04. Modelagem com Funções

Princípios de Engenharia de Software (Texto em Elaboração)

Italo S. Vega
`italo@pucsp.br`

Faculdade de Estudos Interdisciplinares (FACEI)
PUC-SP Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Sumário

 Richard Feynman (National Science Teachers Association, 1966) — Science is the belief in the ignorance of experts.

4 Modelagem com Funções

— **Programas** de computador implementam modelos de **ações computacionais**.

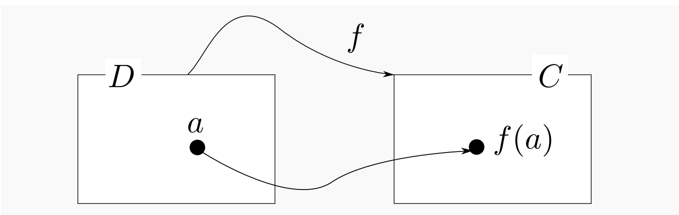
4.1 Funções Computáveis

Função matemática Ao estudar o conceito de função matemática, Fubã encontrou a definição proposta por Jenkyns & Stephenson (2013), p. 51. Ele traduziu da seguinte maneira:

> f é uma função do conjunto $D \neq \emptyset$ no conjunto C (escrito $f : D \to C$) se $f \subseteq D \times C$ onde cada $x \in D$ ocorre em, exatamente, um par ordenado de f.

O conjunto D é o domínio de f, enquanto C é o seu contradomínio (ou codomínio). Aqueles valores de C associados a D sob f formam o conjunto-imagem de f.

— Algo assim?



— Isso! Usaremos $\mathbf{dom} f = D$ e $\mathbf{ran} f \subseteq C$ para o domínio e a imagem de f.

Outra forma de se perceber a função f é como um conjunto de pares ordenados. A notação $f(x)$ refere-se ao valor correspondente à x de acordo com f:

$$f \triangleq \{\ x : D \bullet x \mapsto f(x)\ \}$$

O símbolo $\mapsto$ (*maplet*) enfatiza a ideia de f mapear x em um elemento $y \in \mathbf{ran}\ f$. Ao invés de (x, y), escreve-se $x \mapsto y$.

4.1.1 Questão: função matemática

Contexto Considere o conjunto $g = \{1 \mapsto \mathsf{FUBÃ}, 2 \mapsto \mathsf{ESPEC}, 3 \mapsto \mathsf{PROFE}\}$

Enunciado Assinale a alternativa contendo uma afirmação verdadeira:

1. $3 \in \mathbf{ran}\ g$.
2. g é uma função.
3. $\mathbf{dom}\ g = \{1, 2\}$.
4. $g \cup \{2 \mapsto \mathsf{PROFE}\}$ é uma função.

Função enumerável Um particular caso de função matemática f inclui aquelas sendo enumeráveis. Uma função é enumerável se for finita ou se existir um mapeamento um-para-um com $\mathbb{N}$. A função $g = \{1 \mapsto \mathsf{FUBÃ}, 2 \mapsto \mathsf{ESPEC}, 3 \mapsto \mathsf{PROFE}\}$ ilustra uma função enumerável, uma vez que possui um conjunto finito de elementos.

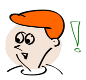
4.1.2 Questão: *arrays* e funções enumeráveis

Contexto Considere a função $f \triangleq \{1 \mapsto 1, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 9\}$. A imagem de 1 sob f é $f(1) = \{1 \mapsto 1, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 9\}(1) = 1$. Essa função pode ser implementada pelo seguinte *array* em Python, considerando-se que os índices começam em zero:

```
# CENÁRIO de implementação de "f"
f = [1, 4, 9] # implementação de função
print (f[0], f[1], f[2])
```

Enunciado Assinale a alternativa com uma afirmação falsa:

1. $f(3) =$ `f[2]`.
2. $\llbracket f(1) \rrbracket_{\text{Python}} =$ `f[1]`.
3. $\llbracket 2 + f(2) \rrbracket_{\text{Python}} =$ `2*f[1]`.
4. $\llbracket f(2)^2 \rrbracket_{\text{Python}} =$ `f[1]*f[1]`.



— Podemos usar várias estruturas de dados para implementar uma função matemática enumerável em Python.

