

Controle e
Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

CONTROLE E SERVOMECANISMOS

Engenharia da Computação

Prof. Dr. Victor Leonardo Yoshimura

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Faculdade de Computação

2024-2



Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle

Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

Aula 03: Diagramas de Blocos

Aula 04: O Espaço de Estado

Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos

Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos

Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

Aula 08: Análise da Resposta Transitória I

Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação

Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada

Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz

Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

Aula 14: Análise do Lugar das Raízes

Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

Aula 16: Diagramas de Bode

Aula 17: O Critério de Nyquist

Aula 18: Parâmetros de Desempenho

Aula 19: Resposta em Malha Fechada

Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado

Aula 23: Controlabilidade

Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado

Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída

Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov

Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo

Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

O que é um Sistema de Controle?

Sistema de controle

Um conjunto de dispositivos de forma a manter uma variável física dentro de especificações de interesse.

Aplicações

Praticamente toda a área tecnológica envolve algum sistema de controle: fontes de alimentação, equipamentos eletrônicos, projetos aeroespaciais, sistemas industriais para controle de pressão, temperatura, vazão, nível, etc.

Objetivos

Em geral, garantir o valor de alguma grandeza física, na presença de alguma restrição ou perturbação, com custo mínimo.

Uma Breve História da Teoria de Controle

- 1763-1775 James Watt desenvolve a máquina a vapor.
- c.1890 Aleksandr Lyapunov desenvolve a teoria da estabilidade que leva seu nome.
- 1932 Harry Nyquist desenvolve um procedimento para determinação de estabilidade.
- 1934 Harold L. Hazen discute o projeto de servomecanismos a relé capazes de seguir uma referência.
- 1938 Hendrik W. Bode desenvolve a análise pelo diagrama que leva seu nome.
- 1948 Walter Evans desenvolve o método do lugar das raízes.
- 1960- Uso de métodos no domínio do tempo e variáveis de estado.
- 1980- Desenvolvimento do controle robusto e \mathcal{H}_{∞} .

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

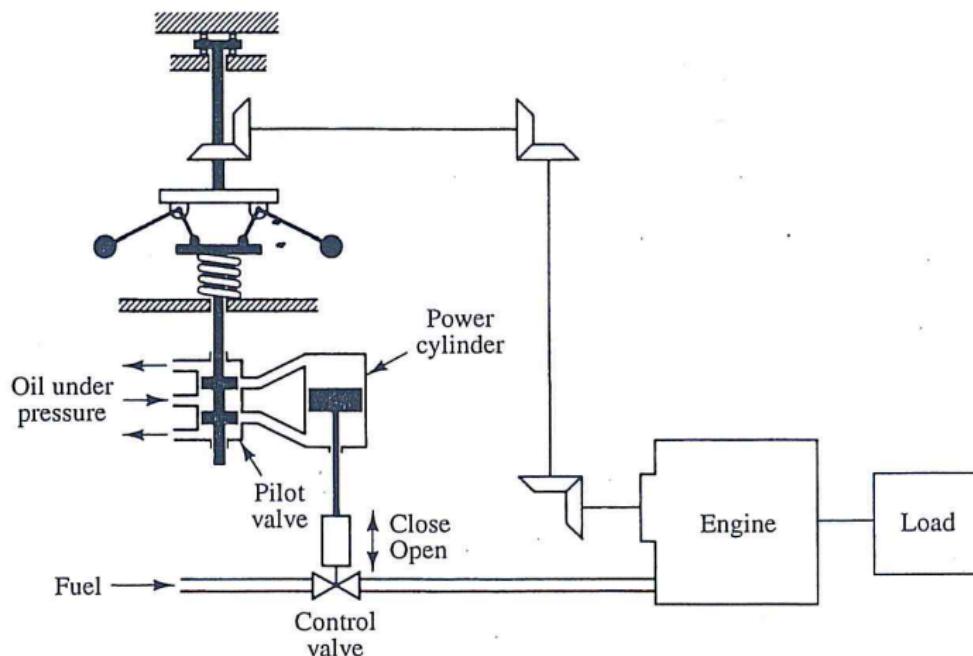
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

A Máquina a Vapor de Watt



Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Terminologia

Variável controlada Grandeza física a ser medida e controlada.

Variável manipulada Grandeza física cuja manipulação controla a variável controlada.

Planta Qualquer dispositivo físico a ser controlado.

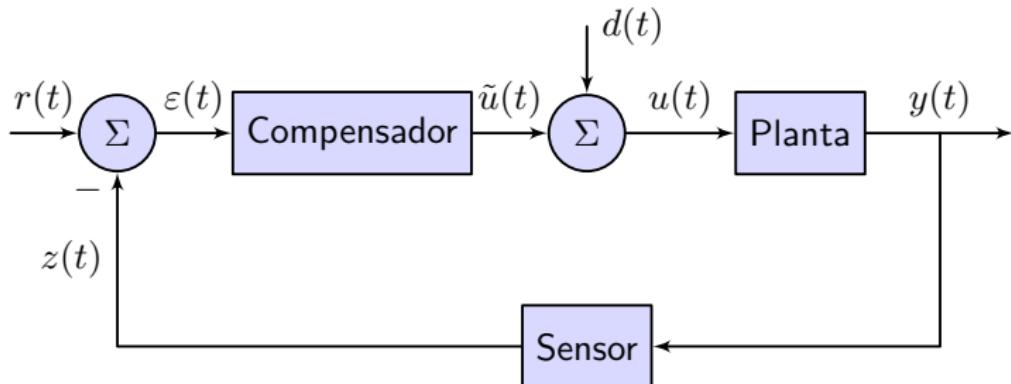
Processo Operação progressiva de ações controladas direcionadas a certo resultado.

Sistema Componentes que atuam conjuntamente para atingir certo objetivo.

Perturbação Sinal que afeta adversamente a saída da planta.

Controle por realimentação Controle para uma planta, na presença de perturbações, de tal forma a reduzir o erro presente em sua saída.

Diagrama de Blocos de um Sistema de Controle



Sinais envolvidos no sistema:

- ▶ Referência: $r(t)$
- ▶ Saída: $y(t)$
- ▶ Medido (da saída): $z(t)$
- ▶ Erro: $\varepsilon(t)$
- ▶ Erro compensado: $\tilde{u}(t)$
- ▶ Perturbação: $d(t)$
- ▶ Atuação : $u(t)$

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

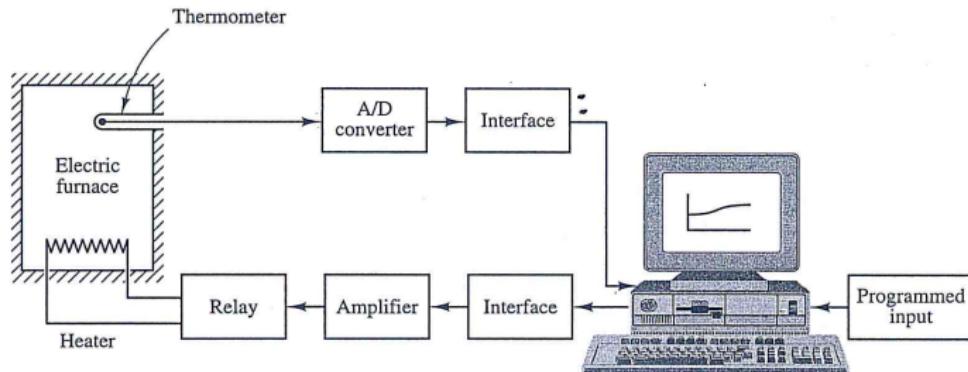
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Um Sistema de Controle: Forno Elétrico



Exercício

No esquema acima, quem é a planta? E o sensor? E o compensador? E a entrada e a saída?

Desafios em um Projeto de Sistema de Controle

Não-linearidade dos componentes A modelagem é feita assumindo componentes lineares, mas algum componente não o é. Ex.: Atrito seco em amortecedores.

Atraso de transporte Há um atraso não previsto entre a emissão de um sinal e sua recepção.

Parâmetros conflitantes Ao exigir que um parâmetro de projeto seja melhorado, há uma deterioração de algum outro parâmetro. Ex.: Overshoot e tempo de resposta.

Digitalização do controle Ao envolver uma CPU para o projeto do compensador, diversas outras considerações para o projeto devem ser feitas. Ex.: Erro de quantização.

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Malha Aberta *versus* Malha Fechada

Sistema em malha fechada Ou realimentado. O controle é determinado de acordo com o erro presente na saída.

Sistema em malha aberta Não há leitura da saída para determinação da ação de controle.

Importante!

Um sistema realimentado tende a ser menos sensível a perturbações externas. Por outro lado, um sistema em malha aberta tende a ser mais simples e barato em sua implementação.

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Funções Complexas

- Uma **variável complexa**, s , é aquela que se escreve como

$$s = \sigma + j\omega \quad (1.1)$$

- Uma **função complexa**, $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, é aquela que se escreve como

$$F(s) = F_x(s) + jF_y(s) \quad (1.2)$$

Observação

A unidade imaginária, j , tem a seguinte propriedade:

$$j^2 = -1 \quad (1.3)$$

Magnitude, Ângulo e Conjugado

- A **magnitude** do número complexo s é

$$|s| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \quad (1.4)$$

- O **ângulo** do número complexo s é

$$\arg(s) = \arctg\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) \quad (1.5)$$

- O **conjugado** do número complexo s é

$$s^* = \sigma - j\omega \quad (1.6)$$

Observação

As definições de magnitude, ângulo e conjugado se aplicam de forma análoga a uma função complexa $F(s)$.

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Relação de Euler

- ▶ A partir das expansões de Taylor das funções seno e cosseno, pode-se verificar a relação de Euler:

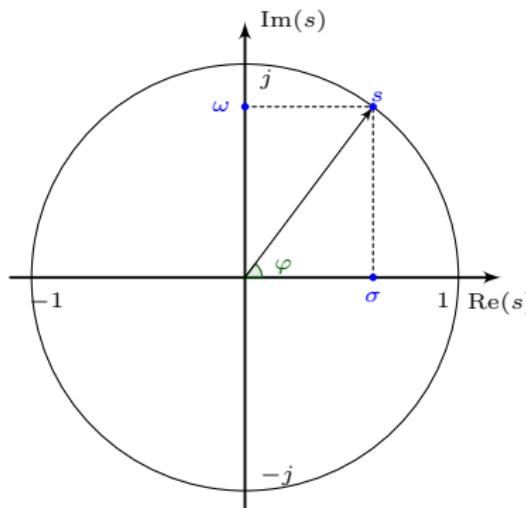
$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta} \quad (1.7)$$

- ▶ Duas relações importantes podem, também, ser obtidas:

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad (1.8a)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j2} \quad (1.8b)$$

Formas Cartesiana e Polar



Se $|s| = 1$, então

$$s = \underbrace{\cos \varphi}_{\sigma} + j \underbrace{\sin \varphi}_{\omega} = e^{j\varphi}$$

Caso $|s| \neq 1$, basta fazer

$$s = |s| \underbrace{\frac{s}{|s|}}_{\text{Unitário!}}$$

Observação

Todo número complexo, $s \neq 0$ pode ser escrito como

$$s = \sigma + j\omega = |s|e^{j\varphi} \quad (1.9)$$

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Funções Analíticas

Definição

Uma função complexa, F , é dita **analítica** em $\Omega \subset \mathbb{C}$ se, $\forall s \in \Omega$, se existir a derivada de F em relação a s em qualquer ordem, ou seja:

$$F \text{ é analítica em } \Omega \Leftrightarrow \frac{d^n}{ds^n} F(s) \in \mathbb{C}, \forall s \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema (Condições de Cauchy-Riemann)

$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica se, e somente se

$$\frac{\partial F_x}{\partial \sigma} = \frac{\partial F_y}{\partial \omega} \quad (1.10a)$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial \omega} = -\frac{\partial F_y}{\partial \sigma} \quad (1.10b)$$

Pontos Singulares, Polos e Zeros

Definição

Seja F uma função complexa, $p, z \in \mathbb{C}$.

- i Os pontos de \mathbb{C} , onde F não é analítica são ditos **singulares**.
- ii Os pontos singulares onde F ou alguma de suas derivadas tende ao infinito são ditos **polos**.
- iii Se p é um polo de F , tal que $|(s - p)^n F(s)| < \infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Então, p é dito um **polo de ordem n** .
- iv Se $F(z) = 0$, então z é dito um **zero de F** .
- v Se z é zero de F , tal que $\lim_{s_o \rightarrow z} \frac{F(s)}{(s - s_o)^{n-1}} \Big|_{s=z} = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Então, z é dito um **zero de ordem n** .

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo

- ▶ Considere a função complexa:

$$F(s) = \frac{1}{s+1}$$

- ▶ Usando (1.1), reescrevemos:

$$F(\sigma + j\omega) = \frac{1}{\sigma + j\omega + 1} = \frac{1}{\sigma + 1 + j\omega}$$

- ▶ Multiplicando e dividindo pelo conjugado, chega-se a:

$$F(\sigma + j\omega) = \underbrace{\frac{\sigma + 1}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}}_{F_x} + j \underbrace{\frac{-\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}}_{F_y}$$

Exemplo

- ▶ Assim, as derivadas parciais são

$$\frac{\partial F_x}{\partial \sigma} = \frac{\omega^2 - (\sigma + 1)^2}{((\sigma + 1)^2 + \omega^2)^2} = \frac{\partial F_y}{\partial \omega}$$

que valem se $\omega \neq 0$ e $\sigma \neq -1$ ($s \neq -1$).

- ▶ Pode-se mostrar que a segunda condição de Cauchy-Riemann também vale. Logo, F é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.
- ▶ Assim, pode-se calcular $F'(s)$:

$$\begin{aligned}\frac{d F(s)}{d s} &= \frac{\partial F_x}{\partial \sigma} + j \frac{\partial F_y}{\partial \sigma} = \frac{\partial F_y}{\partial \omega} - j \frac{\partial F_x}{\partial \omega} \\ &= -\frac{1}{(\sigma + j\omega + 1)^2} = -\frac{1}{(s + 1)^2}\end{aligned}$$

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Freqüência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Definição da Transformada de Laplace

Definição (Transformada de Laplace)

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A Transformada de Laplace (TL) de f , $\mathcal{L}[f(t)]$ é dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.11)$$

quando a integral (1.11) convergir.

Observação

Sob quais condições uma função de variável real possui TL?

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Existência da Transformada de Laplace

Teorema (Existência da TL)

Seja $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A integral (1.11) converge se:

- f for seccionalmente contínua em seu domínio, e;
- $\exists \sigma \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)|e^{-\sigma t} = 0$$

Observação

Caso as condições anteriores se verifiquem, então:

- ▶ f é dita de ordem exponencial;
- ▶ σ é dita abscissa de convergência.

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo

A função $f(t) = e^{-\alpha t}$ possui TL, pois é contínua e:

$$|e^{-\alpha t}|e^{-\sigma t} = e^{-(\sigma+\alpha)t}$$

Note que esta expressão tenderá a zero se, e somente se:

$$\sigma + \alpha > 0 \Rightarrow \sigma > -\alpha$$

Assim, a TL dessa função pode ser calculada e vale:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} dt = \frac{1}{s+\alpha}\end{aligned}$$

Atraso no Tempo

Sejam $\mathcal{L}[f(t)] = \hat{f}(s)$ e $\alpha \geq 0$. A TL de $f(t - \alpha)$ é dada por:

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)] = \int_0^{\infty} f(t - \alpha) e^{-st} dt$$

Fazendo as substituições $\tau = t - \alpha$ e $d\tau = dt$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t - \alpha)] &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s(\tau + \alpha)} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} e^{-s\alpha} d\tau \\ &= e^{-s\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau\end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)] = e^{-s\alpha} \hat{f}(s) \quad (1.12)$$

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Funções Degrau, Pulso e Impulso I

- A função **degrau unitário** e sua TL são, respectivamente

$$\tilde{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\mathcal{L}[\tilde{1}(t)] = \int_0^{\infty} \tilde{1}(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (1.14)$$

- Dado, $t_o > 0$, define-se a função **pulso** como

$$p_{t_o}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_o} & \text{se } 0 \leq t \leq t_o \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.15)$$

- Ou, equivalentemente, usando degraus unitários:

$$p_{t_o}(t) = \frac{1}{t_o} [\tilde{1}(t) - \tilde{1}(t - t_o)] \quad (1.16)$$

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Funções Degrau, Pulso e Impulso II

- Aplicando a propriedade (1.12) em (1.14) e em (1.16):

$$\hat{p}_{t_o}(s) = \frac{1}{t_o} [\mathcal{L}[\tilde{1}(t)] - e^{-t_o s} \mathcal{L}[\tilde{1}(t)]] = \frac{1 - e^{-t_o s}}{t_o s} \quad (1.17)$$

- A função impulso ou delta de Dirac é definida com $t_o \rightarrow 0$ em (1.15):

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.18)$$

- Fazendo o mesmo limite em (1.17):

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{t_o \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-t_o s}}{t_o s} \stackrel{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{t_o \rightarrow 0} \frac{s e^{-t_o s}}{s} = 1 \quad (1.19)$$

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Teorema da Diferenciação Real

Teorema

Seja $\mathcal{L}[f(t)] = \hat{f}(s)$. Então:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d f(t)}{dt} \right] = s \hat{f}(s) - f(0) \quad (1.20)$$

Observação

Para uma diferenciação de n -ésima ordem:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = s^n \hat{f}(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i \underset{<n-1-i>}{f(0)} \quad (1.21)$$

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Teoremas do Valor Inicial e do Valor Final

Teorema (Valor Final)

Seja $\mathcal{L}[f(t)] = \hat{f}(s)$, com todos os seus polos no semi-plano esquerdo e, no máximo, um polo na origem, então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{f}(s) \quad (1.22)$$

Teorema (Valor Inicial)

Seja $\mathcal{L}[f(t)] = \hat{f}(s)$, então:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{f}(s) \quad (1.23)$$

Teorema da Convolução

Definição (Convolução)

Sejam f e g funções reais. Sua convolução é definida por

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau \quad (1.24)$$

Observação

A convolução é **comutativa**. De fato, basta fazer $\xi = t - \tau$ em (1.24) para verificar tal proposição.

