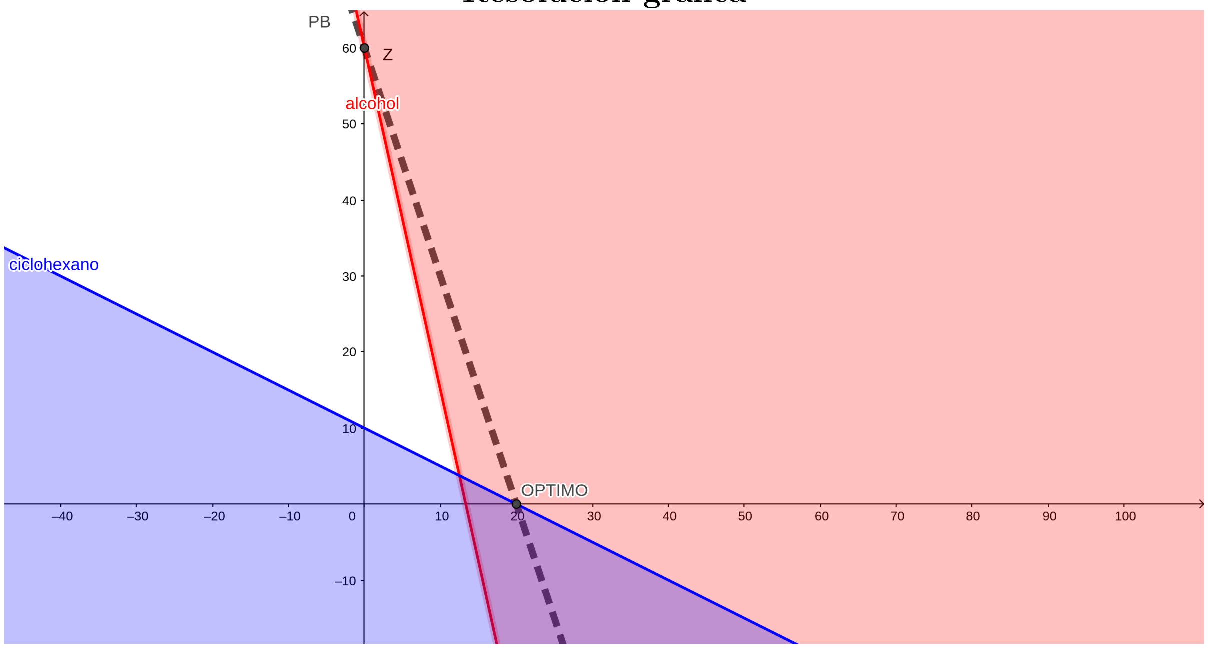
- $3[\frac{m^3}{unidad}]P_a[\frac{unidades}{mes}] + 2/3[\frac{m^3}{unidad}]P_b[\frac{unidades}{mes}] \geq 40[\frac{m^3}{mes}]$ *(Consumo de alcohol)*

- $1[\frac{ton}{unidad}]P_a[\frac{unidades}{mes}] + 2[\frac{ton}{unidad}]P_b[\frac{unidades}{mes}] \leq 20[\frac{ton}{mes}]$ *(Consumo de ciclohexano)*

Funcional: El funcional hace que las variables P_a y P_b tomen valores lo más grandes posibles teniendo en cuenta que el ciclohexano tiene un límite en su disponibilidad y por otro lado el alcohol tiene un consumo mínino.

- $Z_{max} \Rightarrow 1200[\frac{\$}{unidad}]P_a[\frac{unidades}{mes}] + 400[\frac{\$}{unidad}]P_b[\frac{unidades}{mes}]$

Resolución gráfica



2.1.2. Ejercicio 1.2

Hipótesis

1. No existen mermas de producción.
2. No existen stocks.
3. Se vende todo lo producido.

Variables

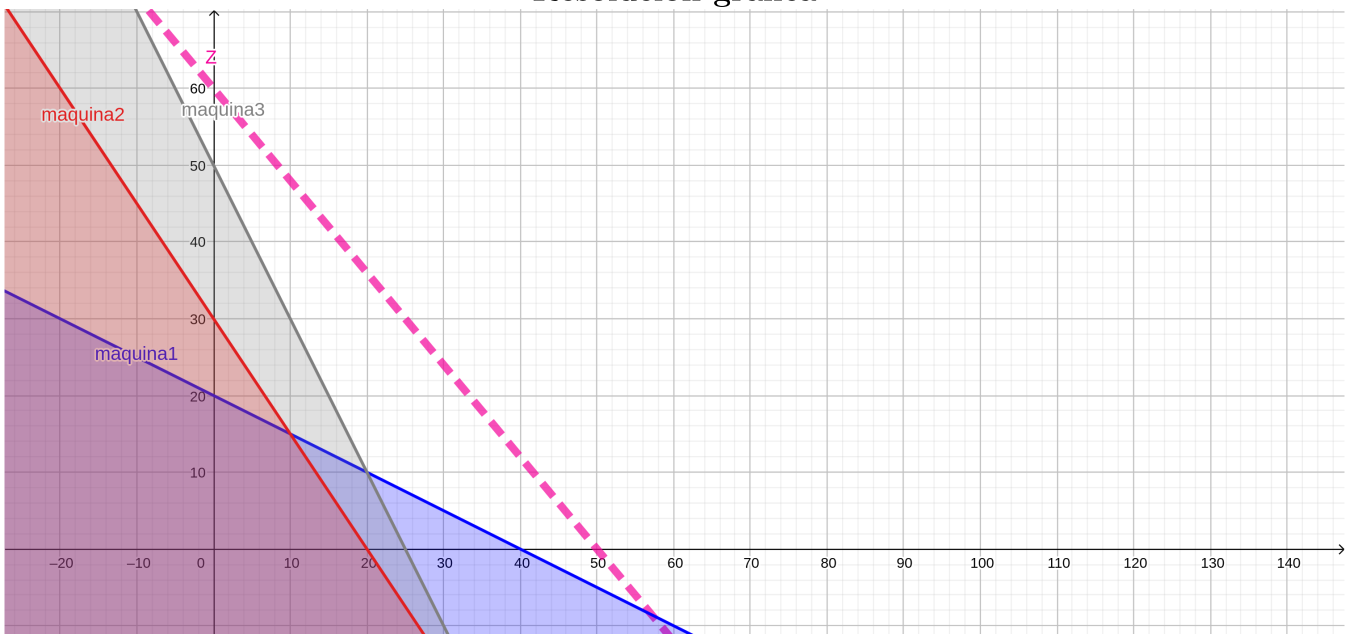
- P1 $[un/mes]$ (unidades de producto 1 producidos en un mes)
- P2 $[un/mes]$ (unidades de producto 2 producidos en un mes)

Objetivo Determinar la producción de P1 y P2 en un mes de trabajo para maximizar las ganancias.

Modélo

$$2P1 + 4P2 \leq 80[hs/mes]$$
$$3P1 + 2P2 \leq 60[hs/mes]$$
$$4P1 + 2P2 \leq 100[hs/mes]$$
$$Funcional \quad Z_{max} \Rightarrow 60P1 + 50P2$$

Resolución gráfica



Respecto de la pregunta final, si, es conveniente conseguir mas recurso porque si nos fijamos en el gráfico el equipo 2 es limitante ya que el óptimo esta sobre su recta, conseguir mas recurso implica que dicha récta se va a relajar es decir, se va a alejar del origen lo que significa que el funcional sera mayor.

2.1.3. Ejercicio 1.3

Hipótesis

1. No existen mermas de producción.
2. No existen stocks.
3. Se vende todo lo producido.

Variables

- PA $[un/T]$ (unidades de producto 1 producidos en un período indeterminado T)
- PB $[un/T]$ (unidades de producto 2 producidos en un período indeterminado T)

Objetivo Determinar la producción de PA y PB en un tiempo de trabajo T para maximizar las beneficios.
Modélo

- $1PA + 0,4PB \leq 200$ (disponibilidad de maquina A)
- $0,5PA + 1PB \leq 200$ (idem maquina B)
- $PA \geq 50$ (Pedido mínimo de producto A)
- $PB \geq 4PA$ (La produccion de B es 4 veces la de A)
- Funcional $Z_{max} 12PA + 8PB$

Resolución gráfica

2.1.4. Ejercicio 1.4

Este ejercicios nuevamente se trata de planificación de la producción el tiempo es de una semana de trabajo y hay recursos limitantes.

Hipótesis

1. El dato de 90 % no inside en el modelo
2. No existen stocks.
3. Se vende todo lo producido.
4. Como nada se dice de los costos, suponemos que estan incluidos en el precio de venta.

Variables

- Mred $[un/sem]$ (manteles redondos)
- Mrec $[un/mes]$ (manteles rectangulares producidos en una semana)

Objetivo Determinar la producción de los dos tipos de manteles en un una semana de trabajo para maximizar las ganancias.

Modélo

$$\begin{aligned} 2Mred + 3Mrec &\leq 600[m^2/sem] \\ 3Mred + 1Mrec &\leq 500[hs/sem] \\ 4Mrec &\leq 600[esq/sem] \\ Funcional \quad Z_{max} &\Rightarrow 8Mred + 10Mrec \end{aligned}$$

Resolución gráfica

Capítulo 3

Práctica 2 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

2. Modelización

Temario

1- Análisis del enunciado del problema.
2- Resumen de la situación a resolver.
3- Elementos de un modelo.
4- Formulación de hipótesis.
5- Formulación de supuestos.
6- Diferencia entre hipótesis y supuestos.
7- Objetivos únicos.
8- Objetivos múltiples y contradictorios.
9- Definición de variables y parámetros del problema.
10- Condiciones de vínculo.
11- Concepto de actividad.
12- Disponibilidad de materia prima.
13- Demandas y limitaciones de mercado.
14- Condiciones de balance de material.
15- Especificaciones de calidad.
16- Condiciones fuertes y débiles.
17- Condiciones conflictivas.
18- Variables y parámetros.
19- Programación de metas.
20- Dependencia e independencia lineal.
21- Utilización del funcional.
22- Esquema modular.
23- Módulo.
24- Modularidad.
25- Estructura.

Problema Tipo Nº 1

Un fraccionador de whisky importa el licor en tres distintas graduaciones: A, B y C. Mediante la mezcla de éstos, de acuerdo a sus fórmulas, se obtienen los whiskies de calidades comercializables: Escocés, Kilt y Tartan.

Las citadas fórmulas especifican las siguientes relaciones entre los elementos a mezclar:

Marca	**Especificación**	**Precio de venta ($/litro)**
Escocés	No menos del 60 % de A No más del 20 % de C	680
Kilt	No menos del 15 % de A No más del 80 % de C	570
Tartan	No más del 50 % de C	450

Se conocen asimismo las disponibilidades y precios de los licores A, B y C; que se indican en el siguiente cuadro:

Tipo	**Litros disponibles**	**Precio de compra ($/litro)**
A	2.000	700
B	2.500	500
C	1.200	400

<u>Resolución del problema</u>

- <u>*Formulación de hipótesis*</u>
  - *Todo el producto fabricado es vendido. Los stocks permanecen constantes.*
  - *No hay inflación, o si la hay, no afecta las relaciones relativas entre precios y costos.*
  - *Obtendremos una solución aplicable sólo en las circunstancias actuales.*
  - *Si en el futuro variaran las disponibilidades de licor A, B y C habría que resolver el mismo modelo con los nuevos datos.*
  - *No existen restricciones comerciales que obliguen a fabricar cantidades mínimas de ningún whisky (se puede no estar presente en el mercado).*
  - *La mezcla no altera los volúmenes. El volumen resulta de la suma de los volúmenes de los componentes (no existen reacciones químicas).*
  - *No se consideran los costos de mezclar y fraccionar. Esto es válido siempre que sean iguales para cualquier tipo de whisky.*
  - *No hay pérdidas (derrames, evaporaciones, etc.).*
  - *Existe capital y mano de obra, etc., disponibles para hacer toda 1a producción que se quiera.*

<u>*Objetivo*</u> *(está en el enunciado)*

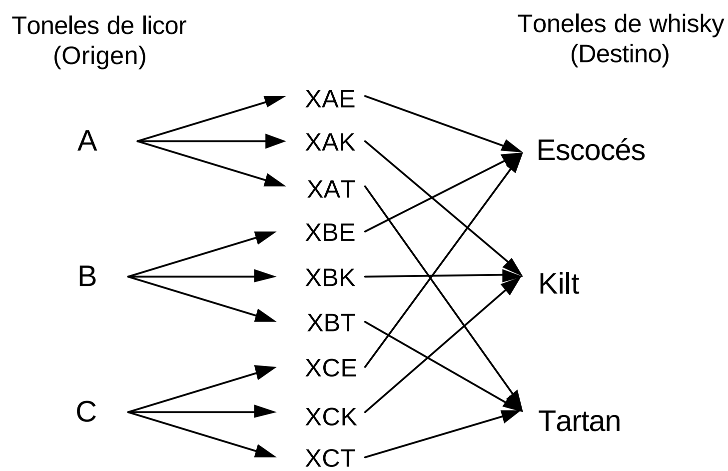
Definir las cantidades de licor A, B y C a destinar y el total a producir de cada marca de whisky para maximizar los beneficios totales por su venta, considerando costos de los licores (no se específica período de tiempo).

Definición de variables y parámetros

*Es un problema de **MEZCLA** en el cual el producto final se obtiene al combinar los ingredientes agregados*

En este tipo de problemas suelen presentarse inconvenientes al definir las variables. Es la principal dificultad que tiene este ejercicio.

Explicación:



Si imaginamos cada línea como una cañería que vincula los toneles origen y destino, la variable X_{AE} será la cantidad de licor A usada para preparar whisky escocés. Idem resto.

Un error muy común es plantear las variables como % de licor A en el whisky escocés. Esto parece funcionar y permite plantear fácilmente las ecuaciones de fórmula, pero lleva siempre a un cociente de variables, cosa que no podemos manejar en P.L.

Estamos interesados en saber cómo se compone todo el escocés que hagamos y no sólo un litro. Si tuviéramos la composición exacta de cada whisky como dato, el problema no estaría resuelto, pues faltaría saber cuánto producir de cada uno.

X_{ij}: cant. de licor i a usar para preparar whisky "j" [i = A, B, C ; j = E, K, T]

Formulación matemática

- *Restricciones de fórmula de cada whisky*

Escocés	X_{AE} ³ $(X_{AE} + X_{BE} + X_{CE})$	*	0.6	[litros/período]
	X_{CE} £ $(X_{AE} + X_{BE} + X_{CE})$	*	0.2	[litros/período]
Kilt	X_{AK} ³ $(X_{AK} + X_{BK} + X_{CK})$	*	0.15	[litros/período]
	X_{CK} £ $(X_{AK} + X_{BK} + X_{CK})$	*	0.8	[litros/período]
Tartan	X_{CT} £ $(X_{AT} + X_{BT} + X_{CT})$	*	0.5	[litros/período]

- *Restricciones de disponibilidad de licor*

Licor A	$X_{AE} + X_{AK} + X_{AT}$ £	2000	[litros/período]
Licor B	$X_{BE} + X_{BK} + X_{BT}$ £	2500	[litros/período]
Licor C	$X_{CE} + X_{CK} + X_{CT}$ £	1200	[litros/período]

- *C.N.N.* X_{ij} ³ O

- *Funcional* ➔ *Maximizar*

  Z = Ingresos por ventas de whiskies - Costos de licores utilizados [$/per]

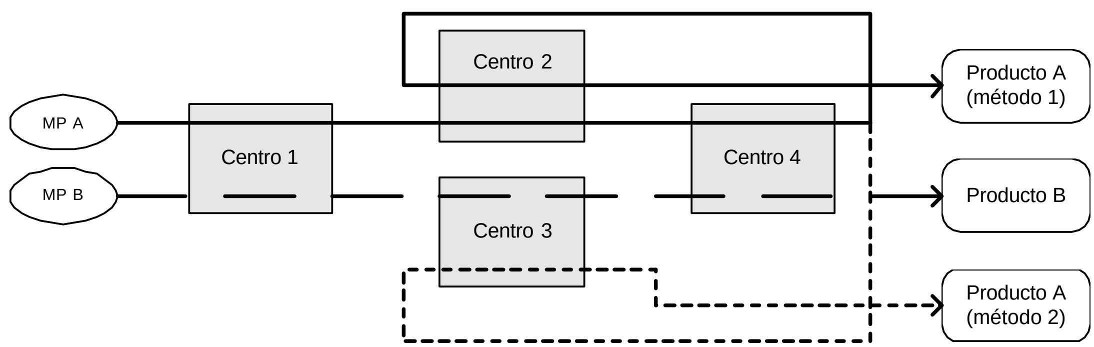
  Ingresos por ventas de whiskies = $(X_{AE} + X_{BE} + X_{CE}) * 680 +$
  $(X_{AK} + X_{BK} + X_{CK}) * 570 +$
  $(X_{AT} + X_{BT} + X_{CT}) * 450$

  Costos de licores utilizados = $(X_{AE} + X_{AK} + X_{AT}) * 700 +$
  $(X_{BE} + X_{BK} + X_{BT}) * 500 +$
  $(X_{CE} + X_{CK} + X_{CT}) * 400$

  Z no es exactamente lo que voy a ganar pues faltan considerar costos (mezclado, embotellado, comercialización, etc.) lo que no invalida al plan que es óptimo dada la información disponible.

Problema Tipo Nº 2

Una empresa fabrica y vende dos productos, A y B cuyo diagrama de proceso es el siguiente:



El producto A puede seguir cualquiera de los dos procesos alternativos de producción, mientras que para el producto B existe un único procedimiento de fabricación.

Se dispone de los siguientes elementos de producción:

Características y rendimiento de los productos según sus procesos

Producto	Centro	Entrada (litros/hora)	Rendimiento (%)	Costo proceso ($/hora)
A	1	300	90	1500
	2 (1ª vez)	450	95	2000
	4	250	85	1800
	2 (2ª vez)	400	80	2200
	3	350	75	2500
B	1	500	90	3000
	3	480	85	2500
	4	400	80	2400

Otros insumos

El centro 1 consume 10 litros de combustible por hora de funcionamiento, y los centros 2, 3 y 4 consumen, respectivamente, 20, 5 y 5 litros por hora. Asimismo, el centro 1 debe ser atendido por un operario, el centro 2 por dos operarios simultáneamente, y los centros 3 y 4 por un operario cada uno mientras están en operación.

Se dispone de 800 litros de combustible diarios y 48 horas-hombre diarias.

Costos, precios de venta y demanda máxima de cada producto

Producto	**Costo de la Materia Prima ($/litro)**	**Precio de Venta ($/litro)**	**Demanda máxima (litros/día)**
A	50	60	1.750
B	60	180	1.500

Disponibilidad de equipos

Al realizarse el estudio se verificó que los centros 1 y 4 pueden funcionar como máximo 16 horas netas por día, y los centros 2 y 3, solamente 12 horas netas por día.

Distribución

Los medios de despacho de la empresa están limitados a una capacidad conjunta para A y B de 2.500 litros diarios.

Se sugiere plantear el problema adoptando como incógnitas las cantidades de cada producto obtenidas al final del proceso. (Ej. PB = litros de producto B).

Se propone repetir el planteo adoptando como incógnitas las cantidades de materia prima que ingresan para producir cada producto. (Ej. MPB = litros de materia prima B).

Análisis complementario

Se pide analizar las modificaciones que introducirán en el planteo original, los siguientes cambios en el sistema.

Existe una posibilidad de recuperar las pérdidas de materia prima B, vendiéndolas a 5 $/litro.

Posibilidad de recuperar las pérdidas del Centro 1, haciéndolas reciclar en ese Centro, con los mismos valores de rendimiento.

Resolución del problema

- *Formulación de hipótesis*
  - *Producción = ventas. Los stocks permanecen constantes.*
  - *Se puede discontinuar un producto (No fabricar).*
  - *No hay inflación, o afecta en igual proporción a costos y precios.*
  - *Los operarios disponibles son capaces de hacer cualquiera de las tareas.*
  - *En las velocidades de procesamiento se tuvo en cuenta el tiempo de pasar de un producto a otro (limpiar y acondicionar el Centro).*
  - *Los rendimientos están calculados como salida/entrada.*
  - *Se dispone de capital, proveedores de materias primas y otros recursos necesarios no contemplados para poder cumplir con la producción óptima.*
  - *Las capacidades de cada Centro se consideran a la entrada.*

- *No se consideran los costos de mano de obra, despacho, movimiento de materias primas, etc.*
- *No hay pérdidas entre los procesos (cañerías).*

Objetivo

Determinar el plan de producción diario de A y B que maximice el margen de beneficios por su venta, considerando disponibilidades de M.P., centros de proceso y despacho costos de procesamiento y materias primas.

☞ *Indicar: qué se hace?, para qué?, y en qué horizonte de tiempo?*

Es un problema de CENTROS DE PRODUCCIÓN en el cual el proceso productivo se descompone en distintas partes que son como "mini-modelos" cada una con sus entradas, sus salidas, sus condiciones de mezcla y rendimiento.

Definición de variables y parámetros

Las variables se pueden tomar en cualquier punto del proceso. Acá tomamos la sa1ida y el producto A abierto en método 1 y método 2. Comenzaremos a utilizar algunas ideas del "Planteo expandido" con el doble objetivo de ir introduciendo los conceptos y de simplificar la modelización.

Variable	Descripción	Unidad
Pal	*Producción A según Método 1*	*[lts/día]*
PA_2	*Producción A según Método 2*	*[lts/día]*
PB	*Producción B Total*	*[lts/día]*
PA	*Producción A Total (Cualquier método)*	*[lts/día]*
HPC_4	*Horas que funciona el Centro 4* *Idem para Centros 1 a 3.(HPC_1, HPC_2, HPC_3)*	*[hs/día]*
$A1_4$	*Salida Centro 4 para producir A según método 1* *Idem A_1, B_1, A_2, B_3, $A2_4$, B_4, $A2_3$, $A1_3$* *Notar que B_4 = PB, $A1_2$ = PAl y $A2_3$ = PA_2*	*[lts/día]*
MPA	*Cantidad de M.P. utilizada para fabricar prod.A* *Idem MPB*	*[lts/día]*

Formulación matemática

(Controlar en cada caso la homogeneidad de unidades).

- *Producción A*

$$PA = PA_1 + PA_2$$

- *Demanda máxima*

Producto A: PA £ 1750 [lts/día]

Producto B: PB £ 1500 [lts./día]

- *Despacho*

$PA + PB$ £ 2500 [lts/día]

- *Capacidad de cada Centro*

(Como se optó por variables a la salida, conviene ir de atrás hacia adelante). Se divide la salida por el rendimiento y se obtiene el valor a la entrada, este valor será el de salida del proceso anterior si suponemos que no hay pérdidas entre los procesos.

$$Rendimiento = \frac{Salida}{Entrada} \quad \Rightarrow \quad Entrada = \frac{Salida}{Rendimiento}$$

- *Ecuaciones de balance de cada producto y cada Centro*

A)

$$\frac{PA1}{0,80} = A1_4 \quad ; \qquad \frac{PA2}{0,75} = A2_4 \quad ; \qquad A_2 = \frac{A1_4 + A2_4}{0,85}$$

$$\frac{A_2}{0,95} = A_1 \quad ; \qquad \frac{A_1}{0,90} = MPA \qquad\qquad [lts./día]$$

B)

$$\frac{PB}{0,80} = B_3 \quad ; \qquad \frac{B_3}{0,85} = B_1 \quad ; \qquad \frac{B_1}{0,90} = MPB \qquad [lts./día]$$

- *Cantidad de horas que trabaja cada Centro por día*

Centro 1) $\frac{MPA}{300} + \frac{MPB}{500} = HPC_1$ *[hs/día]*

Centro 2) $\frac{A_1}{450} + \frac{A1_4}{400} = HPC_2$ *[hs/día]*

Centro 3) $\frac{B_1}{480} + \frac{A2_4}{350} = HPC_3$ *[hs/día]*

Centro 4) $\frac{A_2}{250} + \frac{B_3}{400} = HPC_4$ *[hs/día]*

Capacidad Centro 1) HPC_1 *£ 16* *[hs/día]*

Capacidad Centro 2) HPC_2 *£ 12* *[hs/día]*

Capacidad Centro 3) HPC_3 *£ 12* *[hs/día]*

Capacidad Centro 4) HPC_4 *£ 16* *[hs/día]*

- *Consumo de combustible*

$10\ HPC_1 + 20\ HPC_2 + 5\ HPC_3 + 5\ HPC_4$ *£ 800 [lts./día]*

- *Horas hombre disponibles*

$1\ HPC_1 + 2\ HPC_2 + 1\ HPC_3 + 1\ HPC_4$ *£ 48 [hs hombre / día]*

- *C. N. N*

Todas las variables ³ 0

- *Objetivo*

Z= Ingresos - Egresos ➔ Máx *[$/día]*

Ingresos = 60 PA + 180 PB *[$/día] = [$/lt. x lts/día]*

Egresos = Costo MP + Costo proceso

Costo MP = 50 MPA + 60 MPB *[$/día] = [$/lt x lts/día]*

Costo proceso $= 1500\dfrac{\text{MPA}}{300} + 2000\dfrac{\text{A}_1}{450} + 1800\dfrac{\text{A}_2}{250} + 2200\dfrac{\text{A1}_4}{400} +$

$$+ 2500\frac{A2_4}{350} + 3000\frac{MPB}{500} + 2500\frac{B_1}{480} + 2400\frac{B_3}{400}$$

$$\left[\frac{\$}{hora} * \frac{lts./día}{lts./hora}\right] = \left[\frac{\$}{día}\right]$$

Obviamente se podría utilizar una variable que indicara cuántas horas trabaja cada Centro en cada proceso. Las formas de expandir un modelo son muchas y pueden ser muy distintas unas de otras. Todo depende de la forma en que nos guste trabajar y del uso posterior que hagamos del modelo.

(Si adoptamos variables a la entrada, queda todo igual salvo que multiplicamos por los rendimientos en lugar de dividir)

- *Posibilidad de recuperar pérdidas de mat. prima B vendiéndolas a 5 $/litro*

  Pérdidas MPB: Materia prima B comprada - PB Þ PMPB = MPB - PB

  En Z agrego + 5 PMPB [$/día]

  (N0TA: hemos considerado la pérdida en todos los procesos.)

- *Posibilidad de evitar las pérdidas del Centro 1.*

  Implica que a los fines del uso de M. P. en ese Centro el rendimiento es 1.

  O sea en las ecuaciones que tienen que ver con MP usar 1 en lugar de 0.9 (Productos A y B).

  Ejemplo rendimiento actual del Centro 1

  $$E = 100 \longrightarrow \boxed{C1} \longrightarrow S = 90$$

  $$Rendimiento = 0{,}90 = \frac{Salida}{Entrada}$$

  Si la salida es X, entonces

  $$Entrada = \frac{X}{0{,}90}$$

☞ *¿Cuánto hay que entrar para sacar X?*

- *Reciclar las pérdidas en el Centro 1.*

  En este caso cambiaría el balance del centro quedando:

  A1 = MPA y B1=MPB

  La ecuación de horas del centro sería

  HPC1 = (MPA/300 + MPB/500) 1/0,9

"Reglas del método

1- No aceptar nunca como verdadero b que con toda evidencia no se reconociese como tal. (Regla de la evidencia)

2- Dividir cada una de las dificultades que hallase a mi paso en tantas partes como fuere posible y requiriera su más fácil solución. (Regla del análisis)

3- Ordenar los conocimientos, empezando por los mas simples, para elevarme poco a poco, gradualmente hasta el conocimiento de los mas compuestos, incluso suponiendo un orden entre aquellos que no se preceden naturalmente. (Regla de la síntesis)

4- Hacer siempre enumeraciones tan completas y revisiones tan generales, que se pueda tener la seguridad de no haber omitido nada. (Regla de la verificación)"

Discurso del método – René Descartes

"Todo es relativo"

Albert Einstein

Problemas a resolver

2.1.