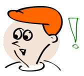
Espec ilustra a sua afirmação usando um *array* de valores `String`. Deve-se lembrar que o domínio de índices de um *array* corresponde a um subconjunto de $\{0, 1, ..., n-1\}$, com n sendo representado pela quantidade de elementos do valor *array*. No exemplo ilustrado pelo Espec, $\llbracket g(1) \rrbracket_{\text{Python}} =$ `g[0]`:

```
# CENÁRIO de uma função em Python
# Função matemática: g = {(1, FUBÃ),(2, ESPEC),(3, PROFE)}
g = ["FUBA", "ESPEC", "PROFE"] # implementação de função
print (g[1])
```

Forma-lambda Outro particular caso de função origina o conceito de forma-lambda, definida por um algoritmo que calcula a imagem de um elemento do domínio. O esquema lógico para se declarar uma forma-lambda segue:

$$f \triangleq \lambda \text{ DECLARAÇÃO} \mid \text{PREDICADO} \bullet \text{EXPRESSÃO}$$

Após o símbolo λ são declarados os parâmetros da função, explicitando-se as variáveis e o tipo de cada uma delas. Separa-se a declaração e o predicado por uma barra vertical. Na ausência do predicado, omite-se a barra também. O predicado estabelece as condições que devem ser verdadeiras para a avaliação da expressão, escrita logo depois do separador $\bullet$. Quando se avalia a expressão, obtém-se a imagem dos valores dos parâmetros sob a forma-lambda.



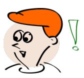
— Alternativamente, então, a função $f \triangleq \{1 \mapsto 1, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 9\}$ seria especificada como:

$$f \triangleq \lambda x : \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3 \bullet x^2$$

A forma-lambda de f possui apenas um parâmetro: x do tipo $\mathbb{N}$. O predicado $1 \leq x \leq 3$ estabelece que o valor x deve pertencer ao conjunto $\{1, 2, 3\}$. Uma vez verificada esta condição, faz sentido avaliar-se a expressão x^2 para conhecermos a imagem de x sob f.

— Consigo implementar a função f usando um método de Python:

```
# CENÁRIO de implementação da função lambda "f"
def f(x) : # declaração de parâmetro
  if (1 <= x and x <= 3) : # predicado
    return x*x # expressão que calcula a imagem de "x"

  raise ValueError(f"Inválido x= {x}")

# Chamada do método "f"
f(3)
```



— Perfeito! Com isso, sabemos que a função $f \triangleq \{1 \mapsto 1, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 9\}$ pode ser implementada por um *array* ou por um método em Python.

4.1.3 Questão: definição de funções computáveis

Contexto Considere a seguinte definição da função g:

$g = \{1 \mapsto \mathsf{FUBA}, 2 \mapsto \mathsf{ESPEC}, 3 \mapsto \mathsf{PROFE}, 4 \mapsto \mathsf{FE}\}$

Enunciado Assinale a alternativa contendo uma afirmação verdadeira:

1. A função g encontra-se na forma-lambda.
2. A avaliação $g(5)$ produz um absurdo.
3. A imagem de $g(\sqrt{4})$ é FE.
4. $\mathbf{dom}\ g = \mathbf{ran}\ g$.

4.2 Propriedades de uma Função Computável

"Posso empregar estes conceitos para desenvolver um código que calcule as raízes do seguinte polinômio: $x^2 - 3x + 2$.

Primeiro, Fubã usa o polinômio como a expressão de uma função lambda:

$$f_1 \triangleq \lambda x : \mathbb{R} \mid -10 \leq x \leq 10 \bullet x^2 - 3x + 2$$

