INSTITUTO SUPERIOR POLITÉCNICO DE TECNOLOGIAS E CIÊNCIAS

EXAME NORMAL

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIAS E TECNOLOGIAS - DET

DISCIPLINA	**ÁLGEBRA LINEAR & GEOMETRIA ANALÍTICA**	**TURMAS: Manhã**
CURSOS	**ENGENHARIAS**	**Duração:** 2h30
DOCENTE	WALDIK JAIME	**Data:** 01/02/2023
~~**NOME**~~	CHAVE	**Nº**

RECOMENDAÇÕES IMPORTANTES:
Na resposta a cada item, **apresente todas** as justificações necessárias. As respostas sem os cálculos ou passos terão cotação zero!
É liberado o uso da calculadora. Especificar a zona de rascunho. **Não serão consideradas as partes escritas à lápis.**
Provas de conteúdos globais ou parciais iguais, ou com suspeitas de cópia, serão anuladas. A ordem (sequência) de resolução dos exercícios é arbitrária.

VAR - A

1. Sejam:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

matrizes $M_{2\times3}(\mathbb{R})$. Calcule:

a) $3\left(A - \frac{1}{2}B\right) + C$

b) A matriz $X \in M_{2\times3}$, tal que $\frac{1}{2}(X + A) = 3(X + (B - A)) - C$

c) $(A \cdot C^T)^{-1}$

2. Determine a solução do sistema para pelo método de Gauss e classifique-o.

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

3. A recta $r: \begin{cases} x = 15 - 4z \\ y = 25 - 8z \end{cases}$ é a projecção ortogonal da recta s sobre o plano

$\pi: \begin{cases} x = 1 + h + t \\ y = -1 + 3h - t \\ z = 2 - h + 2t \end{cases}$

Ache o ângulo entre a recta s e o plano π.

4. Dada a equação da cônica $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 12 = 0$.

a) Determine a sua equação reduzida.

b) Classifica a cônica

c) Encontre o centro, os vértices, os focos e a excentricidade.

d) Esboce o gráfico

5. Dada a equação da quádrica, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

a) Identifique-a

b) Esboce-a

COTAÇÃO: 1. a)1v; b)2v; c)2v; **2.** 3v; **3.** 4v; **4.** a)1v; b)1v; c)2v; d)1v **5.**a)1V; b)2v.

CHAVE DO EXAME DE ALGA (2022)

WALDIK JAIME

1º R: $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}0&0&2\\6&4&2\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}3&2&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

a) $3.(A-\frac{1}{2}B)+C=3.\left(\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&1\\3&2&1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}3&2&0\\0&1&0\end{bmatrix}=3.\begin{bmatrix}2&1&-1\\-2&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3&-3\\-6&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}9&5&-3\\-6&1&0\end{bmatrix}}$ 1V

b) $\frac{1}{2}.(X+A)=3.[X+(B-A)]-C \Rightarrow X+A=6X+6(B-A)-2C \Rightarrow 6X-X=A+2C-6(B-A)$

$\Rightarrow 5X=A+2C-6B+6A \Rightarrow X=\frac{1}{5}(7A-6B+2C)=\frac{1}{5}.\left(\begin{bmatrix}14&7&0\\7&14&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&12\\36&24&12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&4&0\\0&2&0\end{bmatrix}\right)$

$\Rightarrow X=\frac{1}{5}.\begin{bmatrix}20&11&-12\\-29&-8&-5\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{X=\begin{bmatrix}4&11/5&-12/5\\-29/5&-8/5&-1\end{bmatrix}}$ 2V

c) $(AC^T)^{-1}=\left(\underset{2\times3}{\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}}.\underset{3\times2}{\begin{bmatrix}3&0\\2&1\\0&0\end{bmatrix}}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}8&1\\7&2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{9}.\begin{bmatrix}2&-7\\-1&8\end{bmatrix}^T \Rightarrow \boxed{(AC^T)^{-1}=\begin{bmatrix}2/9&-1/9\\-7/9&8/9\end{bmatrix}}$ 2V

2º R:

$\begin{cases}-x_2+x_3=-2\\x_1+x_2+x_3=1\\x_1-2x_2+4x_3=-5\end{cases}$; $\underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\left[\begin{array}{ccc|c}0&-1&1&-2\\1&1&1&1\\1&-2&4&-5\end{array}\right]}\sim\underset{L_3-L_1}{\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&1&-2\\1&-2&4&-5\end{array}\right]}\sim\underset{\substack{L_1+L_2\\L_3-3L_2}}{\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&1&-2\\0&-3&3&-6\end{array}\right]}\sim\underset{-L_2}{\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-1\\0&-1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right]}\sim\begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&\\ \left[\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right.&&\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}&\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right]\end{array}$