Un taller de tejido elabora varios modelos de pullóver. Estos modelos de pullóver se pueden agrupar, desde un punto de vista técnico-económico, en tres tipos diferentes de prendas, a los cuales llamaremos A, B y C.

El taller posee dos máquinas (I y II). Los pullóveres A sólo pueden hacerse en la máquina I, los C sólo pueden hacerse en la máquina II y los B pueden hacerse tanto en la máquina I como en la II.

Las dos máquinas trabajan dos turnos por día, 8 horas en cada turno, de lunes a viernes.

La materia prima utilizada es lana de dos calidades distintas (Mejorada y Normal). La lana Mejorada se utiliza para los pullóveres de tipo A y C. Los pullóveres de tipo B se hacen con lana Normal. De la lana Mejorada se pueden conseguir hasta 20 kg./semana y de la lana Normal hasta 36 kg./semana.

Existe un compromiso de entregar 10 pullóveres B por semana a un importante distribuidor.

No es necesario que las prendas que comienzan a fabricarse en una semana se terminen durante la misma, es decir que pueden quedar pullóveres a medio hacer de una semana para la próxima.

Los estándares de producción y materia prima y los beneficios unitarios para cada tipo de pullóver, se indican en el siguiente cuadro:

Tipo de pullóver	**Estándar de producción hs/pullover**		**Estándar de materia prima kg/pullover**		**Beneficio unitario $/pullover**
	Máquina I	**Máquina II**	**Mejorada**	**Normal**	
A	5	—	1,6	—	10
B	6	4	—	1,8	15
C	—	4	1,2	—	18

¿Qué es lo mejor que se puede hacer con la información disponible?

2.2.

"Copani", una compañía dedicada a la minería, explota tres yacimientos (Sierra Alta, Sierra Chica y El Abra), de cada uno de los cuales obtiene un mineral que contiene cuatro metales: Cobre, Estaño, Manganeso y Zinc. Con estos cuatro metales, y siguiendo las especificaciones que pueden verse en el cuadro que figura a continuación, Copani elabora dos aleaciones: A y B.

Aleación	**Especificaciones**
A	Como máximo 80% de Cobre
	Como máximo 30% de Estaño
	Como mínimo 50% de Zinc
B	Entre 40% y 60% de Estaño
	Como mínimo 30% de Manganeso
	Como máximo 70% de Zinc

La proporción de cada metal que está en el mineral depende del yacimiento del cual proviene ese mineral. La siguiente tabla indica esos datos, así como los costos de extracción de mineral:

Mineral	**Máximo Disponible (toneladas)**	**Porcentaje de Metal**					**Costo $/Tonelada**
		Cobre	**Estaño**	**Manganeso**	**Zinc**	**Otros**	
Sierra Alta	1000	20	10	30	30	10	10
Sierra Chica	2000	10	20	30	30	10	40
El Abra	3000	5	5	70	20	0	50

La aleación A se vende a $A por tonelada y la aleación B a $B por tonelada. Con la información indicada: ¿Qué es lo mejor que puede hacer "Copani"?

☞ *Para facilitar el análisis se incluyen las siguientes definiciones:*

- *Aleación: Producto homogéneo de propiedades metálicas, compuesto de dos o más elementos, uno de los cuales, al menos, debe ser un metal. Ej: Bronce, Acero.*
- *Metal: Cada uno de los elementos químicos, buenos conductores del calor y de la electricidad. Ej: Oro, Cobre, Hierro.*
- *Mineral: Sustancia inorgánica que se halla en la superficie o en diversas capas de la tierra, cuya explotación ofrece interés. Ej: Ferrita, Pirita*

2.3.

Tu grupo de Modelos I quiere entrar al negocio de los dulces. Se está considerando producir dos tipos de dulces: Candy y Sweety, que se componen solamente de azúcar, nueces y chocolate.

Actualmente se cuenta con 100 kg. de azúcar, 20 kg. de nueces y 30 kg. de chocolate.

La mezcla para producir Candy tiene que contener por lo menos un 20% de nueces.

La mezcla para producir Sweety tiene que contener por lo menos un 10% de nueces y por lo menos un 10% de chocolate.

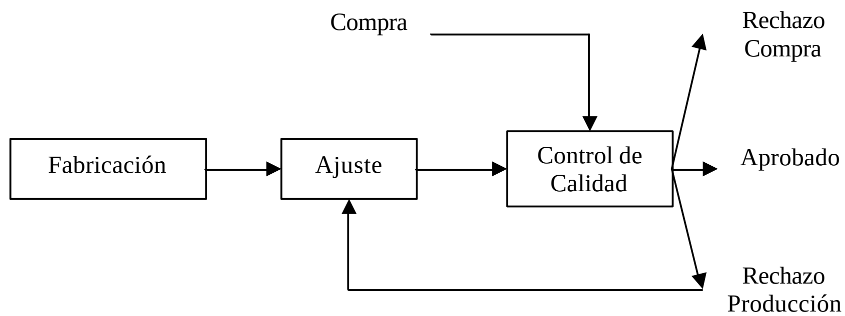
Cada kg. de mezcla de Candy se vende a 25 pesos y cada kg. de mezcla de Sweety se vende a 20 pesos.

¿Qué es lo mejor que se puede hacer con los datos disponibles?

2.4.

Una fábrica de automotores cuenta con un taller propio para la producción de los tableros de los vehículos que fabrica, tarea que también puede encomendarse a proveedores.

El proceso de fabricación de tableros es el siguiente, para cualquier tipo de tablero.



Los tableros comprados, pasan también por el mismo sector de Control de Calidad.

La fábrica necesita cuatro tipos de tableros A, B, C y D, para los que se cuenta con los datos referentes a sus tiempos de fabricación, ajuste y de control de calidad, en horas/tablero, tal como se muestra en la tabla siguiente:

Tablero	**Fabricación**	**Ajuste**	**Control de Calidad**	
			Producción	**Compra**
A	0,34	0,08	0,02	0,03
B	0,38	0,06	0,03	0,05
C	0,47	0,10	0,03	0,04
D	0,50	0,12	0,03	0,04
Disponibilidad horas	6.500	1.000	600	

La fábrica necesita **exactamente** 4.000 tableros A, 3.000 tableros B, 8.000 tableros C y 5.000 tableros D.

Los costos de producción y compra son los siguientes, medidos en $:

	A	**B**	**C**	**D**
Producción	50	60	120	100
Compra	80	75	180	80

Un registro estadístico de Control de Calidad indica que el 90% de los tableros producidos por la fábrica son aprobados, y el resto debe repetir la operación de ajuste y su posterior control de calidad.

Con respecto a los tableros comprados, es aprobado el 80% y el resto es devuelto al proveedor siendo controlado nuevamente al ser reintegrado por el proveedor. Para un tablero reajustado, el porcentaje de aprobación es el mismo indicado.

☞ *Recomendado: obtené una solución óptima para este problema utilizando un software de resolución de problemas lineales (LINDO).*

2.5.

"Takayama", una tintorería textil cuenta con dos tipos de Estampadoras: Rápidas y Lentas. Dispone de 70 estampadoras Rápidas y 60 Lentas.

Aclaremos que estampar consiste en imprimir dibujos con colores sobre tela cruda, de modo que el rollo de tela cruda va pasando por la estampadora y ésta le va imprimiendo el dibujo con los colores y formas seleccionados.

Takayama ha tomado dos trabajos para hacer: Dibujo Snoopy y Dibujo Scooby. Cada uno de estos estampados se puede hacer en una máquina de cualquiera de los dos tipos, sólo que la eficiencia será distinta según el tipo. Una máquina Rápida estampa R m. de dibujo Snoopy por hora. Una máquina Lenta estampa 2 m. de dibujo Snoopy por hora. Una máquina Rápida estampa 7 m. de dibujo Scooby por hora. Una máquina Lenta estampa L metros de dibujo Scooby por hora. Una misma estampadora (sea Rápida o Lenta) no puede destinarse en el mismo día a trabajar en dos tipos distintos de dibujo. Cada metro de tela Snoopy se vende a $K y un metro de tela Scooby se vende a $M.

Para mañana le han pedido a Takayama que entregue 10000 metros de tela Snoopy y 9000 metros de Scooby. Tiene todo el día de hoy (ocho horas) para trabajar.

¿Qué es lo mejor que puede hacer con la información disponible?

2.6.

Una empresa de productos multimedia está planeando el lanzamiento de un producto, llamado CEM, que está compuesto por un CD, una caja que contiene al CD y celofán que envuelve la caja. El plan indica que se utilizará medio mes para la producción, previa al lanzamiento.

La etapa de desarrollo ya está finalizada y se ha obtenido un CD master con 420 Mb grabados con programas. El CD master de CEM está compuesto por programas educativos, programas de información general y programas de juegos. Luego de la producción (en la cual se obtienen las copias del master que se destinarán a la venta), se hará una fiesta de lanzamiento vendiendo los productos CEM a un precio de $50 por unidad de producto.

La producción comprende la grabación de las copias (a partir del master) y el armado.

La grabación de las copias se realiza en una máquina, a un costo de $5 por CD, a una velocidad de VG CD por día.

El armado se realiza en forma manual, a razón de T1 productos por día y por persona. La empresa cuenta con N operarios para esta tarea. La tarea de armado consiste en colocar cada CD en una caja y se envuelve usando 40 cm de celofán. El celofán utilizado viene en bobinas de ancho estándar. Los costos son de $CCJ por caja y $CCF por metro de celofán. Un operario cobra 5$ la hora. De los N operarios, es necesario destinar una cantidad para el control de la máquina de grabación de CD. Se necesita 1 operario por cada D días que trabaje la máquina. Los operarios que están en la máquina cobran $50 por día.

Se sabe que la demanda mínima estimada de CEM en la fiesta de lanzamiento será de 50 unidades y la máxima, también estimada, de 165 unidades.

¿Qué es lo mejor que se puede hacer con la información disponible?

2.7.

"Tasmania", una empresa de muñecos de peluche, quiere planificar la producción de sus famosos muñecos de para los próximos dos meses. Fabricar un muñequito les insume 2 horas máquina y 1,5 kg. de materia prima. Por mes se puede disponer de 150 kilos de materia prima y de M horas máquina. El primer mes se comprometió a entregar 70 muñequitos y el segundo mes el compromiso asciende a 110 muñequitos. Puede vender más de lo comprometido, pero no menos. Cada muñequito vendido le reporta una ganancia de $P.

¿Qué es lo mejor que puede hacer "Tasmania" con la información disponible?

2.8.

En una ciudad existen tres colegios secundarios; a dos de ellos asisten principalmente varones y al otro mayormente mujeres. El Consejo Escolar ha decidido redistribuir las zonas escolares con el fin de favorecer la integración de los alumnos de ambos sexos. Las nuevas zonas se aplicarán exclusivamente a los estudiantes que entren a los colegios secundarios en el futuro, de modo de lograr un adecuado balance entre hombres y mujeres. Asimismo interesa que los estudiantes viajen lo menos posible.

Para solucionar este problema, el Consejo Escolar requiere el apoyo de especialistas. Estos dividieron la ciudad en diez regiones geográficas y basados en los alumnos que concurren al ciclo primario recabaron, obtuvieron y sintetizaron la siguiente información:

Región	**Nº Varones**	**Nº Mujeres**	**Distancia media en km a escuela**		
			1	**2**	**3**
1	300	150	1,2	1,5	3,3
2	400	0	2,6	4,0	5,5
3	200	300	0,7	1,1	2,8
4	0	500	1,8	1,3	2,0
5	200	200	1,5	0,4	2,3
6	100	350	2,0	0,6	1,7
7	250	200	1,2	1,4	3,1
8	300	200	3,5	2,3	1,2
9	150	250	3,2	1,2	0,7
10	350	100	3,8	1,8	1,0
Capacidad de la escuela			1.500	2.000	1.300

Los especialistas entienden que el nivel de un sexo cualquiera, en cada escuela, debe estar entre un mínimo de 40% y un máximo de 60% del total de alumnos.

2.9.

Una empresa ha resuelto realizar una inversión en forestación. Para ello ha arrendado 1.000 hectáreas de tierra por 50 años a un costo de 40 millones de pesos, pagaderos en dos cuotas iguales; la primera a los 25 años y 1a segunda al concluir el contrato.

El terreno alquilado es apto para plantar tres tipos distintos de árboles: álamos, pino Brasil y eucaliptos. Se ha decidido realizar la explotación en dos etapas de 25 años cada una, plantando todo el terreno cada vez.

El campo cuenta con algunos árboles que serán talados inmediatamente, se espera obtener por ellos 1 millón de pesos, Se estima que la madera que produce un álamo en 25 años se puede vender a $ 30.000, la que produce un pino Brasil a $ 50.000 y la de un eucalipto a $ 60.000.

Por hectárea se pueden sembrar, como máximo, 400 álamos o 450 pinos Brasil o 300 eucaliptos y los rendimientos (cantidad de árboles que llegan a tener el tamaño suficiente para ser explotados, por cada 100 árboles plantados) son de 80% para los álamos, 75% para los pinos Brasil y 90% para los eucaliptos.

La ley de forestación exige que, por lo menos, un 10% de 1a superficie esté ocupada por álamos. Además la empresa sabe que la demanda de pinos es, normalmente, el doble de la demanda de eucaliptos. Se presume que dentro de 25 años no existirá más la reglamentación que exige un 10% de la superficie ocupada por álamos y se estima que el precio de venta del eucalipto se duplicara (a moneda constante).

☞ *Análisis posterior: ¿Cómo se alteraría el modelo si en el año número diez se instituye un impuesto de $ 500 por cada eucaliptos talado?*

2.10.

Un amigo florista se dedica a comprar flores al por mayor en un mercado. Con esas flores arma ramos que vende al público. Los precios actuales, por cada atado de flores (así como la cantidad de flores por atado), son los siguientes:

Tipo de flor	$/atado	Cant. Flores/atado
Rosas de Tallo largo	20	20
Rosas Amarillas	20	50
Rosas Rojas	10	50
Crisantemos	5	100
Margaritas	3	100

Los ramos que arma el florista son una creación propia. Tiene siete tipos de ramos, y para cada uno definió una composición (en términos de cuántas flores de cada tipo necesita para armar un ramo de cada tipo) y estudió cuál puede ser la demanda máxima diaria. Eso se muestra en el siguiente cuadro:

Tipo de ramo	Demanda máxima (estimada)	Precio de venta ($/ramo o $/unidad)	Composición de un ramo de ese tipo
Rosas tallo largo	650	3	Por unidad
Rosas amarillas	350	10	Ramos de 9 rosas
Rosas rojas	250	8	Ramos de 7 rosas
Crisantemos	600	3	Ramos de 18 crisantemos
Ramos chicos	1100	2	6 crisantemos y 8 margaritas
Ramos medianos	990	4	10 crisantemos, 10 margaritas y 2 rosas
Ramos grandes	625	6	15 margaritas, 10 crisantemos y 5 rosas

¿Qué es lo mejor que puede hacer el florista con la información disponible?

☞ *Análisis previo: comenzar la resolución del ejercicio, realizando un esquema que describa la situación problemática.*

2.11.

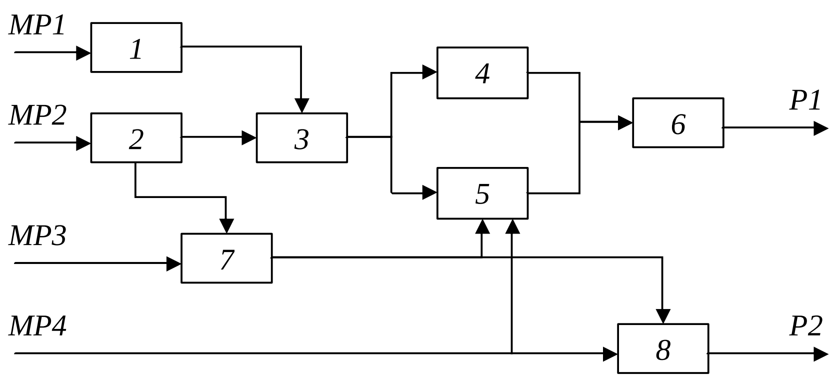
Nuestro amigo florista decide enfrentar la crisis vendiendo también por la tarde, pues le dijeron que si en este nuevo horario baja sus precios un 30%, se asegurará una demanda en todos los casos, equivalente al 20% de la demanda de la mañana.

Hoy va a ser su primer día con esta rutina. Dispone de $A para comprar flores y sabe que tiene que pagar una cuenta de $B. Como pretende empezar el día de mañana con la misma cantidad de dinero que hoy, si no le alcanza, deberá pedir prestado el dinero que le falte, pagando un interés del 10% adelantado (o sea al recibir el dinero). Si le sobra dinero, puede prestarlo a otros al 8% adelantado.

¿Cómo se modifica tu modelo del problema anterior?

2.12.

Una fábrica elabora dos productos químicos, a los cuales, a falta de mejor imaginación, llamaremos P_1 y P_2 a partir de cuatro materias primas (MP_1, MP_2, MP_3 y MP_4) siguiendo el proceso que se describe a continuación:



En el centro 3 se mezclan los resultados de los centros 1 y 2 en la proporción (70/30). A la salida del centro 3, el resultado se separa para ir a los centros 4 y 5 respectivamente. En el centro 5 se mezclan los resultados de los centros 3 y 7 con la materia prima MP_4 en la proporción 60/20/20.

En el centro 7 se mezclan el resultado del centro 2 y la materia prima MP_3 en la proporción 90/10.

En el centro 8 la mezcla se produce por partes iguales, al igual que en el centro 6.

En el centro 7 se produce una merma del 5% de todo lo que ingresa.

Al inicio del período de planeamiento se tiene la posibilidad de vender la materia prima que no se empleará en el proceso a los siguientes precios: 8$/kilo para MP_1, 7$/kilo para MP_2, 2 $/kilo para MP_3 y 15$/kilo para MP_4.

El costo de almacenamiento por kilo de materia prima para un mes es de 3 $/kilo para MP_1, 8 $/kilo para MP_2, 10 $/kilo para MP_3 y 6 $/kilo para MP_4. Se asume que la materia prima consumida está ½ mes en promedio, en almacenes.

El costo de materia prima es de 4 $/kilo para MP_1, 5 $/kilo para MP_2, 1 $/kilo para MP_3 y de 6 $/kilo para MP_4. Las cantidades de materia prima disponibles para su compra son de 2000 kilos/mes para MP_1, 3000 kilos/mes para MP_2, 1500 kilos/mes para MP_3 y 2500 kilos/mes para MP_4.

A continuación se indica la velocidad de proceso de cada uno de los centros y la cantidad de horas disponibles para procesar, mensualmente, en cada uno de ellos:

Centro	Velocidad de proceso (kg/hora)	Disponibilidad (horas/mes)
1	10	300
2	15	150
3	20	180
4	12	250
5	18	240
6	20	120
7	10	100
8	15	280

Los precios de venta para los productos son: 10 \$/kg. para P_1 y 15 \$/kg. para P_2.

Existe un compromiso para vender al menos 30 kg. de P_1 y 40 kg. de P_2. Además, por razones de política comercial, la cantidad fabricada de P_1 debe ser a lo sumo igual a la mitad de P_2.

2.13.

BERRECEL S.A. produce hidroxietilcelulosa, insumo que es utilizado tanto por la industria del cosmético como por la industria de la construcción, vendiéndose para la 1ª a un precio de 5.000 \$/ton y a la 2ª a 3.800 \$/ton. Históricamente sabe que el 60% de las empresas de construcción retiran en planta y el 40% restante lo debe distribuir con sus propios camiones, recargando un 10% el precio, estimando el costo del servicio de distribución en un 2% del precio. En cambio el 100% de lo que retira la industria de cosméticos tiene incluido el valor del flete.

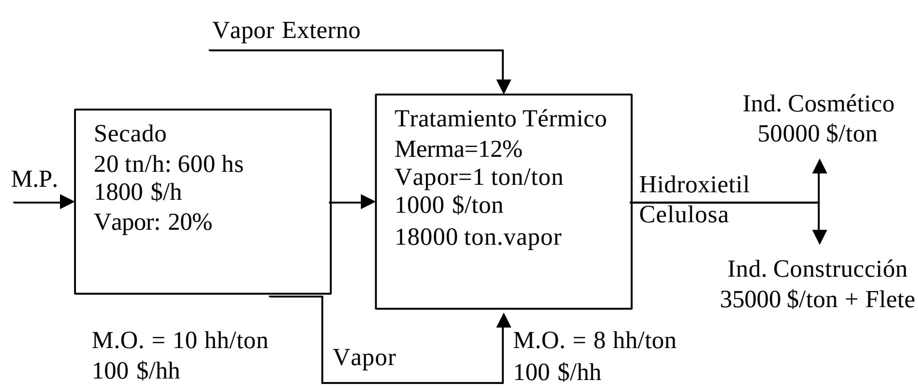
La materia prima básica es la hidroxietilcelulosa hidratada, la que es provista sólo por dos productores nacionales: "El Mago" SA y "Sálvese" SRL. Se desea que sus compras sean como mínimo 10% a cada uno.

Los costos y precios de los mismos se detallan en el siguiente cuadro:

	Precio \$/Ton	Flete \$/Km x Ton				Disponibilidad Mensual
		Tren		Camión		
		Tarifa	Distancia	Tarifa	Distancia	
El Mago SA	12.500	10	100	8	120	10.000
Sálvese SRL	12.400	10	120	10	120	5.000

El tren le asignó una cuota mensual de transporte de 4.500 ton.

La materia prima es sometida al proceso indicado en el siguiente diagrama:



- Secado: de cada tonelada que se procesa se separa un 20% de vapor, que se reinyecta en el proceso siguiente. El caudal de ingreso es de 20 ton/hora y trabaja 600 horas al mes. El costo por hora es de $1800. En cuanto a la M.O. requiere 10 horas hombre/ton a un costo de 100 $/hora.

- Tratamiento térmico: se realiza con vapor que recalienta serpentinas. Hay una merma en el proceso del 12%. Consume vapor: 1 tonelada de vapor/ton que se procese. El costo del vapor del proceso anterior se considera nulo y el vapor generado "ad hoc" 1000 $/ton. Existe una capacidad de generación de vapor de 18.000 ton. Del sobrante se pueden vender hasta 3.000 ton. a 1.200 $/ton. M.O. directa insume 8 h/ton a 100 $/hora.

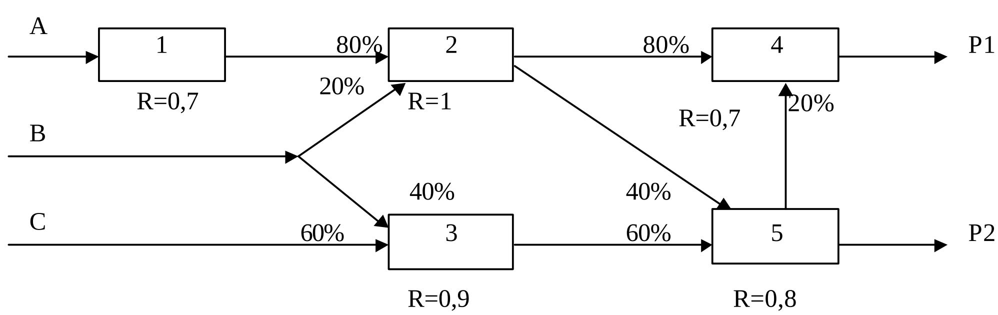
A continuación, se detallan la situación financiera y la comercial de la empresa:

Situación Financiera	Se vende al contado a la industria del cosmético y a 15 días a la de la construcción.
	Se ha decidido tener una caja mínima de $100.000 El exceso se coloca al 1% mensual y el déficit lo toma al 1,2%. El déficit no puede ser superior a $25.000.
Situación Comercial	Compromisos contraídos: Debe entregar como mínimo 4.000 toneladas a la industria de la construcción y 2.000 ton a la de cosméticos.
	Demanda máxima Construcción: 7.000 ton.
	Demanda máxima Cosméticos : 3.500 ton.

☞ *NOTA CULTURAL: Ad hoc es una expresión latina que podría traducirse como "A tal efecto" y designa algo que se hace con un propósito específico.*

2.14.

Una industria química parte de 3 materias primas: A, B y C para producir los productos P_1 y P_2. El esquema muestra el proceso que se realiza a través de 5 centros:



Asimismo se indica el rendimiento de cada centro y la proporción en que se mezclan las distintas materias:

Centro	Velocidad de Producción (litros por hora)	Disponibilidad (horas por semana)
1	10	70
2	20	50
3	25	35
4	30	60
5	20	50

Se desea que los equipos 4 y 5 trabajen como mínimo 10 hs./semana.

El centro 1 es atendido por 1 operario, el 4 y el 5 por 2 operarios cada uno y el 2 y el 3 pueden ser atendidos simultáneamente por un solo operario. La empresa cuenta con N horas–hombre semanales.

El centro 5 consume 1000 litros de vapor de agua a 200 ºC por hora. Se cuenta con 50.000 litros semanales de vapor de este tipo, si se usan menos de 50.000 litros se tiene un costo de 1 $/ litro que se use de menos. Si se usan mas de 50.000 litros, cada litro adicional cuesta $2.

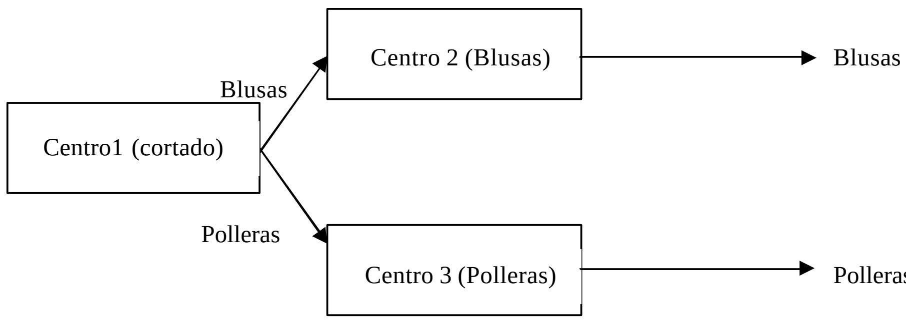
El precio de venta para P_1 es de 90 $/litro y para P_2 es de 120 $/litro.

El costo de la materia prima A es de 15$ litro, el de la materia prima B es de 20 $/litro y el de la C es de 25 $/litro.

Se paga a cada operario 3 $/hora. Se deben pagar las N horas disponibles se trabaje o no. La cantidad de materia prima disponible es: A 2.000 litros por semana, B 3.000 litros por semana y C 3.000 litros por semana

2.15.