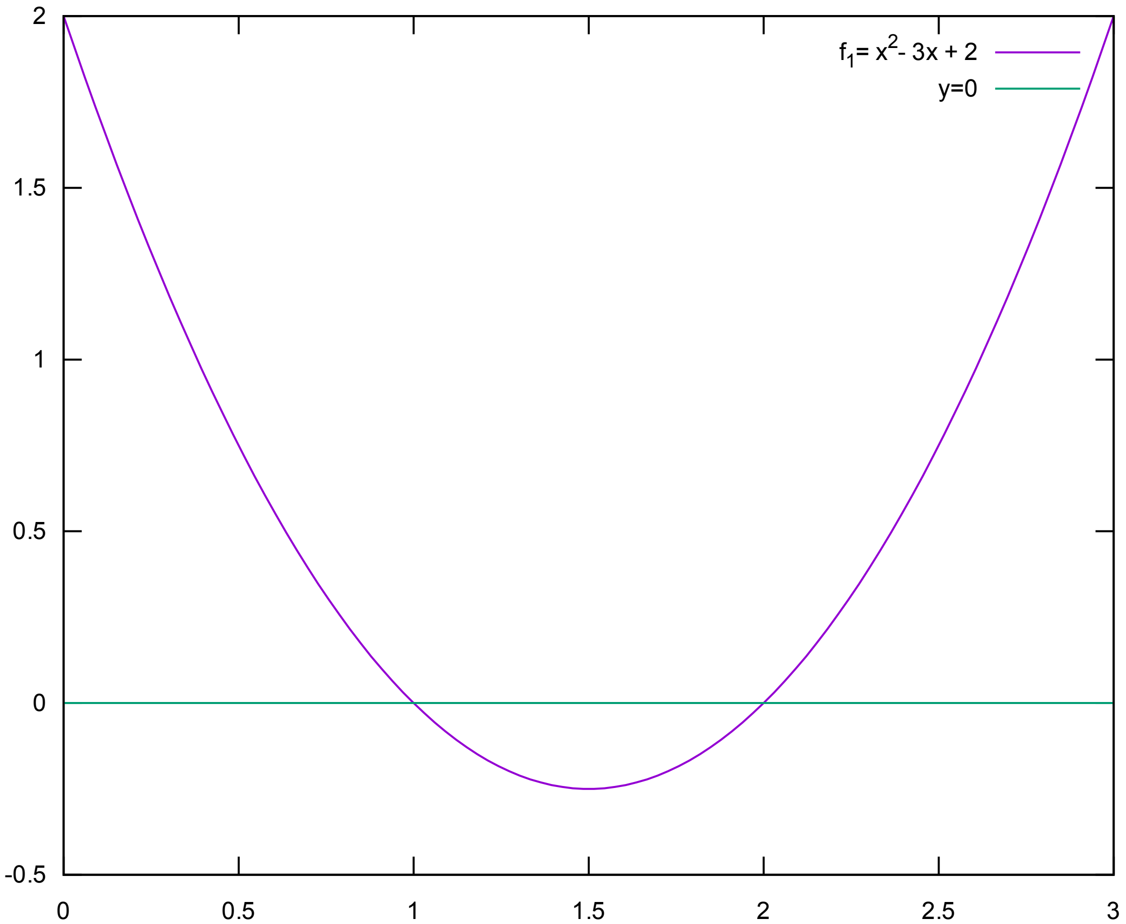
Como resultado da sua implementação de f na forma de um método, Fubã desenvolve o seguinte código em Python:

```python
# CENÁRIO de implementação da função lambda "f1"
def f1 (x) : # declaração de parâmetro
  if (-10.0 <= x and x <= 10.0) : # predicado
    return x*x - 3*x + 2 # expressão que calcula a imagem de "x"

  raise ValueError(f"Inválido x= {x}")

# Chamada do método "f"
print (f1(0), f1(0.5), f1(1.5), f1(2.5), f1(3))
```

Alguns dos elementos de f_1 encontram-se na tabela a seguir:

$x \mapsto$	$f_1(x)$
$0 \mapsto$	2
$0.5 \mapsto$	0.75
$1.5 \mapsto$	-0.25
$2.5 \mapsto$	0.75
$3 \mapsto$	2

Com base nestes elementos de f_1, Fubã desenha o seguinte gráfico e percebe que os valores $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ são as raízes de f_1, tornam verdadeira a condição $f_1(x_1) = 0 \land f_1(x_2) = 0$:



 — Se eu usar a fórmula quadrática, saberei os valores do domínio x tal que $f_1(x) = 0$!