3V

LOGO: $\begin{cases}1.x_1+0x_2+2x_3=-1\\0.x_1+1.x_2-x_3=2\end{cases}$ $\therefore$ $\boxed{\begin{matrix}x_3=C\\x_1=-1-2C\\x_2=2+C\end{matrix}}$ SISTEMA POSSÍVEL INDETERMINADO

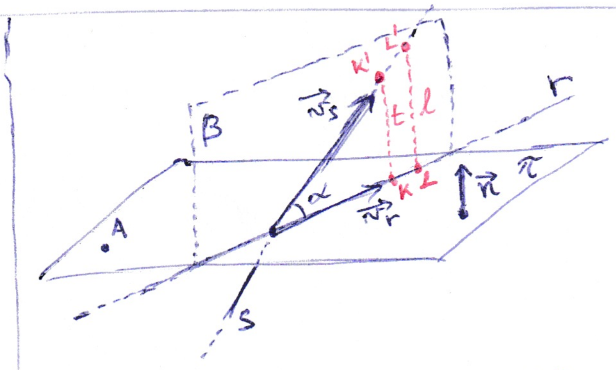
3º R: $r:\begin{cases}x=15-4z\\y=25-8z\end{cases}$; $\vec{v_r}=(-4,-8,1)$; $r\subset\pi$;

$\pi:\begin{cases}x=1+h+t\\y=-1+3h-t\\z=2-h+2t\end{cases}$; $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&3&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=5\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$

$\Rightarrow\vec{n}=(5,-3,-4)$; $\pi: 5x-3y-4z+d=0$;

$h=t=0\Rightarrow A(1,-1,2)\in\pi \Rightarrow 5.1-3.(-1)-4.2+d=0 \Rightarrow d=0$

$\therefore\ \pi: \boxed{5x-3y-4z=0}$



$\beta\perp\pi$; $s\subset\beta$; $\vec{v_r}=PROJ_{\vec{v_r}}\vec{v_s}$

$\Rightarrow\boxed{\vec{v_r}=\frac{\vec{v_s}\cdot\vec{v_r}}{|\vec{v_r}|^2}\cdot\vec{v_r}}$; $\vec{v_s}=(a,b,c)$

$\Rightarrow (-4,-8,1)=\frac{(a,b,c).(-4,-8,1)}{81}.(-4,-8,1) \Rightarrow \boxed{-4a-8b+c=81} \rightarrow$ S.P.I. (EXISTEM VÁRIAS POSSIBILIDADES)

LOGO: $\boxed{0\leq\alpha<90^\circ}$ 4V

M2 POR EXEMPLO: $t:\begin{cases}x=15+5t_1\\y=25-3t_1\\z=-4t_1\end{cases}\rightarrow P/t_1=1\ (K'\in s)\Rightarrow\boxed{K'(20,22,-4)}$

$\left.\begin{matrix}K\in\pi\\K\in r\end{matrix}\right\}K(15,25,0)\rightarrow P/t=0;\ z=0$

$\left.\begin{matrix}t\parallel\vec{n}\\t\in\beta\end{matrix}\right\}K\in t$

$\left.\begin{matrix}L\in\pi\\L\in r\end{matrix}\right\}L(11,17,1): l:\begin{cases}x=11+5t_2\\y=17-3t_2\\z=1-4t_2\end{cases}\rightarrow t_2=2\ (L'\in s)\Rightarrow\boxed{L'(21,11,-7)}$

$\left.\begin{matrix}l\parallel\vec{n}\\l\in\beta\end{matrix}\right\}L\in l\rightarrow P/t_2=0$

$\boxed{\vec{v_s}=\vec{K'L'}=(1,-11,-3)}$

$\cos\alpha=\frac{|\vec{v_s}\cdot\vec{v_r}|}{|\vec{v_s}|.|\vec{v_r}|}=\frac{|(1,-11,-3).(-4,-8,1)|}{\sqrt{131}\cdot\sqrt{81}}$

$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{81}{9.\sqrt{131}}\Rightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{9\sqrt{131}}{131}\right)$

$\boxed{\alpha\approx38^\circ9'21''}$ (UM DOS ÂNGULOS DO INTERVALO)

