



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exáctas y Naturales
Departamento de Matemáticas

ÁLGEBRA I

Este es un modesto aporte para los alumnos de la fâcultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA de las carreras de licenciatura en Matemática y Computación. De ninguna manera pretende ser una guía de estudio, ni remplaza las clases presenciales, el material oficial de la catedra esta disponible en el web site de la matéria.

<http://cms.dm.uba.ar/>

Autor: Isaac Edgar Camacho Ocampo
Carrera: Licenciatura en Ciencias de la Computación

Buenos Aires, 2020

Si se encuentra algùn error u omisión en este resumen por favor colaborar en
<https://github.com/IsaacEdgarCamacho/Apuntes/tree/master/Algebra/>
o escribirme a
isaac.edgar.camacho@gmail.com

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Conocimientos previos	7
1.2. Estado del arte	7
2. Conjuntos, Relaciones y Funciones.	9
2.1. Conjuntos.	9
2.1.1. Conjuntos y subconjuntos, pertenencia e inclusión.	9
Definición 1.1.1. (informal de conjunto y elementos.)	9
2.1.2. Operaciones entre conjuntos	9
2.2. Ejercicios	10
3. Resultados	11
3.1. Simulación de resultados	11
3.1.1. Suposiciones	11
3.1.2. Modelos	11
3.2. Resultados preliminares	11
3.3. Resultados postprocesados	11
3.3.1. Valores atípicos	11
3.3.2. Correlaciones	11
4. Conclusiones	13

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Conocimientos previos

1.2. Estado del arte

Capítulo 2

Conjuntos, Relaciones y Funciones.

2.1. Conjuntos.

2.1.1. Conjuntos y subconjuntos, pertenencia e inclusión.

Definición 1.1.1. (informal de conjunto y elementos.)

Un conjunto es una colección de objetos, llamados elementos, que tiene la propiedad que dado un objeto cualquiera, se puede decidir si ese objeto es un elemento del conjunto o no.

Ejemplos:

- $A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{\triangle, \square, \diamond\}, \quad C = \{1, \{1\}, \{2, 3\}\}.$
- $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ el conjunto de los números naturales.

2.1.2. Operaciones entre conjuntos

Teorema : si un conjunto A esta incluido en otro conjunto B, entonces el complemento de B esta incluido en el complemento de A

$$A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$$

Demostracion:

$$\text{Hipotesis : } A \subseteq B \iff \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$\equiv \text{def}(a) \wedge \text{def}(i) \wedge (0 \leq i < |a|) \wedge (0 \leq i + 1 < |a|) \quad \wedge_L \text{ True}$$

$$\text{wp}(S, \text{Post}) \equiv (0 \leq i < |a|) \wedge (0 \leq i + 1 < |a|)$$

$$\begin{aligned}
wp(S, Post) &\equiv wp(result := a[i] + a[i + 1], Post_{a[i] + a[i + 1]}^{result}) \\
&\equiv def(a[i] + a[i + 1]) \quad \wedge_L \quad \underbrace{a[i] + a[i + 1] = a[i] + a[i + 1]}_{\text{es siempre True}} \\
&\equiv def(a) \wedge def(i) \wedge (0 \leq i < |a|) \wedge (0 \leq i + 1 < |a|) \quad \wedge_L \quad True \\
\\
wp(S, Post) &\equiv (0 \leq i < |a|) \wedge (0 \leq i + 1 < |a|)
\end{aligned}$$

El Teorema de Pitágoras lleva este nombre porque su descubrimiento recae sobre la escuela pitagórica. (Fuente: Wikipedia)

Ejercicio: Probar usando el principio de inducción que 7 divide a $15^n + 7$ para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
7 \mid (15^n + 7) &\equiv wp(result := a[i] + a[i + 1], Post_{a[i] + a[i + 1]}^{result}) \\
&\equiv def(a[i] + a[i + 1]) \quad \wedge_L \quad \underbrace{a[i] + a[i + 1] = a[i] + a[i + 1]}_{\text{es siempre True}} \\
&\equiv def(a) \wedge def(i) \wedge (0 \leq i < |a|) \wedge (0 \leq i + 1 < |a|) \quad \wedge_L \quad True \\
\\
wp(S, Post) &\equiv (0 \leq i < |a|) \wedge (0 \leq i + 1 < |a|)
\end{aligned}$$