Fubã cria a função h com base na fórmula quadrática para calcular as duas soluções em $\mathbb{R}$ da equação quadrática $x^2 - 3x + 2 = 0$:

$$h \triangleq \lambda a, b, c : \mathbb{R} \mid a \neq 0 \land \Delta > 0 \bullet (x_1, x_2)$$

com

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Na sua definição de h, a quantidade Δ determina as propriedades das raízes, sendo conhecida por discriminante. Fubã também considera a seguinte interpretação ao produzir o seu código:

$$[\![\mathbb{R}]\!]_{Python} = \texttt{double}$$

— Ao executar esse código de h conseguirei calcular as raízes de f_1:

```
# CENÁRIO de implementação da fórmula quadrática
import math
def h(a, b, c) : # declaração
  if (a != 0) : # predicado
    delta = b*b - 4*a*c;
    if (delta > 0) : # predicado
      x1 = (-b + math.sqrt(delta)) / (2*a)
      x2 = (-b - math.sqrt(delta)) / (2*a)
      return [x1, x2] # expressão

    raise ValueError ("Sem soluções reais!")
  raise ValueError ("'a' não pode ser zero!")

# CENÁRIO de avaliação de função
x = h(1,-3,2)
print (x[0], x[1])
```

4.3 Funções Computáveis e Iterações

Fubã intrigou-se com uma observação a respeito de números irracionais, como π e $\sqrt{2}$. Eles ilustram o conceito de números computáveis, sendo definidos por um algoritmo. Weisstein (2022) apresenta um resultado importante a esse respeito:

> Any computable function can be incorporated into a program using while-loops (i.e., "while something is true, do something else"). For-loops (which have a fixed iteration limit) are a special case of while-loops, so computable functions could also be coded using a combination of for- and while-loops.

O método de Newton-Raphson ilustra muito bem esse resultado. Obtém-se a solução numérica de equações por aproximações sucessivas quando se utiliza aquele método. Para calcular a raiz quadrada de um número n, por exemplo, utilizam-se as regras da seguinte lógica:

$$
\begin{aligned}
\text{início} \triangleq\ & \land\ n = 2 \\
& \land\ \epsilon = 0.001 \\
& \land\ r = n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{passo} \triangleq\ & \land\ |r - \frac{n}{r}| \leq r \cdot \epsilon \\
& \land\ r' = \frac{r + \frac{n}{r}}{2}
\end{aligned}
$$

 — Consigo produzir um código para implementar essa lógica:

```python
# CENÁRIO de implementação de Newton-Raphson
# Raiz quadrada de 'n' com precisão 'EPS'
n = 2.0
EPS = 0.001
r = n
# o predicado inicial "início" é verdadeiro
while (abs(r - n / r) > r * EPS) :
  r = (n / r + r) / 2.0
  print (abs(r - n / r))
  # a ação "passo" é verdadeira
# a ação "passo" é verdadeira
print (n , EPS , f"{r:.3f}" )
```

 — Seria interessante provarmos o seguinte argumento a respeito dessa lógica:

$$
\frac{[a = 2, \epsilon = 0.001]}{[r = 1.414]}
$$

 — Concordo... mas será que não conseguimos avançar no modelo do quebra-cabeça Batalha Naval?

Espec percebe que o seu colega está deixando a prova para outro momento e retoma o projeto do quebra-cabeça.

4.3.1 Questão: modelo dos navios de uma frota

Contexto Em um quebra-cabeça Batalha Naval[1] deve-se representar as coordenadas de cada um dos cinco navios de uma frota. Cada navio foi codificado como um elemento do seguinte conjunto:

$$\text{Navios} \triangleq \{\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \mathsf{N}_3, \mathsf{N}_4, \mathsf{N}_5\}$$

Enunciado Assinale a alternativa contendo uma correta implementação desse conjunto em Python:

1. `Navios = ['N1', 'N2', 'N3', 'N4']` com `type(Navios) == list`
2. `Navios = {1, 2, 3, 4, 5}` com `type(Navios) == set`
3. `Navios = [True, False, 'N3', 'N4', 'N5']` com `type(Navios) == list`
4. `Navios = {"N1", "N2", 3, True, 'N5'}` com `type(Navios) == set`

4.3.2 Questão: modelo das posições dos navios de uma frota

Contexto O conjunto de posições de navios, por sua vez, foi modelada como:

$$\text{Pos} \triangleq \{\ \forall x, y : \mathbb{Z} \mid 1 \leq x, y \leq 5 \bullet (x, y)\ \}$$

Espera-se comparar um elemento de Pos com outro. Por exemplo, é verdade que $(3,1) = (3,1)$.