④ R: $4x^2+9y^2-8x+18y-12=0$

a) $4x^2-8x+9y^2+18y-12=0 \Rightarrow 4.(x^2-2x+1-1)+9.(y^2+2y+1-1)-12=0$

$\Rightarrow 4.(x-1)^2-4+9.(y+1)^2-9-12=0 \Rightarrow 4(x-1)^2+9.(y+1)^2=25 \quad \div/25$

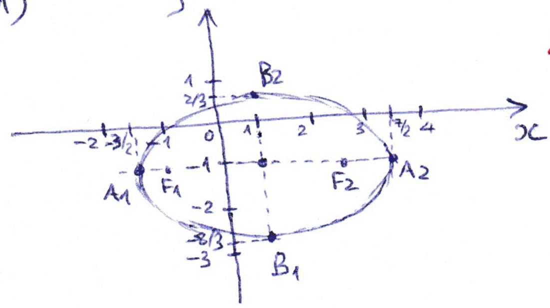
$\Rightarrow \boxed{\dfrac{(x-1)^2}{\frac{25}{4}}+\dfrac{(y+1)^2}{\frac{25}{9}}=1}$ 1V ; $\boxed{\text{b) TRATA-SE DE UMA ELIPSE.}}$ 1V

c) $\boxed{C(1,-1)}$; $a^2=\frac{25}{4} \Rightarrow a=\frac{5}{2}$; $b^2=\frac{25}{9} \Rightarrow b=\frac{5}{3}$; $a>b$ (EIXO MAIOR PARALELO AO EIXO x);

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{25}{9}} \Rightarrow c=\frac{5\sqrt{5}}{6}$; $\left.\begin{matrix} A_1^o(-a,0) \to A_1(-a+h,k) \\ A_2^o(a,0) \to A_2(a+h,k) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} A_1(-\frac{3}{2},-1) \\ A_2(\frac{7}{2},-1) \end{matrix}}$ 2V

$\left.\begin{matrix} B_1^o(0,-b) \to B_1(h,-b+k) \\ B_2^o(0,b) \to B_2(h,b+k) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} B_1(1,-\frac{8}{3}) \\ B_2(1,\frac{2}{3}) \end{matrix}}$; $\left.\begin{matrix} F_1^o(-c,0) \to F_1(-c+h,k) \\ F_2^o(c,0) \to F_2(c+h,k) \end{matrix}\right\} \boxed{\begin{matrix} F_1(1-\frac{5\sqrt{5}}{6},-1) \\ F_2(1+\frac{5\sqrt{5}}{6},-1) \end{matrix}}$; $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{5\sqrt{5}}{6}}{\frac{5}{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{3}}$

d)



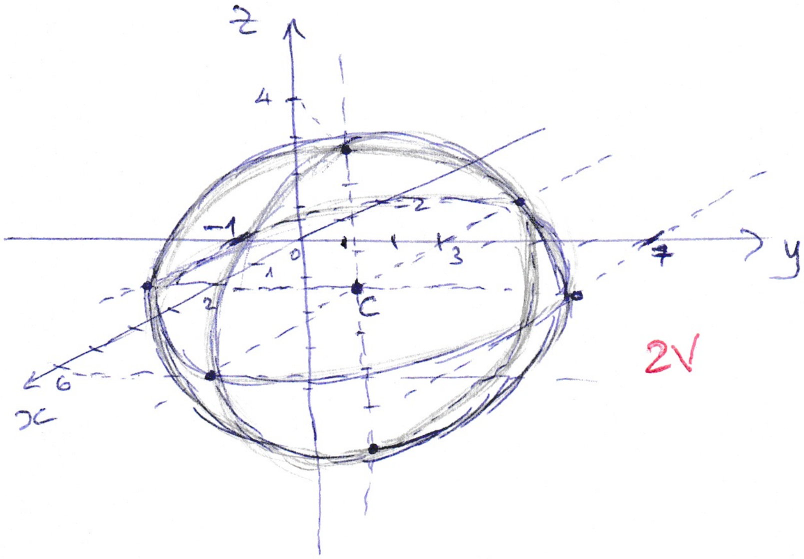
1V

⑤ R: $x^2+y^2+z^2-4x-6y-3=0 \Rightarrow x^2-4x+4-4+y^2-6y+9-9+z^2-3=0$

$\Rightarrow (x-2)^2-4+(y-3)^2-9+z^2-3=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2+z^2=16$

a) $\therefore$ $\boxed{\text{ESFERA DE CENTRO } C(2,3,0) \text{ E RAIO } 4.}$ 1V

b)



2V

WALDIK JAIME

01.02.2023