Teorema (Convolução)

Se as TLs de f e g existem, então:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \hat{f}(s)\hat{g}(s) \quad (1.25)$$

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Transformada Inversa de Laplace

Definição (Transformada Inversa de Laplace)

Sejam $\hat{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa e $c \in \mathbb{R}$, maior que todas as partes reais das singularidades de \hat{f} . A

Transformada Inversa de Laplace (TIL) de $\hat{f}(s)$, $\mathcal{L}^{-1}[\hat{f}(s)]$, é a função de variável real, f , dada por

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \hat{f}(s)e^{st} ds \quad (1.26)$$

- ▶ Obter TILs a partir de (1.26), não é prático;
- ▶ Melhor é utilizar tabelas de TL e a expansão em frações parciais.

Funções Racionais

Definição (Função Racional)

Uma função racional é aquela que se escreve como

$$\hat{f}(s) = \frac{\underbrace{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}_{\hat{n}(s)}}{\underbrace{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}_{\hat{d}(s)}} \quad (1.27)$$

- ▶ Se $n \geq m$, a função racional é dita **própria**;
- ▶ Se $n > m$, a função racional é dita **estritamente própria**;
- ▶ Para funções racionais estritamente próprias, a Expansão em Frações Parciais (EFP) segue casos distintos.

1º caso: Polos reais e distintos

Neste caso, reescreve-se $\hat{d}(s)$ como

$$\hat{d}(s) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)$$

e (1.27) reescreve-se na forma

$$\hat{f}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - p_i}$$

onde r_i é o **resíduo** de \hat{f} no polo p_i . O cálculo dos resíduos é feito com

$$\begin{aligned} [(s - p_k)\hat{f}(s)]_{s=p_k} &= (s - p_k) \left[\frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_k}{s - p_k} + \dots + \frac{r_n}{s - p_n} \right] = r_k \end{aligned} \quad (1.28)$$

Com os resíduos calculados, pode-se obter a TIL como

$$\mathcal{L}^{-1}[\hat{f}(s)] = \sum_{i=1}^n r_i e^{p_i t} \quad (1.29)$$

Exemplo

Calculemos a TIL de $\hat{f}(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$. Para tanto, observe que:

$$\hat{f}(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+2}$$

Os resíduos são calculados com (1.28):

$$r_1 = \left[(s+1) \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-1} = 2$$

$$r_2 = \left[(s+2) \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-2} = -1$$

Assim, usando (1.29):

$$\mathcal{L}^{-1}[\hat{f}(s)] = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

2º Caso: Polos complexos e distintos

Considere um par conjugado de polos da forma $p_{1,2} = \alpha \pm j\omega$. Assim:

$$s^2 + bs + c = (s - \alpha + j\omega)(s - \alpha - j\omega) = (s - \alpha)^2 + \omega^2$$

Desta forma, chega-se a:

$$\hat{f}(s) = \frac{ds + f}{s^2 + bs + c} = k_1 \frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} + k_2 \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$

com k_1 e k_2 a determinar. Aplicando a TIL, obtém-se o resultado desejado.

$$\mathcal{L}^{-1}[\hat{f}(s)] = k_1 e^{\alpha t} \sin \omega t + k_2 e^{\alpha t} \cos \omega t \quad (1.30)$$

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo

Calculemos a TIL de $\hat{f}(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5}$. Seus polos são $-1 \pm j2$. Reescrevendo a função, tem-se:

$$\hat{f}(s) = k_1 \frac{2}{(s + 1)^2 + 4} + k_2 \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4}$$

Donde, comparando as formas, conclui-se que $k_1 = 5$ e $k_2 = 2$. Usando (1.30), tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1}[\hat{f}(s)] = e^{-t}(5 \sin 2t + 2 \cos 2t)$$

3º Caso: Polos reais múltiplos

Neste caso, assume-se o denominador de $\hat{f}(s)$ sob a forma

$$\hat{d}(s) = (s - p)^n$$

Então, pode-se reescrever a função sob a forma

$$\hat{f}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{(s - p)^i} \Rightarrow (s - p)^n \hat{f}(s) = \sum_{i=1}^n r_i (s - p)^{n-i}$$

Pode-se verificar que, com o resultado acima, os resíduos podem ser calculados com:

$$r_i = \frac{1}{(n - i)!} \frac{d^{n-i}}{ds^{n-i}} [(s - p)^n \hat{f}(s)]_{s=p} \quad (1.31)$$

Usando a tabela de TLs, tem-se que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{r_i}{(s - p)^i} \right] = \frac{r_i}{(i - 1)!} t^{i-1} e^{pt} \quad (1.32)$$

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo

Determine-se a TIL de $\hat{f}(s) = \frac{s+1}{(s+3)^2}$. Calculando os resíduos:

$$r_2 = \frac{1}{(2-2)!} \frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}} [s+1]_{s=-3} = -2$$

$$r_1 = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}} [s+1]_{s=-3} = 1$$

Assim, usando (1.32), tem-se

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+1}{(s+3)^2} \right] = (1-2t)e^{-3t}$$

Solução de Equações Diferenciais Ordinárias

- ▶ A TL é muito conveniente para solucionar Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs);
- ▶ Em particular, usa-se para solucionar Problemas de Valor Inicial (PVIs).
- ▶ Segue-se o procedimento:
 - i Determine a TL para o PVI;
 - ii Isole a função incógnita no domínio s ;
 - iii Determine a TIL da expressão resultante.

Exercício

É possível solucionar o PVI

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = \tilde{1}(t)$$

sob condições iniciais nulas? Se for, encontre y .

Funções Transferência

Um Sistema Linear, Contínuo e Invariante no Tempo (SLIT-C) é descrito pela EDO:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \langle y \rangle = \sum_{j=0}^m \beta_j \langle u \rangle \quad (1.33)$$

onde u é a entrada e y , a saída (e n , a **ordem** do sistema). A Função Transferência (FT) desse SLIT-C é definida por:

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \left. \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]} \right|_{y(0)=\dot{y}(0)=\dots=\langle^{n-1} y \rangle(0)=0} \quad (1.34)$$

Combinando (1.33) e (1.34):

$$\hat{g}(s) = \frac{\sum_{j=0}^m \beta_j s^j}{\sum_{i=0}^n \alpha_i s^i} \quad (1.35)$$

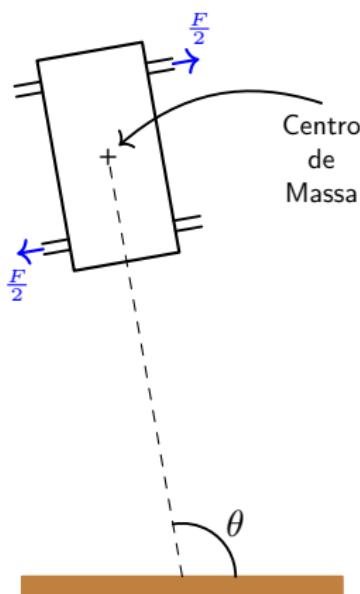
Funções Transferência: Observações

Observação

A Função Transferência:

- i É uma característica do sistema, independendo da entrada aplicada;
- ii Não fornece informação alguma a respeito da estrutura interna do sistema. Com efeito, diferentes sistemas podem ter a mesma FT;
- iii Pode ser experimentalmente levantada. Após isto, tem-se total conhecimento das características dinâmicas do sistema.

Exemplo: Controle de Posição de Satélite



A EDO para a posição do satélite é:

$$J\ddot{\theta} = T \Rightarrow J\ddot{y} = u$$

Aplicando a TL sob Condições Iniciais (CIs) nulas:

$$Js^2\hat{y} = \hat{u} \Rightarrow \hat{g} = \frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{1}{Js^2}$$

onde:

$T \rightarrow$ torque (entrada)

$\theta \rightarrow$ ângulo de guinada (saída)

$J \rightarrow$ momento de inércia

Introdução

Aula 01

Aula 02

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

FTs: Identificação de Sistemas via Impulso

Em (1.34), se fizermos $u = \delta$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{g}(s)] \Big|_{u=\delta} \quad (1.36)$$

Assim, para obter a FT de forma experimental, faz-se:

- 1º Aplique um impulso (delta de Dirac) à entrada;
- 2º Obtenha a resposta do sistema ao longo do tempo;
- 3º A FT será a TL da resposta do sistema.

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Regime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Freqüência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

Aula 03: Diagramas de Blocos

- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Regime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Modelos

- ▶ Um **modelo** é um conjunto de equações que descrevem com um certo grau de precisão um sistema.

Importante!

Um compromisso existe entre:

Simplicidade e Precisão

- ▶ **Sistemas lineares:** Aqueles aos quais o princípio da superposição se aplica;
- ▶ **Sistemas invariantes no tempo:** Aqueles cuja estrutura não se altera ao longo do tempo;
- ▶ Os **SLIT-Cs** são descritos por EDOs lineares com coeficientes constantes.

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

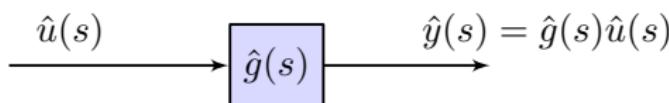
Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Diagramas de Blocos

- ▶ **Diagramas de Blocos (DBs)**: representações das interações entre os elementos de um sistema.
- ▶ Um bloco é a representação para a operação matemática sobre o sinal de entrada que produz a saída.



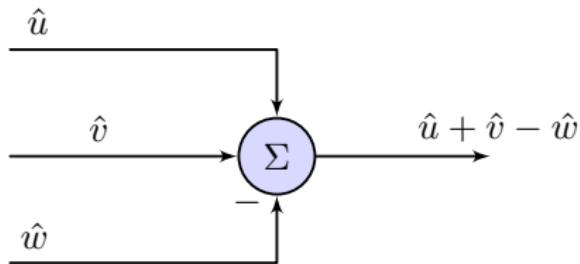
Observação

Como as FTs, os DBs fornecem o comportamento dinâmico do sistema, mas nada falam sobre sua estrutura interna. Diferentes sistemas podem ter o mesmo diagrama de blocos.

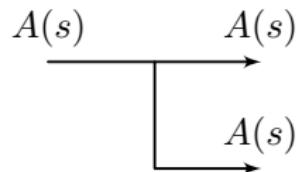
Diagramas de Blocos

Também compõem um diagrama de blocos:

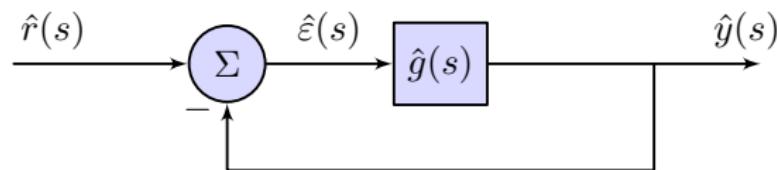
► Ponto de soma:



► Ponto de ramificação:



Exemplo: Sistema em Realimentação Unitária



Note que:

$$\hat{e}(s) = \hat{r}(s) - \hat{y}(s) \text{ e que } \hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{e}(s)$$

Assim:

$$\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{r}(s) - \hat{g}(s)\hat{y}(s)$$

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{g}(s)}{1 + \hat{g}(s)} \quad (2.1)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

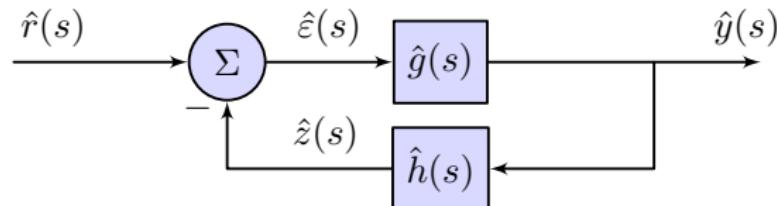
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistema em Malha Fechada



- **Função Transferênciade Malha Aberta (FTMA):** É a razão entre o sinal do sensor e o de erro.

$$\hat{z}(s) = \hat{g}(s)\hat{h}(s)\hat{\varepsilon}(s) \Rightarrow FTMA(s) = \hat{g}(s)\hat{h}(s) \quad (2.2)$$

- **Função Transferênciade Feed Forward (FTFF):** É a razão entre o sinal de saída e o de erro.

$$\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{\varepsilon}(s) \Rightarrow FTFF(s) = \hat{g}(s) \quad (2.3)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

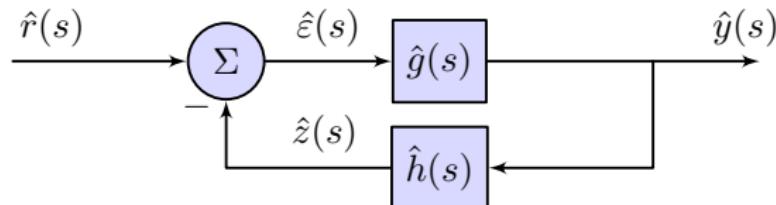
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Função Transferênciа de Malha Fechada



É a razão entre o sinal de saída e o de entrada.

Note que:

$$\hat{\varepsilon}(s) = \hat{r}(s) - \hat{h}(s)\hat{y}(s) \text{ e que } \hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{\varepsilon}(s)$$

Assim:

$$FTMF(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{g}(s)}{1 + \hat{g}(s)\hat{h}(s)} \quad (2.4)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

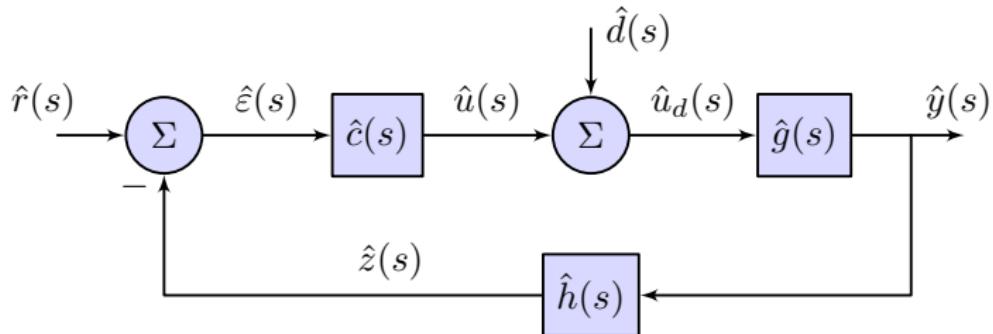
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas sob Perturbação



Como se tem um SLIT-C, fazemos $\hat{d}(s) \equiv 0$ e com (2.4):

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{c}(s)\hat{g}(s)}{1 + \hat{c}(s)\hat{g}(s)\hat{h}(s)} \quad (2.5)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

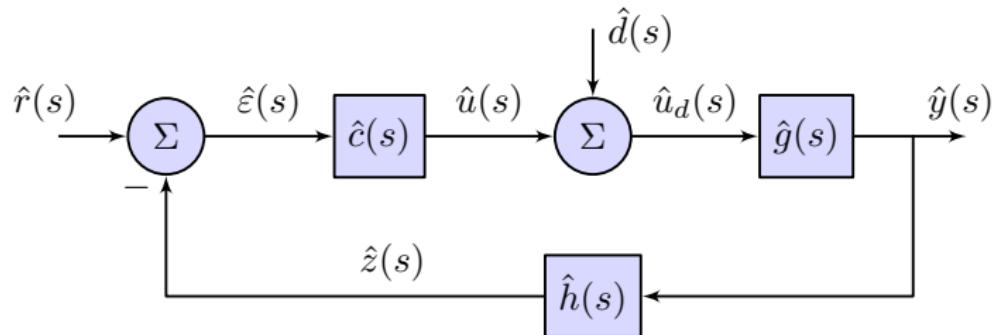
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas sob Perturbação



Fazendo $\hat{r}(s) \equiv 0$ e, usando (2.4):

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{d}(s)} = \frac{\hat{g}(s)}{1 + \hat{c}(s)\hat{g}(s)\hat{h}(s)} \quad (2.6)$$

Sistemas sob Perturbação

Somando (2.5) e (2.6):

$$\hat{y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\hat{c}(s)\hat{g}(s)}{1 + \hat{c}(s)\hat{g}(s)\hat{h}(s)} & \frac{\hat{g}(s)}{1 + \hat{c}(s)\hat{g}(s)\hat{h}(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}(s) \\ \hat{d}(s) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

- ▶ Se $|\hat{c}(s)\hat{g}(s)\hat{h}(s)|, |\hat{c}(s)\hat{h}(s)| \gg 1$, então a perturbação é **suprimida**;
- ▶ Neste caso, tem-se $\hat{y}(s) = \frac{\hat{r}(s)}{\hat{h}(s)}$.