Sir William tiene que resolver un problema en su línea de uniformes femeninos. El gráfico siguiente muestra cómo es la línea:



Por el Centro 1 ingresa la tela que se usa para cortar polleras y blusas. Cada Blusa lleva X_1 metros de tela y cada pollera lleva X_2 metros de tela. Los tiempos unitarios (la unidad es una blusa cortada o una pollera cortada, según corresponda) son de A horas/máquina por pollera cortada y de B horas/máquina por blusa cortada. La capacidad diaria de producción para el centro 1 es de 400 horas máquina.

El Centro 2 es el de costura de Blusas. El tiempo unitario de procesamiento es de C hh/u.

El Centro 3 es el de costura de Polleras. El tiempo unitario de procesamiento es de D hh/u.

Los centros 2 y 3 son manuales. Su capacidad diaria de procesamiento depende de la cantidad de operarios con los cuales cuentan (cada operario trabaja 8 horas por día). Ninguno de los centros puede tener menos de 20 operarios.

Se conocen los costos por metro de tela, los costos por hora de procesamiento usada en cada centro y los precios de venta unitarios ($$P_1$ para las Blusas y $$P_2$ para las Polleras).

Por una cuestión sindical, cada centro tiene que tener asignados 20 operarios, aunque alguno de los centros necesite menos operarios. Por este motivo, si a alguno de los centros le sobran horas hombre, pueden usarse en otro centro, pero cada hora hombre de un centro que se use para el otro rinde como media hora hombre.

¿Qué es lo mejor que se puede hacer con la información disponible?

☞ *Pregunta adicional: cuando se resuelve el modelo, Sir William ve que el producto que más se vende es el que tiene menor beneficio (precio de venta - costo de fabricación). Sabiendo que esto tiene una explicación lógica ¿cuál es esa explicación?*

2.16.

Una empresa vende un único producto. Para planificar y organizar la producción del mismo cuenta con un pronóstico trimestral de ventas para el año próximo. La demanda de un trimestre puede ser satisfecha con unidades producidas en el mismo trimestre o con unidades producidas en trimestres anteriores. La capacidad de almacenamiento está limitada a 5.000 unidades de producto.

La producción programada para el cuarto trimestre del corriente año es de 6.000 unidades y se quiere que el nivel de inventarios a fin del año próximo sea de 1.000 unidades.

Incrementar en una unidad la capacidad productiva, de un trimestre a otro, cuesta 1$/unidad y disminuir en una unidad la capacidad productiva, de un trimestre a otro, cuesta 0.50 $/unidad

El pronóstico trimestral para el año próximo es el que se indica a continuación:

Trimestre	Pronóstico de Ventas (unidades)
1º	9.000
2º	24.000
3º	20.000
4º	7.000

Se quiere definir el programa de producción trimestral que haga mínimo el costo de variaciones del nivel de producción y que asegure un stock suficiente para satisfacer las cantidades pronosticadas de ventas.

2.17.

El encargado de un supermercado está organizando el trabajo para los próximos días viernes, sábado y domingo. Cuenta con 18 empleados. Las tareas a realizar cada día son las siguientes:

Reponer mercadería (viernes, sábado y domingo).

Ordenar mercadería (viernes y domingo).

Marcar códigos en la mercadería (viernes, sábado y domingo).

Está probado que el personal que cambia de tarea (de un día para otro) aumenta su eficiencia en un 10 % (se aburre menos).

La eficiencia normal de un empleado en cada tarea y la tarea total diaria a realizar son:

		Tarea a realizar por día (total)		
Tarea	**Eficiencia**	**Viernes**	**Sábado**	**Domingo**
Reponer	15 u/h	A unidades	500 unidades	350 unidades
Ordenar	30 u/h	300 unidades	—	C unidades
Marcar	35 u/h	150 unidades	139 unidades	143 unidades

El personal propio tiene un costo de $ 12 por día. Sólo cobran los que trabajan. La jornada de trabajo es de 8 horas.

¿Qué es lo mejor que se puede hacer con la información disponible?

☞ *Análisis previo: comenzar la resolución del ejercicio, realizando un esquema que describa la situación*

2.18.

Una empresa dispone de 27 máquinas para realizar 3 artículos distintos. Para los próximos 3 días debe cumplir con los siguientes pedidos (considerar que cuenta con stock de algunos artículos)

	Stock Inicial	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**
Articulo 1	20	40	50	20
Articulo 2	—	10	20	40
Artículo 3	15	5	5	25

Las máquinas se desajustan con el paso de los días, a medida que se usan, y esto hace variar su rendimiento. Quiere decir que el día que comienzan a producir un artículo determinado, tienen una producción mayor que el segundo día y el segundo producen más que el tercero. Por política de la empresa sólo se ajusta una máquina cuando se le cambia el articulo que produce.

	Rendimiento de cada día		
	1er dí a	**2do día**	**3er día**
Artículo 1	2,2	2	1,8
Artículo 2	3	2,5	2
Artículo 3	2,3	2,1	1,7

El costo de ajustar una máquina es de $ 200. No se puede posponer ni adelantar la entrega de un producto, el incumplimiento genera un costo de 30, 40 y 50 $/unidad según se trate del articulo 1, 2 ó 3 respectivamente.

☞ *Análisis previo: comenzar la resolución del ejercicio, realizando un esquema que describa la situación*

☞ *Variante: plantear el modelo considerando que se elimina la política de la empresa por la cual las máquinas se ajustan sólo cuando se cambia de artículo.*

2.19.

Una papelera produce bobinas standard de 215 cm de ancho (las bobinas son rollos de papel). Sin embargo, a determinados compradores se les preparan bobinas de un ancho menor al standard, por lo cual las bobinas de 215 cm de ancho deben ser cortadas. Para ello se cuenta con una máquina cuyas cuchillas de corte pueden ser ajustadas para cualquier combinación de anchos, mientras la suma de esos anchos no exceda el ancho del rollo. Esta máquina no tiene limitaciones en cuanto a la cantidad de cuchillas a colocar y en cuanto a la cantidad de metros que tenga el rollo a cortar.

Todo papel que tenga un ancho no comercializable (es decir, que tenga un ancho inferior a 35 cm. o un ancho distinto a 64 cm., 60 cm. y 35 cm.) se considera un recorte desechable (es una perdida o desperdicio). Por lo tanto. la empresa desea hacer la cantidad total de recortes desechables tan pequeña como sea posible.

Se deben cumplimentar los siguientes pedidos:

Longitud pedida (mts)	**Ancho requerido (cm)**
18.000	64
9.000	60
9.000	35

Los cortes se efectúan en forma longitudinal y lo que se entrega no necesita estar formado por un único rollo (o tira). Esto significa que no importa la cantidad de bobinas que se corten con una determinada disposición de cuchillas, sino la cantidad de metros de largo que se obtienen de esa forma. Se puede solicitar al depósito bobinas con la longitud que se quiera pero siempre en 215 cm de ancho.

2.20.

Un proveedor debe entregar un pedido de chapas de acero cortadas. Las cantidades mínimas solicitadas son:

Cantidad	Característica
A	Rectángulos de 20 x 80 cm Espesor mínimo: 2 mm.
B	Cuadrados de 40 cm. de lado Espesor mínimo: 1 mm.
C	Círculos de 33 cm. de diámetro Espesor mínimo: 1 mm.

El proveedor puede adquirir en el mercado mayorista chapas de 1 mm. de espesor de una medida standard de 80 cm. x 1 metro, y también puede comprar en el mercado chapas de 2 mts. x 1,50 mts. de 1 ó 2 mm. de espesor (a su elección). Los costos de estas chapas son C_1, C_2 y C_3 respectivamente. Además, acuerda con su cliente que hasta un 40% de las chapas rectangulares podrán ser de 1 mm. de espesor con la condición de que el total (en toneladas) entregado sea mayor o igual al peso total del pedido original.

2.21.

El Viejo Vizcacha se dedica a fabricar boleadoras y rebenques. Uno de los componentes de esos productos es el cuero. Antes de cortar las piezas de cuero y de comenzar a armar las boleadoras y los rebenques deben prepararse las piezas de cuero. Como este es un proceso muy delicado se decidió encargar esta tarea a Don Fermín Montes, hombre de mucha experiencia. Don Fermín indicó las condiciones de trabajo. Trabaja en dos ranchos, en uno se preparan las piezas de cuero para boleadoras y en el otro las piezas de cuero para rebenques. Don Fermín controla las piezas de cuero en los dos ranchos, como lo hace al mismo tiempo, cobra FE patacones por cada pieza de cuero que controle en el rancho en el cual más piezas controle. Los que realizan el trabajo son los 15 empleados de Don Fermín a los cuales hay que pagarles 25 patacones por día en el cual trabajen, independientemente del rancho en el cual estén. Cada empleado puede preparar 30 piezas de cuero para boleadora o 17 piezas de cuero para rebenque por día.

El Viejo Vizcacha tiene pedidos de piezas de cuero para las dos próximas semanas: al final de la primera semana tiene que tener A piezas de cuero para rebenques y B piezas de cuero para boleadoras. Al final de la segunda semana tiene que tener C piezas para rebenques y D piezas para boleadoras. No puede hacer entregas anticipadas ni postergar entregas, pero tiene un galpón en el cual entran E piezas de cuero.

Si los ingresos de Don Fermín son menores en la segunda semana que en la primera, esa diferencia no se le paga. Por el contrario, si los ingresos de Don Fermín son mayores en la segunda semana que en la primera, esa diferencia se le paga el triple.

¿Qué es lo mejor que puede hacer el Viejo Vizcacha?

☞ *Análisis previo: comenzar la resolución del ejercicio, realizando un esquema que describa la situación*

2.22.

Un afamado restorán de la zona de Palermo, tiene que entregar por lo menos 48 Kg de comida el sábado y 40 Kg el domingo, para sendos banquetes Tiene 15 empleados que trabajan hasta 8 hs cada uno, a los que les paga $ 0,2 la hora (si no trabajan no les paga) y que hacen alguna de las siguiente tareas: comprar alimentos, preparar alimentos y cocinar. Un mismo empleado no puede cocinar dos días seguidos.

Un empleado puede comprar 10 Kg de alimentos por día. A cada empleado le lleva media hora cocinar o preparar 1 Kg de alimentos. Por un convenio laboral no puede haber menos de cuatro empleados que cocinen cada día.

Si el domingo hay más empleados comprando alimentos que el sábado, el restorán pagará un plus de $ 1 por empleado de más. Sin embargo, esa cantidad de empleados en exceso no puede ser superior a cuatro. Si el domingo hay menos empleados comprando alimentos que el sábado, el restorán deberá pagar $ 2 por empleado de menos, salvo que el domingo haya más de cuatro empleados cocinando.

☞ *Análisis previo: comenzar la resolución del ejercicio, realizando un esquema que describa la situación*

☞ *Opcional: Obtener una solución óptima para este problema utilizando un software de resolución de problemas lineales (LINDO).*

2.23.

Una empresa fabrica y vende Etolones, Krakos y Sultos. Los fabrica a partir de 3 recursos básicos; Horas Hombre (HH), Horas Máquina (HM) y Materia Prima (MP).

A continuación se indican los consumos unitarios de cada recurso para los tres productos (en lugar de mostrar los números los indicamos con letras):

Producto	**HH**	**HM**	**MP**
Etolones	E_1	E_2	E_3
Krakos	K_1	K_2	K_3
Sultos	S_1	S_2	S_3

Se dispone de 2500 HH, 1000 HM y 5000 kg de MP por mes, siendo el costo por unidad de recurso de $5 por HH, $7 por HM y $2 por kg. de MP. Si sobrara MP se la podría guardar en el depósito, las HH y las HM no se pueden atesorar de un mes para el otro.

Los precios de venta de los productos son de $100, $150 y $200 por unidad para los Etolones, Krakos y Sultos respectivamente. Asimismo es posible vender los recursos no utilizados a $4 la HH, $8 la HM y a $2 el kg de MP.

La caja inicial del mes es de $ 30.000 y se quiere que, a fin de mes, la caja sea, como mínimo, de $ 45.000. Si existe un sobrante de dinero se coloca en un banco a interés al 0.5 % mensual y si falta dinero se puede tomar prestado pagando el 1% mensual. El préstamo máximo que se puede obtener es de $ 20.000. Ambos intereses se cobran o pagan por adelantado.

2.24.

Ante la próxima temporada veraniega el concesionario de un balneario se encuentra con el problema de distribuir el espacio de playa que le corresponde entre carpas, toldos y sombrillas. Se reúne con sus socios y anotan en un papel todos los puntos a tener en cuenta. Estos son los siguientes:

Según la reglamentación existente no se pueden instalar más de 300 carpas ni más de 100 toldos por balneario.

- Las carpas ocupan el doble de espacio que los toldos y estos últimos, igual espacio que cada sombrilla.
- Se deben dejar 3.000 metros cuadrados libres como lugar de recreación.
- La administración, vestuarios, duchas y baños requerirán aproximadamente 400 metros cuadrados.
- Las carpas se alquilarán a 300 pesos por mes, los toldos a 200 y las sombrillas a 140. Estos precios son para el mes de enero, en febrero se piensa cobrar un 20% menos.
- Una carpa ocupa 40 metros cuadrados.
- Se calcula que la demanda de carpas será el doble de la demanda de toldos.
- Los toldos y las carpas son fijos y sólo podría alterarse su número el último día de enero. Las sombrillas deben instalarse y retirarse todos los días.
- Se calcula la duración de la temporada en dos meses (enero y febrero).
- La superficie de la concesión es de 10.000 metros cuadrados cuando la marea esta en su máxima altura y de 12.000 metros cuadrados cuando la marea está baja.

Te pedimos que nos sugieras una forma efectiva de operación mensual y diaria.

2.25.

Diariamente, en una compañía de teléfonos, se pronostica el número mínimo de operadores telefónicos necesarios en cada una de las 24 horas del día (Bi, donde i=1, 2, …, 23, 24). Un operador puede empezar un turno de 8 horas, al principio de cualquier período de una hora.

Asumir que existe un costo de C1 $/operador—hora si la cantidad de operadores excede el mínimo, y un costo de C2 $/operador/hora si se trabaja por debajo del mínimo.

☞ *Recomendado: Obtener una solución óptima para este problema utilizando un software de resolución de problemas lineales (LINDO) con los siguientes datos: C1=2; C2=3; B1=B2=11; B3=B4=18; B5=B6=14; B7=B8=20; B9=B10=22; B11=B12=15; B13=B14=24; B15=B16=17; B17=B18=30; B19=B20=12; B2=B22=19; B23=B24=18. (Probar con operarios que ingresan sólo en las horas impares)*

2.26.

El plan de vuelos de una empresa aérea para las próximas 4 semanas, se debe realizar con un nuevo tipo de aviones, lo que requiere 700 semanas–aviador adiestrado de vuelo.

En la primera semana hay 320 aviadores adiestrados, los que pueden volar (costo: $80 por aviador–semana), descansar ($5 por aviador–semana) o entrenar ($200 aviador–semana incluyendo el costo de los participantes).

Un instructor puede preparar 20 aviadores por semana. Todos los aviadores que volaron una semana, deben descansar por lo menos, la semana siguiente. El número que vuela cada semana no debe decrecer.

2.27.

Una empresa textil (TEXAR) tiene tres productos "fuertes" que significan el 90% de su facturación aproximadamente. Estos productos pueden ser tejidos en dos tipos de telares distintos. Todos los meses TEXAR debe decidir cuántos telares destina a cada artículo.

El cambio de telar (de un articulo a otro) es costoso e insume dos días de labor aproximadamente y se realiza en los dos primeros días del mes.

TEXAR tiene compromisos de venta con clientes tradicionales que no quiere dejar de cumplir, pero también recibe muchos pedidos de clientes esporádicos o circunstanciales, a los que les asigna una prioridad inferior. A los clientes no tradicionales se les vende un 10% más caro.

Los pedidos de clientes tradicionales más los de clientes esporádicos superan la capacidad de producción de TEXAR.

Estamos a día 25 del mes y se dispone de un estimado de pedidos para los dos meses siguientes. Además se cuenta con algunos datos de interés:

- Estimado de pedidos en kilómetros

Artículo	Abril	Mayo
374	45	25
825	40	50
615	25	45
Resto	5	4

- Precios de venta y costos variables

Articulo ($/metro)	Precio de venta ($/metro)	Costo variable
374	30	10
825	35	20
615	40	21

- En mayo se espera un aumento de 10% en los precios y de 5% en los costos.
- El costo aproximado de cambio de telar (no incluido en los costos variables) es de $ 1.500 para los Telares convencionales y de $3.500 para los que son a chorro de aire
- Capacidades productivas (Km. por mes y por telar).

Artículo	Telar convencional	Telar a chorro de aire
374	4	10
825	4	12
615	3	8
Disponibilidad de telares	20	6

- Distribución de telares por artículo al 25 de marzo.

Artículo	Convencionales	Chorro de aire
374	3	1
825	9	2
615	5	3
Resto	3	—

☞ *Análisis posterior: ¿Cómo se alteraría el modelo planteado si quisiéramos incorporar costos de publicidad, para cada mes y para cada producto? (Estos costos serian un % de la respectiva facturación)*

2.28.

El gerente de personal de PETRASPE SA. enfrenta el problema de promoción de los empleados que ocupan distintos niveles de la empresa.

Realizado el análisis con las diferentes áreas surgen las siguiente limitaciones:

a- El presupuesto para salarios fue fijado por el departamento de Finanzas.

b- El número de cargos en cada nivel ya ha sido fijado por cada sector y el Directorio de la Empresa.

c- La política de promociones de PETRASPE, oportunamente fijada por propio departamento, determina que la tasa mínima de promoción no debería se inferior al 20%.

A continuación se da un resumen de la información que pdisponible:

Nivel	Salarios ($/hombre)	Nº personas en el nivel actualmente	Nº máximo en el nivel
1	1.000	15	15
2	1.500	12	15
3	2.000	10	12

En el nivel 3 supone que se retirarán de la empresa dos personas de los cargos actualmente ocupados.

Sabe que las posiciones del nivel 1 se llenarán automáticamente. El presupuesto total de salarios asciende a los $60.000.

Debe mantener tres prioridades:

- Prioridad 1: Evitar un gasto superior al presupuestado.
- Prioridad 2: Evitar exceso de personal en cada nivel.
- Prioridad 3: Evitar la subpromoción.

Para él la prioridad 1 es cuatro veces superior a la 3 y la 2 es tres veces superior a la 3.

¿Cómo encarar este problema?

☞ *Para discutir: ¿qué es subpromoción?*

2.29.

Papá Pitufo se encuentra organizando la construcción de un castillo para Pitufina, y cuenta para ello con 100 Pitufos. Para que los trabajadores rindan debe alimentarlos con trufas rosadas y trufas negras. Las trufas no sólo tienen un alto poder nutritivo sino que los pone contentos y así trabajan más.

Los Pitufos que salgan a buscar trufas deben ser dirigidos por el Pitufo Rastreador. Se calcula que cada Pitufo puede juntar y transportar un Kg. de trufas negras o rosadas (aparte de las que coma para su propia alimentación).

Cada 100 gramos de trufas contienen:

	Pitucalorías	Pituvitaminas
Trufas negras	10	38
Trufas rosadas	15	25

Un Pitufo para trabajar bien en la construcción del castillo debe ingerir 50 pitucalorías y 60 pituvitaminas por día. Si un día come más, los días siguientes puede comer menos, pero no a la inversa, el promedio diario debe cumplirse.

La construcción del castillo insume tres días y es supervisada por el Pitufo Forzudo. Papá Pitufo quiere que el tercer día haya muchos Pitufos trabajando en la construcción pues teme el ataque de Azrael, Gargamel y Gigantón.

Los Pitufos trabajan 8 hs. diarias y se necesitan 1600 hs. para construir el castillo.

☞ *Análisis posterior: ¿Cómo se alteraría el modelo y cómo sería el nuevo valor del funcional si Papá Pitufo quisiera que el segundo día hubiera no menos de 70 Pitufos trabajando?*

2.30.

De Profundis, una empresa fabricante de galletitas, decide hacer una promoción vendiendo en bolsas sus productos de la linea "Teatro" (Anton, William, Cervantes, Molière). A continuación indicamos los datos de las bolsas a armar:

Bolsas	Precio de Venta ($/bolsa)	Componentes (por bolsa)	Tiempo de Armado (hh por bolsa)	Demanda (bolsas/sem)
1	10	1 kg. Anton 2 paquetes William 1 kg. surtido	0.05	300
2	20	2 kg. Anton 1 paquete William 1 kg. Cervantes	0.10	100
3	30	1 kg. Anton 2 paquetes William 2 kg. Surtido	0.15	200

El surtido está integrado por galletas Cervantes y Molière, en el caso de la bolsa 1; y por galletas Anton, William y Cervantes, en el caso de la bolsa 3 (en ambos casos en cualquier proporción)

Las galletas William se empaquetan de a medio kg., salvo cuando integran el surtido. Para hacer un paquete se demoran 0.2 hh. También pueden comprarse empaquetadas a 3.5 $. Los paquetes comprados son controlados y estadísticamente el 10% de los paquetes contienen galletas partidas. Algunos de dichos paquetes pueden venderse como de segunda calidad a $ 3.60 y otros pueden canjearse a la empresa proveedora a razón de 6 paquetes por cada 10 paquetes rechazados.

Galletas	Tiempo Fab. (H. maq./kg.)	Costo MP y MO ($/kg)	Costo de Venta ($/kg.)
Anton	0.8	1.50	0.80
William	0.7	2.00	1.00
Cervantes	0.5	0.80	0.60
Molière	0.4	0.90	0.50

La fábrica cuenta con 80 empleados que trabajan 8 hs. de lunes a viernes. De ellos, por lo menos 20 trabajan en el armado de bolsas (tarea manual). El proceso de empaquetado sólo puede hacerse en hs. extras. Los operarios pueden hacer hasta 2 hs. extras por día que cuestan, en todo concepto 10$/hora También se pueden usar hs. extras para armar bolsas. Para que la máquina funcione 1 hora se necesita el trabajo de 3 hombres (3 hh para una hora máquina).

Se decidió cargar los gastos semanales de publicidad, que ascenderían a 5 $ por bolsa, sólo sobre aquel tipo de bolsa que más se venda.

¿Qué es lo mejor que se puede hacer con la información disponible?

2.31.

Los romanos se aprestan a atacar la aldea gala de Asterix. El jefe Abraracurcix organiza las tareas de defensa que son las siguientes:

- reparar las murallas
- preparar poción mágica
- acumular alimentos

Nombra a los siguientes responsables: Obelix, Panoramix y Edadepiedrix. Disponen de 2 días para prepararse y son un total de 44 personas, excluido el jefe y los tres responsables. Disponen de 8 litros de poción mágica y de 70 Kg. de alimentos. La capacidad de trabajo es la siguiente: tomando 0,3 litros de poción por día un hombre puede colocar 2 pilares ó juntar 3 Kg. de componentes para la poción ó acumular 6 Kg. de alimentos. Sin tomar poción los valores son de 1, 1 y 4 respectivamente. La necesidad de alimento por día es de 8 Kg. para los que no tomaron poción y de 5 para aquellos que tomaron.

Como los galos son muy temperamentales no conviene que hagan todos los días lo mismo (se aburren y comienzan a pelearse). Por ese motivo Asterix propone que al asignar las tareas del 2° día, como máximo, 8 personas hagan la misma tarea que el primer día. Para defenderse necesitan alimentos para resistir el asedio y poción mágica para poder combatir, ambas cosas tienen igual importancia.

La reparación del muro consiste en colocar 33 pilares nuevos. La preparación de poción requiere 1 Kg. de componentes para hacer 2 litros y además la preparación en sí insume un día, por lo tanto el último día no vale la pena juntar componentes.

2.32.

"El que tenga una canción tendrá tormenta
el que tenga compañía, soledad.
El que siga un buen camino tendrá sillas
peligrosas que lo inviten a parar.
Pero vale la canción buena tormenta
y la compañía vale soledad
siempre vale la agonía de la prisa
aunque se llene de sillas la verdad."

Historia de las sillas – Silvio Rodríguez

No pasa mucho tiempo sin que visitemos a Teofrasto, de vez en vez, de dos en dos, sobre todo los domingos. Lo encontramos en el taller de carpintería.

—Aquí me tienen, haciendo un poco de laborterapia —bromeó. —Pero parece que armar sillas también puede ser un buen negocio. Por lo menos eso me dijo Willy. Ustedes saben que, si él lo dice... Con todas estas sillas viejas un poco deterioradas, más piezas que se pueden comprar, se arman muebles "a nuevo", después se patinan con pintura de colores y se venden.

—¿De donde sacaste tantas sillas?

—Algunas vienen de la casa de mi abuela y muchas me las dio la flaca, que vendió su casa cuando se fue a lo de Cacho.

—Por lo menos te dejó algo —acoté, pero no fue un buen chiste.

—Willy consiguió un contacto para venderlas a un bar 24 horas que está por abrir —siguió Teofrasto, —el asunto es que hay varias posibilidades de armado. Si les cuento, ¿me ayudarían?

Teofrasto tiene 120 sillas. Ninguna de ellas está en perfecto estado, tal como lo indica la siguiente tabla:

Respaldo roto:	30 sillas
Le falta una pata:	20 sillas
Le faltan 2 patas:	10 sillas
Asiento roto:	30 sillas
Respaldo roto y falta una pata:	30 sillas

Teofrasto no piensa arreglar las partes rotas sino que compra las partes que las reemplacen al sillero Aristipo. Las piezas que se pueden comprar a Aristipo son: patas a $ P cada una, asientos a $ A cada uno y respaldos a $ R cada uno.

El bar 24 horas le pidió distintos tipos de muebles:

Tipo de mueble:	**Cantidad pedida (unidades)**	**Precio que paga el bar a Teofrasto ($/u)**
Sillas	D_1	P_1
Taburetes de cuatro patas	D_2	P_2
Taburetes de tres patas	D_3	P_3

Todos los muebles tienen el mismo tipo de patas y el mismo tipo de asiento (los taburetes no tienen respaldo).

—Mi problema —nos dijo Teofrasto, —es que tengo que decidir cuántos muebles hago de cada tipo y cómo usar las sillas que tengo y las piezas que puedo comprar. Además tengo que dejar una silla acá.

—¿Para qué vas a guardar una silla?

—Para cuando vuelva la flaca —contestó Teofrasto sin inmutarse.

—Vamos a hacer todo lo posible para ayudarte —le prometimos. —Si podés hacer lo que te gusta y además ganar dinero, sos un afortunado.

2.33.

Una empresa de catering produce y comercializa tres tipos de torta.

La torta tipo A requiere 1 kg de harina, 500 gramos de azúcar, 400 gramos de chocolate, 6 huevos y 200 gramos de dulce de frutillas. La torta tipo B requiere 1,5 kg de harina, 600 gramos de azúcar, 6 huevos y 500 gramos de chocolate. La torta tipo C requiere 800 gramos de harina, 400 gramos de azúcar, 4 huevos y 400 gramos de dulce de frutillas.

Las tortas "A" y "B" llevan además una cobertura especial. La mezcla para coberturas lleva un 20% de chocolate de chocolate., entre 40% y un 60% de crema y el resto de dulce de leche. La torta "A" lleva 200 gramos de cobertura y la torta "B" lleva 250 gramos de esta cobertura.