Enunciado Assinale a alternativa contendo uma expressão em Python que produza `True`:

1. `(3,1) == [3,1]`
2. `(3,1) in [[1,1],[2,2],[3,1],[4,4],[5,5]]`
3. `(3,1) in {(1,1),(2,2),(3,1),(4,4),(5,5)}`
4. `type({(1,1),(2,2),(3,1),(4,4),(5,5)}) == tuple`

---

[1] https://www.conceptispuzzles.com/index.aspx?uri=puzzle/battleships/history

4.3.3 Questão: coordenadas dos navios de uma frota

Contexto Finalmente, decidiu-se usar uma função coord que mapeia cada elemento do conjunto Navios em uma imagem em Pos, com uma restrição. Dois navios não podem estar na mesma posição. Um exemplo coord seria:

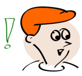
$$\mathrm{coord} \triangleq \{\mathsf{N}_1 \mapsto (1,1), \mathsf{N}_2 \mapsto (2,2), \mathsf{N}_3 \mapsto (3,3), \mathsf{N}_4 \mapsto (4,4), \mathsf{N}_5 \mapsto (5,5)\}$$

Enunciado Assinale a alternativa contendo uma afirmação verdadeira:

1. N_{10} : Navios.
2. $(0,0)$: Pos.
3. $\exists n : \mathrm{Navios} \land \mathrm{coord}(n) = (2,2)$
4. $\exists n_1, n_2 : \mathrm{Navios} \land n_1 \neq n_2 \land \mathrm{coord}(n_1) = \mathrm{coord}(n_2)$

 — Puxa! Posso codificar a função coord em Python usando

```python
# CENÁRIO de implementação das coordenadas dos navios
coord = { "N1" : (1, 1), "N2" : (2, 2), "N3" : (3, 3),
          "N4" : (4, 4), "N5" : (5, 5) }
```

 — Isso! E a aplicação da função coord em um navio $n \in$ Navios fica bem fácil...

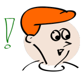
Por exemplo, de acordo com a definição de coord, a imagem do navio N_1 é $(1,1)$. Ou seja:

$$\mathrm{coord}(\mathsf{N}_1) = (1,1)$$

Em Python:

```python
# CENÁRIO de aplicação da função "coord"
coord["N1"] == (1, 1)
```

Contagem de elementos de uma função Espec se empolga e projeta uma outra função que calcula a quantidade de navios que se encontram em uma determinada coordenada x. A ideia é simples. Ele coleta as posições de todos os navios que se encontram na coordenada x. Em seguida, ele retorna a quantidade de posições coletadas.

 — Se eu considerar o conjunto de Navios e a função coord\$, defino a função dica da seguinte forma:

$$\mathrm{dica} \triangleq \mid \{\forall n : \mathrm{Navios} \mid \mathrm{coord}(n)_1 = x \bullet \mathrm{coord}(n)\} \mid$$

 — Nossa! Consigo implementar essa lógica facilmente em Python!

```python
# CENÁRIO da contagem de navios em uma coordenada X
# VARIÁVEIS de estado
Navios = {'N1', 'N2', 'N3', 'N4', 'N5'}
coord  = {"N1" : (1, 1), "N2" : (2, 2), "N3" : (3, 3),
          "N4" : (4, 4), "N5" : (5, 5)}
# Função de cálculo da dica
def dica (x) :
  k = []
  for n in Navios :
    (xn, yn) = coord[n]
    if x == xn :
      k.append (coord[n])
  return len(k)
# Dica de quantos navios encontram-se na coordenada "x=1"
dica (1)
```

4.3.4 Questão: quantidade de elementos de um conjunto-função

Contexto Em uma determinada configuração do quebra-cabeça Batalha Naval, os navios foram posicionados nas seguintes coordenadas:

$$\text{coord} \triangleq \{\mathsf{N}_1 \mapsto (1,1), \mathsf{N}_2 \mapsto (1,2), \mathsf{N}_3 \mapsto (1,3), \mathsf{N}_4 \mapsto (4,4), \mathsf{N}_5 \mapsto (5,5)\}$$