Um sistema em malha fechada pode ser projetado para:

- ▶ rejeitar perturbações;
- ▶ igualar saída e entrada (seguir a referência).

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em

Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Simplificação de Diagramas de Blocos

Observação

Blocos podem ser postos em série somente se a saída do bloco antecedente não for afetada pelo bloco subsequente.

Observação

Simplificar o diagrama de blocos implica em tornar mais complexa a FT de cada bloco.

Ao simplificar blocos deve-se:

- ▶ Manter o produto das FTs no caminho direto;
- ▶ Manter o produto das FTs em torno de cada laço.

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

Lugar das Raízes

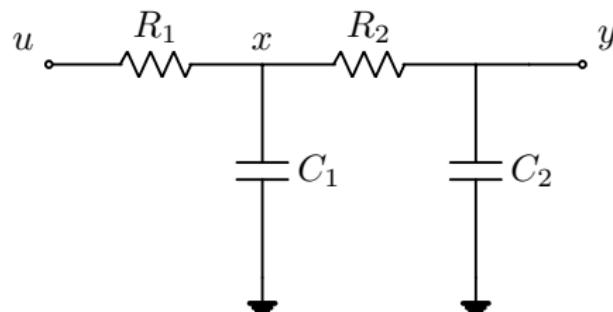
Resp. em

Frequência

Controle PID

Controle Moderno

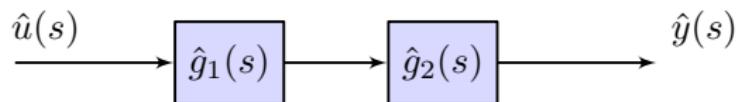
Exemplo: Carga Afetando Bloco Anterior



- ▶ Note que o sinal x (tensão em C_1) é afetado pela carga (R_2 e C_2);
- ▶ Assim, não é possível fazer uma associação série de blocos com FTs para cada par RC.

Operações com Blocos

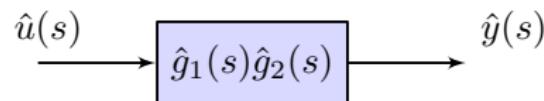
I Associação série



Observando que:

$$\hat{y}(s) = \hat{g}_1(s)(\hat{g}_2(s)\hat{u}(s)) = (\hat{g}_1(s)\hat{g}_2(s))\hat{u}(s) \quad (2.8)$$

Então este diagrama é equivalente a:



Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

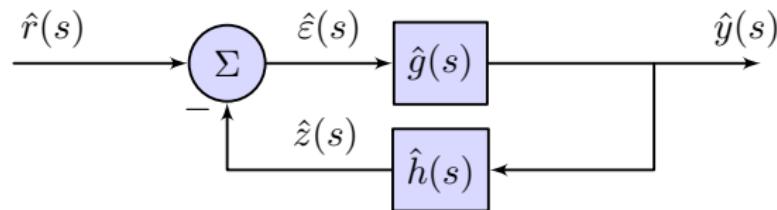
Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Operações com Blocos

II Laço de realimentação (feedback)

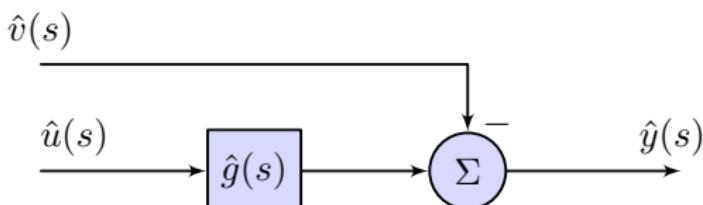


De acordo com (2.4), temos que este DB é equivalente a:

$$\hat{r}(s) \rightarrow \frac{\hat{g}(s)}{1 + \hat{g}(s)\hat{h}(s)} \rightarrow \hat{y}(s)$$

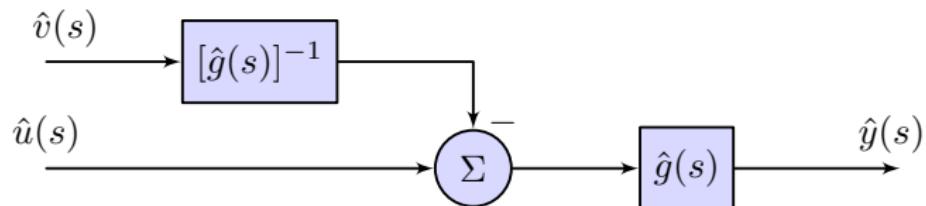
Operações com Blocos

III Deslocamento de bloco a jusante de ponto de soma:



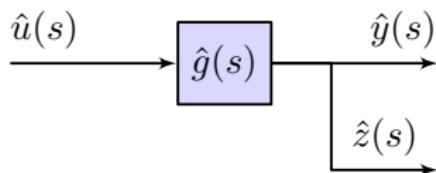
Notando a relação

$$\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s) - \hat{v}(s) = \hat{g}(s)(\hat{u}(s) - [\hat{g}(s)]^{-1}\hat{v}(s)) \quad (2.9)$$



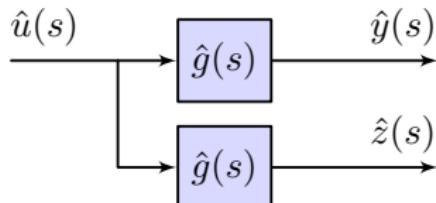
Operações com Blocos

IV Deslocamento de bloco a jusante de ponto de ramificação:



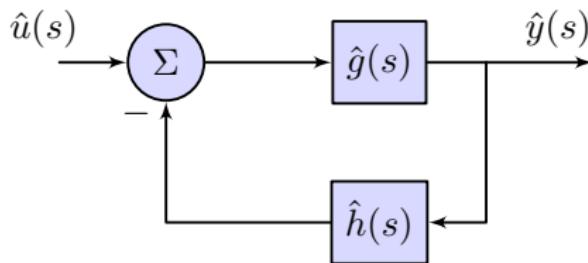
Notando a relação

$$\hat{y}(s) = \hat{z}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s) \quad (2.10)$$

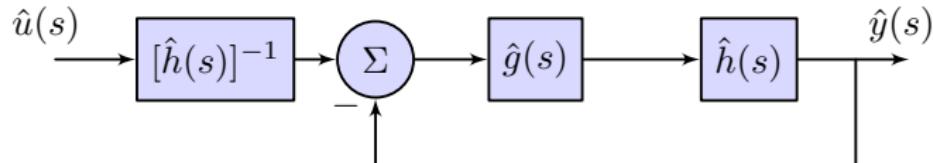


Exemplo I

Transforme o diagrama a seguir em uma realimentação unitária:



Após usar (2.9):



Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

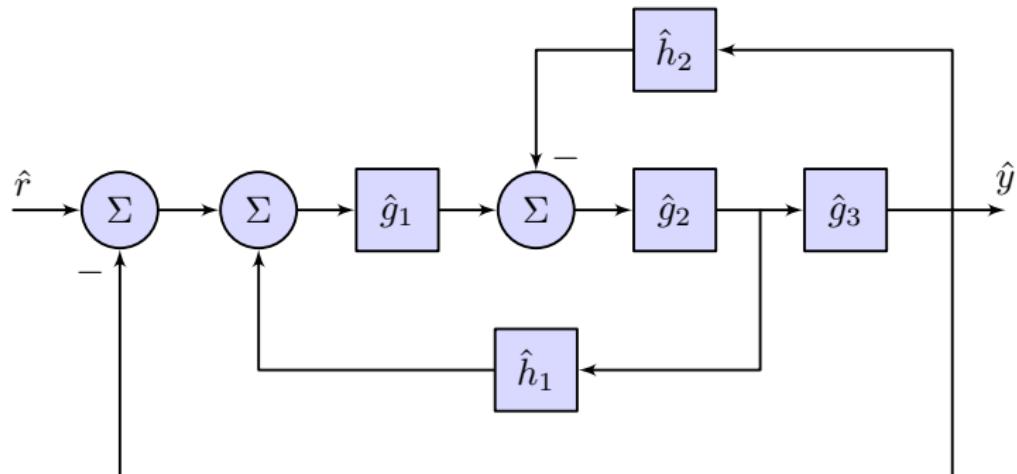
Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

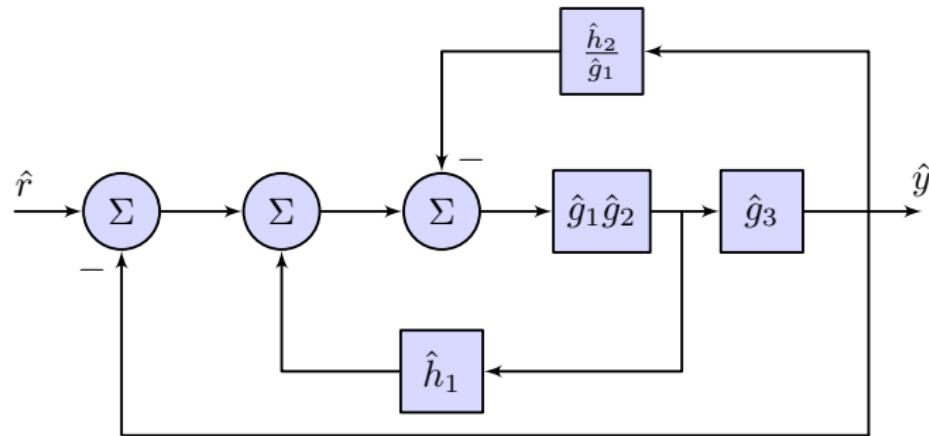
Exemplo II

Obtenha a Função Transferência de Malha Fechada (FTMF).



Exemplo II

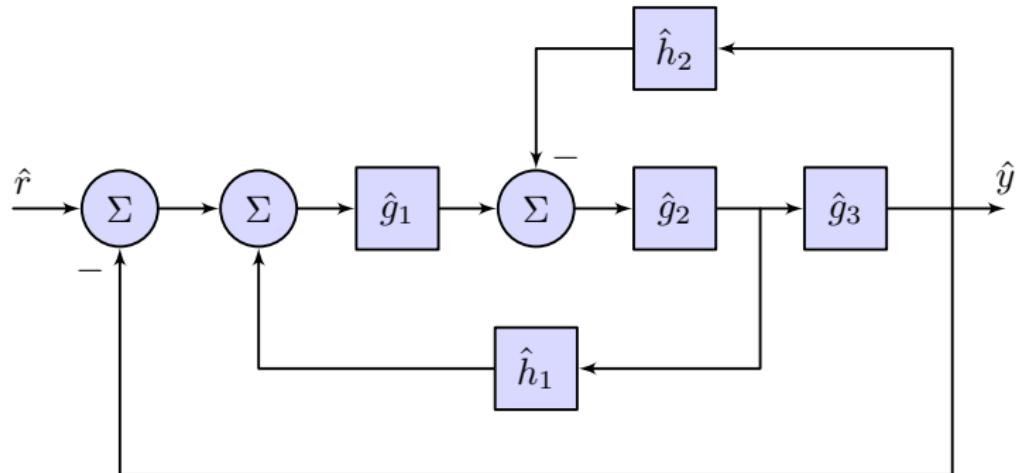
Movendo \hat{g}_1 a jusante do 3º ponto de soma:



Aplicando sucessivamente (2.4):

$$\frac{\hat{y}}{\hat{r}} = \frac{\hat{g}_1\hat{g}_2\hat{g}_3}{1 - [\hat{g}_1\hat{g}_2\hat{h}_1 - \hat{g}_2\hat{g}_3\hat{h}_2 - \hat{g}_1\hat{g}_2\hat{g}_3]}$$

Exemplo II: Constatação Importante!



Observação

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\text{produto dos blocos no caminho direto}}{1 - \sum \text{produto dos blocos em cada laço}} \quad (2.11)$$

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado**
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Regime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Freqüência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em

Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Espaço de Estado: Introdução

Controle Moderno: É o estudo de sistemas no espaço de estado (domínio do tempo). Alguns termos:

- ▶ Estado: É o menor conjunto de variáveis cujo conhecimento em t_o , juntamente com o da entrada em $t \geq t_o$, determina completamente o comportamento do sistema para $t \geq t_o$;
- ▶ Variáveis de estado: Cada uma das variáveis que compõem o estado;
- ▶ Espaço de estado: O espaço \mathbb{R}^n , cujos eixos representam cada uma das variáveis de estado;
- ▶ Equações do espaço de estado: São equações que relacionam as entradas, u , as saídas, y , e as variáveis de estado, x , com as derivadas destas, \dot{x} .

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Espaço de Estado: Introdução

Em forma **matricial**, representa-se um SLIT-C no espaço de estado como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (2.12b)$$

onde:

- ▶ $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$
- ▶ $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz de estado)
- ▶ $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (matriz de entrada)
- ▶ $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ (matriz de saída)
- ▶ $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ (matriz de transmissão direta)

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

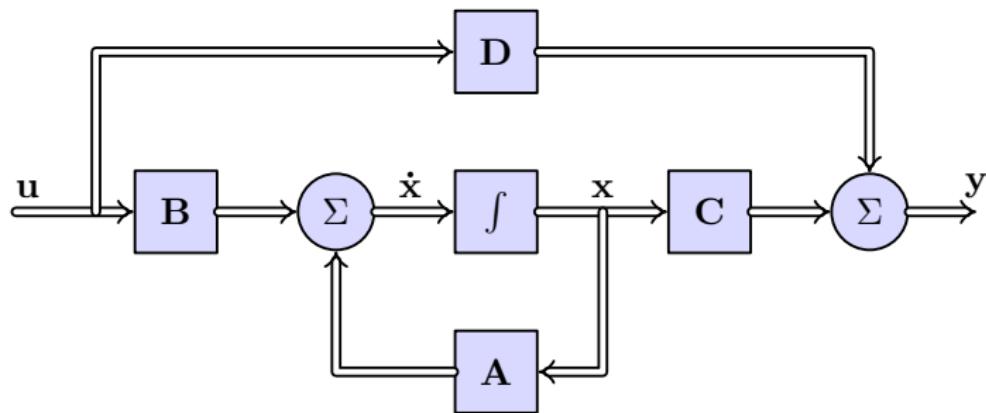
Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Espaço de Estado: Introdução

Em Diagrama de Blocos:



Observação

As matrizes A, B, C, D serão funções do tempo, caso o sistema seja **variante no tempo**.