Por último, las tortas se guardan en cajas decoradas, de las que se puede disponer de 300 por semana.

Semanalmente, se puede disponer de 500 kg de harina, 200 kg de azúcar, 120 kg de chocolate, 150 docenas de huevos, 40 kg de dulce de frutillas, 30 kg de crema y 15 kg de dulce de leche.

Se ha calculado que el beneficio de cada torta es el siguiente: Tortas “A”: 20 pesos, Tortas “B”: 25 pesos, Tortas “C”: 12 pesos.

3.1. Resolución Guia 2

En esta guía las variables que manejamos ya no son dos y la principal consecuencia es que ya no podremos representar gráficamente nuestro modelo, De manera que no podemos calcular gráficamente el punto óptimo, Nuestro trabajo será simplemente modelar el problema sin resolverlo por ahora

3.1.1. Ejercicio 2.1

Podemos observar el incremento en la complejidad del problema a modelar, aquí ya no son dos productos sino tres y además se incorporan otros factores como la producción del pullover tipo b que se puede hacer en dos máquinas, también tenemos demanda mínima del pullover tipo B.

Aquí tenemos un primer esbozo de productos enteros es decir los pulóveres no se venden en partes, es una unidad, es importante la hipótesis que nos dice que los pulóveres pueden quedar a medio terminar de lo contrario tendríamos que modelar utilizando programación entera.

Objetivo: determinar la cantidad de pulloveres de tipo A, B y C a fabricar en una semana para maximizar las ganancias.
Hipótesis:

1. no existen mérmas en el proceso de producción.
2. todo lo que se produce se vende, es decir que la demanda no es limitante.
3. no existe acumulación de stock inicial.
4. todas las materias primas son de 1º calidad.
5. los costos estan contemplados.

Variables :

- $P_i[\frac{unidades}{sem}] \quad i\epsilon[A, B, C]$: cantidad fabricada de pullover tipo i

Inecuaciones: Las dos máquinas trabajan dos turnos por día, 8 horas en cada turno, de lunes a viernes, traducido a horas son 80 horas por semana.

- $P_B = P_{B1} + P_{B2}$ debemos saber cuantos pullovers tipo B se hace con cada maquina.
- $5[\frac{hs}{un}]P_A[\frac{unidades}{sem}] + 6[\frac{hs}{unidad}]P_{B1}[\frac{unidades}{sem}] \leq 80[\frac{hs}{sem}]$ *(Consumo máquina 1)*
- $4[\frac{hs}{unidad}]P_{B2}[\frac{unidades}{sem}] + 4[\frac{hs}{unidad}]P_C[\frac{unidades}{mes}] \leq 80[\frac{hs}{sem}]$ *(Consumo máquina 2)*
- $1,6P_A + 1,2P_C \leq 20[kg/sem]$ (Disponibilidad de lana mejorada)
- $1{,}8PB \leq 36[kg/sem]$ (lana normal)
- $P_B \geq 10[un/sem]$ (demanda mínima de pullovers B)

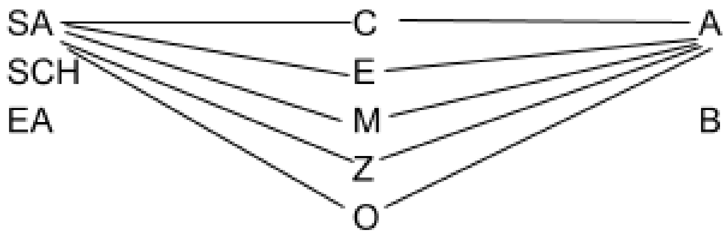
Funcional:

-

$$Z_{max} \Rightarrow 10[\frac{\$}{unidad}]P_A[\frac{unidades}{sem}] + 15[\frac{\$}{unidad}]P_B[\frac{unidades}{sem}] + 18[\frac{\$}{unidad}]P_C[\frac{unidades}{sem}]$$

3.1.2. Ejercicio 2.2

Aquí podemos ver un problema tipo parcial, es un proceso productivo que consiste en la extracción de un mineral que contiene 4 metales y luego producir dos aleaciones, la extracción está disponible en 3 yacimientos, y tienen un costo asociado y una composición diferente en lo respectivo a los metales que contiene, es conveniente hacer un esquema para resumir la información disponible.



Objetivo: Determinar el plan de producción de aleaciones tipo A y B en un tiempo indeterminado T, teniendo en cuenta las disponibilidades de materia prima en cada yacimiento asi como el costo de extracción,

con el objetivo de maximizar los beneficios.
Hipótesis:

1. no existen mérmas en el proceso de producción.
2. todo lo que se produce se vende, es decir que la demanda no es limitante.
3. todas las materias primas son de 1º calidad.

Variables : Vamos a tener que abrir las variables, debido a que tenemos que determinar cuantos metales se extraen de cada yacimiento, tambien debemos abrir las variables para saber cuanto usamos en cada aleacion.

- $A, B[\$/ton]$ (aleación de tipo A y B)
- $C_{sa}, E_{sa}, M_{sa}, Z_{sa}, O_{sa}$ (cobre que proviene del yacimiento sierra alta, idem los demas)
- C_A, E_A, M_A, Z_A, O_A (Cobre que va a la aleación A, idem para los demas.)
- $MSA[ton/T]$ (toneladas de mineral extraidos de sierra alta, idem para los demás)

Inecuaciones:

- $MSA = C_{sa} + E_{sa} + M_{sa} + Z_{sa} + O_{sa} \leq 1000[ton/T]$ (disponibilidad en sierra alta)
- $MSCH = C_{sch} + E_{sch} + M_{sch} + Z_{sch} + O_{sch} \leq 2000[ton/T]$
- $MEA = C_{ea} + E_{ea} + M_{ea} + Z_{ea} + O_{ea} \leq 3000[ton/T]$
- Extracción en sierra alta
  - $0,2MSA = C_{sa}$ (el 20 % del mineral extraido de SA es cobre)
  - $0,1MSA = E_{sa}$
  - $0,3MSA = M_{sa}$
  - $0,3MSA = Z_{sa}$
  - $0,1MSA = O_{sa}$ (el 10 % es de otros metales)

  se plantean identicas ecuaciones para cada yacimiento con sus respectivos porcentajes.
- Proceso de Aleación, este es un proceso de mezcla ya que no podemos distinguirlo en el producto final.
  - $A = C_A + E_A + Z_A + M_A + O_A$ (la composición de la aleación A)
  - $M_A = 0$ (no tiene manganeso)
  - $0{,}8A \leq C_A$ (como maximo 80 % de cobre)
  - $0{,}3A \leq E_A$ (como maximo 80 % de estaño)
  - $0{,}5A \geq Z_A$ (como mínimo 50 % de Zinc)
  - $B = C_B + E_B + Z_B + M_B + O_B$ (la composición de la aleación B)
  - $C_B = 0$ (no tiene cobre)
  - $0{,}4B \leq E_B \leq 0{,}6B$ (el estaño debe estar entre el 40 % y 60 %)
  - $0{,}3B \geq M_B$

- $0{,}7B \leq Z_B$ (como máximo 70 % de Zinc)

- debemos conectar las variables de cada metal, es decir la cantidad de cobre total extraido es igual al utilizado.

    - $C_A + C_B = C_{sa} + C_{sch} + C_{ea}$ (El cobre extraido = cobre utilizado)

    - $E_A + E_B = E_{sa} + E_{sch} + E_{ea}$ (El estaño extraido es igual al utilizado)

    - $M_A + M_B = M_{sa} + M_{sch} + M_{ea}$

    - $Z_A + Z_B = Z_{sa} + Z_{sch} + Z_{ea}$

    - $O_A + O_B = O_{sa} + O_{sch} + O_{ea}$

Funcional:

- $$Z_{max} \Rightarrow \underbrace{\$A + \$B}_{\text{ingreso}} - \underbrace{10MSA - 40MSCH - 50MEA}_{\text{costo}}$$

Capítulo 4

Práctica 3 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

3. Modelización: Programación Lineal Entera

Temario

1- Análisis del enunciado del problema.
2- Resumen de la situación a resolver.
3- Variables enteras.
4- Variables bivalentes.
5- Variables indicativas.
6- Variables de decisión.
7- Problemas con relaciones lógicas.
8- Costos y beneficios no lineales.
9- Restricciones discretas.
10- Problemas combinatorios.
11- Problemas de redes.
12- Problema del viajante.
13- Problemas no lineales.

Problema Tipo Nº 1

Una empresa fabrica y vende dos productos P_1. y P_2. Sus insumos básicos son mano de obra, materias primas y horas de equipo.

A continuación se detallan los consumos unitarios, costos de los insumos y precios de venta:

Producto	**Precio de venta**	**Mano de obra**		**Materia prima**		**Equipo**
		(hh/u)	**($/hh)**	**(kg/u)**	**($/kg)**	**(he/u)**
1	50	2	2,5	4	6,2	1
2	40	3	2,5	2	6,2	1,5

	Costo de la hora de equipo ($/he)
Si el consumo es menor que 50	2
Si el consumo es mayor que 50	1

Las disponibilidades son: 150 hh/día de mano de obra, 180 kg/día de materia prima y no existe límite para las horas de equipo. El costo de las mismas se ve en el siguiente cuadro:

<u>Resolución del problema</u>

1. <u>Objetivo</u>

Definir el plan de producción diario de los productos 1 y 2, de modo tal de maximizar los beneficios por su venta, satisfaciendo las disponibilidades de mano de obra, materias primas y equipos, considerando sus costos de uso.

2. <u>Hipótesis y Supuestos</u>

- *No hay inflación, o si la hubiera, no altera la relación de precios y costos.*
- *No existen restricciones de demanda; todo lo que se produce se vende.*
- *No existe la posibilidad de trabajar hs. extras.*
- *Los rendimientos de los equipos no varían con la cantidad producir.*
- *Si el consumo de horas del equipo es igual a 50, pago $1/hora*
- *Los rangos de horas de equipo son diarios*

3. <u>Variables</u>

Variable	***Descripción***	***Unidad***
P_1	*cantidad a producir de producto 1*	*[u/día]*
P_2	*cantidad a producir de producto 2*	*[u/día]*
Uso_MO	*cantidad a utilizar de recurso M.O.*	*[hh/día]*
Uso_MP	*cantidad a utilizar de recurso M.P.*	*[he/día]*
Uso_Equipo	*cantidad de hs. utilizar los equipos*	*[he/día]*
Uso_Eq_1	*cantidad de hs. a utilizar ≤ 50 hs. equipo*	*[he/día]*
Uso_Eq_2	*cantidad de hs. a utilizar > 50 hs. equipo*	*[he/día]*
Y_E	*variable entera bivalente:* *1: Uso_Equipo ≤ 50 hs./día* *O: Uso_Equipo ≥ 50 hs./día*	

4. *Formulación Matemática*

- *Mano Obra*

$$2\,P_1 + 3\,P_2 = Uso\_MO \quad [hh/día]$$
$$Uso\_MO \leq 150 \quad [hh/día]$$

- *Materia Prima*

$$4\,P_1 + 2\,P_2 = Uso\_MP \quad [kg/día]$$
$$Uso\_MP \leq 180 \quad [kg/día]$$

- *Equipos*

$$1\,P_1 + 1{,}5\,P_2 = Uso\_Equipo$$
$$Uso\_Equipo = Uso\_Eq_i + Uso\_Eq_2$$
$$Uso\_Eq_1 \leq 50\,Y_E$$
$$50\,(1-YE) \leq Uso\_Eq_2 \leq M\,(1-Y_E)$$

- *Funcional*

$$Z = 50\,P_1 + 40\,P_2 - 2{,}5\,Uso\_MO - 6{,}2\,Uso\_MP - 1\,Uso\_Eq_1 - 2\,Uso\_Eq_2 \rightarrow Máx.$$

Problema Tipo Nº 2

Una empresa cuenta con una instalación para producir energía eléctrica (EE). Consta de una turbina y una caldera. Esta última puede producir entre 150 y 500 libras de vapor por hora (por menos de 150 no conviene encenderla). La caldera funciona a gas o fuel-oil con los siguientes rendimientos según los m^3 de combustible consumidos:

a- gas: de 0 a 100 m^3, r = 0,8
de 100 a 200 m^3, r = 0,85
más de 200 m^3, r 0,9.

b- fuel-oil: de 0 a 150 m^3, r = 0,75
más de 150 m^3, r = 0,85

El costo del gas es de 20 $\$/m^3$ y el del fuel-oil, 17 $\$/m^3$

En condiciones ideales para obtener 2 libras de vapor se requiere 1 m^3 de combustible, esto se ve afectado por los rendimientos antedichos.

El vapor producido en la caldera se procesa en una turbina, teóricamente de una libra de vapor se obtienen 10 kw (todo por hora) este valor se ve afectado por los coeficientes de la turbina que siguen la siguiente ley:

- si procesa hasta 250 libras/hora, c = 0,58
de 250 a 350 lb/h, c = 0,85;
de 350 a 500 lb/h; el coeficiente baja a 0,8.

El costo de producir la EE dependerá del consumo de combustible, de los rendimientos y del costo fijo “F” que se paga si la instalación funciona. Si se opta por no producir se puede comprar EE a 35 \$/kw teniendo que pagar un costo de mantenimiento de “CM” pesos por hora para mantener la instalación. La cantidad de EE requerida está entre “E_1” (mínimo) y “E_2” (máximo) kw/h.

Resolución del problema

1. *Objetivo*

Determinar la producción o compra de energía eléctrica para satisfacer los requerimientos por hora, considerando costos de instalación, consumo y tipo de combustible y capacidades productivas.

2. *Hipótesis*

- *Sólo se puede utilizar un combustible*
- *Si se compra EE, no se produce.*
- *Existe disponibilidad de combustible y agua.*
- *Existe disponibilidad de dinero para comprar combustible y pagar los costos fijos.*
- *No hay otras pérdidas que las indicadas.*
- *El mantenimiento sólo se paga si la instalación no produce.*
- *No hay fallas ni pérdidas no previstas.*

3. *Variables*

Variable	Descripción	Unidad
GAS_1, GAS_2, GAS_3	Cantidad de gas a utilizar según rendimiento	$[m^3/h]$
$FUEL_1$, $FUEL_2$	Cantidad de fuel-oil a utilizar según rendimiento	$[m^3/h]$
$VAPOR_1$, $VAPOR_2$, $VAPOR_3$, $VAPOR_4$	Cantidad de vapor a utilizar según coeficientes	[lb/h]
$EE_{COMPRADA}$, $EE_{PRODUCIDA}$	Cantidad de energía eléctrica a comprar o producir	[kw/h]

Variable Entera Bivalente	Valor que toma	Condición
Y_{G1}	1 0	Si uso gas en rango < 100 m^3 Si no
Y_{G2}	1 0	Si uso gas en rango 100 – 200 m^3 Si no
Y_{G3}	1 0	Si uso gas en rango > 200 m^3 Si no
Y_{F1}	1 0	Si uso fuel-oil en rango < 150 m^3 Si no
Y_{F2}	1 0	Si uso fuel-oil en rango > 150 m^3 Si no
Y_{V1}	1 0	Si produzco entre 150 y 250 lb de vapor Si no
Y_{V2}	1 0	Si produzco entre 250 y 350 lb de vapor Si no
Y_{V3}	1 0	Si produzco entre 350 y 500 lb de vapor Si no
Y_C	1 0	Si la energía eléctrica es comprada Si la energía eléctrica es producida

4. *Formulación Matemática:*

- *Utilización de gas*

$$0 \leq GAS_1 \leq 100\ Y_{G1} \quad [m^3/h]$$
$$100\ Y_{G2} \leq GAS_2 \leq 200\ Y_{G2} \quad [m^3/h]$$
$$200\ Y_{G3} \leq GAS_3 \leq M\ Y_{G3} \quad [m^3/h]$$

- *Utilización de fuel-oil*

$$0 \leq FUEL_1 \leq 150\ Y_{F1} \quad [m^3/h]$$
$$150\ Y_{F2} \leq FUEL_2 \leq M\ Y_{F2} \quad [m^3/h]$$

- *Utilización de fuel-oil o gas o ninguno de los dos*

$Y_{G1} + Y_{G2} + Y_{G3} + Y_{F1} + Y_{F2} + Y_C = 1$ ☞ *Si compra no produce*

- *Relación entre el combustible utilizado y la cantidad de vapor producido*

$$VAPOR_1 + VAPOR_2 + VAPOR_3 = 2\ (0{,}8\ GAS_1 + 0{,}85\ GAS_2 + 0{,}9\ GAS_3 + $$
$$+ 0{,}75\ FUEL_1 + 0{,}85\ FUEL_2)\ [lb/h]$$

- *Relación entre el vapor procesado y los coeficientes de producción de EE*

$$150\ Y_{V1} \leq VAPOR_1 \leq 250\ Y_{V1} \quad [lb/h]$$
$$250\ Y_{V2} \leq VAPOR_2 \leq 350\ Y_{V2} \quad [lb/h]$$
$$350\ Y_{V3} \leq VAPOR_3 \leq 500\ Y_{V3} \quad [lb/h]$$
$$\sum_{i=1}^{3} Y_{Vi} + Y_C = 1$$ ☞ *Si compra no produce*

- *Cantidad de EE producida*

$EE_{PRODUCIDA} = 10\ (0{,}58\ VAPOR_1 + 0{,}85\ VAPOR_2 + 0{,}8\ VAPOR_3) \quad [kw/h]$

- *Producción o Compra de EE*

$$0 \leq EE_{PRODUCIDA} \leq M\ (1 - Y_C) \quad [kw/h]$$
$$0 \leq EE_{COMPRADA} \leq M\ Y_C \quad [kw/h]$$

- *Demanda Máxima y Mínima*

$$E_1 \leq EE_{PRODUCIDA} + EE_{COMPRADA} \leq E_2 \quad [kw/h]$$

- *Funcional*

$$Z = 17\ (FUEL_1 + FUEL_2) + 20\ (GAS_1 + GAS_2 + $$
$$+ GAS_3) + 35 EE_{COMPRADA} + CM * Y_C + F(1 - Y_C) \rightarrow Mín.\ [\$/h]$$

Problema Tipo Nº 3

Sophilos está en el negocio de las vasijas de arcilla. Las trae desde el norte y las termina con dibujos a pedido. En este momento debe definir la cantidad a comprar este mes. Los datos disponibles son los siguientes:

a- Si compra más de 10 vasijas, debe pagar \$100 a una persona para que las revise y certifique la calidad.

b- Si compra vasijas de fondo oscuro, no puede comprar vasijas de fondo claro y viceversa.

c- Si compra hasta 8 vasijas, el precio unitario es de \$10, y si compra más de 8, el precio será de \$8 cada una.

d- Cuenta con pedidos de sus clientes por A vasijas de fondo claro y B vasijas de fondo oscuro.
e- La ganancia neta por unidad vendida es de \$20 para las de fondo claro y de \$28 para las de fondo oscuro.

Resolución del problema

1. *Relevamiento y análisis*

Hacemos las siguientes preguntas y obtenemos las correspondientes respuestas

a- P: ¿Existe un límite superior para la compra de vasijas ya sea por disponibilidad del proveedor o por restricción financiera del comprador?
R: No, dentro de los valores máximos de la demanda se puede comprar lo que sea necesario.

b- P: ¿No hay rotura o daño de vasijas compradas?
R: No, el embalaje es muy bueno y las roturas son excepcionales.

c- P: ¿Los pedidos de vasijas son mínimos, exactos o máximos?
R: Son máximos.

d- P: ¿El costo de la inspección, si lo hubiere, y el costo de compra de las vasijas ha sido considerado en el cálculo de la ganancia neta, y si lo fue en que forma?
R: No fue incluido.

2. *Algunas hipótesis necesarias*

- *Los pedidos no entregados, ya sea de Vasijas de fondo claro u oscuro, no generan ningún costo no especificado ni puede afectar la entrega de los pedidos que se decida cumplir.*
- *Al realizar los dibujos no se estropea y rompe ninguna vasija.*

3. *Objetivo*

Maximizar los beneficios de este mes, producto de la operación comercial de comprar, dibujar y vender vasijas, entendido este como la diferencia entre los ingresos de ganancia neta y los egresos por la inspección y la compra de las vasijas.

4. *Modelo y variables*

- *Si compra más de 10 vasijas debe pagar \$100 a una persona para que las revise y certifique la calidad.*

Variable	***Descripción***	***Tipo de variable***
Vasijas	*Cantidad de vasijas a comprar*	*Entera*
Y_1	*Vale 1, si compra más de 10 vasijas* *Vale 0, si no*	*Entera Bivalente*

$Vasijas \leq 10 + M*Y_1$ ☞ *Como Y_1 estará asociada a un costo en el funcional si Vasijas es ≤ 10, el funcional hará que Y_1 valga cero; en cambio si Vasijas es > 10, Y_1 estará obligada a valer 1.*

- *Si compra vasijas de fondo oscuro no puede comprar vasijas de fondo claro y viceversa.*

Variable	Descripción	Tipo de variable
Vasijas_fondo_oscuro	*Cantidad de vasijas de fondo oscuro a comprar*	*Entera*
Vasijas_fondo_claro	*Cantidad de vasijas de fondo claro a comprar*	*Entera*
Y_2	*Vale 1, si Vasijas_fondo_oscuro ≥ 0* *Vale 0, si Vasijas_fondo_oscuro = 0*	*Entera Bivalente*
Y_3	*Vale 1, si Vasijas_fondo_claro ≥ 0* *Vale 0, si Vasijas_fondo_claro = 0*	*Entera Bivalente*

Vasijas = Vasijas_fondo_oscuro + Vasijas_fondo_claro ☞ *Ecuación de balance*

Vasijas_fondo_oscuro $\leq M * Y_2$

Vasijas_fondo_claro $\leq M * Y_3$

$Y_2 + Y_3 \leq 1$ ☞ *Solo una de las variables puede tomar valor. Con esta ecuación obligamos a que Vasijas_fondo_oscuro o Vasijas_fondo_oscuro sean iguales a cero.*

- *Si compra hasta 8 vasijas el precio unitario será de 10$ y si compra mas de 8 el precio será de 8$ cada una.*

Variable	Descripción	Tipo de variable
Vasijas8	*Cantidad de Vasijas, si Vasijas es ≤ 8*	*Entera*
Vasijas9mas	*Cantidad de Vasijas si Vasijas es > 9*	*Entera*
Y_4	*Toma valor 1, si Vasija8 ≥ 0* *Toma valor 0, si Vasija8 = 0*	*Entera Bivalente*
Y_5	*Toma valor 1, si Vasijas9mas ≥ 0* *Toma valor 0, si Vasijas9mas = 0*	*Entera Bivalente*

Vasijas = Vasijas8 + Vasijas9mas ☞ *Apertura de la variable*

Vasija8 $\leq 8Y_4$

$9 * Y_5 \leq$ *Vasijas9mas* $\leq M * Y_5$

$Y_4 + Y_5 = 1$

- *Cuenta con pedidos de sus clientes por A vasijas de fondo claro y B vasijas de fondo oscuro.*

Vasijas fondo claro $\leq A$

Vasijas fondo oscuro $\leq B$

- *Funcional*

Ingresos = 20 Vasijas fondo claro + 28 vasijas fondo oscuro

Egresos = 100 Y_1 *+ 10 Vasijas8 + 8 Vasijas9mas*

Z= Ingresos – Egresos ➔ Máx.

Problema Tipo Nº 4

Renato debe visitar a 5 personas que identificaremos como α, β, γ, δ y ε en menos de 6 horas. Con cada una de ellas no estará menos de 30 minutos. Sabe donde vive cada uno de ellos y el tiempo que se tarda en cada viaje.

	α	β	γ	δ	ε
Renato	50	40	110	30	40
α	—	70	40	20	70
β		—	70	80	90
γ			—	40	80
δ				—	90

El costo de cada viaje es de $0,80 en transporte público. Renato dispone de $10 y podría hacer algún viaje en taxi con lo cual reduce el tiempo de ese viaje a la mitad, a un costo de $3 por viaje. Solo lo hará si es la única forma de estar de regreso en 6 hs.

Adicionalmente no puede visitar a β si antes no visitó a α. Asimismo ε puede ser el último solo si δ fue el primero.

Resolución del problema

1. Relevamiento y análisis

Hacemos las siguientes preguntas y obtenemos las correspondientes respuestas

a- P: ¿El tiempo de viaje entre α y β es el mismo si el viaje se hace en sentido inverso, es decir entre β y α?
R: Si. Así es.

b- P: ¿Los tiempos de viaje no cambian a lo largo del día por horas pico o cualquier otro motivo?
R: No. Se ha verificado que por las características de la zona esa variación no existe.

c- P: ¿Cómo afectan los tiempos de espera del transporte público?
R: Están incluidos en los tiempos informados.

d- P: ¿Y los tiempos de conseguir un taxi, fueron considerados?
R: Si. También fueron tenidos en cuenta.

Estamos ante un problema del viajante con algunas restricciones adicionales como ser la posibilidad de viajar en transporte público o en taxi y las restricciones en cuanto al orden en que Renato visita a los amigos. Podemos comenzar por armar un problema del viajante y proceder a agregarle las restricciones adicionales. Debemos también tener en cuenta que el modelo sugerirá utilizar el taxi solo en caso de ser necesario para cumplir con la restricción del tiempo disponible.

2. Algunas hipótesis necesarias

- *Se modelizará considerando que el tiempo de permanencia con cada amigo será de 30 minutos.*
- *No se consideran contratiempos ni demoras imprevistas.*
- *Renato cuenta con cambio para pagar el transporte público (no perderá tiempo buscándolo).*

- *No hay otros costos que los de transporte.*

3. *Objetivo*

Determinar el orden de las visitas y los medios de transporte a emplear en cada caso para gastar la menor cantidad de dinero posible.