Supondo-se que:

$$\text{Navios} \triangleq \{\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \mathsf{N}_3, \mathsf{N}_4, \mathsf{N}_5\}$$

O cálculo da quantidade de navios em uma coordenada x é feito pela seguinte função:

$$\text{dica} \triangleq \mid \{\forall n : \text{Navios} \mid \text{coord}(n)_1 = x \bullet \text{coord}(n)\} \mid$$

Enunciado Assinale a alternativa contendo uma afirmação verdadeira:

1. $\text{dica}(1) = 3$.
2. $\text{dica}(2) = 2$.
3. $\text{dica}(3) = 1$.
4. $\text{dica}(4) = 4$.

4.4 Resumo

1. Função matemática como um conjunto de pares onde o primeiro elemento de cada par aparece uma única vez.
2. **dom** é o conjunto domínio de uma função.
3. **ran** é o conjunto imagem de uma função.
4. Funções computáveis são enumeráveis.
5. Expressões-lambda são usadas na definição de funções computáveis.
6. Funções computáveis são implementadas por iterações `while`.

4.5 Exercícios

4.5.1 Ano Bissexto

Contexto Para decidir se um determinado ano a é ou não bissexto, costuma-se utilizar uma lógica baseada na seguinte função (Sedgewick & Wayne, 2017):

$$\text{bis} = \lambda a : \mathbb{N} \mid (a \mod 4 = 0 \land a \mod 4 \neq 100) \lor (a \mod 4 = 400) \bullet \mathsf{true}$$

Enunciado Assinale a alternativa que descreve partes da regra corretamente:

1. a é bissexto se for divisível por 400.
2. Para ser bissexto, a deve ser divisível por 4.
3. Se a não for divisível por 100 ele é bissexto.
4. O ano a é bissexto se for divisível por 4, por 100 e por 400.

4.5.2 Ano Bissexto em Python

Contexto O mesmo do exercício anterior.

Enunciado

a. Implemente a função bis em Python.
b. Mostre que $\text{bis}(2016) = \mathsf{true}$.

4.5.3 Cálculo da Raiz Quadrada [*]

Contexto O método de Newton-Raphson para calcular a raiz quadrada de um número n baseia-se nas seguintes regras:

$$\begin{aligned} \text{início} \triangleq\ & \land\ n = 2 \\ & \land\ \epsilon = 0.001 \\ & \land\ r = n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{passo} \triangleq\ & \land\ |r - \frac{n}{r}| \leq r\epsilon \\ & \land\ r' = \frac{r + \frac{n}{r}}{2} \end{aligned}$$

Enunciado

1. Reescreva a lógica de modo que os valores de n e de ϵ sejam informados interativamente.
2. Implemente a lógica do item anterior em Python.

4.5.4 Crescimento Populacional [**]

Contexto Suponha que uma população seja representada por um valor entre 0 (extinta) e 1 (máximo sustentável)—(Sedgewick & Wayne, 2017, p. 89). Se a população no instante t é x então ela passará para $rx(1-x)$ no instante seguinte, com r denotando a ideia de parâmetro de fecundidade. Ele controlará a taxa de crescimento a população.

Enunciado

1. Escreva o predicado inicial e a fórmula de ação para a lógica de análise populacional.
2. Desenvolva um código em Python que implemente a lógica do item anterior.
3. Se $x = 0.01$, calcule os resultados de iteração do modelo para diferentes valores de r.
4. Para quais valores de r a população se estabiliza em $x = 1 - \frac{1}{r}$?
5. O que se pode afirmar a respeito da população quando $r \in \{3.5, 3.8, 5\}$?

Referências

Jenkyns, T., & Stephenson, B. (2013). *Fundamentals of Discrete Math for Computer Science: A Problem-Solving Primer*. Springer-Verlag.

Sedgewick, R., & Wayne, K. (2017). *Introduction to Programming in Java: An Interdisciplinary Approach*. (A.-W. Professional, Org.) (2º ed).

Weisstein, E. W. (2022, março 17). Computable Function. (M. W. W. Resource, Org.). Recuperado de https://mathworld.wolfram.com/ComputableFunction.html