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

Lugar das Raízes

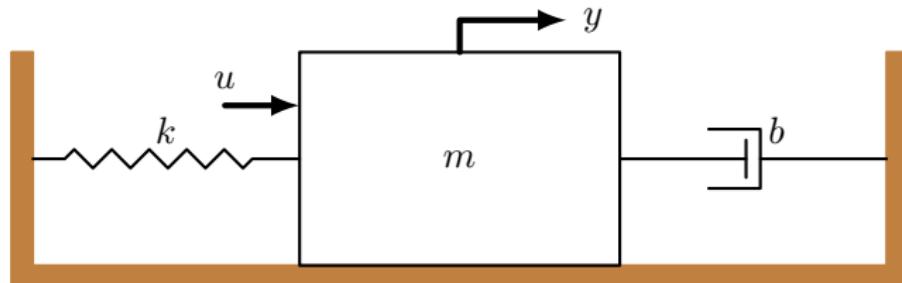
Resp. em

Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Sistema Massa-Mola-Amortecedor



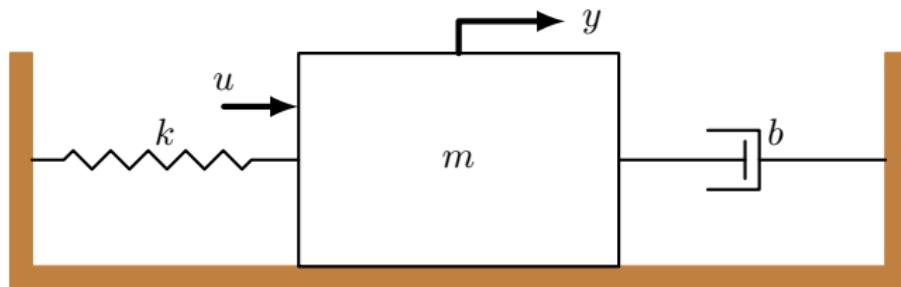
Força da mola sobre o bloco (lei de Hooke):

$$F_{\text{mola}} = -ky$$

Força do amortecedor sobre o bloco (atrito viscoso):

$$F_{\text{amort}} = -b\dot{y}$$

Exemplo: Sistema Massa-Mola-Amortecedor



Pela lei de Newton:

$$u + F_{\text{mola}} + F_{\text{amort}} = m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u$$

Escolhendo as variáveis de estado $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$:

$$\dot{x}_1 = 0x_1 + 1x_2 + 0u$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

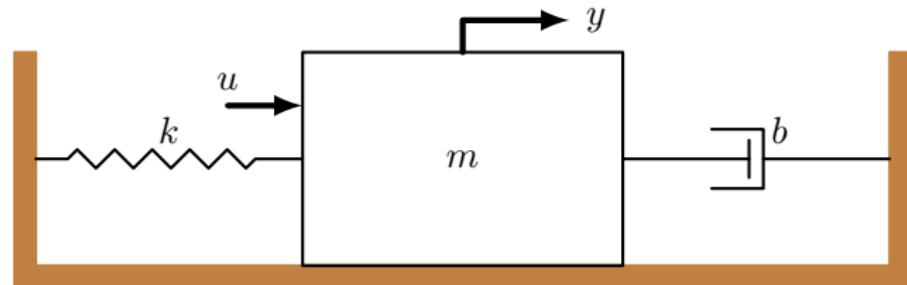
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Sistema Massa-Mola-Amortecedor



Portanto:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Funções Transferência e Espaço de Estado

Considere um SLIT-C-SISO ($m = p = 1$) descrito por (2.12):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ y &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}$$

Aplicando a TL sob CIs nulas:

$$\begin{aligned}s\hat{\mathbf{x}}(s) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B}\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{D}\hat{u}(s)\end{aligned}$$

Admitindo que $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ seja **invertível**:

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.13)$$

Funções Transferência e Espaço de Estado

Lembrando que:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

Tem-se:

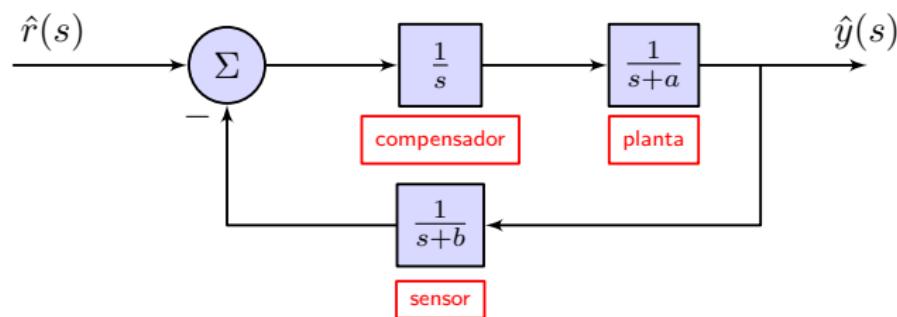
$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} (\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{D}) \quad (2.14)$$

Observação

- i) De acordo com (2.14), os polos da FT são os **autovalores** de \mathbf{A} ;
- ii) Se o sistema for MIMO, então (2.13) resultará em uma Matriz Transferência (MT)!

Exemplo

Obtenhamos uma representação no espaço de estado para o sistema:

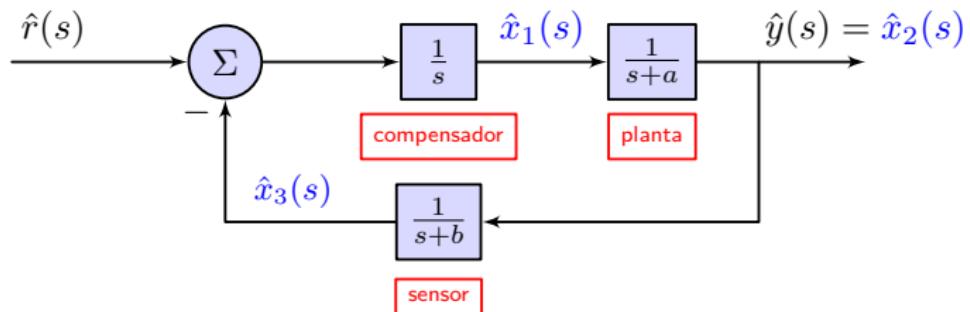


Observação

A solução a ser apresentada **não** é a única! Fica como **exercício** encontrar uma forma de mostrar **todas** as representações possíveis no espaço de estado para o diagrama de blocos apresentado.

Exemplo

Escolhendo as saídas dos blocos como variáveis de estado:



Donde:

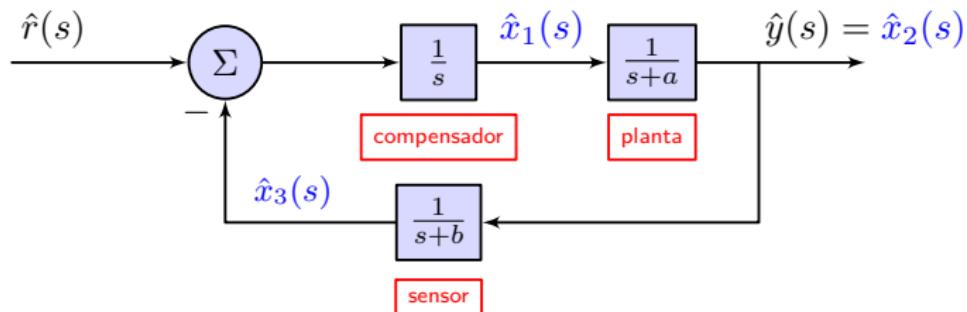
$$\hat{x}_1(s) = \frac{1}{s}[\hat{r}(s) - \hat{x}_3(s)] \quad s\hat{x}_1(s) = -\hat{x}_3(s) + \hat{r}(s)$$

$$\hat{x}_2(s) = \frac{1}{s+a}\hat{x}_1(s) \Rightarrow s\hat{x}_2(s) = \hat{x}_1(s) - a\hat{x}_2(s)$$

$$\hat{x}_3(s) = \frac{1}{s+b}\hat{x}_2(s) \quad s\hat{x}_3(s) = \hat{x}_2(s) - b\hat{x}_3(s)$$

Exemplo

Escolhendo as saídas dos blocos como variáveis de estado:



Aplicando a TIL:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -b \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Representação de SLIT-Cs no Espaço de Estado

Considere um SLIT-C-SISO, como em (1.33):

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \langle i \rangle y = \sum_{j=0}^m \beta_j \langle j \rangle u$$

- ▶ Consideraremos apenas os casos onde $n \geq m$ (**Por quê?**);
- ▶ Dois casos podem ser estudados:
 - ▶ O sistema não envolve derivadas da entrada: $m = 0$;
 - ▶ O sistema envolve derivadas da entrada: $0 < m \leq n$.

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Representação de Sistemas: caso $m = 0$

Com $m = 0$, (1.33) fica:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \langle i \rangle y = \beta_o u$$

Uma escolha conveniente de variáveis de estado é:

$$x_i = \langle i-1 \rangle y = \frac{d}{dt} \langle i-2 \rangle y = \dot{x}_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.15)$$

Aplicando (2.15) a (1.33), com $m = 0$:

$$\dot{x}_n = \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{\alpha_i}{\alpha_n} x_{i+1} + \frac{\beta_o}{\alpha_n} u \quad (2.16)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequênciā

Controle PID

Controle Moderno

Representação de Sistemas: caso $m = 0$

Com (2.15)-(2.16), escreve-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_o}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_n} & \dots & -\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\beta_o}{\alpha_n} \end{bmatrix} u \quad (2.17a)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \mathbf{x} \quad (2.17b)$$

É possível aplicar a TL em (1.33), originando

$$\hat{g}(s) = \frac{\beta_o}{\sum_{i=0}^n \alpha_i s^i} \quad (2.18)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

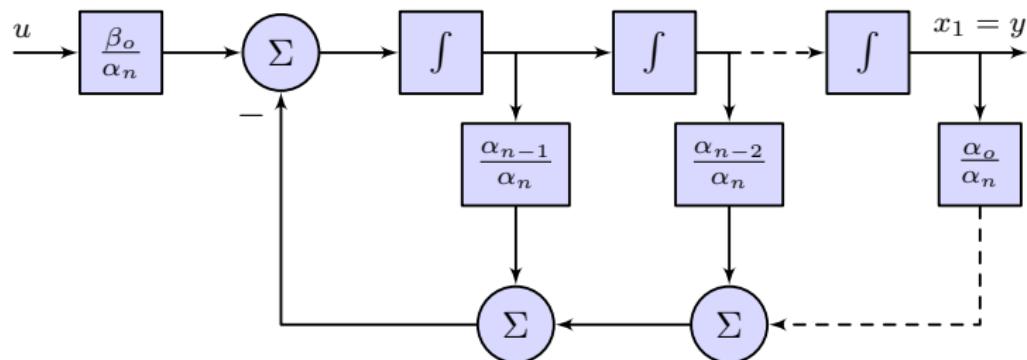
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Representação de Sistemas: caso $m = 0$



$$x_i = \langle y^{(i-1)} \rangle = \frac{d}{dt} \langle y^{(i-2)} \rangle = \dot{x}_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\dot{x}_n = \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{\alpha_i}{\alpha_n} x_{i+1} + \frac{\beta_o}{\alpha_n} u$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Representação de Sistemas: caso $0 < m \leq n$

É possível que (1.33) esteja completa ($m = n$).

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \overset{\langle i \rangle}{y} = \sum_{j=0}^n \beta_j \overset{\langle j \rangle}{u}$$

- ▶ Se não estiver completa, faça alguns (mas, não todos!) $\beta_j = 0$;
- ▶ Não é possível proceder com (2.15) (solução inconsistente, não-única).

Uma abordagem é definir

$$\dot{x}_1 = -\alpha_0 y + \beta_0 u \quad (2.19)$$

Substituindo e integrando em (1.33):

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} \overset{\langle i \rangle}{y} - \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j+1} \overset{\langle j \rangle}{u} = x_1$$

Representação de Sistemas: caso $0 < m \leq n$

A partir de x_2 , faz-se (analogamente)

$$\dot{x}_2 = x_1 - \alpha_1 y + \beta_1 u \quad (2.20)$$

Novamente, substituindo no resultado anterior

$$\sum_{i=0}^{n-2} \alpha_{i+2} \overset{\langle i \rangle}{y} - \sum_{j=0}^{n-2} \beta_{j+2} \overset{\langle j \rangle}{u} = x_2$$

Continuando e obtendo \dot{x}_n :

$$\dot{x}_n = x_{n-1} - \alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u \quad (2.21)$$

Tem-se

$$\alpha_n y - \beta_n u = x_n \quad (2.22)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Representação de Sistemas: caso $0 < m \leq n$

Com (2.19)-(2.22), escreve-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_o}{\alpha_n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_2}{\alpha_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_o - \alpha_o \frac{\beta_n}{\alpha_n} \\ \beta_1 - \alpha_1 \frac{\beta_n}{\alpha_n} \\ \beta_2 - \alpha_2 \frac{\beta_n}{\alpha_n} \\ \vdots \\ \beta_{n-2} - \alpha_{n-2} \frac{\beta_n}{\alpha_n} \\ \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \frac{\beta_n}{\alpha_n} \end{bmatrix} u \quad (2.23a)$$

$$y = \left[0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \frac{1}{\alpha_n} \right] \mathbf{x} + \left[\frac{\beta_n}{\alpha_n} \right] u \quad (2.23b)$$

Observação

*Em SLIT-C-SISOs, haverá **transmissão direta** se, e somente se, $n = m$!*

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Representação de Sistemas: caso $0 < m \leq n$

É possível aplicar a TL em (1.33), originando

$$\hat{g}(s) = \frac{\sum_{j=0}^n \beta_j s^j}{\sum_{i=0}^n \alpha_i s^i} \quad (2.24)$$

Exercício

Desenhe o diagrama de blocos para o caso $0 < m \leq n$.

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos**
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Regime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Freqüência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas Mecânicos: Forças e Posições

Em Sistemas Mecânicos, em geral, relaciona-se **forças** e **posições**;

Observação

Para evitar erro na modelagem de Sistemas Mecânicos, pergunte-se:

“Em quem a força é aplicada?”

Devemos modelar os três elementos principais dos sistemas mecânicos:

- ▶ Massa;
- ▶ Mola linear;
- ▶ Amortecedor viscoso.

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

Lugar das Raízes

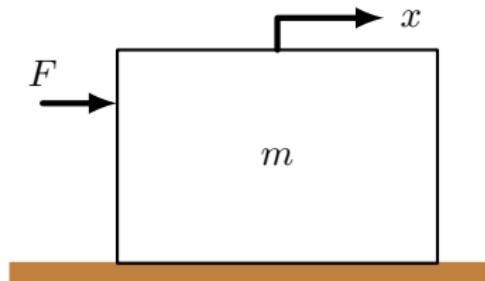
Resp. em

Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas Mecânicos: Massa



A relação força/posição é dada pela 2^a lei de Newton:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m\dot{v} = m\ddot{x} \quad (2.25)$$

Ainda, a massa retém energia cinética, segundo a relação:

$$E_c = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 \quad (2.26)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

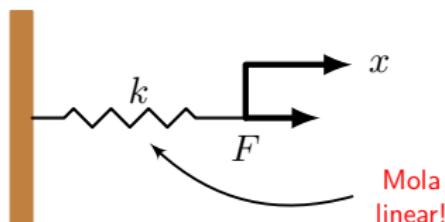
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas Mecânicos: Mola Linear



A relação força/posição é dada pela lei de Hooke:

$$F = kx \quad (2.27)$$

Ainda, a mola retém energia potencial elástica, segundo a relação:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.28)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

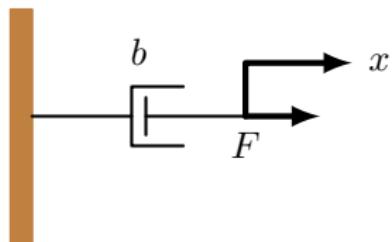
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas Mecânicos: Amortecedor



- ▶ O amortecedor **linear** é constituído por um êmbolo envolto por óleo: atrito viscoso!
- ▶ A relação força/posição é dada por

$$F = b\dot{x} \quad (2.29)$$

Observação

O amortecedor, ao contrário dos elementos anteriores, dissipava energia!

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

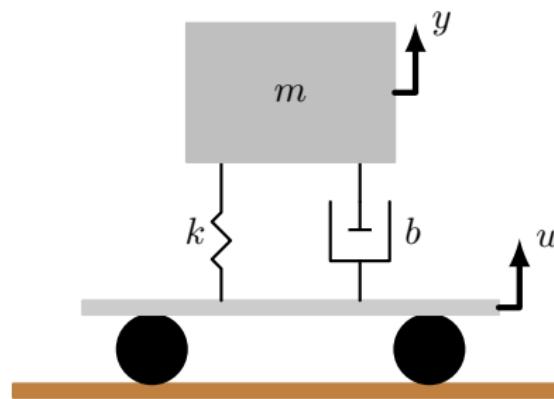
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Suspensão Automotiva



Forças sobre o bloco

$$F_{\text{mola}} = k(u - y)$$

$$F_{\text{amort}} = b(\dot{u} - \dot{y})$$

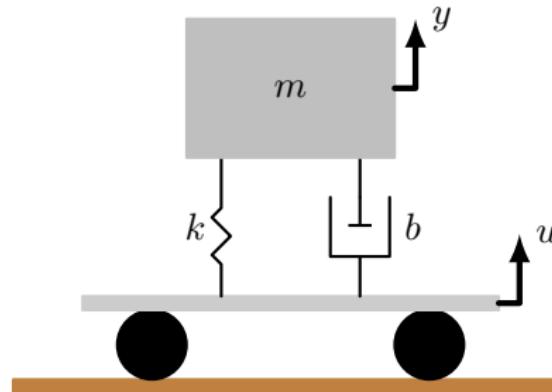
Com a 2^a lei de Newton:

$$k(u - y) + b(\dot{u} - \dot{y}) = m\ddot{y}$$

Logo:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

Exemplo: Suspensão Automotiva



Ao aplicar a TL:

$$\hat{g}(s) = \frac{\frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

No espaço de estado:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k}{m} \\ 1 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{k}{m} \\ \frac{b}{m} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Molas e Amortecedores Torcionais

- ▶ Na rotação, tem-se molas com relação entre torque e ângulo de deformação:

$$T = k\theta \quad (2.30)$$

- ▶ Temos amortecedores com relação entre torque e velocidade angular;

$$T = b\dot{\theta} \quad (2.31)$$

- ▶ **Cuidado!** Verifique as unidades de k em (2.27) e (2.30) e de b em (2.29) e (2.31).