4. *Modelo y variables*

- *Viajante*

Variable	Descripción	Tipo de variable
Y_{ij}	Vale 1 si Renato va de i a j Vale cero en caso contrario	Entera Bivalente
U_i	Indica el orden en que el amigo i es visitado	Entera

$$\sum_{j=Renato}^{\varepsilon} Y_{ij} = 1 \;\; \forall i = Renato, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$$ ☞ *Salir de todos los lugares*

$$\sum_{i=Renato}^{\varepsilon} Y_{ij} = 1 \;\; \forall j = Renato, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$$ ☞ *Llegar a todos los lugares*

$Ui - Uj + 5\, Y_{ij} \leq 4 \;\; \forall i = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ☞ *No realizar subtours*

$\forall j = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$

i distinto de j

Amigos a visitar (n) = 5

- *Elección del transporte*

Variable	Descripción	Tipo de variable
Y'_{ij}	Vale 1, si viaja en transporte público Vale 0, si no	Entera Bivalente
Y''_{ij}	Vale 1, si viaja en taxi Vale 0, si no	Entera Bivalente

$Y_{ij} = Y'_{ij} + Y''_{ij}$ ☞ *Viaja en transporte público o en taxi*

- *Tiempo de Viaje*

Variable	Descripción	Tipo de variable
Tiempo	Minutos de viaje total, desde que sale hasta que llega	Continua

Tiempo = permanencia con cada amigo +
+ tiempo de viaje en transporte público +
+ tiempo de viaje en taxi

Entonces…

*Tiempo = 5 * 30 +*
+ $\Sigma\Sigma Y'_{ij}$ tiempo de viaje en transporte público desde i a j +
+ $\Sigma\Sigma Y''_{ij}$ tiempo de viaje en transporte público desde i a j / 2

☞ *Observar que "tiempo de viaje en transporte público desde i a j" es un valor constante, definido en el enunciado, y por eso lo podemos multiplicar por la bivalente.*

Tiempo $\leq 6 * 60$ ☞ *Tiempo total máximo 6 hs.*

- *Costo de Viaje*

Variable	Descripción	Tipo de variable
Costo	Costo del viaje total en pesos	Continua

Costo = $\Sigma\Sigma Y'_{ij} * 0.80 + \Sigma\Sigma Y''_{ij} * 3$

Costo ≤ 10

- *Visitar a α antes que a β*

$U_\alpha \leq U_\beta$

- *ε puede ser el último solo si δ fue el primero*

Variable	Descripción	Tipo de variable
Y_1	Vale 0, si U_δ es igual a 1 Vale 1, si no	Entera Bivalente
Y_2	Vale 0, U_δ es mayor o igual que 2 Vale 1, si no	Entera Bivalente

Detectamos si δ es el primero…

$U_\delta - 1 \leq 5\ Y_1$

$2 - U_\delta \leq 5\ Y_2$

$Y_1 + Y_2 = 1$

☞ *Recordar que las variables Ui toman valores sucesivos. A efectos de las restricciones se tolera suponer que son valores enteros a partir de 1. Sin embargo, se aconseja utilizar restricciones para asegurarlo (1 <= Ui <= n) y definirlas como variables enteras.*

Si δ no es el primero, no permitimos que ε sea el último…

$U\varepsilon \leq 5 - Y_2$

- *Funcional*

Z = Costo ➔ Mín

"No busquen la verdad en escritos antiguos porque por más que la encuentren, jamás la conocerán. La verdad está dentro de ustedes mismos y son ustedes quienes deben descubrirla"

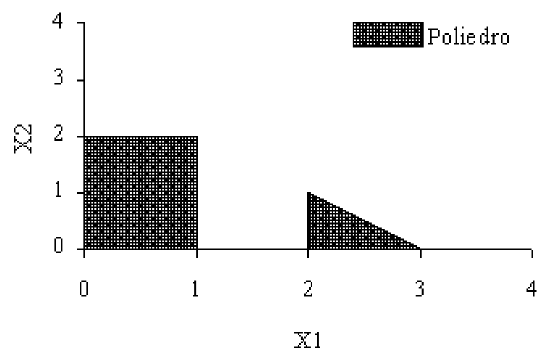
Gustavo, 1974 a.d.

Problemas a resolver

3.1.

Plantear el siguiente problema, no convexo, como P.L. entera mixta.

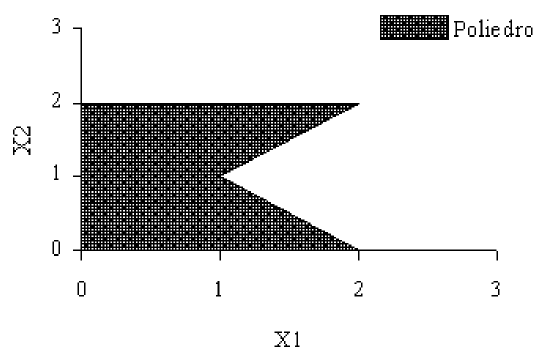
$Z = 2\ X_1 + 3\ X_2 \Rightarrow$ Mín.



3.2.

Plantear el siguiente problema, no convexo, como P.L. entera mixta.

$Z=2X_1 + 3X_2 \Rightarrow$ Máx.



3.3.

Suponiendo hechas las declaraciones de las variables MES (1-12) E_i e Y_i (0-1) como enteras y C_i como continuas, pensar las ecuaciones y/o inecuaciones necesarias para:

a- que si Y_2 vale 0, entonces Y_1 no valga 1.

b- que Y_1 valga 1 si MES es igual a 12 y 0 si no lo es.

c- que Y_1 valga igual al resultado de Y_2 or Y_3 or Y_4.

d- que Y_1 valga igual al resultado de Y_2 and Y_3.

e- que Y_1 sea distinto de Y_2.

f- que E_1 tome únicamente alguno de los siguientes valores: 1, 2, 3, 5, 6, 7.

g- que C_1 sea mayor que 10.

h- que E_1 tome únicamente valores impares.

i- que E_1 tome únicamente alguno de los siguientes valores: 4, 9, 16.

j- que C_1 sea mayor o igual a 50 si $Y_1=1$ ó a 75 si $Y_1=0$.

k- que E_1 sea mayor a 100 o sino menor que 80.

3.4.

Una importante firma está planeando la formación de un grupo de trabajo para encarar un nuevo proyecto de gran importancia.

Como va a ser un proyecto de largo alcance, se debe tratar con cuidado la selección del personal que ocupará los cargos de gerencia.

La firma decidió elegir los miembros que conformarán ese grupo, de tal manera que se minimice el costo de reemplazo de ese personal en el puesto que ocupa actualmente.

El grupo será de 6 personas que se elegirán entre una lista de 12; las características y los costos de reemplazo se dan en la tabla.

Personas		**Profesión**	**Costo de reemplazo**	**Carácter**	**Observaciones**
1-	José Doporto	Contador	2.500	1	
2-	Roberto Marino	Químico	2.000	4	Personalidad conflictiva con Ricardo Vidal (Nº 11)
3-	Carlos Bettega	Ingeniero	1.800	3	Personalidad conflictiva con Ricardo Marotta (Nº 4)
4-	Ricardo Marotta	Contador	3.000	2	Mentor de Juan Lima (Nº 6). Personalidad conflictiva con Carlos Bettega (Nº 3).
5-	Saúl Ramoa	Contador	2.500	1	
6-	Juan Lima		1.500	4	Protegido por Ricardo Marotta (Nº 4)
7-	Jorge Smith	Químico	3.500	1	
8-	Andrés Campbell	Contador	4.000	2	
9-	Francisco Flores	Ingeniero	2.800	3	
10-	María Ferreiro	Ingeniera	3.000	3	
11-	Ricardo Vidal	Contador	2.500	2	Personalidad conflictiva con Roberto Marino (Nº 2)
12-	Carlos Salmain		5.000	2	

Código de carácter
1- Autoritario
2- Benevolente
3- Efectúa consultas
4- Partidario del trabajo de grupo

De los cuatro caracteres definidos en la tabla, los extremos 1 y 4 son antagónicos, y si tenemos miembros del grupo 1 no podemos tener del 4, y viceversa. Si hay dos benevolentes o más se ahorran $ 100.

<u>Otras restricciones</u>

- Debe haber por lo menos 1 ingeniero, 1 químico y 2 contadores.
- No deben encontrarse en el grupo 2 personalidades antagónicas.
- Protegido y mentor significa que el protegido es sólo eficiente si está el mentor.
- No puede haber más de 3 contadores, salvo que pertenezcan Vidal y Smith al grupo, entonces puede haber hasta 4 contadores.

3.5.

Una empresa minera opera tres minas de oro que es clasificado en 18 y 24 kilates. Los costos y capacidades de producción se dan en el siguiente cuadro:

Mina	Oro 18 K. Capacidad en tn/día	Oro 24 K. Capacidad en tn/día	Costo de operación mill .$/día
"Enriqueta"	4	4	20
"El Filón"	6	4	22
"La millonaria'"	1	6	18

La próxima semana se deben entregar 54 tns. de oro 18 y 65 tns. de oro 24. La ley de contrato de trabajo exige que al operario se le pague el día completo aunque la mina trabaje sólo una fracción del día.

Se supone que comenzaría a trabajar el lunes a las cero horas y entregaría el producto el domingo a las 24 hs.

3.6.

Una empresa produce aceite comestible mediante la refinación de aceite crudos y su posterior mezcla. El producto final se vende a 150 $/ton.

Los aceites A y B requieren una línea de producción de refinado distinta de la de los aceites C, D y E. Las capacidades de refinación de cada línea son respectivamente, 200 ton/mes y 250 ton/mes.

Hay una restricción tecnológica de dureza del aceite comestible. Esta debe encontrarse entre 3 y 6 (en unidades de dureza). Se asume que la dureza de aceite comestible es una combinación lineal de las durezas de los aceite crudos.

Además se desean imponer las siguientes condiciones adicionales:

- El aceite comestible no debe contener más de 3 aceites crudos.
- Si se usa un tipo de aceite crudo, deben usarse 20 ton., como mínimo.
- Si se usan el aceite A o el B entonces el aceite C debe también usarse.

En la siguiente tabla, se detalla el precio de cada tipo de aceite crudo (en $/ton) y su correspondiente nivel de dureza.

Tipo	Precio	Dureza
A	110	8,8
B	120	6,1
C	130	2,0
D	110	4,2
E	115	5,0

Refinar los aceites crudos lleva X min/ton. El costo de mantenimiento de la máquina de refinado varía según la cantidad de horas que funciona, como se detalla a continuación:

Horas	Costo de Mantenimiento
Menos de 100	$5000
Entre 100 y 200	$8000
Más de 200 y menos de 500	$9500
500 ó más	$10000

3.7.

Una empresa mayorista compra y vende 3 productos A, B y C. En este momento tiene en stock 50, 100 y 300 unidades respectivamente. El precio de venta de A varía con la cantidad vendida: si vende hasta 500 unidades, $ 20 c/u, de 500 a 1000, $ 18 y más de 1000, $ 15.

Los precios de venta de B y C son de $ 35 y $ 40 respectivamente.

La cantidad a entregar de A debe ser la menor de las tres pero si la cantidad entregada de B es menor que la de C esta limitación no se toma en cuenta.

Los precios de compra son los siguientes:

- producto A: $ 3 c/u
- producto B: $ 4 c/u si la compra de producto C es menor de 2500 un. y $ 3. si la compra de C es mayor de 2500 unidades.
- producto C: $ 6 c/u si se compran hasta 1000 un., $ 5 si se compran menos de 3000 un. y $ 4 para compras mayores de 3000 unidades.

Las demandas máximas son de 2000, 3000, y 4000 unidades respectivamente.

3.8.

La posada Aleph-Cero, según Martin Gardner, es un hotel de temporada que está dentro del Tubo Negro, que conecta el agujero negro que está en el centro de la Vía Láctea con los agujeros negros de otros universos.

Dentro de la posada hay un campo de juegos donde se pueden conseguir bolitas de colores numeradas con los números naturales. Con nueve bolitas numeradas de 1 a 9 queremos formar un “cuadrado antimágico”. Éste se forma colocando las bolitas en tres filas de tres bolitas cada una.

Sumando las tres bolitas de cada fila se obtiene una suma por fila.

Igualmente, sumando las tres bolitas de una columna se obtiene una suma por columna. Se quiere que las seis sumas sean todas distintas y que el número que se obtiene sumando las tres bolitas de la diagonal principal sea el menor posible.

El siguiente es un ejemplo de una posible ubicación de las bolitas:

1	2	3
6	8	4
9	5	7

3.9.

Suponiendo hechas las declaraciones de las variables E_i e Y_i (0-1) como enteras y C_i como continuas, pensar las ecuaciones y/o inecuaciones necesarias para...

a- que, si C_1 es mayor que 0, entonces también sea mayor o igual que 22.

b- que E_1 tome el máximo valor entre E_2, E_3 y E_4.

c- que C_1 tome el segundo menor valor entre C_2, C_3, C_4 y C_5.

d- que, si C_2 es 0, entonces C_1 también sea 0.

e- que C_1 no sea igual a 13.

f- que E_1 tome el valor de C_1 redondeado.

g- que E_1 tome un valor igual a la cantidad de variables (E_2, E_3, E_4 y E_5) cuyo valor es mayor que 5.

3.10.

WATEROIL S.A. es una refinería de petróleo y afronta el problema de distribuir un presupuesto fijo de capital entre distintos proyectos. A continuación se detalla la información disponible.

<u>Situación financiera</u>

La facturación mensual es de 1.000 x 10^6 \$ y el margen bruto sobre ventas 2,7%, que se considera muy bajo. Se pretende, con la nueva política de inversiones, elevarlo al 3% como mínimo.

En cuanto al rubro gastos se implementará un estricto control que aspira a reducirlo en términos reales en un 10%. Se prevén fuertes despidos de personal, en especial del plantel de Ventas.

Si bien se prevé un programa de inversiones, éstas se efectuarán dentro de un marco de austeridad que no permitirá gastar más de 65.000.000 \$ el primer año y más de 46.000.000 \$ el segundo año.

<u>Ingeniería de Proyecto</u>

Tiene en carpeta los siguientes proyectos:

Proyecto	**Descripción**	**Ingreso medio esperado**	**Erogaciones**	
			Año 1	**Año 2**
1	Renovar refinería. Aumento capacidad 500 bls/día.	100 M	20 M	20 M
2	Construir nueva refinería. Aumento capacidad 1.000 bls/día.	200 M	30 M	15 M
3	Construir oleoducto. Aumento capacidad 100 bls/día.	50 M	15 M	5 M
4	Cambio Torre Vacío. Aumento capacidad 50 bls/día.	30 M	10 M	7 M
5	Comprar petróleo. Aumento capacidad 20 bls/día.	20 M	5 M	4 M

Resulta claro que los proyectos 1 y 2 se excluyen mutuamente y que la aceptación del 3 depende de la aceptación del 2.

<u>Departamento Comercial</u>

Su participación de mercado actual es del 12% y se aspira a llevarla al 12,5% en 2 años.

<u>Stock</u>

Su nivel actual alcanza a 3 días de venta. Se aspira a llevarlo como mínimo a 4 días.

<u>Producción</u>

Ha determinado que, como mínimo, necesita incrementar su producción en 500 bls/día y como máximo en 1.100 bls/día.

<u>Política del Directorio</u>

Elevar al máximo el ingreso de la empresa.

3.11.

El gerente de una conocida pizzería de la zona norte ha decidido contratar un servicio de vigilancia, ante la gran inseguridad y la ola de robos en el barrio. Lo que a él le gustaría es hablar con el comisario para reforzar los patrullajes policiales en la cuadra. El problema es que esta alternativa es muy cara (le costaría $A pesos por mes) y no está seguro de poder pagarla. Una alternativa, en el caso de no poder contratar este servicio, sería hablar con los tres agentes que recorren el barrio para que pongan especial dedicación en su cuadra, con un costo de $B pesos por agente y por mes. La tercera opción, si ninguna de las dos anteriores fuera viable, es contratar a un militar retirado que vive en el barrio y sólo le cobraría $C pesos por mes, aunque el servicio que éste le puede brindar es bastante deficiente. Si tampoco pudiera contar con esta opción, deberá confiar en su fiel cuzco Bobby, que puede controlar la pizzería a cambio de un lugar donde dormir.

Para resolver este problema se dispone de $5000 por mes. También se puede pedir prestado a otras pizzerías de la misma cadena, que le pueden prestar $500 por mes cada una (habría seis pizzerías dispuestas a colaborar).

3.12.

Un hotel planea recibir a los participantes de una convención que dura una semana. Para los banquetes previstos, la empresa organizadora de la convención solicitó que se utilizaran manteles de un color especial. El costo de dichos manteles es de 25 $/mantel. El lavado de dichos manteles toma normalmente 2 días, es decir, un mantel sucio, enviado a lavar inmediatamente después de ser utilizado el día 2, es regresado a tiempo para ser utilizado el día 5.

Día	**Manteles necesarios**
1	5
2	6
3	7
4	8
5	7
6	9
7	10

Sin embargo, la lavandería tiene también un servicio de mayor costo que regresa los manteles en 1 día. Los gastos de lavandería son 10 $/mantel y 15 $/mantel respectivamente.

Considerando que el hotel no desea (por las características de estos manteles), comprar más manteles que los necesarios para el día, ni enviar manteles a lavar si no van a ser usados durante esta convención, ¿cómo satisface sus necesidades, minimizando sus gastos?

3.13.

Un corredor de jugos “Que podemos agregar” tiene que recorrer diariamente 5 comercios partiendo de la fábrica y volviendo a ella. Para ir de un comercio a otro debe calcular los costos, que son proporcionales a los litros de nafta que le insume cada trayecto. Estos costos entre cada comercio I – J se expresan en la tabla adjunta.

I \ J	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	—	7	7	5	8
2	8	—	12	13	6
3	6	10	—	9	5
4	4	15	8	—	14
5	9	7	7	12	—

Los costos de traslado, comida, etc. deben ser abonados por el corredor. Conoce que por cada litro de nafta que cuesta $ 1, gasta $ 9 aproximadamente en comida, art. de librería, etc.

Por razones comerciales, el corredor no puede ir al comercio número 4 sin pasar antes por el 3. Como el comerciante 2 cierra tarde, antes de ir a ese negocio, tendrá que ir a los negocios 3 y 5.

¿Qué es lo mejor que puede hacer el corredor?

3.14.

Una empresa automotriz enfrenta un control de precios. Fabrica dos modelos de autos, uno standard cuyo precio está controlado, y otro cuyo precio está fuera de control. Precios, costos y stocks iniciales se dan en el siguiente cuadro:

Modelo	Precio	Gastos de fabricación	Materia prima	Costos de ventas	Stock inicial
Standard	18.500 $/un.	5.500 $/un.	2.000 $/un.	1.000 $/un.	100 un.
Lujo	27.500 $/un.	7.000 $/un.	4.000 $/un.	1.400 $/un.	150 un.

Para el modelo standard se debe cumplir por lo menos con las entregas correspondientes a los planes "círculo cerrado" y que ascienden a 80 unidades. Se estima para este modelo una demanda máxima de 800 unidades.

En cuanto al modelo de lujo, no hay compromiso de entregas mínimas siendo su demanda máxima de 300 unidades para el mes próximo.

En cuanto a los stocks, no se quiere tener un nivel inferior a 50 para el modelo standard y a 20 para el de lujo.

Se considera que, si el nivel de producción de la planta no supera las 500 unidades, se ahorrará $1.000.000, por la supresión de una serie de servicios que no serian necesarios.

Las ventas se efectúan de la siguiente manera: 50% al contado y 50% con documentos a 30 días. Estos documentos se descontarán en Bancos, dado que se debe efectuar el pago de un préstamo al exterior, lo que acarrea para el mes en estudio un grave problema financiero. Las tasas de descuento serán las siguientes:

- Si el monto a descontar no supera los $5.000.000, 20%
- Si el monto a descontar es superior a $5.000.000, 30%

Los pagos por gastos de fabricación, materia prima y costos de ventas, se harán durante el mes, recurriendo a "descubiertos bancarios", estimándose que si el nivel total de los mismos está entre 0 y 3 millones, generará una carga financiera de $160.000, y si lo supera, $210.000.

Si el monto de documentos a descontar supera 5 millones, la demanda del modelo de lujo aumenta en 100 unidades. En el caso de que se descuenten menos de 5 millones se quiere vender más de lujo que de standard.

Cuando se vendan más de 200 autos de lujo, los primeros 200 tendrán un precio de $ 27.500 y los restantes de $30.000.

3.15.

Una empresa textil fabrica y vende telas para cortinas en sus dos variedades, voile y rústico. La venta se hace en bobinas de 30 mts. de largo x 1,30 mts. de ancho. En el cuadro siguiente se resumen las situaciones correspondientes a cada tipo de tela:

Tela	Precio	Gastos de fabricación	Materia prima	Costos de ventas	Stock actual
Voile	420 $/bobina	9 $/metro	3 $/metro	20 $/bobina	30 bobinas
Rústica	873 $/bobina	10 $/metro	4 $/metro	25 $/bobina	150 bobinas

Los compromisos contraídos exigen la entrega como mínimo de 100 bobinas de voile y 150 de rústico. Las demandas tope para cada tipo de tela ascienden a 800 y 300 unidades para voile y rústico, respectivamente. No se quiere dejar un stock inferior a 50 bobinas voile ni 120 rústico y no hay problemas en elevar los stocks de cada modelo al doble.

Las ventas se efectúan al contado, mientras que los pagos correspondientes a fabricación, materia prima y ventas se realizarán 50% al contado y 50% a 90 días sin interés.

El nivel actual de disponibilidades alcanza a $ 50.000. Todo excedente sobre este nivel se colocará en el mercado financiero según el siguiente cuadro:

De 0 a 50.000 $ al 5,2% mensual

De 50.000 a150.000 $ al 5,4% mensual. No se puede colocar más que ese tope.

Los déficit de caja los toma al siguiente interés:

De 0 a 50.000 $ al 5,6%

De 50.000 a 100.000 $ al 6,0%. No se pueden tomar más fondos que este tope.

La empresa posee dos líneas, una para voile y otra para rústico. Se justifica poner una línea en marcha si se hacen más de 150 bobinas. En caso contrario se pueden comprar las bobinas afuera al siguiente precio:

- Rústico : 830 $/bobina
- Voile : 430 $/bobina

En este caso sólo se comprarán las bobinas para cubrir los mínimos. Si produce, no se compra.

Si la producción excede las 350 bobinas se ahorran $ 35.000.

La capacidad de embalaje total alcanza las 950 bobinas, si no fuera suficiente, un segundo proveedor ofrece bobinas voile embaladas a $ 380.

3.16.

La empresa Black Hole, radicada en Africa, debe transportar un contenedor de Cadmio enriquecido a través de seis regiones de la zona del Sahara, para luego regresarlo a la filial de partida. En cada región deberá agregarle un componente químico al cadmio y así, cuando regrese a la fábrica tendrá el producto final listo para procesarlo.

Cuando el contenedor parte, la temperatura del Cadmio es exactamente de cero grados centígrados. Alguno de los componentes que se van agregando aumentan la temperatura del Cadmio en una determinada cantidad de grados, y otros bajan esa temperatura. Ninguno de los componentes puede faltar en el producto final.

Por razones de seguridad, en ningún momento la mezcla del contenedor puede tener una temperatura inferior a cero grados (el contenedor está perfectamente aislado del exterior).

Las distancias entre dos regiones cualesquiera i y j (medidas en kilómetros) son datos fijos, que se representan como constantes D_{ij}. Así también la distancia entre la filial y cada región j es una constante conocida R_j

A continuación se indica el efecto que tiene el componente de cada región sobre el Cadmio; las variaciones de temperatura que éstos producen son constantes y se indican con letras.

Región	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
La temperatura…	Baja A grados	Sube B grados	Sube C grados	Baja D grados	Sube E grados	Sube F grados

3.17.

Paco, el cadete de “Asegurola C.A.S.S.A.” debe recorrer en un día seis entidades de Crédito y Finanzas. Sabe que cada trámite (viaje incluido) le demora como máximo 1 hora y media. Paco llegó a un acuerdo con la empresa para no cumplir con las 8 horas diarias de trabajo, siempre y cuando cumpla con su tarea, y así poder aprovechar el tiempo libre para sus actividades personales.

La empresa impuso ciertas normas que el cadete debe respetar por diversas causas, a saber:

- No puede realizar más de 3 viajes caminando porque puede perjudicar 1a imagen de la misma.
- Sólo puede disponer de 20 pesos diarios para viajes en taxi o colectivo.
- No puede ir al banco “A”, si no fue antes a buscar un certificado a la financiera “F” o “E”, o al banco “B”.

Paco conoce un “tachero” y sabe que si toma su taxi en la parada del banco “C” para ir al banco “B”, el chofer, por la módica suma de $2 le presta el teléfono celular para hablar a la financiera “F” y así no tener necesidad de acudir a ella.

El efecto “stress aumentado” que le produce ir a las financieras (“D”, “E”, “F”) es tal; que Paco no ve con agrado visitar las tres en forma consecutiva.

La empresa permite que el cadete no fiche la entrada si el recorrido realizar es B-E-D-C-F-A-Empresa.

En promedio, permanece 15 minutos en cada entidad.

Las distancias desde la empresa a las entidades (en minutos) son: A:30, B:50, C:30, D:40, E:70, F:60. Se adjunta cuadro con los minutos de viaje entre entidades:

	A			**B**			**C**			**D**			**E**		
	Taxi	**Col**	**Pie**	**Taxi**	**Col**	**Pie**	**Taxi**	**Col**	**Pie**	**Taxi**	**Col**	**Pie**	**Taxi**	**Col**	**Pie**
F	60	45	—	40	50	—	40	—	60	40	50	65	—	20	30
E	65	—	65	25	35	45	—	20	30	35	35	35			
D	45	—	—	—	35	50	45	50	—						
C	55	60	—	30	—	40									
B	10	—	25												

¿Qué es lo mejor que puede hacer Paco?

☞ *NOTA: Se supone que Paco parte a las 8 en punto desde la empresa o desde e banco “B” y dispone de tres medios de transporte para moverse (Taxi, Colectivo o a Pie) aunque no todos están disponibles para todos los recorridos. Se sabe que el boleto cuesta $BOLETO y el minuto de taxi $MINUTO, éste se paga por tiempo de viaje.*

3.18.

Para ordenar el servicio de ambulancias de una ciudad, se la dividió en 8 distritos. La población de cada distrito es la siguiente: Distrito 1: A habitantes; Distrito 2: B habitantes; Distrito 3: C habitantes; Distrito 4: D habitantes; Distrito 5: E habitantes; Distrito 6: F habitantes; Distrito 7: G habitantes; Distrito 8: H habitantes.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	0	3	4	6	8	9	8	10
2	3	0	5	4	8	6	12	9
3	4	5	0	2	3	3	5	7
4	6	4	2	0	2	2	5	4
5	8	8	3	2	0	2	2	4
6	9	6	3	2	2	0	3	2
7	8	12	5	5	2	3	0	2
8	10	9	7	4	4	2	2	0

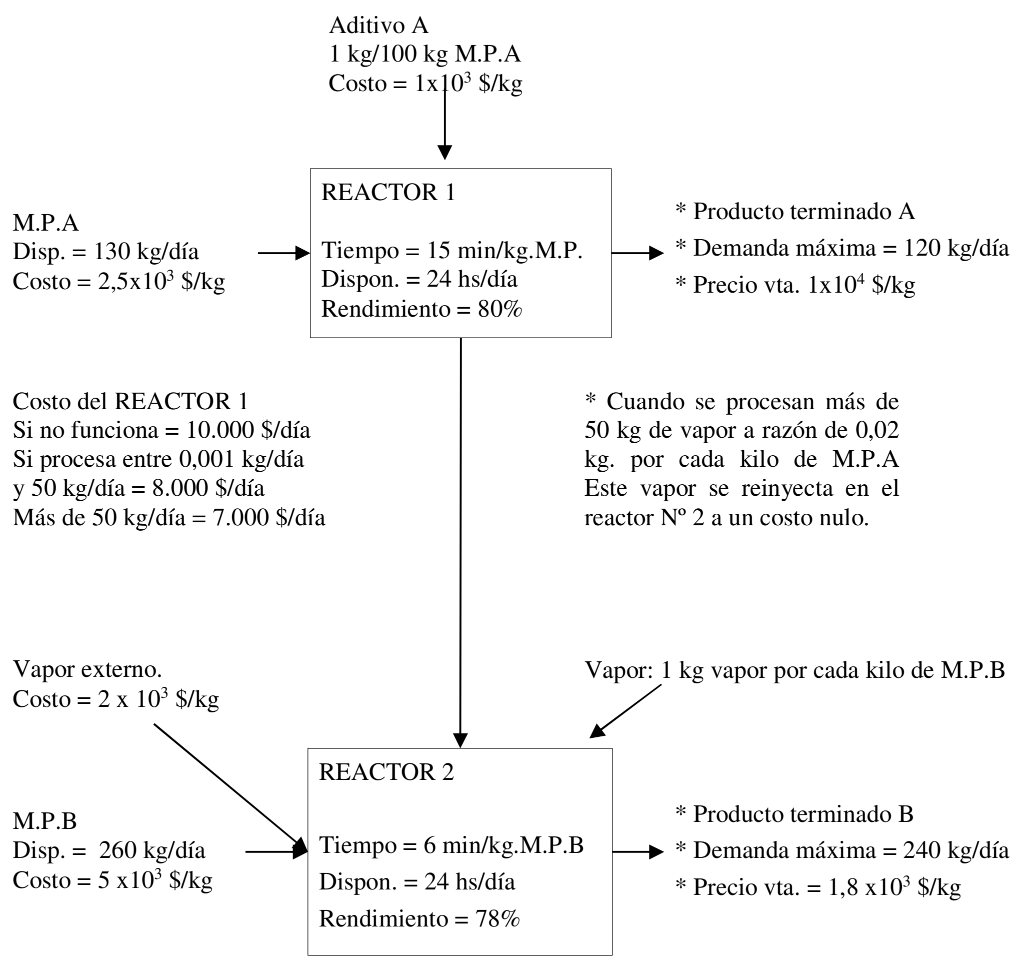
En la tabla se muestra el tiempo (en minutos) que tarda una ambulancia en llegar de un distrito a otro cualquiera (el distrito del cual sale es el distrito en el cual se colocó la ambulancia):

La ciudad dispone sólo de una ambulancia para colocar (con lo cual, a lo sumo, un distrito tendrá ambulancia propia) y quiere colocarla de manera de minimizar el número de personas que están a más de 3 minutos de la ambulancia.