2.2. Ejercicios

Ejercicio: Probar usando el principio de inducción que 7 divide a $15^n + 7$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Capítulo 3

Resultados

3.1. Simulación de resultados

3.1.1. Suposiciones

3.1.2. Modelos

3.2. Resultados preliminares

3.3. Resultados postprocesados

3.3.1. Valores atípicos

3.3.2. Correlaciones

Capítulo 4

Conclusiones

Ejercicio: Probar usando el principio de inducción que 7 divide a $15^n + 6$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$

Cuando trabajamos con inducción debemos definir cual es la afirmacion que vale para cada n y no se pone para todo n , porque eso es lo que queremos probar.

$$P(n) : 7 \mid 15^n + 6$$

Caso base $P(0) : n = 0$ Queremos ver si el primer numero del conjunto cumplir $P(n)$

$$(n = 0) \Rightarrow 7 \text{ divide a } (15^0 + 6)$$

$$15^0 + 6 = 7, 7 = 1 \cdot 7 \Rightarrow 7 \mid 7$$

Por lo tanto la afirmación para $P(0)$ es verdadera ya que 7 divide a 7.

Paso inductivo Suponemos que $P(n)$ es verdadera y probamos la veracidad de $P(n + 1)$

$$\text{Hipótesis Inductiva (HI)} \equiv (15^n + 6 = k \cdot 7), \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que queremos hacer es que suponiendo que $P(n)$ es verdad probamos la verdad de $P(n + 1)$

$$\begin{aligned} 15^{n+1} + 6 &\equiv 15^{n+1} + 6 \\ &\equiv 15^n \cdot 15 + 6 \\ &\equiv 15^n \cdot (1 + 14) + 6 \\ &\equiv 15^n \cdot 1 + 15^n \cdot 14 + 6 \\ &\equiv (15^n \cdot 1 + 6) + 15^n \cdot 14 \\ HI &\equiv k \cdot 7 + 15^n \cdot 14 \\ &\equiv k \cdot 7 + 15^n \cdot (2 \cdot 7) \\ 15^{n+1} + 6 &\equiv 7 \cdot \underbrace{(k + 15^n \cdot 2)}_{\text{esto } \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Podemos ver que $15^{n+1} + 6$ se expresa como multiplo de 7, por lo tanto queda demostrado nuestro ejercicio

Ejercicio: Probar usando el principio de inducción que 10 divide a $16^n - 6^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

$$10 \mid 16^n - 6^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Caso Base P(1) $n = 1$

$$\begin{aligned} 16^1 - 6^1 &\equiv 16 - 6 = 10 \\ &\equiv 10 = 1 \cdot 10 \quad (\text{con esto vemos que cumple}) \end{aligned}$$

Paso inductivo P(n) $P(n)$ es verdad y pruebo para $P(n + 1)$

Hipótesis inductiva $\Rightarrow (16^n - 6^n = k \cdot 10)$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 16^{n+1} - 6^{n+1} &\equiv 16^n \cdot 16 - 6^n \cdot 6 \\ &\equiv 16^n \cdot (6 + 10) - 6^n \cdot 6 \\ &\equiv (16^n \cdot 6 + 16^n \cdot 10) - 6^n \cdot 6 \\ &\equiv 16^n \cdot 6 - 6^n \cdot 6 + 16^n \cdot 10 \\ &\equiv 6 \cdot \underbrace{(16^n - 6^n)}_{HI} + 16^n \cdot 10 \\ HI &\equiv 6 \cdot k \cdot 10 + 16^n \cdot 10 \\ 16^{n+1} - 6^{n+1} &\equiv 10 \cdot \underbrace{(k \cdot 6 + 16^n)}_{esto \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Podemos ver que $16^{n+1} - 6^{n+1}$ se expresa como multiplo de 10, por lo tanto queda demostrado nuestro ejercicio