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

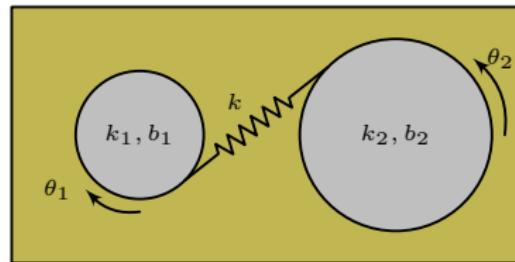
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Pêndulo Torcional



Para cada cilindro, tem-se:

$$J_i \ddot{\theta}_i = -T_m - b_i \dot{\theta}_i - k_i \theta_i, \quad i = 1, 2$$

O torque devido à mola k é dado por:

$$T_m = r_i F_m = r_i k(r_i \theta_i - r_j \theta_j), \quad j = 2, 1$$

Combinando os resultados anteriores:

$$J_i \ddot{\theta}_i + b_i \dot{\theta}_i + (k_i + kr_i^2) \theta_i - r_i r_j k \theta_j = 0$$

Exemplo: Pêndulo Invertido

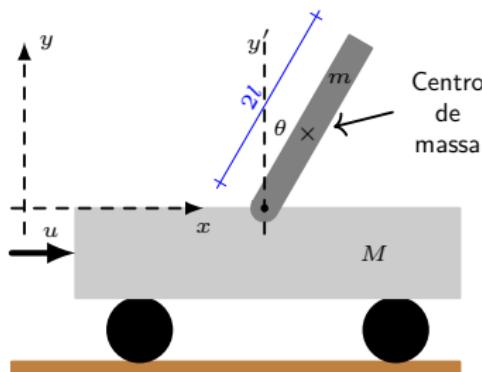
Centro de massa:

$$x_g = x + l \sin \theta$$

$$y_g = l \cos \theta$$

Rotação de (x_g, y_g) em relação à polia:

$$J\ddot{\theta} = F_y l \sin \theta - F_x l \cos \theta$$



As forças na haste e no carro são:

$$F_x = m\ddot{x}_g = m\ddot{x} + ml \frac{d^2(\sin \theta)}{dt^2}$$

$$F_y - mg = m\ddot{y}_g = ml \frac{d^2(\cos \theta)}{dt^2}$$

$$M\ddot{x} = u - F_x$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

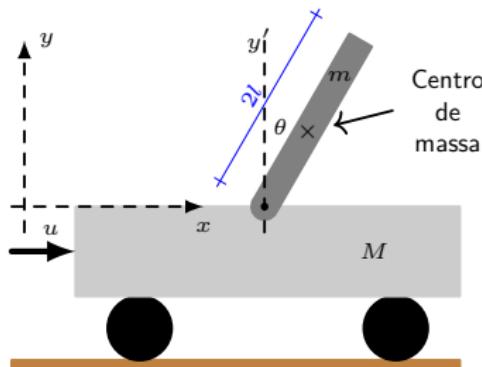
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Pêndulo Invertido



Para $\theta \approx 0$:

$$J\ddot{\theta} = F_y l\theta - F_x l$$

$$F_x = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}$$

$$F_y = mg$$

$$M\ddot{x} = u - F_x$$

Donde se obtém:

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$

$$(J+ml^2)\ddot{\theta} - mgl\theta + ml\ddot{x} = 0$$

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos**
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Regime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas Elétricos: Correntes e Tensões

Em Sistemas Elétricos, em geral, relaciona-se **correntes** e **tensões**;

Observação

*Para evitar erro de modelagem em Sistemas Elétricos, use as **leis de Kirchhoff!***

São três os elementos principais dos Sistemas Elétricos:

- ▶ Resistor;
- ▶ Indutor;
- ▶ Capacitor.

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

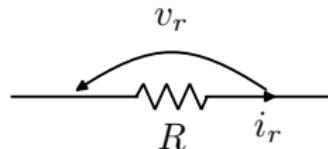
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas Elétricos: Resistor



A relação tensão/corrente é dada pela lei de Ohm

$$v_r(t) = R i_r(t) \quad (2.32)$$

O resistor dissipa uma energia dada por

$$E_r = \int_{t_o}^{t_f} v_r(t) i_r(t) \, dt \quad (2.33)$$

Observação

Teve alguma ideia para calcular a energia no amortecedor?

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

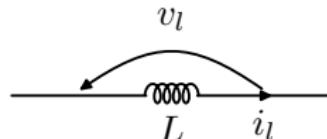
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas Elétricos: Indutor



A relação tensão/corrente é dada por

$$v_l(t) = L \frac{d i_l(t)}{d t} \quad (2.34)$$

O indutor armazena energia em seu campo magnético, dada por

$$E_l = \frac{1}{2} L i_l^2 \quad (2.35)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

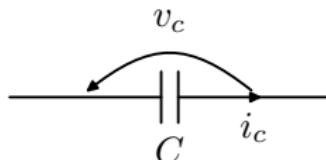
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas Elétricos: Capacitor



A relação tensão/corrente é dada por

$$i_c(t) = C \frac{d v_c(t)}{dt} \quad (2.36)$$

O capacitor armazena energia em seu campo elétrico, dada por

$$E_c = \frac{1}{2} C v_c^2 \quad (2.37)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

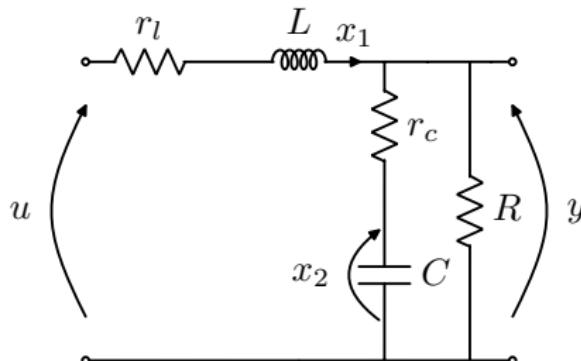
Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Um Circuito Elétrico

No ramo do indutor:

$$u - y - r_l x_1 = L \dot{x}_1$$



No ramo do capacitor:

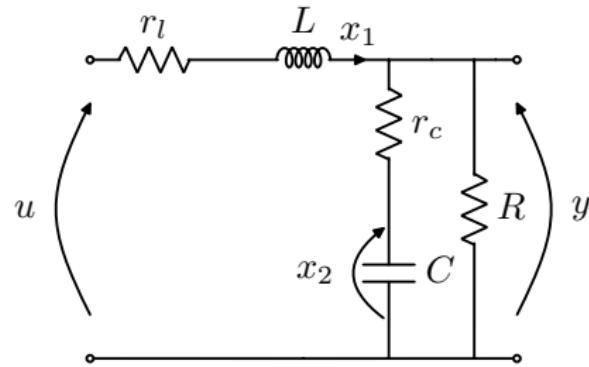
$$\frac{y - x_2}{r_c} = C \dot{x}_2$$

Com a LNK:

$$y = R \left(x_1 - \frac{y - x_2}{r_c} \right)$$

Neste caso, obter a equação de saída primeiro facilita a modelagem.

Exemplo: Um Circuito Elétrico

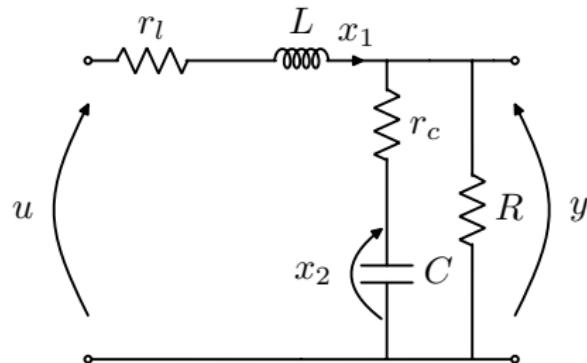


Isolando y na terceira equação e substituindo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{r_c R + r_c r_l + r_l R}{L(R+r_c)} & \frac{-R}{L(R+r_c)} \\ \frac{R}{(R+r_c)C} & -\frac{1}{(R+r_c)C} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{R r_c}{R+r_c} & \frac{R}{R+r_c} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Exemplo: Um Circuito Elétrico



Usando (2.13), podemos obter a FT

$$\hat{g}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Observação

Para matrizes 2×2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Modelagem de Circuitos Elétricos

- ▶ Procedimento prático para circuitos elétricos:
 - i) Escolha como variáveis de estado: tensões de capacitores e correntes de indutores;
 - ii) Escolha as correntes de malha e expresse-as como funções das variáveis de estado e suas derivadas;
 - iii) Escreva as equações de tensão de malha e elimine as variáveis que não sejam de estado.
- ▶ Outro procedimento prático para circuitos elétricos:
 - i) Escolha como variáveis de estado: tensões de capacitores e correntes de indutores;
 - ii) Substitua cada capacitor (indutor) por uma fonte de tensão (corrente);
 - iii) Obtenha a corrente (tensão) em cada capacitor (indutor) e iguale a $C\dot{v}_c$ ($L\dot{i}_l$).

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

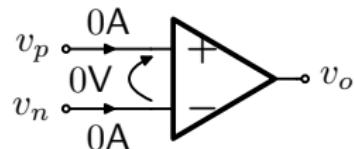
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

O Amplificador Operacional



É o principal elemento para circuitos eletrônicos!

Observação

Lembre-se, para não errar na modelagem com Ampops:

- i *Impedância de entrada infinita;*
- ii *Impedância de saída nula;*
- iii *Ganho infinito em malha aberta (no que isto implica?).*

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

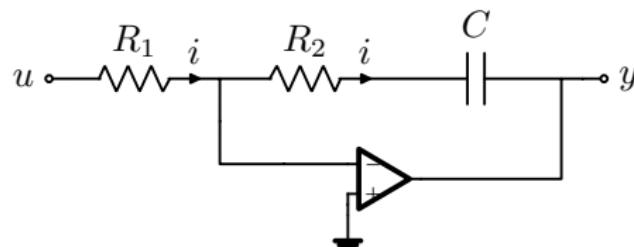
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Compensador Proporcional mais Integral



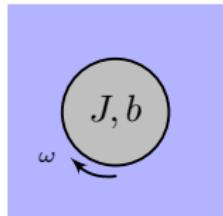
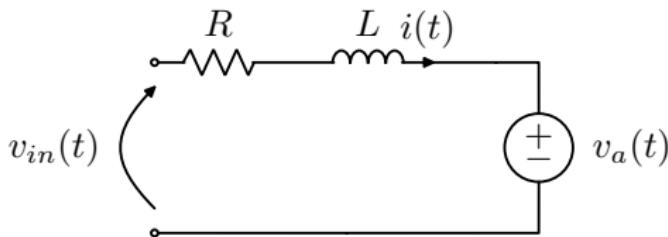
Note que:

$$i = \frac{1}{R_1}u = C \frac{d}{dt}[-R_2 i - y]$$

Assim:

$$\dot{y} = -\frac{R_2}{R_1} \dot{u} - \frac{1}{R_1 C} u$$

O Motor de Corrente Contínua



- ▶ A tensão aplicada nos terminais de entrada produz um torque proporcional à corrente de armadura;
- ▶ A tensão de armadura é proporcional à velocidade angular do eixo do motor;
- ▶ Em ambos os casos, a proporcionalidade é dada pela **constante de armadura**;
- ▶ Não há coeficiente elástico torcional e não é possível controlar a posição;
- ▶ Como projetar um controle que mantenha a velocidade do motor, mesmo com parâmetros imprecisos?

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

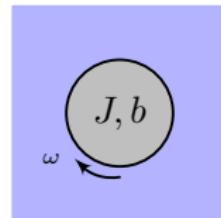
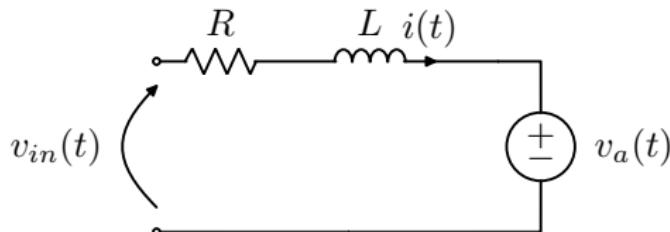
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

O Motor de Corrente Contínua



Para o circuito elétrico:

$$v_{in}(t) - Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt} - \underbrace{K\omega(t)}_{v_a(t)} = 0$$

Para a parte mecânica:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + b\omega(t) = \underbrace{Ki(t)}_{T(t)}$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

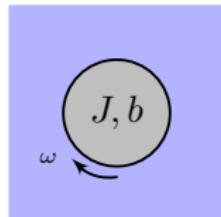
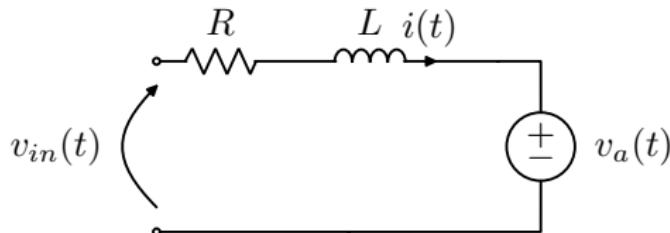
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

O Motor de Corrente Contínua



Fazendo $x_1 = i$, $x_2 = \omega$ e $u = v_{in}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K}{L} \\ \frac{K}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

Note que, para regime permanente, $\dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{0}$. Logo:

$$y = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K}{L} \\ \frac{K}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura**

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Freqüência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequênciā

Controle PID

Controle Moderno

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.

Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas de Controle de Nível

- O **escoamento** de fluidos depende do número de Reynolds

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (2.39)$$

- ρ é a massa específica do fluido (em kg m^{-3});
- v é a velocidade de escoamento;
- D é o diâmetro da tubulação, e;
- μ é a viscosidade dinâmica (em $\text{Pa} \cdot \text{s}$).
- $\mathcal{R} \leq 2000$: escoamento **laminar**, e;
- $\mathcal{R} > 2000$: escoamento turbulentoso (não linear).

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

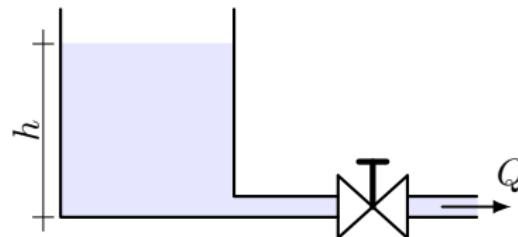
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas de Controle de Nível: Resistências



A resistência da válvula é dada por:

$$R = \frac{d h}{d Q} \quad (2.40)$$

Escoamento Laminar:

$$Q = K h \quad (2.41)$$

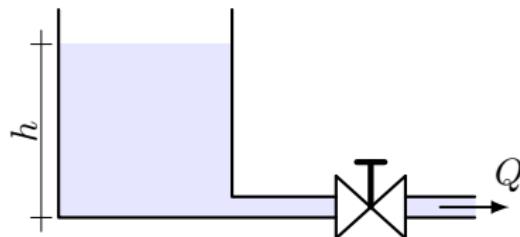
$$R = K^{-1} \quad (2.42)$$

Escoamento Turbulento:

$$Q = K \sqrt{h} \quad (2.43)$$

$$R = \frac{2}{K} \sqrt{h} \quad (2.44)$$

Sistemas de Controle de Nível: Capacitâncias



A capacidade do tanque é dada por:

$$C = \frac{dV}{dh} \quad (2.45)$$

Para secção transversal constante, $V = Ah$, logo

$$C = A \quad (2.46)$$

Observação

Para modelar sistemas de nível, use a **equação da vazão**:

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} \stackrel{(2.45)}{=} Ch \quad (2.47)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Suprimento de Fluido a um Tanque

Com (2.41)

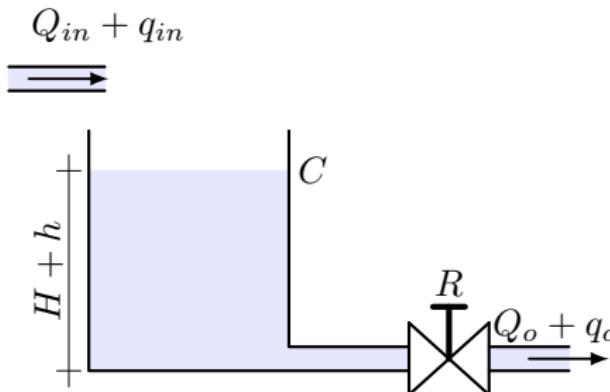
$$q_o = \frac{1}{R}h$$

Usando (2.47)

$$Ch = \dot{V} = q_i - q_o$$

Combinando

$$RC\dot{h} + h = Rq_i$$



Logo:

$$\frac{\hat{h}(s)}{\hat{q}_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