☞ *Análisis posterior: ¿Cómo cambia el modelo si ahora se dispone de dos ambulancias para colocar?*

3.19.

Un proceso químico tiene el siguiente diagrama de flujo:



Costo del REACTOR 2 : Si no funciona, 10.000 \$/día
Si procesa, 7.000 \$/día.

☞ *Análisis posterior:*

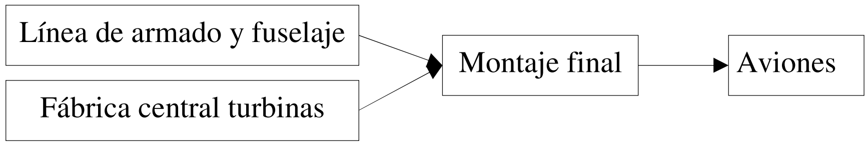
a- ¿Cómo cambia el modelo si no se cumplen las hipótesis indicadas?

b- ¿Cómo cambia el modelo si existe la posibilidad de aumentar la capacidad del reactor 1 incorporando otro reactor que trabaje las 24 horas con un costo incremental diario de 15.000 \$/día?

3.20.

TURBIFORT, importante productor de turbinas, posee dos divisiones básicas: aeronáutica y represas

La División Aeronáutica tiene el siguiente proceso:



Cada avión dispone de 4 turbinas. El armado del fuselaje implica 48.000 horas hombre por unidad y se dispone de 40.000 horas hombre por mes. Es decisión tomada que si no se producen más de 5 aviones en el año que viene, la planta se cierra, implicando un costo por indemnizaciones de $1.000.000. El precio de venta de cada avión es $16.000.000. El costo del fuselaje, $3.000.000.

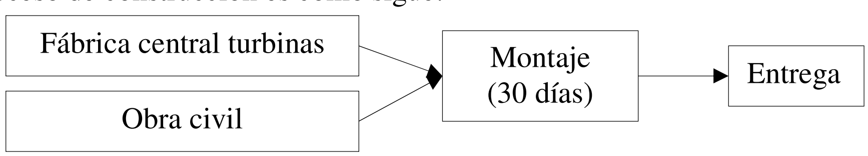
La División Represas tiene dos propuestas:

- Represa A – Requiere una obra civil de 50.000 m^2 y se instalarán 8 turbinas. Monto del contrato, $A
- Represa B – Requiere una obra civil de 80.000 m^2 y se instalarán 10 turbinas. Monto del contrato, $B

Para efectuar las obras civiles cuenta con 800 operarios que trabajan razón de 1 m^2/operario por día. La dotación no se incrementará. Se estima un costo por obra civil de $ 70 x 10^6 para la Represa A y de $ 110 x 10^6 para B.

La obra A se debe entregar a los 120 días a contar del 1º de enero próximo y la B a los 300 días. No hay prórrogas.

El proceso de construcción es como sigue:



El costo del montaje es $15.000.000.

La fábrica de turbinas que abastece a las dos divisiones tiene un estándar de 24.000 hh/turbina y cuenta con 2 turnos de 100 personas c/u que trabajan 8 hs. El costo de cada turbina terminada es $2.000.000

3.21.

TRESASDE S.A. es una empresa dedicada al tendido de líneas de alta tensión.

Su actividad principal depende de las licitaciones que gane.

Recientemente ha ganado dos licitaciones. Cuenta con maquinarias y recurso como para encarar una tarea por vez.

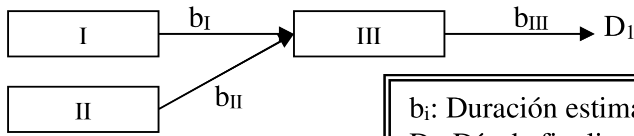
La licitación Nº 1 comprende las siguientes tareas:

- Fundación (Tarea I)
- Transporte de las torres al lugar (Tarea II).
- Colocación de torres y cables (Tarea III).

La licitación N° 2 comprende tareas de reparación de torres de alta tensión dañada por un temporal (Tarea IV).

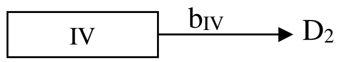
La secuencia de las tareas se observa en el siguiente esquema.

<u>Licitación 1</u>



b_i: Duración estimada de la tarea i.
D_i: Día de finalización de la obra i.

<u>Licitación 2</u>



Tarea	Duración
I	120 días
II	10 días
III	120 días
IV	110 días

Licitación	Día de finalización
1	360 días a contar del 1º de Enero
2	240 días a contar del 1º de Enero

De acuerdo a sus disponibilidades de recursos humanos, financieros, y de maquinarias, no puede encarar más de una tarea por vez.

No existe justificación para una eventual duplicación de recursos ya que el panorama de trabajo tras estas dos obras es totalmente incierto. El monto total a percibir por la obra 1 es de $ 10.000.000.

Como es usual en este tipo de licitación, se han fijado premios por cumplimiento, según las siguientes condiciones establecidas en el pliego:

- Si la tarea 1 finaliza 30 días antes del día 31 de Mayo, $ 250.000. Si la licitación 1 queda finalizada antes del 31/10: $ 1.500.000; si la licitación 1 queda finalizada antes del 30/11: $ 750.000.
- En cuanto a la licitación 2, se percibirán $ 3.000.000 y hay un incentivo de $ 300.000 por terminar como mínimo un mes antes de 31/8.

El costo operativo por cada día de trabajo es de $ 20.000.

Las tareas comienzan al principio del día.

3.22.

Alejandría, una fábrica de camellos de peluche, tiene cuatro modelos nuevos que pretende lanzar el próximo mes. Los modelos se identifican de la siguiente manera: Justine, Balthazar, Mountolive y Clea.

La fábrica trabaja con dos clientes mayoristas, Durrell y Kavafis, cuyas demandas máximas son de 2000 y 375 unidades para el modelo Justine, 375 y 750 unidades para el modelo Balthazar, 1000 y 1025 unidades para el modelo Mountolive y 280 y 250 unidades para el modelo Clea respectivamente.

Alejandría ha fijado sus precios de venta y costos de fabricación según la siguiente tabla:

	Justine	Balthazar	Mountolive	Clea
Precio de Venta ($/u)	325	200	225	100
Costo de Fabricac.($/u)	200	50	75	13

Se quiere dejar un stock mínimo de 375 unidades mensuales de todo modelo que se venda en ese mes.

Lanzar cada modelo cuesta 25000 pesos en concepto de publicidad.

Se quiere lanzar por lo menos tres de los cuatro modelos.

Se sabe que si Kavafis compra Mountolive, no comprará Clea.

La empresa tiene la siguiente política: a aquel mayorista que compre más unidades del modelo Balthazar, se le hace una bonificación del 30% en su compra.

Existen dos procesos de terminación de los camellos. Todos los modelos pasan por el primer proceso, pero los modelos Justine y Mountolive pasan luego por el segundo. El primer proceso puede terminar 7500 unidades mensuales y el segundo 4500 unidades por mes. Si al menos uno de los dos modelos que pasan por el segundo proceso no se fabrica, la capacidad de dicho proceso disminuye a 2500 unidades mensuales con un ahorro de 3000 pesos.

Si la cantidad fabricada total supera los 3750 unidades en el mes, se quiere vender a Durrell mayor cantidad de Justine que de Balthazar.

Si el beneficio es inferior a $ 225.000, habrá que solicitar un préstamo, con un interés del 25%. Si el préstamo es necesario, el banco Elbardo exige para otorgarlo que no se guarde stock del modelo más vendido entre Justine y Mountolive.

3.23.

Un fabricante de BOYACOS planifica la producción y venta de dos nuevos modelos, éstos pertenecen a la Línea Italiana y serán en color verde y lila. Para esto cuenta con dos plantas de producción y la información correspondiente a las mismas:

	PLANTA G			**PLANTA A**	
	Línea 1	**Línea 2**	**Línea 3**	**Línea 4**	**Línea 5**
BOYACO VERDE (seg/u)	20	15	22	18	20
BOYACO LILA (seg/u)	23	18	26	22	24
CAPACIDAD LINEA (seg/mes)	30000	25000	35000	30000	33000

Si la producción lo justifica, la capacidad de c/u de las líneas en ambas plantas se puede incrementar en un 30% mensual (respecto de la capacidad actual), con un costo adicional de $ 5000.

Línea 1 .... $ 2
Línea 2 .....$ 1,5
Línea 3 .... $ 1
Línea 4 .....$ 1,8
Línea 5 .....$ 0,7

En Enero, el costo del segundo de máquina, para c/u de las líneas se indica en el cuadro adjunto. En Febrero, los costos se incrementarán un 10% respecto a los de Enero.

Se puede vender el sobrante de tiempo de todas las líneas (capacidad ociosa) a $2 el segundo.

Además en la planta G sólo se podrá disponer de 2 de las 3 líneas. Los precios de venta y las demandas para Enero y Febrero son los siguientes:

		ENERO	**FEBRERO**
Boyacos Verdes	Las primeras 500 un que se vendan	130 $/u	145 $/u
	Las siguientes unidades	150 $/u	165 $/u
Boyacos Lilas	Las primeras 300 un que se vendan	140 $/u	155 $/u
	Las siguientes unidades	160 $/u	175 $/u
Boyacos Verdes	Demanda Mínima	100 u	100 u
	Demanda Máxima	800 u	700 u
Boyacos Lilas	Demanda Mínima	0 u	100 u
	Demanda Máxima	600 u	600 u

Las ventas se realizarán en un único local instalado para tal fin, éste podrá estar ubicado tanto en la planta "G" como en la "A" dependiendo de cuál sea el centro de mayor venta en ambos meses. Es decir, si en ambos meses lo que se produce para vender en la planta "A" es mayor a lo producido para vender en 'G', el local de venta se ubicará en la planta "A", en caso contrario se ubicará en la planta "G". El costo de instalación del centro de ventas "A" es de $ 15000, y del "G" es de $ 13000.

Los Boyacos deben ser transportados desde la planta donde se producen al centro de ventas. Para ello se cuenta con 8 camiones, cada uno de los cuales puede transportar 90 Boyacos; el costo de ir de una planta a otra por camión (ya sea que esté completo o no) es de $ 1800.

En el centro de ventas se destinará un espacio para almacenar los Boyacos que no se vendan en el mes, para ser vendidos en el próximo. El espacio máximo disponible es equivalente a 200 Boyacos, y el costo del almacenamiento es de $ 10 por Boyaco por mes.

3.24.

Con la Pirargirita, Wolfranita y Colófana recogida en Venus por la misión espacial del 22/12/89, se puede producir un nuevo mineral denominado PiWoCo.

El proceso de producción se llevará a cabo en el laboratorio de "HiperSpace Argentina S.A." en el que hay 7 centros con los siguientes objetivos:

CA_1: Procesa Pirargirita y obtiene Piproc con una merma del 15%, luego lo distribuye entre los centros CB_1, CB_2, C33 y CB_4.

CA_2: Procesa Wolfranita y obtiene Woproc que es distribuido entre CB_3, CB_4 y CB_5.

Los centros CB_1 a CB_5 utilizan distintos métodos para obtener PiWoCo.

CB_1: Utiliza Colófana. que mezcla con Piproc en una proporción 30/70 obteniendo así PiWoCo.

CB_2: Obtiene PiWoCo a partir de Piproc, en el proceso hay merma del 30%.

CB_3: Mezclando Piproc, Woproc y Agua (se dispone de gran cantidad de Agua Mineral Gasificada),se obtiene PiWoCo. Por cada kg. de mezcla de Piproc y Woproc se agrega ¼ Kg de Agua. (1 Kg de Piproc + 1 Kg de Woproc + 2 * ¼ Kg de Agua = 2,5 Kg de PiWoCo).

CB_4: Se mezclan Piproc, Woproc y Colófana, para obtener PiWoCo.

CB_5: En este centro se parte de Woproc y Colófana y se obtiene PiWoCo con una merma del 5%.

Para el período en estudio la capacidad productiva de los centros está dada por la siguiente tabla:

	CA_1	**CA_2**	**CB_1**	**CB_2**	**CB_3**	**CB_4**	**CB_5**
Disp. de Hs. Hombre	40	40	20	15	15	18	10
Velocidad de Proceso	10	8	5	3	7	7	5

La Disp. de Hs. Hombre está medida en: Hs.Hombre/Periodo, y la Velocidad de Proceso en: Kg.de entrada/HH.

Cuando el centro CB_3 es el de mayor producción (entre los centros "B"), el 30% de las hs. disponibles para producción en el centro CB_1 se deben utilizar para supervisar el centro CB_3.

En el viaje interplanetario se recogieron 400 Kg. de Pirargirita, 350 Kg. de Wolfranita y 200 Kg. de Colófana.

Los costos y réditos evaluados son los siguientes:

- Costo por no utilización de Materia Prima: 1000 U$S/Kg de Pirargirita, 1500 U$S/Kg de Wolfranita y 2000 U$S/Kg de Colófana.
  - Costo de Producción: 1800 U$S/Kg. de PiWoCo producido en el Centro promedio por 5. El Centro Promedio es el centro ($CB_1 \ldots CB_5$) que produce más que dos centros y menos que los otros dos.

    Dado que en el costo de producción se toma un "Promedio" que no es tal, se decidió utilizar un método de ajuste del costo que se basa en disminuir en un 10% el costo calculado previamente, en el caso en que la producción del centro con menor producción sea menor que el 40% de la producción del centro promedio.
  - Costo por nivel de producción y por centro:

Centro	Si es el 1º o el 2º en producción	Si es el centro de producción promedio	Si es 4° o 5° en producción
CB_1	base – dif	base	Base + dif
CB_2	2 * (base – dif)	2 * base	2 * (base + dif)
CB_3	3 * (base – dif)	3 * base	3 * (base + dif)
CB_4	4 * (base – dif)	4 * base	4 * (base + dif)
CB_5	5 * (base – dif)	5 * base	5 * (base + dif)

Valor : Base = 25000 U$S

Dif = 5000 U$S

- Rédito por producción: 2200 U$S/Kg. si se producen menos de 300 Kg. ó 2000 U$S/Kg si se producen entre 300 y 500 Kg ó 2400 U$S/Kg si se producen más de 500 Kg.

3.25.

RYW, una empresa petrolera de Lesotho, desea instalar en su país dos refinerías y seis torres de extracción. La región petrolera se encuentra dividida en tres zonas (A, B y C) y en cada una de ellas hay cuatro posibles ubicaciones numeradas de 1 a 4. Todas esas ubicaciones serán sometidas a un proceso previo de descarte del cual surgirán algunas candidatas para ubicar las torres y refinerías. Ese proceso previo es realizado por el gobierno del país, pero un influyente ha filtrado los datos que se usarán para la selección, de forma que la petrolera puede saber qué ubicaciones serán candidatas con total seguridad.

Las condiciones de elección y características de las ubicaciones se detallan a continuación:

Capacidades de extracción por ubicación				
Zona	**Barriles/día**			
A	1.200	0	800	1.900
B	1.400	1.300	1.000	600
C	1.000	1.000	0	700
Ubicación	**1**	**2**	**3**	**4**

- No puede haber más de ocho ubicaciones candidatas
- La cantidad total de ubicaciones candidatas debe ser un número par.

- Debe haber al menos una candidata por zona.
- Una ubicación con capacidad de extracción menor a 800 bl/día no puede ser candidata a menos que el total de candidatas sea superior a 7.
- Dentro de cada zona se puede acceder a cualquier ubicación de la misma, pero sólo se puede entrar y salir de una zona por las llamadas “cabeceras”, que son las siguientes: Zona A: A1 y A4; Zona B: B3; Zona C: C2, C3 y C4. Una cabecera sólo se puede usar como tal si en la misma hay una torre o refinería.

Con estos datos, la petrolera sabe las ubicaciones candidatas. De entre éstas elegirá donde colocar seis torres y dos refinerías. No puede haber más de una torre por ubicación. El influyente mencionado le asegura a la petrolera que su elección será la aceptada por el gobierno, pero está obligada a satisfacer las necesidades diarias de petróleo refinado para cada zona con el costo de transporte a su cargo. A continuación indicamos las necesidades de cada zona y las capacidades de refinerías y torres:

Necesidades de cada zona	
A	1700 bls/día
B	2000 bls/día
C	1500 bls/día

Capacidad refinerías	
I	4000 bls/día
II	6000 bls/día
	(Merma : 10 %)

Capacidad de cada torre
1200 bls/día

Si en una zona hay refinería, el costo de transporte del petróleo es nulo: sino tendrá que enviar el petróleo extraído en su zona a otra que tenga refinería (y recibirlo refinado, por supuesto).

Recordemos que se puede entrar y salir de las zonas sólo por alguna ubicaciones. El siguiente cuadro indica los costos de transporte (medidos en pesos/barril transportado):

Ubicación	**B3**	**C2**	**C3**	**C4**
A1	110	90	45	68
A4	27	35	88	101
B3	—	53	29	12

3.26.

Un señor, ya muy mayor, debe efectuar una serie de visitas a sus más queridos amigos (que son en total 6). Estos viejos amigos viven en lugares muy diversos, algunos de estos sitios son realmente inhóspitos, otros son grandes ciudades.

Existen dos medios de transporte: ómnibus y tren. Además, uno de sus amigos es fanático del motociclismo y le tiene prometido ir a buscarlo con la moto al lugar que sea con tal de que vaya a visitarlo.

Este buen señor quiere gastar poco (es muy pobre), pero como también es viejo no puede viajar demasiadas horas; encima algunos de sus amigos tienen el gran defecto de ser muy celosos. Todos estos problemas juntos lo abruman y lo llenan de preocupación. Sin embargo, él sospecha que todo esto no es más que solo problema y realiza el siguiente resumen:

Conoce perfectamente donde viven sus amigos, puede marcar los puntos en un mapa, medir las distancias con toda precisión e identificar el tipo de camino a recorrer (carretera o avenida). Además sabe cuánto cuesta y cuánto tiempo lleva viajar en micro y viajar en tren desde cualquier punto a cualquier otro punto de los marcados en el mapa. También conoce la distancia por carretera, o avenida, desde cualquier punto marcado en el mapa hasta donde vive el de la moto.

Los problemas de celos los puede manejar bien si no visita a Ulises antes sin haber visitado a Alcinoo y a Circe, a menos que Ulises sea el primero que visite.

El punto de las horas de viaje le preocupa, decide que el total de horas netas de viaje (ya sea en ómnibus, tren o moto) no debe superar las 100 horas, a menos que logre visitar en forma consecutiva al Negro y a Eugenio no más tarde de la cuarta visita, ya que como los dos son muy hospitalarios y cuentan con muchísimas comodidades, puede descansar muy bien, y en ese caso se anima a extender su viaje a 120 horas.

El de la moto no es otro que Jorgito, tiene una Suzuki GSX R 750 y anda siempre a 140 Km/h en las carreteras y 120 Km/h en las avenidas.

Cuando esté en la casa del último amigo visitado piensa descansar unos cuantos días y emprender el regreso visitando nuevamente a todos sus amigos de forma tal de no repetir ningún tramo del camino ya efectuado, aunque lo recorra en sentido inverso.

Este segundo viaje lo quiere hacer con el menor costo, sin preocuparse por la duración.

3.27.

Le Elbor Catenovi quiere planificar sus próximas 2 semanas, pues llego un momento muy especial en su vida. Tiene pensado realizar tareas y algunas de ellas disfrutarlas con una muy grata compañía.

Las tareas que quiere hacer son: Ir al Gimnasio (Cuida su cuerpo), Practicar comer con palillos, Buscar muebles de Algarrobo, Preparar clases teóricas y Preparar un examen.

Las tareas pueden realizarse en las 2 semanas y hasta superponerse en el mismo día, en distintos horarios, pero tiene pre-pensados algunos días para realizar las tareas:

1) Viernes, Sábado y/o Domingo va a ir al Gimnasio. (Como mínimo 5 veces en las 2 semanas).
2) Lunes, Miércoles y/o Viernes ir a Practicar comer con palillos en la casa de su novia. (Como mínimo 4 veces en las 2 Semanas).
3) Sábado y/o Domingo quiere salir a buscar muebles de Algarrobo con su Novia. (Como máximo 3 veces en las 2 semanas).
4) De Lunes a Viernes quiere preparar clases teóricas. (Como mínimo 7 veces en las 2 semanas).
5) Martes, Jueves y/o Viernes va a preparar el examen. (Como máximo 5 veces en las 2 semanas).

Como la vida no es sencilla tiene algunas condiciones que debe respetar:

1) Si en la primera semana practica comer con palillos los 3 días, su novia le prometió que en la segunda semana lo va a acompañar Sábado y Domingo a buscar muebles. Sino sólo lo hará el Domingo de la segunda Semana.
2) En la segunda semana no puede ir al Gimnasio y practicar comer con palillos el Viernes, a no ser que dedique 3 días de la primera semana a preparar el examen, pues tiene que estar relajado para comer y preparar el examen lo relaja bastante.
3) En la primera semana quiere realizar un 25 % más de actividades que en la segunda semana.

Habilidoso como nadie para las negociaciones pudo conseguir que por cada día a preparar clases teóricas le paguen \$PAGO, también si prepara clases teóricas la misma cantidad de días la primera semana que la segunda le prometieron un extra de \$PAGOEXTRA en total. También negocio con su Novia que por cada día que lo acompañe a buscar muebles de Algarrobo él le regalara rosas (de tallo largo), que tanto le gustan, y le cuesta $ROSAS por día.

Su Novia, muy astuta como toda mujer, le propuso el siguiente plan de ahorro, pues están juntando para irse a vivir juntos. Si gasta en Rosas menos de $29, esa diferencia la guardan en el fondo común; pero si gasta más de $29 esa diferencia, multiplicada por 2 es la cantidad que deben guardar en el fondo común.

Dispone de $INI al inicio de sus 2 semanas y quiere al final de este tiempo tener como mínimo $FIN, si no llega a ese monto puede pedir prestado, plata pero le descontaran en concepto de interés adelantado un 10%.

3.28.

Manteniendo su estilo de negociación, Le Elbor propuso la siguiente alternativa para el extra de $PAGOEXTRA que le prometieron en el ejercicio anterior, si cumplía la condición de que la cantidad de días de trabajo de la preparación de las clases teóricas sean iguales en las 2 semanas.

Estas son las nuevas condiciones: Le pagarán un extra de $EXTRA por cada día dedicado a preparar las clases teóricas, además de los $PAGO. También, si no cumple la condición de trabajar en la preparación igual cantidad de días en las 2 semanas le cobran una multa de $MULTA.

Te pedimos que modeles la nueva modificación al problema anterior y nos des tu opinión acerca de si esta alternativa le puede convenir. ¿Qué causas justificarían que se pague $MULTA?

3.29.

Le Elbor Catenovi, ya organizado y con sus tareas cumplidas, tiene su mente puesta en unas muy merecidas vacaciones en Buzios. Piensa compartir las mismas con la mujer que ama, alquilar un Buggi durante 2 días y recorrer muchas playas. Va a salir, durante los días que disponga del Buggi, a la mañana de la Posada recorrer las playas y regresar a la noche a Cenar.

Desea definir el plan para recorrer las Playas en los 2 días. Quiere que las playas visitadas sean exactamente las mismas para ambos días, aunque no necesariamente en el mismos orden. Quiere visitar 9 playas (P_1, P_2, …, P_9), partiendo y regresando a la posada (P_0). Conoce la distancia entre todos los pares de playas D_{ij} (i, j = 1,…,9) [Kilómetros], además conoce las distancias entre la posada y cualquier playa D0i (i = 1,…,9) [Kilómetros].

Quiere cumplir algunas condiciones particulares en los recorridos:

1) Las playas que sean visitadas en orden par en el primer día también tienen que ser visitadas en orden par en el segundo día. Ejemplo: Si la playa P_7 es visitada cuarta (orden par), en el primer día entonces en el segundo día también debe ser visitada en orden par.
2) No quiere repetir en el segundo día ningún recorrido que haya hecho en el primer día. Por ejemplo si en algún viaje realiza el recorrido directo entre la playa P_3 y la playa P_9 en el otro día no quiere realizarlo.
3) Visitar antes la playa P_7 que la playa P_9, en el primer día y visitar la P_7 después que la P_9 en el segundo.

4) Si el primer día la quinta playa en ser visitada es la playa P_9 y la sexta playa en ser visitada es la playa P_2 entonces la playa P_4 debe ser la segunda en ser visitada.

Le Elbor calculó los gastos de comida y de bebida (fundamental), en CTO [$/Kilometro] por cada Kilómetro recorrido.

Negoció las siguientes políticas de Descuentos:

1) Si realiza un gasto mayor o igual a G_1 [$] recibirá un descuento fijo de D_1 [$] o si el gasto es mayor o igual a G_2 [$] recibirá un descuento fijo de D_2 [$]. Su proveedor no quiere darles ambos descuentos (D_1 y D_2), sólo si corresponde le dará uno de los dos. *(Nota: G_1 [$] < G_2 [$] y D_1 [$] < D_2 [$]).*
2) Si realiza un gasto mayor o igual a G_3 [$] y en el primer día va a la playa P_8 en el orden 4 entonces el proveedor le dará un descuento fijo de D_3 [$].

3.30.

Le Elbor, habilidoso como nadie en cuestiones de dinero, se hizo muy amigo de su proveedor de comida y bebida del ejercicio anterior.

Por esto ahora quiere darle la mayor cantidad de plata posible, pero sin regalarle nada, así que le pagará sólo por lo que gaste. Por esto decidió, para modelizar esta alternativa, cambiar el objetivo del funcional (de Mín a Máx). Te pedimos que implementes la nueva modificación en tu modelo.