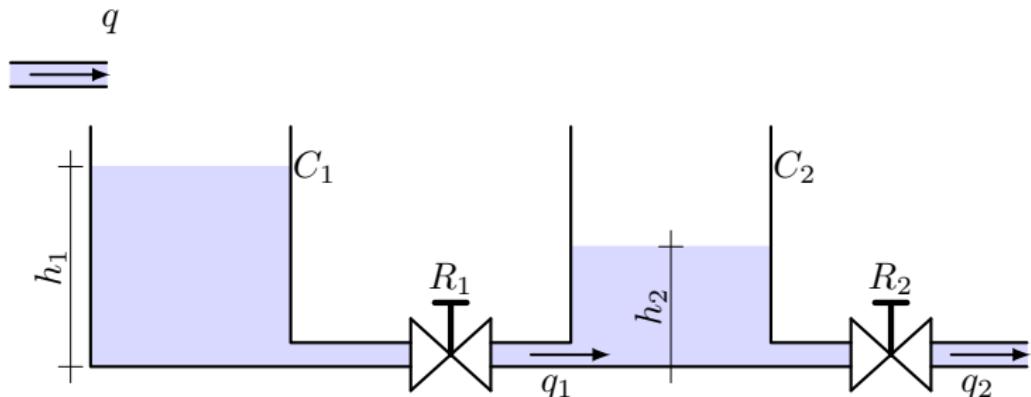
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

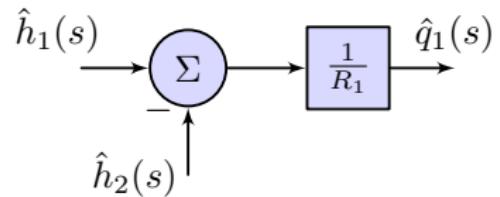
Controle Moderno

Exemplo: Tanques Comunicantes



Para o registro 1, de (2.41):

$$h_1 - h_2 = R_1 q_1$$



Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

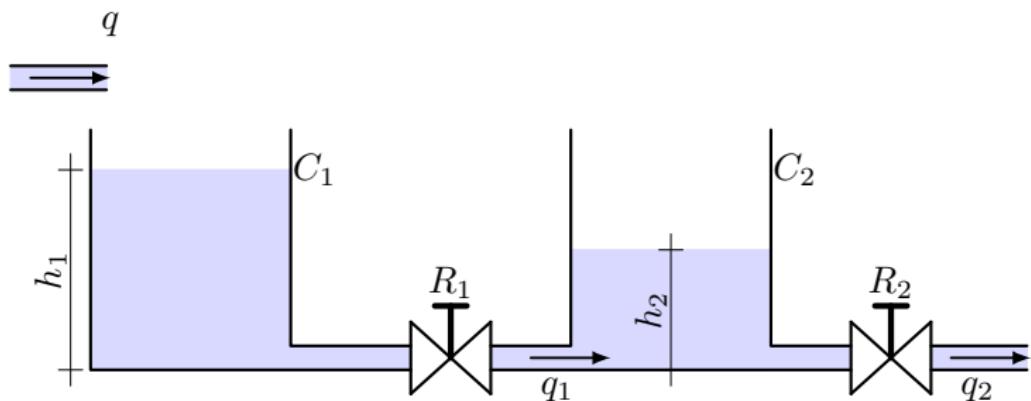
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Tanques Comunicantes



Para o registro 2, de (2.41):

$$h_2 = R_2 q_2$$

$$\hat{h}_2(s) \rightarrow \boxed{\frac{1}{R_2}} \rightarrow \hat{q}_2(s)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

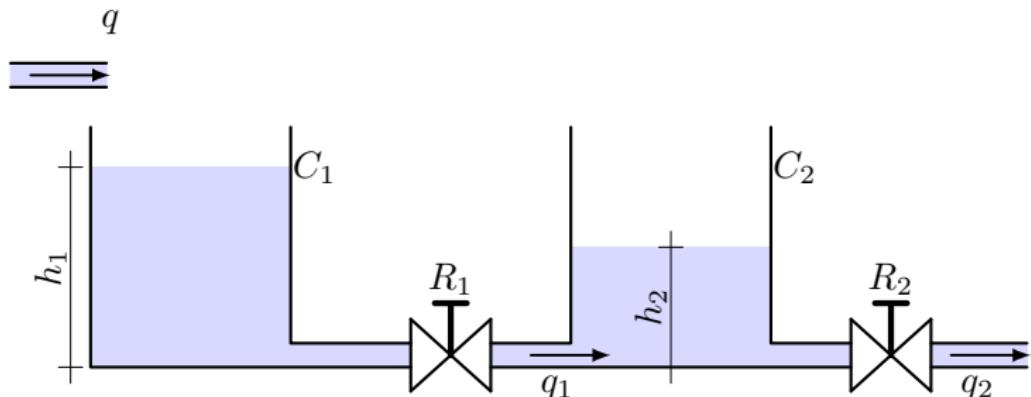
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

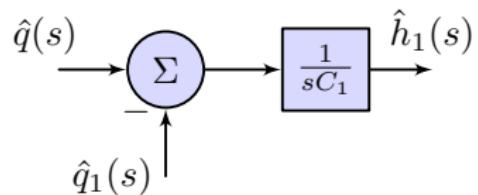
Controle Moderno

Exemplo: Tanques Comunicantes



Para o tanque 1, de (2.47):

$$C_1 \dot{h}_1 = q - q_1$$



Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

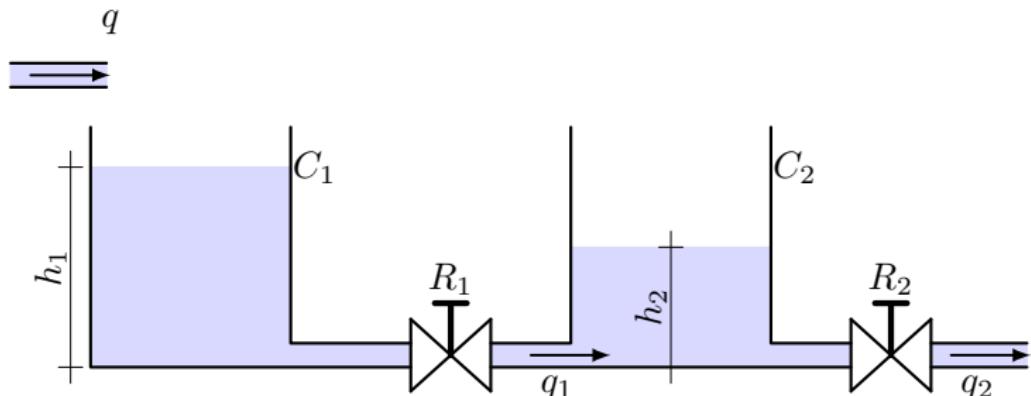
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

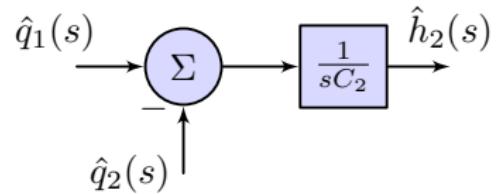
Controle Moderno

Exemplo: Tanques Comunicantes



Para o tanque 2, de (2.47):

$$C_2 \dot{h}_2 = q_1 - q_2$$



Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

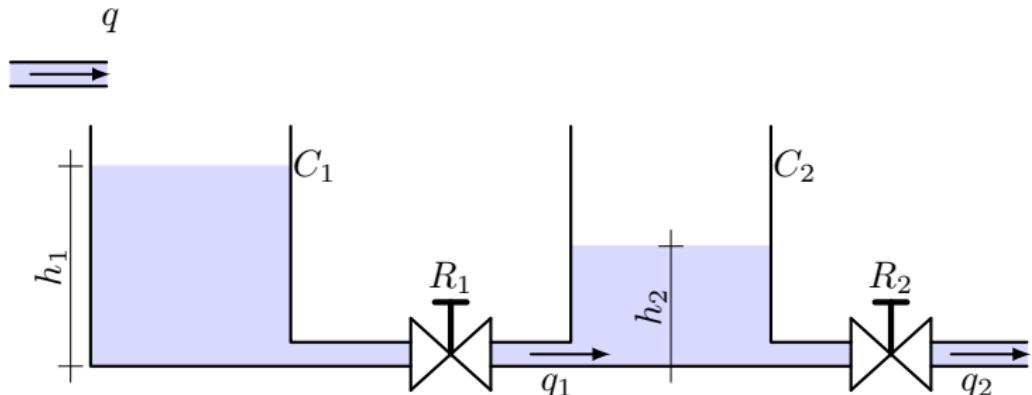
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

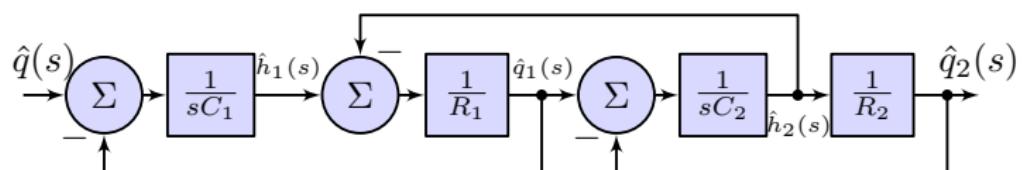
Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Tanques Comunicantes



Unindo os diagramas de blocos de forma conveniente



Sistemas Térmicos

- ▶ Sistemas térmicos: transferência de calor;
- ▶ A rigor são **sistemas distribuídos ($n = \infty$)**;
- ▶ A transferência de calor se dá por:
 - ▶ Condução;
 - ▶ Convecção (envolve transferência de massa);
 - ▶ Radiação (altas temperaturas).
- ▶ O modelo similar ao de Sistemas de Nível.
 - ▶ Nível (h) \leftrightarrow Temperatura (θ);
 - ▶ Vazão (q) \leftrightarrow Fluxo de Calor (h);

Observação

Para modelar Sistemas Térmicos:

$$\theta = Rh \quad (2.48)$$

$$h = C\dot{\theta} \quad (2.49)$$

Exemplo: Aquecedor de Fluido

Relação entre o tanque e a saída:

$$\theta \stackrel{(2.48)}{=} Rh_o \xrightarrow{\text{TL}} \hat{\theta}(s) = R\hat{h}_o(s)$$

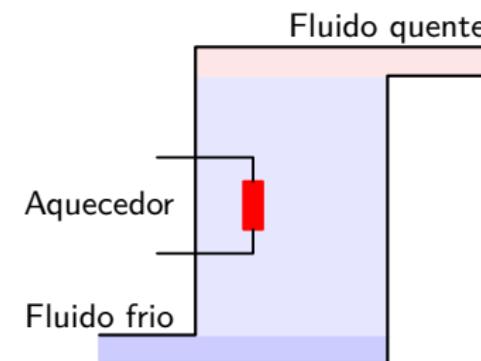
Para o armazenamento de calor:

$$\dot{\theta} \stackrel{(2.49)}{=} \frac{h_i - h_o}{C}$$

$$\hat{\theta}(s) = \frac{\hat{h}_i(s) - \hat{h}_o(s)}{sC}$$

Fazendo h_i a entrada e θ , a saída:

$$\frac{\hat{\theta}(s)}{\hat{h}_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

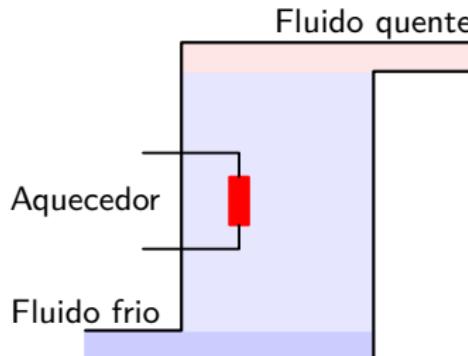


h_i : calor de entrada (do aquecedor)

h_o : calor de saída

θ : temperatura do tanque

Exemplo: Aquecedor de Fluido (Modelo MIMO)



Usando a linearidade
($h_i = 0$):

$$C\dot{\theta} = h_{\text{total}} = \frac{1}{R}(\theta_i - \theta)$$

Aplicando TL:

$$\frac{\hat{\theta}(s)}{\hat{\theta}_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

h_i : calor de entrada

h_o : calor de saída

θ : temperatura do tanque

θ_i : temperatura do fluido frio

θ_i é uma **perturbação**. Assim:

$$\hat{\theta}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{RCs + 1} & \frac{R}{RCs + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_i(s) \\ \hat{h}_i(s) \end{bmatrix}$$

Linearização de Modelos

Elementos podem apresentar comportamento não-linear, da forma:

$$y(t) = f(u(t)) \quad (2.50)$$

Com a **série de Taylor** em torno de um ponto de operação, $(\tilde{u}, \tilde{y} = f(\tilde{u}))$.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(\tilde{u})}{du^n} (u - \tilde{u})^n \quad (2.51)$$

Truncando no segundo termo:

$$y \approx f(\tilde{u}) + \frac{df(\tilde{u})}{du} (u - \tilde{u})$$

Donde:

$$\underbrace{y - \tilde{f}(\tilde{u})}_{\bar{y}} \approx \underbrace{\frac{df(\tilde{u})}{du}}_k \underbrace{(u - \tilde{u})}_{\bar{u}} \quad (2.52)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

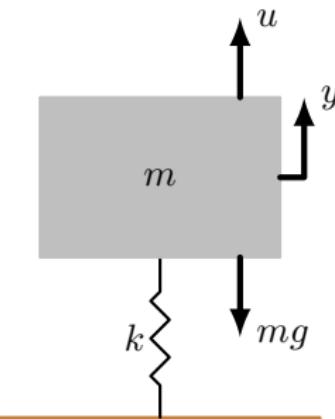
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Sistema Massa-Mola Não Linear



Mola não linear:

$$F_{\text{mola}} = ky^2$$

Note que:

$$y = \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{F} \Rightarrow \frac{dy}{dF} = \frac{1}{2\sqrt{kF}}$$

Aplicando (2.52) em
 $\left(mg, \sqrt{\frac{mg}{k}}\right)$:

$$y - \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx \frac{1}{2\sqrt{mgk}}(u - mg)$$

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas MIMO Não Lineares

Considere a i -ésima saída de um elemento não linear, da forma

$$y_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_m) \quad (2.53)$$

Tome um ponto de operação $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_m, \tilde{y}_i)$ e, similarmente a (2.52):

$$\begin{aligned} y_i - \tilde{y}_i \approx & \frac{\partial f_i(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_m)}{\partial u_1}(u_1 - \tilde{u}_1) + \\ & + \frac{\partial f_i(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_m)}{\partial u_2}(u_2 - \tilde{u}_2) + \\ & + \dots + \frac{\partial f_i(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_m)}{\partial u_m}(u_m - \tilde{u}_m) \quad (2.54) \end{aligned}$$

Sistemas MIMO Não Lineares

Aplicando a cada saída, tem-se:

$$\begin{bmatrix} y_1 - \tilde{y}_1 \\ y_2 - \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ y_n - \tilde{y}_n \end{bmatrix} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}} \begin{bmatrix} u_1 - \tilde{u}_1 \\ u_2 - \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ u_m - \tilde{u}_m \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Observação

- ▶ As derivadas parciais em (2.55) são calculadas em $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_m)$;
- ▶ A matriz de derivadas parciais, \mathcal{J} , é chamada **jacobiana**.

Introdução

Modelagem

Aula 03

Aula 04

Aula 05

Aula 06

Aula 07

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Pêndulo

Dinâmica não linear:

$$T = -mgl \sin \theta$$

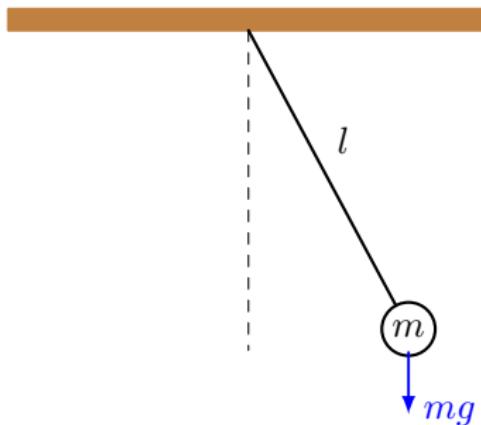
No ponto $(\tilde{\theta}, \tilde{T}) = (0, 0)$:

$$T - \tilde{T} = \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\tilde{\theta}} (\theta - \tilde{\theta})$$

Ou seja:

$$T = -mgl\theta$$

para pequenos ângulos.



Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Regime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

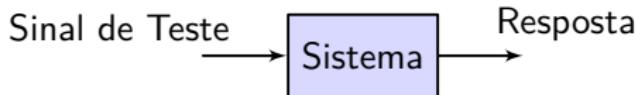
Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Análise da Resposta Transitória: Introdução

- ▶ O projeto de controladores visa atender **parâmetros de desempenho**;
- ▶ Para tanto, usam-se sinais de teste;



- ▶ Sinais de teste mais comuns:
 - ▶ Impulso (delta de Dirac);
 - ▶ Degrau unitário;
 - ▶ Rampa unitária;
 - ▶ Senoide.