¿Pensás que las ecuaciones del modelo anterior que modelan el recorrido por las playas, una vez modelizada la nueva alternativa, darán un resultado correcto? Sí/No Justificá tu respuesta.

3.31.

"Seres luminosos somos, no simplemente materia cruda debes sentir la Fuerza a tu alrededor, aquí, entre nosotros, entre el árbol, la piedra, ¡entre todo!"

Joda, El Maestro Jedi

Hace mucho tiempo en una galaxia muy lejana...

Obi Wan Kenobi le ha encargado a su fiel discípulo Anakin Skaywalker una tarea muy sencilla pero no por ello poco importante. El tema es que Obi Wan y Joda, su maestro, están muy preocupados por mantener la paz de toda la república galáctica y quieren asegurarse de que ninguno de sus Jedis caiga en el lado oscuro de la Fuerza. Para que esto no ocurra le encargaron a Anakin visitarlos a todos y así tener con ellos una amistosa charla con el fin de evaluar la fortaleza de su Fuerza.

Los sistemas que integran la república son:

Nro.	Sistema
1	Antoinne
2	Besosian
3	Danton
4	Malone
5	Aldoran
6	Oitanum
7	Kam
8	Sadristo
9	Lentín
10	HeDiPo
11	Pantalians
12	Ramlilos

Anakin debe visitar los 12 sistemas que integran la república para charlar con los Jedis encargados de cada una de ellas pero la tarea no termina allí, en el último sistema visitado, Anakin debe quedarse a realizar un informe con el estado de cada sistema para después entregarlo a cada Jedi visitado. El trabajo de preparar los informes le demorará D horas. Para entregar los informes, Anakin planea realizar el camino inverso al original, utilizando los mismos transportes y los mismos caminos que a la ida pero, lógicamente, en sentido inverso.

Para realizar el recorrido que implica: salir de Dagobah (planeta en donde vive Joda, el maestro Jedi) recorrer todos los sistemas, realizar el informe, repartirlo a todos los Jedis y volver a Dagobah, Anakin tiene H horas de tiempo.

Todos saben que Anakin es el mejor piloto de la república y que podría realizar la tarea sin dificultad pero también es sabido que no todo el recorrido puede hacerse con su pequeña nave. A algunos sistemas deberá ir con la ayuda de una nave más grande, que lo transportará cobrándole A$ el año luz o teletransportándose utilizando la Fuerza, que bien arraigada posee. Pero cada vez que se teletransporte esto le ocasionará un importante disturbio en su Fuerza. Por eso es que Anakin predijo que no podrá teletranportarse más de tres veces en el viaje y que entre cada teletransportación deberá realizar al menos cuatro visitas.

Antonnie y Besosian son los sistemas que no pueden ser accedidos directamente con la nave de Anakin, él igualmente podrá contratar la nave transportadora para ir a cualquier sistema, a menos que viaje de Danton a Aldoran pues ese servicio está interrumpido.

En el sistema de Antoinne, Obi Wan y sus amigos tienen uno de los mejores hospedajes de la galaxia, es por esto que Anakin decidió realizar el informe en este lugar tan confortable. Por otra parte Anakin sabe lo sensibles que son algunos Jedis. Por ello fijo una serie de ítems a cumplir en el viaje (a la ida):

- los sistemas Danton y Malone deben ser visitados antes de la sexta parada;
- el sistema Aldoran no puede ser visitado si no se ha visitado antes el sistema Besosian salvo que se visite en el anteúltimo término;
- el sistema Oitanum sólo puede ser visitado si antes se pasó por el sistema Kam o por los sistemas Sadristo y Lentin.

Cada Sistema cobra EMBi pesos como precio de embarque (si es que Anakin llega piloteando su nave).

Teniendo en cuenta que Anakin quiere gastar lo menos posible, que las distancias entre sistemas son datos constantes que llamaremos D_{ij}, medidos en años luz, que la nave de Anakin viaja a VEL años luz por hora y que la nave que lo transporta viaja a VEL2 años luz por hora. ¿Qué es lo mejor que podrías hacer con la información disponible?

Ante todo, mi amigo, que la Fuerza este contigo…

3.32.

La empresa Autopistas del Este está en aprietos. Ha inaugurado recientemente su estación de peaje en la localidad de Planes (ubicada entre Vicente López y Parera); y se teme que la afluencia de automóviles en las próximas vacaciones de invierno sobrepase la capacidad de atención de las cabinas.

Vehículo	Peaje
Camión	$10
Automóvil	$2
Moto	$1
Bicicleta	Gratis

Se calcula que pasarán cada día por la estación: A1 automóviles, C1 camiones, M1 motos y B1 bicicletas. En la tabla de la izquierda se indican los costos del peaje por vehículo. Se pueden habilitar en la estación, 40 cabinas de peaje, que pueden destinarse a cualquier sistema de pago. Además, debe dejarse una cabina libre para emergencias.

Las cabinas pueden ser de tres sistemas de pago diferentes:

Tipo de sistema de pago de la cabina	Costo mantenimiento ($/hora)	Salario empleado ($/hora)	Capacidad (Vehículos/min.)
SIGA	10	—	10
PAGO EXACTO	8	—	6
PAGO CON CAMBIO	5	E	3
EMERGENCIAS	—	E	—

En cada cabina de pago con cambio o emergencias hay un empleado.

Se sabe que de los vehículos que se detienen en la estación, el 10% elige el sistema SIGA, el 30% el pago exacto (Estos vehículos también pueden ir a las cabinas de pago con cambio, aunque lo harán de mal humor); y el 60% restante elige el pago con cambio. Pero además, están los inadaptados de siempre, que pasan de largo sin detenerse en la estación ni pagar peaje. Si la cantidad de empleados en las cabinas es superior a 10; se cuela el 0% de los camiones, el 5% de los autos y el 30% de las motos. Si hay 10 o menos empleados, se cuelan el 5% de los camiones, el 15% de los autos y el 50% de las motos. En ambos casos se cuelan el 100% de las bicicletas.

Para disminuir el problema de los colados, se ha pedido ayuda a la comisaría de la zona. Los oficiales de la misma han ofrecido su colaboración bajo una de las dos modalidades: en el primer caso ofrecen H horas-patrullero de vigilancia, a cambio de 5 pizzas 'Especial Tío Bigotes' (que incluyen Salsa de tomate, salsa golf, muzzarella, jamón, palmitos, morrones, aceitunas negras, huevo duro y longaniza); con un costo total de $65. La otra opción es vigilar una cantidad libre de tiempo, pagando una chica de muzzarella ($4) por hora y por patrullero. La comisaría dispone para esto de 3 patrulleros; y no se pueden elegir ambas opciones. Cada patrullero puede interceptar a 7 vehículos (camiones, autos o motos) por hora, los que deben pagar a Autopistas del Este $MULTA en concepto de multa. Siempre hay más colados de los que puede interceptar la policía (qué se le va a hacer...).

3.33.

Andrés no se puede dormir. Es que el sábado comienza un programa en FM "Fuera del dial" llamado "Modelo Musical" y es la primera vez que tiene un espacio propio. En realidad, es un fin de semana de prueba (5 horas el sábado y 5 horas el domingo) y recién la semana que viene el dueño de la emisora decidirá su contratación. El caballito de batalla del programa es el cumplimiento de sus muy promocionadas RRO (Reglas de Respeto al Oyente). Estas reglas consisten en:

- Un mismo compact no puede pasarse 2 días seguidos en la misma franja horaria.
- De las 5 horas de programa, 2,5 por lo menos se dedicarán a la música.
- En cada hora del domingo no puede haber más de 40 minutos de canciones, salvo que no se repitan estilos, en cuyo caso el límite serán 55 minutos.
- Por lo menos habrá 4 poesías por día.
- Ningún estilo musical estará en el aire más del 50% ni menos del 5% del tiempo total que se le dedica a la música en un día.

Andrés cuenta con 13 compacts (cada uno tiene un solo tema) los cuales tienen los siguientes estilos:

ESTILOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
BOLERO					✓					✓			

TANGO						✓					✓		
POP				✓					✓				
ROCK	✓		✓									✓	
NEW AGE							✓						✓
TROPICAL								✓					
FOLKLORE		✓											

Cada compact tiene una duración Ti y por pasarlo Andrés recibe una comisión \$Ci. Además puede tener algunos ingresos extras como:

a- Por los compacts pasados en la última hora de cada día recibe un 50% de comisión.

b- La Sociedad Viva la Razón le pagará a Andrés \$Boicot el fin de semana. De esta cifra se descontarán \$P por cada poesía emitida y \$NA por cada compact New Age emitido.

c- La Asociación de Poetas Libres le pagará \$Poesía por cada poesía que se emita el fin de semana, si es que emite entre 6 y 10, pero por las que superen este tope, le dará el doble. Esta asociación puede proporcionarle todas las poesías que necesite (cada una dura M minutos).

Andrés sabe que no cuenta con un gran stock musical (encima recién se acordó de que había prestado los compacts 10, 11, 12 y 13) pero hasta no estar contratado no quiere gastar demasiada plata en vano. Uno de los pocos gastos que querría hacer es de \$D para conseguir en la distribuidora 3 compacts (uno tropical, uno de folklore y otro de música clásica) de un solo tema cada uno. Estos tres compacts estarán disponibles el sábado después del programa. Respecto de su inoportuno préstamo, decidió que probablemente dedique la mañana del sábado o la del domingo a recuperar los 4 CDs. Las distancias entre las casas de las cuatro personas que tienen los CDs son conocidas. Llamaremos D_{ij} a la distancia (en km.) entre la casa de la persona i y la casa de la persona j (si algún subíndice es un cero, se trata de la casa de Andrés). Por cada km. recorrido gastará \$N.

Poco a poco, Andrés se fue durmiendo. Claro que antes le encomendó a su subconsciente (o sea, a mí) que le revele a través de un sueño, cómo hacer las cosas para satisfacer sus RRO y sus RRB (Reglas de Respeto al Bolsillo). La verdad, yo no me acuerdo si en el mundo onírico nos enseñaron P.L.E. (si lo hicieron, falté), pero a vos sí. ¿Podrías ayudarme? Gracias.

3.34.

Usted trabaja en una empresa que construye edificios de departamentos. En este momento cuentan con 4 terrenos, con planos aprobados, todo listo para comenzar. Los 4 edificios son distintos en tamaño y características técnicas.

La construcción la realizan tres equipos, primero trabaja el Alfa que hace el pozo y construye el hormigón, luego viene el equipo Beta que construye las paredes y coloca las cañerías; por último el equipo Gama, azuleja, pinta, instala artefactos, etc. hasta dejar el edificio listo. Cuenta con un equipo de cada tipo.

La venta de cada uno de los edificios se inicia cuando comienza su trabajo el equipo Gama y se completa en un mes, es decir que en un mes ya tienen todas las unidades del edificio vendidas (burbuja inmobiliaria, que le dicen).

Para poder financiar la obra cuenta con \$X al comenzar. Sin embargo, la idea es financiarse con la venta de los edificios que se van terminando, dado que con los

$X probablemente no alcance para todos los gastos que hay que pagar de los cuatro edificios. Los costos de cada tarea (Alfa, Beta, Gama) en cada edificio, hay que pagarlos al comenzar a trabajar el equipo en esa tarea para ese edificio.

A continuación se indica, para cada edificio, cuántos meses de trabajo implica cada tarea y cuál es el costo de esa tarea. También se indica cuánto dinero se obtendrá por la venta del edificio completo.

Edificio	Trabajo equipo Alfa (en meses) y Costo	Trabajo equipo Beta (en meses) y Costo	Trabajo equipo Gama (en meses) y Costo	Dinero a recibir por la venta
1	5 $A1	2 $B1	MG1 $G1	$ED1
2	4 $A2	3 $B2	MG2 $G2	$ED2
3	3 $A3	4 $B3	MG3 $G3	$ED3
4	2 $A4	5 $B4	MG4 $G4	$ED4

3.35.

Una imprenta debe procesar mañana 4 trabajos, que llamaremos A, B, C y D. Cada trabajo se divide en dos tareas, una debe hacerse en la máquina M1 y la otra debe hacerse en la máquina M2. A continuación se indica, para cada trabajo, el orden de procesamiento y los tiempos de procesamiento en cada máquina.

Trabajo	Orden de procesamiento.	Tiempo en M1	Tiempo en M2
A	Primero debe pasar por M1 y luego por M2.	A minutos	9 minutos
B	Libre (pasa en el orden que se desee por M1 y M2)	15 minutos	B minutos
C	Primero debe pasar por M2 y luego por M1.	C minutos	12 minutos
D	Primero debe pasar por M1 y luego por M2.	7 minutos	D minutos

En los últimos tiempos se ha notado que las máquinas tienen mucho tiempo ocioso (es decir, se encienden, procesan un trabajo y luego pasan varios minutos sin que haga nada hasta que un trabajo que terminó la tarea que debe procesarse antes puede comenzar a procesarse). Se quiere que la planificación de estos cuatro trabajos trate de solucionar el problema (o atenuarlo lo más posible).

Cada máquina se enciende 5 minutos antes de comenzar el primer trabajo a procesar (necesita 5 minutos para empezar a procesar desde que se la enciende) y se apaga cuando ha finalizado de procesar el último trabajo de los cuatro previstos. Para que la máquina no comience a fallar, no se puede apagar, salvo que no se necesite utilizarla más por ese día. Cada minutos que la máquina está encendida cuesta $X.

3.36.

La empresa Seventeen SRL tiene la concesión de los espacios publicitarios en las paradas de colectivos de un municipio. Son en total 200 paradas, y tiene ofertas de diferentes productos para el próximo mes:

- Cliente “A” ofrece $50.000 por ocupar 30 paradas.
- Cliente “B” ofrece $100.000 por ocupar 80 paradas ó $120.000 por 120 paradas.
- Cliente “C” ofrece $100.000 por ocupar 75 paradas.
- Cliente “D” ofrece $80.000 por ocupar 50 paradas.
- Cliente “E” ofrece $5.000 por ocupar 2 paradas.
- Cliente “F” ofrece $40.000 por ocupar 20 paradas.
- Cliente “G” ofrece $90.000 por ocupar 100 paradas.

Por ser competidores directos, no se puede hacer publicidad simultáneamente de los clientes “A” y “D”.

¿Cuál es el mejor plan de contratación para Seventeen SRL?

3.37.

Un alumno terminó las materias obligatorias de la carrera, y ahora debe elegir qué optativas realizar para completar la carrera. Necesita 46 créditos, y quiere obtener la mayor cantidad posible en el año próximo (dos cuatrimestres) ya que luego comenzará a trabajar y tendrá mucho menos tiempo para el estudio.

Las materias que le interesan son:

Código	**Asignatura**	**Créditos**	**Correlativas**
61.07	Matemática discreta	6	
71.15	Modelos y optimización II	6	
71.20	Modelos y Optimización III	4	71.15
71.41	Análisis y Resolución de Problemas	6	71.15
75.14	Lenguajes formales	6	
75.16	Lenguajes de Programación	6	75.14
75.26	Simulación	6	
75.29	Teoría de Algoritmos I	6	61.07
75.30	Teoría de Algoritmos II	6	75.29
75.58	Evaluación de Proyectos y Riesgos	4	
75.71	Seminario Ing. Inf. I	3	
75.72	Seminario Ing. Inf. II	3	
78.01	Inglés	4	
78.02	Alemán	4	
78.03	Francés	4	
78.04	Italiano	4	
78.05	Portugués	4	

No tiene tiempo para cursar más de 7 materias durante el año, y además debe cumplir con las siguientes restricciones:

- Obviamente, no puede cursar una materia sin antes cursar las correlativas.
- No puede elegir más de un idioma.
- Tiene muy buenas referencias de las materias 71.41 y 71.20, así que sí o sí quiere cursar por lo menos una de las dos.
- Quiere cursar por lo menos 3 y como máximo 5 materias del departamento de Computación (75.xx)
- Los temas de 75.29 se completan en 75.30, por lo que si hace la primera, quiere cursar las dos.

¿Qué es lo mejor que puede hacer?

3.38.

Robinson Crusoe llega solo en un bote salvavidas a la orilla de una isla deshabitada. Al día siguiente descubre que el barco que él creyó hundido está encallado en unas rocas cercanas. El barco no puede navegar más (y él no podría guiarlo solo), pero puede tener cosas que le faciliten la vida en la isla. Así que decide ir en el bote hasta el barco y ver qué se puede traer.

Obviamente, no todo lo que hay en el barco le será igualmente útil durante su estadía en la isla, así que ha asignado importancia relativa a los diferentes objetos que hay en el barco. Dicha importancia, y el peso de cada objeto se indican en la siguiente tabla:

Objeto	Importancia	Peso (kg)	Observaciones
Mosquete	10 (*)	20	
Pistolas	10 (*)	10	
Municiones	10	30	
2 Espadas	7	5	
Barril de pólvora	10	50	Hay 6 barriles
Papeles y tinta	-	20	
Biblias	-	20	
Instrumentos de medición	6	15	
Velas y cuerdas	4 (**)	50	
Herramientas	9	20	
Pan y queso holandés	4	20	
Carne seca de cabra	4	20	
Granos	2 (***)	5	
Agua potable	8	10	
Licor	4	8	
Ropas	6	4	
Dos gatos	5	10	
Un perro	5	25	

(*) El mosquete y las pistolas tienen una importancia de 10 si lleva uno sólo. Si lleva ambos, el segundo que lleve tiene una importancia de 2.
(**) Si lleva las herramientas, aumenta su importancia a 7.
(***)Si lleva las herramientas, los puede sembrar y aumenta su importancia a 9.

No puede llevar todo en el bote (soporta hasta 200kg más su propio peso) y no sabe si podrá realizar otros viajes, así que quiere cargar lo más importante.

Sabe que los mosquetes, pistolas y municiones sólo serán útiles si lleva pólvora, si no no le sirven de nada. En cambio la pólvora sin armas sí es útil.

Sí o sí debe llevar los papeles y tinta (para escribir su historia) y las biblias (Es un hombre que se vale por sí mismo, pero aún así cree en Dios).

No sabe cuánto tiempo pasará hasta que pueda encontrar comida en la isla, así que de decide llevar al menos 20 kg de comida y 10 kg de bebida del barco, para los primeros días.

Si lleva los gatos, no puede llevar el perro y viceversa.

¿Qué debería llevar Robinson en el bote para mejorar su situación?

Nota: En la novela Robinson Crusoe, los hechos no ocurren exactamente tal como se describen en el ejercicio. En la realidad, Robinson llevó los gatos en la balsa, y el perro nadó hasta la playa.

3.39.

El juego consiste en elegir 11 jugadores de fútbol de manera tal que obtengan el máximo puntaje a lo largo del torneo. (El puntaje de cada jugador en cada partido depende de su desempeño en el mismo).

Sólo hay tres restricciones que se deben cumplir.

- *El costo total del equipo no debe superar los $70 millones.*
- *El equipo debe estar formado por un arquero, 4 defensores, 3 mediocampistas y 3 delanteros.*
- *No se puede elegir más de 3 jugadores del mismo club.*

Se tiene una tabla con todos los jugadores y para cada uno se indica: El costo de dicho jugador, El equipo en el que juega, la posición (Arquero / Defensor / Mediocampista / Delantero) y el puntaje obtenido por dicho jugador en el torneo pasado. (Es aceptable suponer que en el próximo torneo su puntaje será similar).

Realizar un modelo que permita elegir el mejor equipo posible para el próximo torneo.

3.40.

La FIFA es el reino de las suspicacias. Luego del sorprendente desempeño de Argentina en el Mundial de Brasil 2014, los equipos europeos protestaron, y lanzaron el rumor de que Argentina recibió ayuda de sus vecinos.

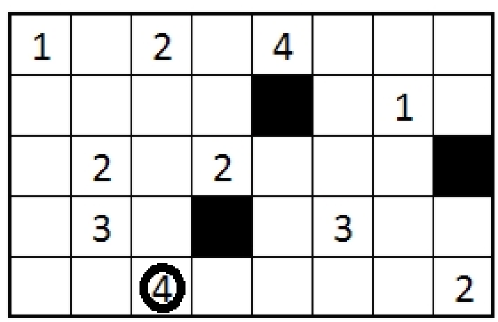
Por exigencias de la FIFA, se ha decidido modificar el sistema de eliminatorias sudamericanas. Actualmente se enfrentan todos contra todos a lo largo de dos años (cuantos más partidos se jueguen, más ingresos). A partir de ahora, los países sudamericanos se dividirán en grupos, pero no podrá haber dos países limítrofes en el mismo grupo.

Como cuantos menos grupos haya, más partidos jugará cada país, se desea repartir los países en la menor cantidad posible de grupos, de manera que no haya dos países limítrofes en el mismo grupo. (Tener en cuenta que las Guayanas no participan de las eliminatorias sudamericanas.)

Pregunta adicional: Se desea aplicar el mismo modelo a las eliminatorias europeas. ¿Qué modificaciones, aparte de los datos, deberían realizarse al modelo planteado?

3.41.

El desafío ROGO consiste en recorrer una cuadrícula como la de la derecha. Se debe partir del punto indicado con un círculo (la casilla que contiene un número 4) y, pasando por un número fijo de casillas (en este caso es 12) se debe sumar el mayor número posible. El número a sumar se calcula del siguiente modo: cada vez que se pasa por una casilla que tiene un número se suma esa cantidad (incluyendo la celda de partida, así que en este caso ya arrancamos por una suma igual a 4). Se debe volver a la celda de partida (es decir que la celda número 12 visitada debe ser vecina a la celda de partida), los movimientos son de una celda a otra adyacente (en vertical, horizontal o diagonal) y no se puede pasar más de una vez por la misma celda. Las celdas pintadas de negro no se pueden visitar.



3.42.

Las comisiones curriculares de la Licenciatura en Análisis de Sistemas y la Ingeniería en Informática tienen previsto organizar 4 conferencias de actualización para el mes de abril. Como están destinadas a los estudiantes de ambas carreras son gratuitas, pero se necesita contar con colaboradores para que la logística no falle:

Temática del curso:	**Asistentes previstos:**	**Cantidad de días que dura el curso**
A) Introduction to Application security	A	Lunes y Martes (Mañana y Tarde)
B) Redes en Linux	B	Martes y Viernes (Noche)
C) Semantic Technologies for Automatic Question Answering	C	Martes y Jueves (Tarde)
D) IoT (Internet of Things)	D	Viernes (Noche)

Se necesita un colaborador por cada 6 asistentes. En los cursos A, C y D se necesitan 2 personas más por cada 20 asistentes porque tienen traducción simultánea. El decano propuso usar personal no docente para que sean colaboradores, pagándoles un adicional (aunque no quiere gastar demasiado dinero en la organización de estas conferencias). El personal se divide en turnos (tienen que trabajar los días que son su turno). A continuación se indica la composición de turnos, cuánto personal hay disponible en cada turno y cuánto se le paga por cada día a cada persona que trabaje haciendo ese turno.

Turno (Se indica qué días y en qué horario viene el personal de ese turno)		**Personal**	**Pago ($ diarios/persona)**
1	Lunes, Miércoles y Viernes (Mañana), Jueves (Tarde)	10 personas	30
2	Lunes, Martes y Viernes (Tarde), Martes (Noche)	12 personas	E
3	Martes, Jueves y Viernes (Mañana), Viernes (Tarde)	17 personas	30
4	Lunes, Miércoles y Viernes (Noche), Jueves (Tarde)	15 personas	40

A, B, C, D y E son constantes conocidas. ¿Qué es lo mejor que se puede hacer con la información disponible?

4.1. Resolución Guia 3

4.1.1. Ejercicio 3.3

a $y_2 \geq y_1$

b $12y_1 \leq MES \leq 11 + y1$ (recordar que MES es entera en rango de [1..12])

c $Y_1 \leq Y_2 + Y_3 + Y_4 \leq 3Y_1$

d $2Y_1 \leq Y_2 + Y_3 \leq 1 + Y_1$

e $Y_1 + Y_2 = 1$

f
- $E_1 = E_1^{'} + E_1^{''}$
- $1y_1 \leq E_1^{'} \leq 3y_1$
- $4y_2 \leq E_1^{''} \leq 7y_2$
- $y_1 + y_2 = 1$

g $10 \leq C_1 \leq M$

h $E_1 = 2E_2 + 1$

i
- $E_1 = E_1^{'} + E_1^{''} + E_1^{'''}$
- $4y_1 \leq E_1^{'} \leq 4y_1$
- $9y_2 \leq E_1^{''} \leq 9y_2$
- $16y_3 \leq E_1^{'''} \leq 16y_3$
- $y_1 + y_2 + y_3 = 1$

j $50 + 25(1 - y_1) \leq C_1$

k
- $E_1 = E_1^{'} + E_1^{''}$
- $100y_1 \leq E_1^{'} \leq My_1$
- $my_2 \leq E_1^{''} \leq 80y_2$
- $y_1 + y_2 = 1$

4.1.2. Ejercicio 3.9

a
- $mY_1 \leq C_1 \leq MY_1$ (con esta detecto si es mayor que cero)
- $22Y_1 \leq C_1 \leq MY_1$ (con esta me aseguro que sea mayor a 22)

b
- $E_2 \leq E_1 \leq E_2 + MY_2$
- $E_3 \leq E_1 \leq E_3 + MY_3$
- $E_4 \leq E_1 \leq E_4 + MY_4$
- $Y_2 + Y_3 + Y_4 = 2$

c el c

d
- $mY_2 \leq C_2 \leq MY_2$
- $C_1 \leq MY_2$

e
- $C_1 - 13 = ex - def \Rightarrow C_1$ es continua y lo comparo con el valor que no puede tomar
- $mY_{ex} \leq ex \leq MY_{ex} \Rightarrow$ ex toma valor si C1 es mayor a 13
- $mY_{def} \leq def \leq MY_{def}$
- $Y_{ex} + Y_{def} = 1 \Rightarrow$ con esta ecuación evito que ex = def = 0 es decir siempre tienen que ser diferentes

f $C_1 - 1 \leq E_1 \leq C_1$

g
- $6Y_2 \leq E_2 \leq 5 + MY_2$
- $6Y_3 \leq E_3 \leq 5 + MY_3$
- $6Y_4 \leq E_4 \leq 5 + MY_4$
- $6Y_5 \leq E_5 \leq 5 + MY_5$
- $Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 = E_1$

h $50 + 25(1 - y_1) \leq C_1$

i
- $E_1 = E_1^{'} + E_1^{''}$
- $100y_1 \leq E_1^{'} \leq My_1$
- $my_2 \leq E_1^{''} \leq 80y_2$
- $y_1 + y_2 = 1$

4.2. Resolución

1. I **verdadero** de forma trivial.

   II **verdadero**, Recordar que $\{C \subseteq D \Leftrightarrow \forall x \in C \Rightarrow x \in D\}$ y podemos ver que 1 esta en ambos connjuntos.

   III **verdadero**, el razonamiento es idéntico, solo hay que tener en cuenta que para conjuntos no es relevante ni las repeticiones de elementos ni el órden.

   IV **falso**, porque el conjunto cuyos únicos elementos son 1,3 no esta en A, $\{1,3\} \notin A$ aqui hay que tener en cuenta que se esta usando el pertenece y no la inclusión de conjuntos.