Análise da Resposta Transitória: Introdução

- ▶ A resposta no tempo de SLIT-Cs é composta de:
 - ▶ Resposta transitória: para $t < \infty$;
 - ▶ Resposta em regime permanente: para $t \rightarrow \infty$.
- ▶ Entre outros critérios, deve-se verificar:
 - ▶ Estabilidade: Na perturbação, o sistema
 - ▶ Retorna ao ponto de operação?
 - ▶ Apresenta oscilações sustentadas?
 - ▶ Diverge do ponto de operação?
 - ▶ Erro em regime permanente
 - ▶ O sistema segue a referência dada?
 - ▶ Se sim, quanto tempo leva para o fazer (estabilidade relativa)?

Observação

Iremos estudar a resposta transitória de sistemas de 1^a e de 2^a ordens. E isto é suficiente, como será visto mais adiante!

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas de 1^a Ordem

Descrição geral saída/referência de um sistema de controle de 1^a ordem:

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (3.1)$$

Escrevendo sob a forma de realimentação unitária (2.1)

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau s}} \quad (3.2)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

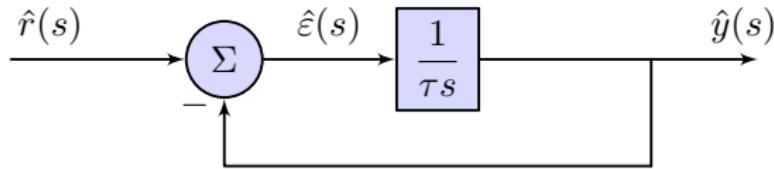
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas de 1^a Ordem: Resposta ao Degrau



Ao fazer $r(t) = \tilde{1}(t)$, chega-se a:

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (3.3)$$

Observação

Verifique que $A = -B = 1$ em (3.3).

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

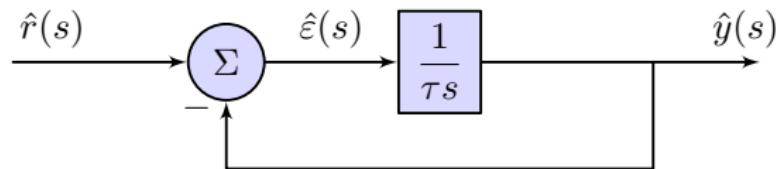
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequênciā

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas de 1^a Ordem: Resposta ao Degrau



Aplicando a TIL a (3.3):

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.4)$$

Com (3.4), escreve-se

$$\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.5)$$

t	$y(t)$	$\varepsilon(t)$
τ	0,63	0,37
2τ	0,86	0,14
3τ	0,95	0,05
4τ	0,98	0,02

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

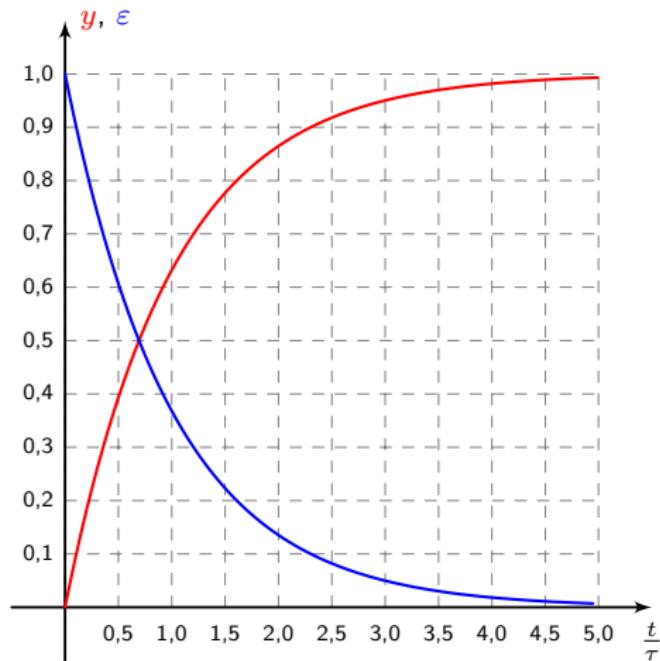
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas de 1^a Ordem: Resposta ao Degrau



Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas de 1^a Ordem: Resposta à Rampa

Retornando a (3.1) e aplicando $r(t) = t, t \geq 0$:

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \frac{1}{s^2} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{\tau s + 1} \quad (3.6)$$

Observação

Verifique que $A = 1$, $B = -\tau$ e $C = \tau^2$.

Aplicando a TIL, obtém-se:

$$y(t) = t - \tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.7)$$

$$\varepsilon(t) = \tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.8)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

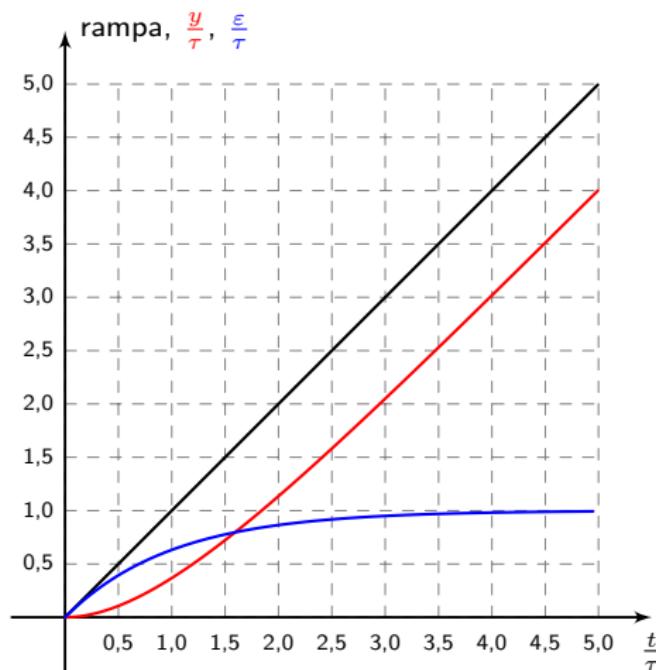
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas de 1^a Ordem: Resposta à Rampa



Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequênciā

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas de 1^a Ordem: Resposta ao Impulso

Retornando a (3.1) e aplicando $r(t) = \delta(t)$:

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (3.9)$$

Aplicando a TIL, obtém-se:

$$y(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.10)$$

Observação

Note que $\varepsilon = -y, \forall t > 0$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

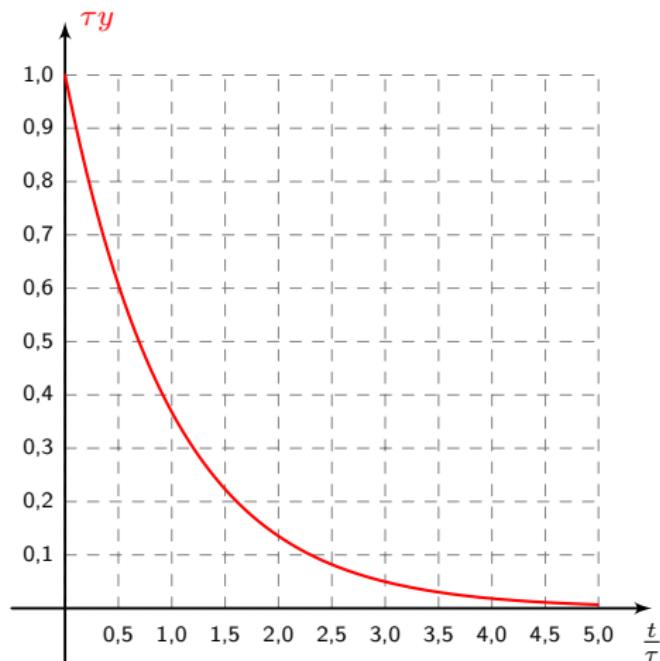
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas de 1^a Ordem: Resposta ao Impulso



Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Um Lema Importante!

Observando (3.4), (3.7) e (3.10), podemos enunciar o seguinte lema:

Lema

Seja u a entrada de um SLIT-C, que produz a resposta forçada y . Então, ao submeter o sistema a \dot{u} em sua entrada, a resposta forçada será \dot{y} .

Demonstração.

Exercício!



Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas de 2^a Ordem

A forma geral de um sistema de 2^a ordem é:

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.11)$$

onde:

$\omega_n \rightarrow$ frequência natural não-amortecida;

$\zeta \rightarrow$ amortecimento.

Um parâmetro importante para estes sistemas é a atenuação, dada por:

$$\sigma = \zeta\omega_n \quad (3.12)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

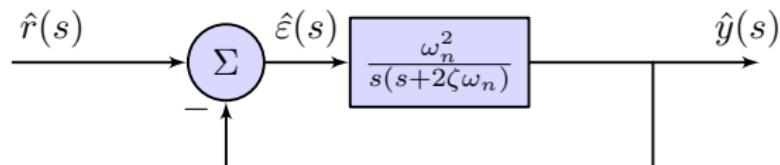
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

DB em Realimentação Unitária



Aplicando a regra da realimentação unitária (2.1) a (3.11):

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\hat{g}(s)}{1 + \hat{g}(s)}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas de 2^a Ordem: Resposta ao Degrau

- ▶ É a principal resposta dos SLIT-Cs;
- ▶ Para projetos, normalmente as plantas são reduzidas a um par de polos;
- ▶ Fazendo $r = \tilde{1}$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] \quad (3.13)$$

Observação

O comportamento de sistemas de 2^a ordem é altamente dependente de ζ !

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Caso Subamortecido ($0 < \zeta < 1$)

Neste caso, escreve-se:

$$\hat{y}(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.14)$$

Defina a **frequência natural amortecida**:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.15)$$

Observação

Mostre que $A = -B = 1$ e que $C = -2\zeta\omega_n$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Caso Subamortecido ($0 < \zeta < 1$)

Aplicando a técnica de **completar quadrados**:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \underbrace{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_d^2}_{\omega_n^2} = (s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2$$

Assim, (3.14) torna-se:

$$\begin{aligned}\hat{y}(s) &= \frac{1}{s} - \left(\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right) \\ &= \frac{1}{s} - \left(\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right)\end{aligned}\tag{3.16}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Caso Subamortecido ($0 < \zeta < 1$)

Aplicando a TIL a (3.16):

$$\begin{aligned} y(t) &= \tilde{1}(t) - e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \\ &= \tilde{1}(t) - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\underbrace{\omega_d t + \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}_{\arccos \zeta} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

E o erro, evidentemente, é:

$$\varepsilon(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin (\omega_d t + \arccos \zeta) \quad (3.18)$$

Observação

(3.17)-(3.18) são as *respostas mais importantes* dos SLIT-C-SISOs!

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Caso Criticamente Amortecido ($\zeta = 1$)

Neste caso, (3.13) toma a forma mais simples:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \right] \quad (3.19)$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{s} + \frac{B_1}{s + \omega_n} + \frac{B_2}{(s + \omega_n)^2} \right] \quad (3.20)$$

Aplicando a TIL a (3.20):

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t) \quad (3.21)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Caso Sobreamortecido ($\zeta > 1$)

As raízes de $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ são reais e distintas:

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3.22)$$

Aplicando a EFP a (3.13):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{C}{s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right] \quad (3.23)$$

Observação

Mostre que $A = 1$,

$$B = \frac{-1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} \text{ e } C = \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}.$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Caso Sobreamortecido ($\zeta > 1$)

Aplicando a TIL:

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) \quad (3.24)$$

Observação

Se $\zeta \gg 1$, o polo em $(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ **domina** o polo em $(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$. Assim:

$$y(t) \approx 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (3.25)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

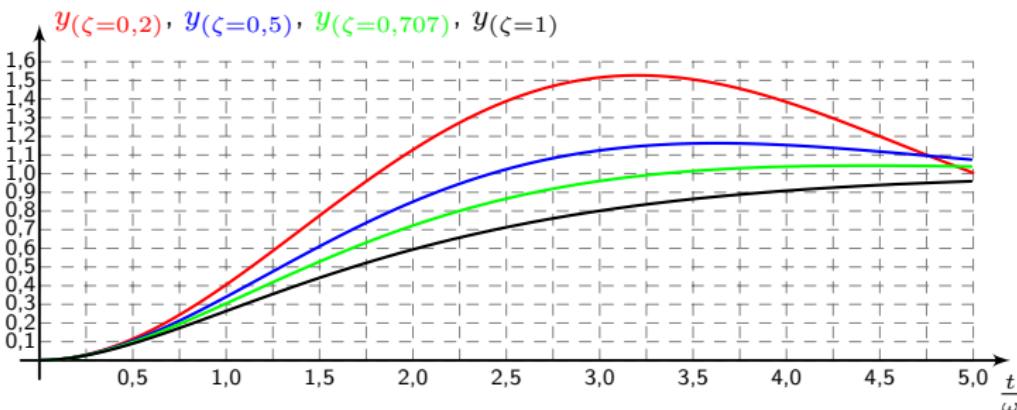
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Efeito do Amortecimento



Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

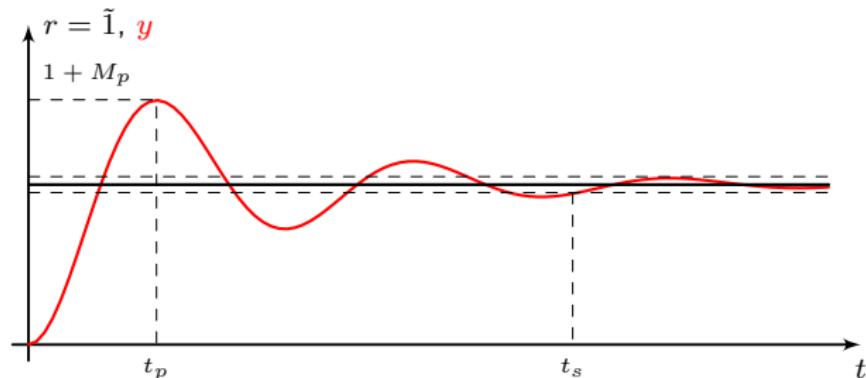
Controle Moderno

Especificações de Resposta Transitória

Parâmetros de especificação de resposta transisória:

- ▶ Tempo de atraso (t_d): É o tempo que a saída leva para atingir 50% do valor desejado pela primeira vez;
- ▶ Tempo de subida (t_r): É o tempo que a saída leva para percorrer de 0 a 100% (5% a 95% ou 10% a 90%) do valor desejado;
- ▶ Tempo de pico (t_p): É o tempo para atingir o valor máximo da saída;
- ▶ Tempo de acomodação (t_s): É o tempo para que o erro fique permanentemente dentro de uma faixa escolhida (geralmente 2% ou 5%);
- ▶ Overshoot (M_p): É o valor que excede o desejado na saída. Pode ser dado em forma percentual.

Especificações de Resposta Transitória



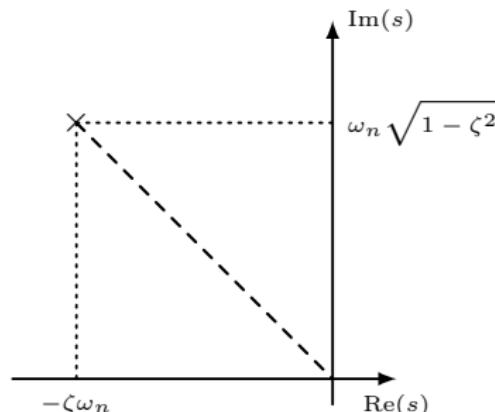
Aplicando (3.17):

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (3.26)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (3.27)$$

$$M_p = e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega_d}} \quad (3.28)$$

$$\sigma t_s = \begin{cases} 3 & (\text{crit. 5\%}) \\ 4 & (\text{crit. 2\%}) \end{cases} \quad (3.29)$$



Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

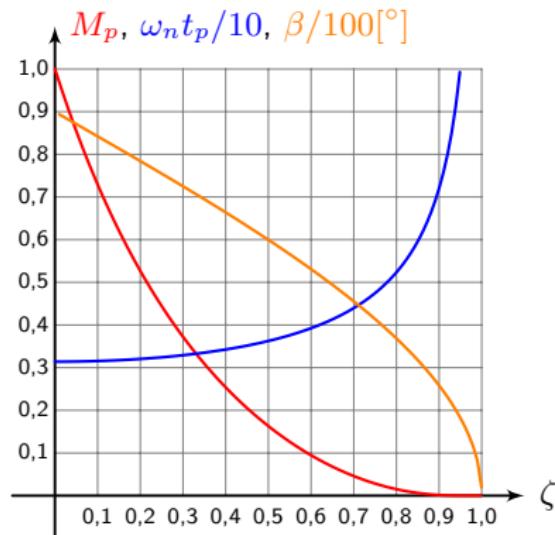
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Observação Importante!