   V **falso** por la misma razón que el item anterior.

2. 2

3. 3

4. 4

5. I **Recordemos que** $B \triangle C$ son todos los elementos que estan en B o en C pero no en ambos.
   $B \triangle C = \{1, \{3\}, 10, -2, \{1,2,3\}, 3\}$
   $A \cap (B \triangle C) = \{1, -2, 3\}$

II $A \cap B = \{1\}$ y $A \cap C = \{-2, 3\} \Rightarrow (A \cap B) \vartriangle (A \cap C) = \{1, -2, 3\}$
Notar que el resultado es igual que I porque $A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$ ambos resultados son equivalentes solo hay que distribuir.

III **Usando la ley de De Morgan**

$$\begin{aligned} A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c &\Rightarrow A \cup B \cup C = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\} \\ &\Rightarrow (A \cup B \cup C) = V \\ &\Rightarrow (A \cup B \cup C)^c = \{\emptyset\} \end{aligned}$$

6. 6

7. 7

8. I Podemos ver a la parte subrayada del gráfico como la unión de tres conjuntos, $A \cup \{(A \cap C) - B\} \cup \{(B \cup C) - A\}$

   II Este es claramente la diferencia simétrica entre A y C, quitandole ademas todos lo elementos de B $(A \triangle C) - B$

   III Tambien lo podemos mirar como la unión de tres subconjuntos $\{(A \cap B) - C\} \cup \{(B \cap C) - A\} \cup \{(A \cap C) - B\}$

9. 9

10.

$$\begin{array}{rrcl} & P(A) \subseteq P(B) & \Rightarrow & A \subseteq B \\ & A \underbrace{\subseteq}_{definicion} P(A) & \Rightarrow & A \underbrace{\subseteq}_{Hipótesis} P(B) \\ \text{Pero } P(B) \subseteq B \text{ ya que} & \forall x \in P(B) & \Rightarrow & x \in B \\ & & & \Rightarrow A \subseteq B \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} A \subseteq B & \Rightarrow & P(A) \subseteq P(B) \\ \forall x \in A & \Rightarrow & x \in P(A) \\ \forall x \in A & \Rightarrow & x \in B \subseteq P(B) \\ \forall x \in P(A) & \Rightarrow & x \in P(B) \\ & & \Rightarrow P(A) \subseteq P(B) \end{array}$$

11. 11

12. I a) **falso**, tomar el contraejemplo, n = 2.

   b) **verdadero**, porque me dice que existe algún n natural que cumple la condición, no es una proposición categórica, sino singular.

   c) **verdadera**, porque los intervalos incluyen a todos los Naturales, $[5, +\infty] \cup [1, 8]$

   d) **verdadera**, porque no es un intervalo vacío $[5, 8] \neq \emptyset$

   e) **verdadera**, porque cualquiera sea n, eligiendo m = n+1 se verifica la proposición.

f) **falso**, lo que me quiere decir, es que existe un n que verifica, que es menor estrícto para todo m, y eso es falso porque si n = 1, y m = 1 $\Rightarrow$ 1 no es menor estricto que 1.

II

III

13. 13

14. 14

15. 15

16. 16

17. 17 R = (1, 1), (1, 3), (1, 7), (3, 1), (3, 5)

18. I) **verdadero**
    II) **falso**, porque en el elemento (3, 2), 2 $\notin B$
    III) **verdadera**
    IV) **verdadera**
    V) **verdadera**
    VI) **verdadera**

19. I) $R = \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(2,2),(2,3),(2,5),(2,7),(3,3),(3,5),(3,7)\}$
    II) $R = \{(2,1),(3,1)\}$
    III) $R = \{(2,1),(2,3),(2,5),(2,7)\}$
    IV) $R = \{(1,7),(2,5),(2,7),(3,5),(3,7)\}$

20.

21.

22. **Ejercicio 18**

    I) **No es función** porque el 1 tiene varias imagenes.
    II) **no es función** idem.
    III) **no es función**
    IV) **no es función**
    V) **si es función** $\forall x \in A \Rightarrow \ \exists! \ y \in B \ \ |(x,y) \in R$
    VI) **si es función**

Capítulo 5

Práctica 2 - Números Naturales e Inducción

5.1. Resolución

1. I) a) $\sum_{i=1}^{100} i$ (es la sumatoria trivial).
   b) $\sum_{i=1}^{11} 2^{i-1}$
   c) $\sum_{i=1}^{12} (-1)^{i-1} \cdot i^2$
   d) $\sum_{i=1}^{21} (2i-1)^2$
   e) $\sum_{i=0}^{n} (2i+1)$
   f) $\sum_{i=1}^{n} (i \cdot n)$

   II) a) $\prod_{i=5}^{100} i = 5 \cdot 6 \cdots 100$
   b) $\prod_{i=0}^{10} 2^i$
   c) $\prod_{i=1}^{n} (i \cdot n)$

2. I)
$$\sum_{i=6}^{n} 2(i-5) = 2(6-5) + 2(7-5) + \cdots + 2(n-1-5) + 2(n-5)$$

   II)
$$\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n-1+1)} + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

   III)
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i} = \frac{n+1}{2 \cdot 1} + \frac{n+2}{2 \cdot 2} + \cdots + \frac{(n-1)+1}{2 \cdot (n-1)} + \frac{n+n}{2 \cdot n}$$

   IV)
$$\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i} = \frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \cdots + \frac{n}{(n-1)^2} + \frac{n}{n^2}$$

   V)
$$\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = \frac{n+1}{2 \cdot 1 - 3} \cdot \frac{n+2}{2 \cdot 2 - 3} \cdots \frac{n+(n-1)}{2(n-1)-3} \cdot \frac{n+n}{2n-3}$$

3. I) Usamos inducción, primero para n=1

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 \text{ (ahora verificamos la fórmula) } \frac{n(n+1)}{2}, \text{ con n = 1,}$$

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1, \text{ se verifica la propiedad para n = 1. } \Rightarrow P(1) = True$$

Hipótesis inductiva

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tésis inductiva

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) \underbrace{=}_{\text{por HI}} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \qquad \text{(factor común (n+1))}$$
$$\frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

probamos que $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

II) De igual manera probaremos, por inducción la igualdad

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = \sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$$

para ello probamos que cumple para n=1, $P(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{1} 2i = 1(1+1) = 2$, luego probamos el paso inductivo, suponiendo que P(n) es verdadero, $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$ probamos que es verdadero P(n+1) o $\sum_{i=1}^{n+1} 2i = (n+1)(n+2)$.
Partimos de $\sum_{i=1}^{n+1} 2i$ y trataremos de llegar lógicamente a $(n+1)(n+2)$,
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} 2i = \sum_{i=1}^{n} 2i + 2(n+1)$ pero usando la HI, $n(n+1) + 2(n+1)$ y sacando factor común (n+1) llegamos a, $(n+1)(n+2)$ que era justo lo que queriamos probar.

4.

5. Se trata de una serie geométrica.

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 1 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2^n$$

si multiplico ambos miembros por 2 y resto convenientemente

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 1 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2^n$$

$$2 \cdot (\sum_{i=0}^{n} 2^i) = 2 \cdot (1 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2^n)$$

$$2 \cdot (\sum_{i=0}^{n} 2^i) - (\sum_{i=0}^{n} 2^i) = (2 + 4 + 6 + \cdots + 2^n + 2^{n+1}) - (1 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2^n)$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Capítulo 6

Práctica 3 - Números enteros (Parte 2)

6.1. Guia 3

6.2. Resolución

Capítulo 7

Práctica 4 - Números enteros (Parte 2)

7.1. Guia 4

7.2. Resolución

Capítulo 8

Práctica 5 - Números enteros (Parte 2)

8.1. Guia 5

8.2. Resolución

hola mundo

Para demostrar la corrección del programa en SmallLang con respecto a la especificación, debemos probar que:

$$Post \Rightarrow wp(\ \textbf{código previo al ciclo}\ , Pc) \tag{8.1}$$

$$Pc \Rightarrow wp(\ \textbf{ciclo}, Qc) \tag{8.2}$$

$$Qc \Rightarrow wp(\ \textbf{código posterior al ciclo}\ , Post) \tag{8.3}$$

La parte 2.2 con el teoréma del invariante. Si probamos estas tres implicaciones, por el principio de monotonía sabemos que $Pre \Rightarrow wp(programacompleto, Post)$ y por lo tanto el programa es correcto, respecto a su especificación

8.3. Definición de Qc, Pc, I, fv

Primero vamos a definir los predicados que necesitamos para la demostracion.

$$\begin{aligned}
Pre &\quad \{True\} \\
Post = &\quad \{r = True \leftrightarrow ((\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < |s|) \wedge_L s[k] = e)\} \\
Pc = &\quad (i = 0) \wedge (j = -1) \\
Qc = &\quad (j \neq -1) \leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k <| s | \ \wedge_L s[k] = e) \\
I = &\quad 0 \leq i \leq| s |) \wedge (j \neq -1) \leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < i \rightarrow_L s[k] = e) \wedge (s[i] = e \rightarrow i = j) \\
fv = &\quad (| s | -i) \\
B = &\quad (i <| s |)
\end{aligned}$$

8.3.1. Pre ⇒ wp(código previo al ciclo, Pc)

$$\begin{aligned}
Pre \rightarrow wp(i := 0; j := -1, Pc) \equiv &\quad wp(i := 0; wp(j := -1, Pc)) \\
\\
Calculamos\ wp(j := -1, Pc) & \\
wp(j := -1, Pc) \equiv &\quad def(-1) \wedge_L Pc^j_{-1} \\
\equiv &\quad wp(j := -1, ((i = 0) \wedge (j = -1))^j_{(-1)}) \\
\equiv &\quad def(-1) \wedge (i = 0) \wedge (-1 = -1) \\
E1 \equiv &\quad (i = 0) \\
\\
Calculamos\ wp(i := 0, E1) & \\
wp(i := 0, E1) \equiv &\quad def(0) \wedge_L E1^i_0 \\
\equiv &\quad True \wedge_L (i = 0)^i_0 \\
\equiv &\quad (0 = 0) \\
E2 \equiv &\quad True
\end{aligned}$$

Por lo tanto demostramos que:

$$Pre \Rightarrow wp(\textbf{ código previo al ciclo }, Pc)$$

8.3.2. Qc ⇒ wp(if..then..else..fi, Post)

Recordamos la post

$$Post = \{r = True \leftrightarrow ((\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < |s|) \wedge_L s[k] = e)\}$$

Calculamos:

$$\begin{aligned}
wp(if.....endif, Post) &\equiv wp(if(j \neq -1)then\ r := True\ else\ r := False\ endif, Post) \\
&\equiv def(j \neq -1) \wedge_L [(j \neq -1) \wedge wp(r := True, Post)] \vee [(j = -1) \wedge wp(r := False, Post)] \\
&\equiv \underbrace{def(j \neq -1)}_{\text{True}} \wedge_L \quad [\qquad \text{''} \qquad] \vee [\qquad \text{''} \qquad] \\
&\equiv (j \leq -1 \wedge wp(r := True, Post)) \vee (j = -1 \wedge wp(r := False, Post)) \\
&\equiv (j \leq -1 \wedge \color{red}{wp(r := True, Post)}) \vee (j = -1 \wedge \color{blue}{wp(r := False, Post)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
wp(r := True, Post) &\equiv def(True) \wedge_L Post^r_{true} \\
&\equiv (True = True) \leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < |s| \wedge_L s[k] = e) \\
wp(r := True, Post) &\equiv (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < |s| \wedge_L s[k] = e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
wp(r := False, Post) &\equiv def(False) \wedge_L Post^r_{false} \\
&\equiv \underbrace{(false = True)}_{\text{False}} \leftrightarrow \underbrace{(\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < |s| \wedge_L s[k] = e)}_{(*)}
\end{aligned}$$

$(*)$ *entonces como* $(\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < |s| \wedge_L s[k] = e)$ debe ser Falso, invierto desigualdad

$$wp(r := False, Post) \equiv (\forall k : \mathbb{Z})(0 \leq k < |s| \wedge_L s[k] \neq e)$$

$$\begin{aligned}
wp(if...endif, Post) &\equiv (j \neq -1) \wedge (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < |s| \wedge_L s[k] = e) \vee \\
&\quad (j = -1) \wedge (\forall k : \mathbb{Z})(0 \leq k < |s| \wedge_L s[k] \neq e) \\
&\quad (aplico\ (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv p \leftrightarrow q) \\
E3 &\equiv (j \neq -1) \leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < |s| \wedge_L s[k] = e)
\end{aligned}$$

Chequeamos $Qc \rightarrow E3$

$$Qc \equiv j \neq -1 \leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < |s| \wedge_L s[k] = e) \equiv E3$$

Por lo tanto demostramos que:

$$Qc \Rightarrow E3$$

Capítulo 9

Demostración de la corrección del ciclo

9.0.1. Qc $\Rightarrow$ wp(ciclo, Qc)

Teorema. Sean un predicado I y una función $fv : \mathbb{V} \to \mathbb{Z}$ (donde $\mathbb{V}$ es el producto cartesiano de los dominios de las variables del programa), y supongamos que I $\to$ def(B). Si se cumplen:

1) $PC \Rightarrow I$,
2) $\{I \land B\}S\{I\}$,
3) $I \land \neg B \Rightarrow Qc$,
4) $\{I \land B \land v_0 = fv\}S\{fv < v_0\}$,
5) $I \land fv \leq 0 \Rightarrow \neg B$,

... entonces la siguiente tripla de Hoare es válida: {PC } while B do S endwhile {QC }

9.0.2. $Pc \ \to I$

$$
\begin{aligned}
Pc = &\quad (i = 0) \land (j = -1) \\
I = &\quad 0 \leq i \leq |\ s\ |) \land (j \neq -1) \leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < i \to_L s[k] = e) \land (s[i] = e \to i = j) \\
\equiv &\quad (i = 0) \land (j = -1) \to (0 \leq i \leq |\ s\ |) \checkmark (\mathit{trivial}) \\
\equiv &\quad (j \neq -1 \land (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < i \land_L s[k] = e)) \lor (j = -1 \land (\forall k : \mathbb{Z})(0 \leq k < i \land_L s[k] \neq e))\checkmark
\end{aligned}
$$

(porque se cumple trivialmente que $(j = -1)$ y por vacuidad $(j = -1 \land (\forall k : \mathbb{Z})(0 \leq k < i \land_L s[k] \neq e))$ ya que no hay ningún número que sea mayor o igual a cero y menor a cero a la vez)

9.0.3. $(I \ \wedge \neg B) \rightarrow Qc$

$$Q_c \equiv (j \neq -1) \Leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < |s| \wedge_L s[k] = e)$$
$$B \equiv (i < |s|)$$
$$I \equiv 0 \leq i \leq |s| \wedge j \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < i \Rightarrow_L s[k] = e) \wedge (s[i] = e \rightarrow i = j)$$

Q_c✓

(porque $I \wedge \neg B$ implica que $i = |s|$ ya que por I, $i \leq |s|$ y por $\neg B$ $i \geq |s|$ y si aplico esto a I me queda Q_c)

9.0.4. $\{I \wedge B\}$ ciclo $\{I\}$

$$\begin{aligned} I = & \quad (0 \leq i \leq \mid s \mid) \wedge (j \neq -1) \leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < i \rightarrow_L s[k] = e) \wedge (s[i] = e \rightarrow i = j) \\ B \equiv & \quad (i < |s|) \end{aligned}$$

Ciclo

$if(s[i] = e)then$
$\quad j := i$
$else$
$\quad skip$
$endif$
$i := i + 1$

Veamos si $(I \wedge B) \Rightarrow wp($if...then..else..fi, $i := i + 1, I)$

$$wp(if..fi, i := i + 1, I) \equiv wp(if..fi, \underbrace{wp(i := i + 1, I)}_{debo\ calcular})$$

$$\begin{aligned} wp(i := i + 1, I) \equiv & \underbrace{def(i + 1)}_{True} \wedge_L I^i_{i+1} \\ \equiv & (0 \leq i + 1 \leq |s|) \wedge_L (j \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z}))(0 \leq k < i + 1 \Rightarrow_L s[k] = e)) \wedge \\ & (s[i + 1] = e \rightarrow i + 1 = j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E4 \equiv & (0 \leq i + 1 \leq |s|) \wedge_L (j \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z}))(0 \leq k < i + 1 \Rightarrow_L s[k] = e)) \wedge \\ & (s[i + 1] = e \rightarrow i + 1 = j) \end{aligned}$$

Calculo $wp(if...then..else..fi, E4)$

$$\begin{aligned}
wp(if..fi, E4) &\equiv \underbrace{def(s[i]=e)}_{True} \wedge_L \ [\ s[i]=e \wedge wp(j:=i, E4)\ ] \vee [\ s[i] \neq e \wedge wp(skip, E_4)] \\
&\equiv (s[i]=e \wedge \underbrace{def(i)}_{True} \wedge E4^j_i) \vee (s[i] \neq e \wedge E4) \\
&\equiv (s[i]=e \wedge E4^j_i) \vee (s[i] \neq e \wedge E4) \\
&\equiv (s[i]=e) \quad \wedge \\
&\quad (0 \leq i+1 \leq |s|) \wedge_L (i \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k:\mathbb{Z}))(0 \leq k < i+1 \Rightarrow_L s[k]=e)) \wedge \\
&\quad (s[i+1]=e \rightarrow i+1=i) \qquad \vee \\
&\quad (s[i] \neq e) \quad \wedge \\
&\quad (0 \leq i+1 \leq |s| \wedge_L (j \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k:\mathbb{Z})(0 \leq k \leq i+1 \Rightarrow_L s[k]=e)) \wedge \\
&\quad (s[i+1]=e \rightarrow i+1=j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E5 \equiv\ & (0 \leq i+1 \leq |s|) \wedge_L \\
& (s[i]=e \wedge (i \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k:\mathbb{Z})(0 \leq k < i+1 \Rightarrow_L s[k]=e)) \wedge \\
& (s[i+1]=e \rightarrow i+1=i)) \\
& \vee \\
& (s[i] \neq e \wedge (j \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k:\mathbb{Z})(0 \leq k \leq i+1 \Rightarrow_L s[k]=e)) \wedge \\
& (s[i+1]=e \rightarrow i+1=j))
\end{aligned}$$

Segun el invariante $(s[i]=e \rightarrow i=j)$, y usando la equivalencia $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv q$

$$\begin{aligned}
E5 \equiv\ & (0 \leq i+1 \leq |s|) \wedge_L \\
& (\underbrace{s[i]=e}_{\text{por I}} \wedge (\underbrace{i \neq -1}_{\text{i=j}} \Leftrightarrow (\exists k:\mathbb{Z})(0 \leq k < i+1 \Rightarrow_L s[k]=e)) \wedge \\
& (s[i+1]=e \rightarrow \underbrace{i+1=i}_{i=j})) \\
& \vee \\
& (s[i] \neq e \wedge (j \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k:\mathbb{Z})(0 \leq k \leq i+1 \Rightarrow_L s[k]=e)) \wedge \\
& (s[i+1]=e \rightarrow i+1=j))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E5 \equiv\ & (0 \leq i+1 \leq |s|) \wedge_L \\
& (s[i]=e \wedge (j \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k:\mathbb{Z})(0 \leq k < i+1 \Rightarrow_L s[k]=e)) \wedge \\
& (s[i+1]=e \rightarrow i+1=j)) \\
& \vee \\
& (s[i] \neq e \wedge (j \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k:\mathbb{Z})(0 \leq k \leq i+1 \Rightarrow_L s[k]=e)) \wedge \\
& (s[i+1]=e \rightarrow i+1=j))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\qquad usando (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv q \\
E5 \equiv\ & (0 \leq i+1 \leq |s|) \wedge_L \\
& (j \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < i+1 \Rightarrow_L s[k] = e) \wedge \\
& (s[i+1] = e \rightarrow i+1 = j)
\end{aligned}$$

Ahora veamos si $\{I \wedge B\} \Rightarrow E5$

Hipótesis:

1. $B \equiv \quad (i < |s|)$
2. $I = \quad (0 \leq i \leq | s |)$
3. $\qquad (j \neq -1) \leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < i \rightarrow_L s[k] = e)$
4. $\qquad (s[i] = e \rightarrow i = j)$

Tésis

1. $(0 \leq i+1 \leq |s|)$
2. $(j \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < i+1 \Rightarrow_L s[k] = e)$
3. $(s[i+1] = e \rightarrow i+1 = j)$

Comenzamos por la tésis 1 $(0 \leq i+1 \leq |s|)$

$$\begin{array}{lcl}
\textbf{segun la hip 2} & \Rightarrow & 0 \leq i \\
 & \Rightarrow & 0 \leq i+1 \\
\textbf{segun la hip 1} & \Rightarrow & i < |s| \\
 & \Rightarrow & i+1 < |s|+1 \\
 & \Rightarrow & i+1 \leq |s|
\end{array}$$

Por lo tanto se cumple la tésis 1 $(0 \leq i+1 \leq |s|)$

Continuamos por la tésis 2

$$(j \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k : \mathbb{Z})(0 \leq k < i+1 \Rightarrow_L s[k] = e)$$

$$
\begin{array}{rcl}
0 \leq k < i+1 & \equiv & 0 \leq k \leq i \\
\textbf{sabemos que} \quad i < |s| & \equiv & 0 \leq k \leq i < |s| \\
{\color{blue}(*)} & \equiv & 0 \leq k < |s| \\
(j \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k:\mathbb{Z})(0 \leq k < i+1 \Rightarrow_L s[k] = e) & \equiv & (j \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k:\mathbb{Z})(\underbrace{0 \leq k < |s|}_{\color{blue}(*)} \Rightarrow_L s[k] = e) \\
 & \equiv & (j \neq -1 \Leftrightarrow (\exists k:\mathbb{Z})(0 \leq k < |s| \Rightarrow_L s[k] = e)
\end{array}
$$

Esto significa que j sera distinto de -1 cuando exista un k que estando en rango verifique que el elemento en la posicion k sea e, y sera falso cuando e no este en la secuencia.

Continuamos por la tésis 3

$$(s[i+1] = e \leftrightarrow i+1 = j)$$

$$
\begin{array}{rcl}
\textbf{segun la hip 4} \quad i = j & \leftrightarrow & s[i] = e \\
 & \leftrightarrow & s[j] = e \\
\textbf{pero si} \quad j = i+1 & \leftrightarrow & s[i+1] = e \\
\textbf{de igual forma si} \quad s[i] = e & \leftrightarrow & j = i \\
s[i+1] = e & \leftrightarrow & j = i+1
\end{array}
$$

Esto dice que si e esta en la posicion i+1, entonces j debe ser i+1, ya que j era igual a i.

Por lo tanto se cumple

$$(s[i+1] = e \leftrightarrow i+1 = j)$$

9.0.5. $I \wedge f_v \leq 0 \rightarrow \neg B$

Queremos demostrar que cuando la función variante llega a un valor determinado entonces se termina el ciclo o dicho de otra forma la guarda se hace falsa.

Hipótesis

$$
\begin{array}{rl}
I = & (0 \leq i \leq \mid s \mid) \wedge (j \neq -1) \leftrightarrow (\exists k:\mathbb{Z})(0 \leq k < i \rightarrow_L s[k] = e) \wedge (s[i] = e \rightarrow i = j) \\
fv = & (\mid s \mid - i) \leq 0
\end{array}
$$

Tésis

$$\neg B \equiv \quad (i \geq |s|)$$

Demostración

$$
\begin{array}{rl}
fv \equiv & \mid s \mid - i \leq 0 \\
\equiv & \mid s \mid \leq i \\
\equiv & (i \geq |s|) \qquad (\textbf{ que es } \neg B)
\end{array}
$$

Por lo tanto se cumple la tésis $(I \wedge f_v \leq 0) \rightarrow \neg B$

9.0.6. $\{I \wedge B \wedge v_0 = fv\}S\{fv < v_0\}$

Finalemente vamos a demostrar que la funcion variante decrece, esto equivale a decir que si estamos al principio del ciclo en donde valen, tanto el invariante, la guarda y donde la funcion variante toma cierto valor v_0, despues de ejecutar el cuerpo del ciclo la fv va a tomar un valor estrictamente menor a v_0 .

Ciclo

S1$if(s[i] = e)then$

$j := i$

$else$

$skip$

$endif$

S2$i := i + 1$

Si llamamos **S1 al if..endif** y **S2 a i:=i+1**. Debemos hallar $wp(S1; S2, fv < v_0)$

$$wp(S1; S2, fv < v_0) \equiv wp(S1,\ wp(S2, |s| - i < v_0))$$

$$\begin{aligned}
wp(S2, |s| - i < v_0) &\equiv wp(i := i + 1, |s| - i < v_0) \\
&\equiv \underbrace{def(i + 1)}_{True} \wedge_L (|s| - i < v_0)^i_{i+1} \\
&\equiv (|s| - i < v_0)^i_{i+1} \\
E2 \equiv wp(S2, |s| - i < v_0) &\equiv (|s| - (i + 1) < v_0)
\end{aligned}$$

Calculamos la precondición más débil del if..fi respecto de E2.

$$\begin{aligned}
wp(S1, E2) &\equiv wp(if..fi, E2) \\
&\equiv \underbrace{def(s[i] = e)}_{True} \wedge_L\ [\ s[i] = e \wedge wp(j := i, E2)\ ] \vee [\ s[i] \neq e \wedge wp(skip, E2)] \\
&\equiv [\ s[i] = e \wedge wp(j := i, E2)\ ] \vee [\ s[i] \neq e \wedge E2] \\
&\equiv (\ s[i] = e \wedge (def(i) \wedge_L E2^j_i)\ ) \vee (\ s[i] \neq e \wedge E2) \\
&\equiv (\ s[i] = e \wedge (E2^j_i)\ ) \vee (\ s[i] \neq e \wedge E2) \\
&\equiv (\ s[i] = e \wedge (|s| - (i + 1) < v_0)\ ) \vee (\ s[i] \neq e \wedge (|s| - (i + 1) < v_0))
\end{aligned}$$

$usando (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv q$

$E1 \equiv (|s| - (i + 1) < v_0)$

$E1 \equiv (|s| - i - 1 < v_0)$

Por lo tanto la precondición más débil que queriamos calular es E1, ahora debemos verificar que

$$\{I \wedge B \wedge v_0 = fv\} \Rightarrow E1$$

$$\begin{aligned}
fv &= v_0 \\
|s| - i &= v_0 \qquad \text{(restando 1 a ambos miembros obtenemos)} \\
|s| - i - 1 &= v_0 - 1 \qquad \text{(pero } (v_0 - 1) < v_0\text{)} \\
|s| - i - 1 &= v_0 - 1 < v_0 \\
|s| - i - 1 &< v_0
\end{aligned}$$

Por lo tanto nuestra funcion variante decrece y

$$\{I \wedge B \wedge v_0 = fv\} \Rightarrow E1$$

Capítulo 10

Conclusiones

Estamos en condiciones de afirmar que nuestro programa, habiendo demostrado a través del teorema de invarinate que el ciclo es correcto respecto de su espeficicación y a través del teorema de terminacion del ciclo, que el mismo finaliza siempre y ademas termina en un estado en que vale la postcondicion del ciclo.
Con todo esto probado y por el principio de monotonia probamos que el programa completo es correcto respecto de la especificación dada.