Observação

Muito do projeto depende do amortecimento, ζ . Se for baixo, o sistema responde rapidamente (os tempos envolvidos serão pequenos), mas apresentará overshoot excessivo e vice-versa. Muitos projetos tentam fazer $0.4 < \zeta < 0.8$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Resposta de Segunda Ordem com Zero

Considere uma FT de 2^a ordem subamortecida, com zero, normalizada:

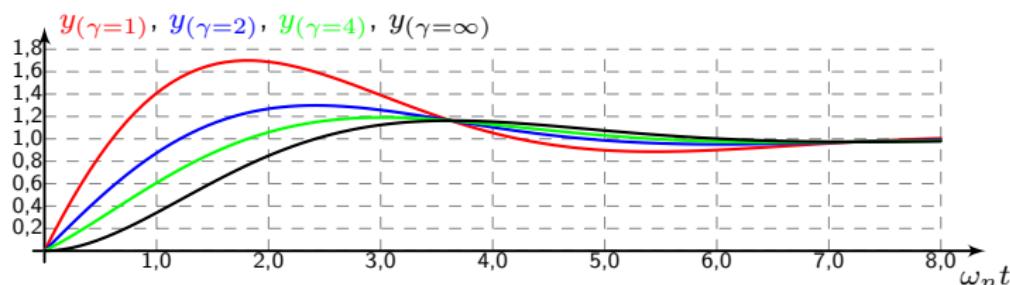
$$\hat{g}(s) = \frac{\frac{s}{\gamma\zeta\omega_n} + 1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1}, \quad \gamma > 0 \quad (3.30)$$

Considerando (1.20) e (3.17) para a resposta ao degrau:

$$y(t) = \tilde{1}(t) - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\sin(\omega_d t + \arccos \zeta) - \frac{1}{\gamma\zeta} \sin \omega_d t \right] \quad (3.31)$$

Resposta de Segunda Ordem com Zero

Para $\zeta = 0,5$:



Observação

- ▶ O zero não afeta o tempo de acomodação de forma significativa!
- ▶ Sempre aumenta o overshoot e seu efeito é visível para $\gamma < 4$.

Resposta de Segunda Ordem com Zero

Para recalcular o overshoot, derive-se (3.31):

$$\dot{y} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\zeta\omega_n \left[\sin(\omega_d t + \arccos \zeta) - \frac{1}{\gamma\zeta} \sin \omega_d t \right] - \omega_d \left[\cos(\omega_d t + \arccos \zeta) - \frac{1}{\gamma\zeta} \cos \omega_d t \right] \right]$$

Os pontos críticos, (t_{cr}, y_{cr}) , são obtidos com $\dot{y} = 0$, o que leva a

$$(\gamma - 1) \sin \omega_d t_{cr} + \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \cos \omega_d t_{cr} = 0. \quad (3.32)$$

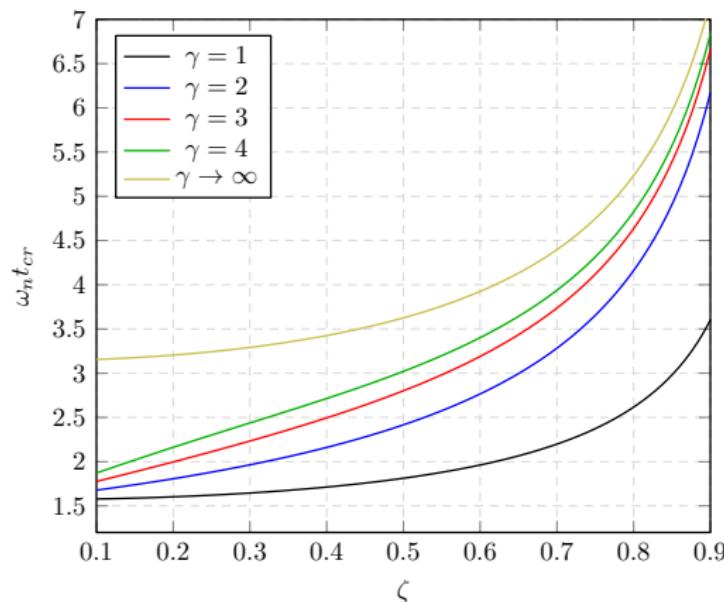
Do qual se conclui que

$$\omega_n t_{cr} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \iff \gamma = 1. \quad (3.33)$$

Resposta de Segunda Ordem com Zero

Se $\gamma \neq 1$ e $\cos \omega_d t_{cr} \neq 0$, as soluções de (3.32) são os valores positivos de

$$\omega_n t_{cr} = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta(1 - \gamma)}. \quad (3.34)$$



Resposta de Segunda Ordem com Zero

Substituindo (3.33) e (3.34) em (3.31), obtem-se

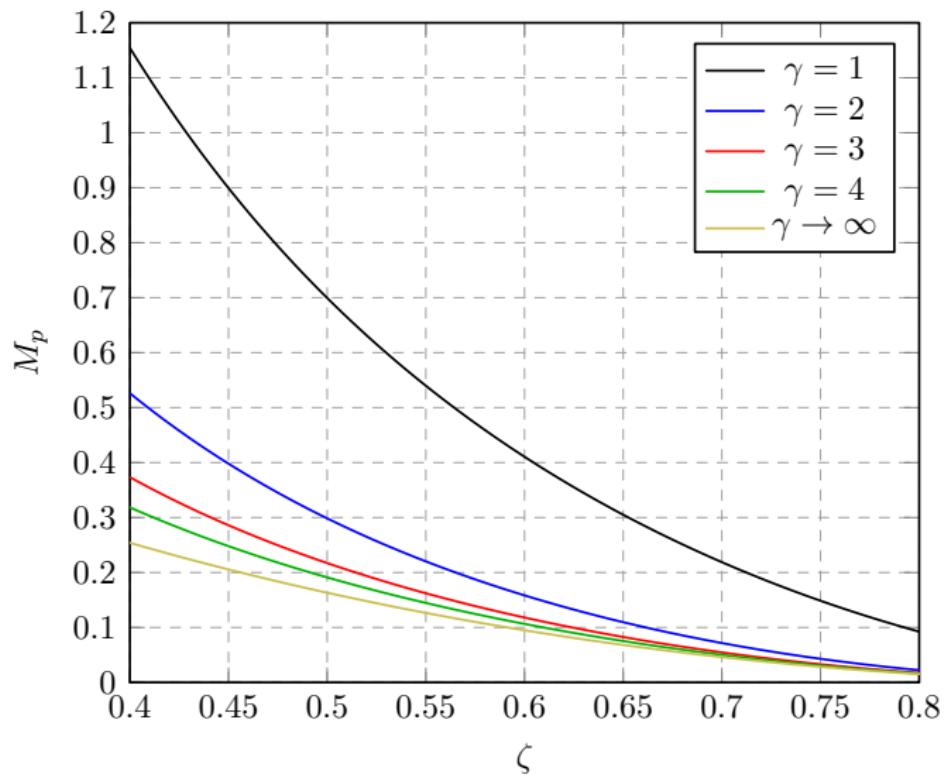
$$M_p = \frac{-\exp\left(\frac{-\pi\zeta}{2\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\zeta\right) - \frac{1}{\zeta} \right] \quad (3.35)$$

e

$$M_p = \frac{-\exp\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta(1-\gamma)}\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta(1-\gamma)} + \arccos\zeta\right) - \frac{1}{\gamma\zeta} \sin \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta(1-\gamma)} \right], \quad (3.36)$$

respectivamente.

Resposta de Segunda Ordem com Zero



Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Redução de Modelos: Considerações Iniciais

- ▶ Muitos SLIT-Cs são de ordem elevada;
- ▶ Sua representação por FTs é simples, porém o projeto pode ser bastante complexo;
- ▶ Como os **polos dominantes** possuem resposta mais persistente:
 - ▶ É possível aproximar $\hat{g}(s)$ por outra FT, $\hat{g}_r(s)$, de ordem menor?
 - ▶ Como fazer isto?
 - ▶ Qual o erro introduzido?
- ▶ Assunções:
 - ▶ \hat{g}_r tem ordem $\tilde{n} < n$ (não faz sentido o caso $\tilde{n} = n$, evidentemente);
 - ▶ \hat{g}_r pode apresentar \tilde{m} zeros, mas $\tilde{m} \leq \tilde{n}$;
 - ▶ Pares de polos complexos conjugados devem ser retidos e com constantes multiplicativas conjugadas.

Procedimento via Polos Dominantes I

Escreva-se a FT do sistema com os polos ordenados:

$$\hat{g}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s - p_i}, \quad \text{Re}(p_k) \geq \text{Re}(p_{k+1}) \quad (3.37)$$

Após a redução do modelo, deseja-se ter FT da forma:

$$\hat{g}_r(s) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{b_i}{s - p_i} \quad (3.38)$$

Onde os \tilde{n} polos dominantes foram retidos no modelo.

Observação

Em geral, não é interessante fazer $b_i = a_i$ no modelo reduzido, pois o erro introduzido torna-se maior.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Procedimento via Polos Dominantes II

Observação

Proposta: A escolha dos coeficientes b_i tratará do comportamento em regime permanente de \hat{g}_r para $t \rightarrow \infty$.

Justificativa: Os polos retidos já tratam do comportamento transitório.

Considere as entradas $u = t^i \tilde{1}$, $i = 0, 1, \dots, \tilde{n}$. Para cada entrada, pode-se determinar o regime permanente com:

$$\frac{\hat{g}(s)}{s^{i+1}} = \sum_{j=1}^i \frac{1}{s^j} \frac{d^{i-j} \hat{g}(0)}{ds^{i-j}} + \hat{r}_i(s) \quad (3.39)$$

onde $\hat{r}_i(s)$ são “restos” que desaparecem para $t \rightarrow \infty$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Aula 08

Aula 09

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Procedimento via Polos Dominantes III

De acordo com a proposta feita, deve-se ter:

$$\frac{d^i \hat{g}(0)}{ds^i} = \frac{d^i \hat{g}_r(0)}{ds^i}, \forall i \in \{0, 1, \dots, \tilde{n} - 1\}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{p_1} & -\frac{1}{p_2} & \cdots & -\frac{1}{p_{\tilde{n}}} \\ -\frac{1}{p_1^2} & -\frac{1}{p_2^2} & \cdots & -\frac{1}{p_{\tilde{n}}^2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{(\tilde{n}-1)!}{p_1^{\tilde{n}}} & -\frac{(\tilde{n}-1)!}{p_2^{\tilde{n}}} & \cdots & -\frac{(\tilde{n}-1)!}{p_{\tilde{n}}^{\tilde{n}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{\tilde{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{g}(0) \\ \hat{g}'(0) \\ \vdots \\ \langle \tilde{n}-1 \rangle \hat{g}(0) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Exemplo

Procedamos à redução do sistema a seguir à 2^a ordem:

$$\hat{g}(s) = \frac{150(s+1)}{(s+2)(s^2+2s+2)(s^2+6s+18)}$$

- ▶ Polos: $-1 \pm j$, -2 e $-3 \pm j3$
- ▶ Derivadas de \hat{g} : $\hat{g}(0) = 2,0833$ e $\hat{g}'(0) = -1,7361$
- ▶ Usando (3.40):

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{-1+j} & \frac{-1}{-1-j} \\ \frac{-1}{(-1+j)^2} & \frac{-1}{(-1-j)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0833 \\ -1,7361 \end{bmatrix} \Rightarrow b_{1,2} = 0,3472 \mp j1,7361$$

- ▶ Assim, com (3.38):

$$\hat{g}_r(s) = \frac{0,3472 - j1,7361}{s + 1 - j} + \frac{0,3472 + j1,7361}{s + 1 + j} = \frac{0,6944s + 4,1666}{s^2 + 2s + 2}$$

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Freqüência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação**
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Freqüência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

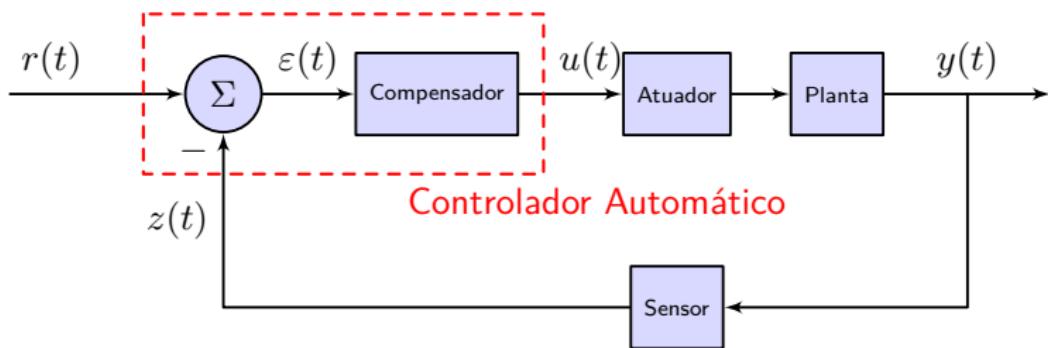
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Estrutura Básica de Controle por Realimentação



Observação

O **objetivo** do controle é levar o erro, ε , a zero, sob algumas restrições. Para tanto, a ação do **controlador** (detector de erro e compensador) deve ser determinada por uma **lei de controle**.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Controladores Básicos

As principais estruturas compensadoras são:

- ▶ Controlador On/Off;
- ▶ Compensador Proporcional (P);
- ▶ Compensador Integral (I);
- ▶ Compensador Proporcional mais Integral (PI);
- ▶ Compensador Proporcional mais Derivativo (PD);
- ▶ Compensador Proporcional mais Integral mais Derivativo (PID).

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

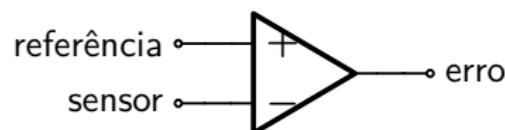
Compensador On/Off I

- ▶ Apenas duas posições: ligado e desligado;
- ▶ O controle deve, a cada instante, decidir sua posição;

Se ε é o erro e as duas posições do controle são U_{on} e U_{off} :

$$u(t) = \begin{cases} U_{\text{on}} & \text{se } \varepsilon(t) > 0 \\ U_{\text{off}} & \text{se } \varepsilon(t) < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Implementação eletrônica:

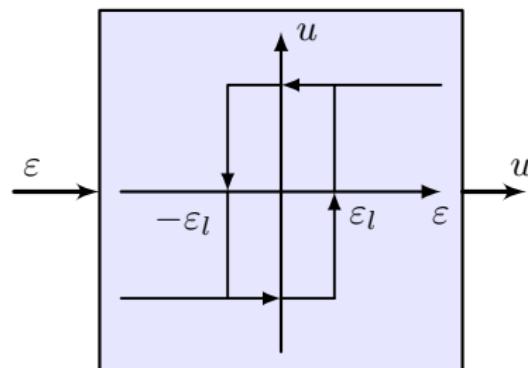


Compensador On/Off II

Pode haver a inserção, acidental ou não, de um **laço de histerese** em (4.1):

$$u(t) = \begin{cases} U_{\text{on}} & \text{se } \varepsilon(t) > \varepsilon_l \\ U_{\text{off}} & \text{se } \varepsilon(t) < -\varepsilon_l \\ u(t_-) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.2)$$

O bloco amplificador fica ($\varepsilon_l > 0$):



Compensadores Proporcional e Integral

- ▶ O compensador On/Off é **não-linear**!
- ▶ Os demais compensadores aqui estudados serão lineares.
- ▶ O compensador P é o mais simples e, ainda, veremos que é de estudo importante.
- ▶ Sua compensação é proporcional ao erro lido:

$$u(t) = k_p \varepsilon(t) \quad (4.3)$$

- ▶ No compensador I, a variação da compensação é proporcional ao erro:

$$\dot{u}(t) = k_i \varepsilon(t) \quad (4.4)$$

- ▶ Ou, no domínio s :

$$\frac{\hat{u}(s)}{\hat{\varepsilon}(s)} = \frac{k_i}{s} \quad (4.5)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequênciā

Controle PID

Controle Moderno

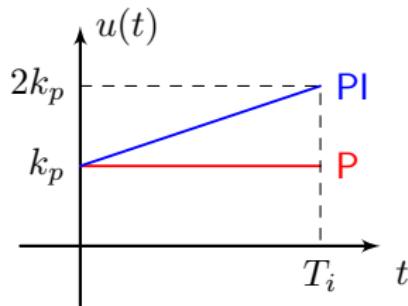
Compensador Proporcional mais Integral

É a combinação dos dois anteriores:

$$u(t) = k_p \varepsilon(t) + \frac{k_p}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt \quad (4.6)$$

Observe que $k_i = \frac{k_p}{T_i}$. Aplicando a TL:

$$\frac{\hat{u}(s)}{\hat{\varepsilon}(s)} = \frac{k_p T_i s + k_p}{T_i s} \quad (4.7)$$



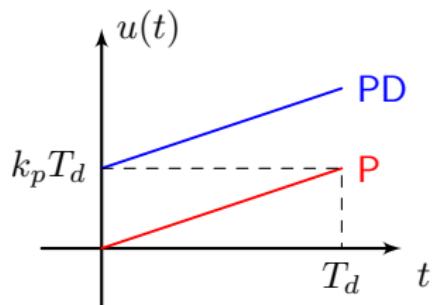
Compensador Proporcional mais Derivativo

É uma tentativa de inserir um efeito antecipativo no controle:

$$u(t) = k_p \varepsilon(t) + k_p T_d \dot{\varepsilon}(t) \quad (4.8)$$

Aplicando a TL:

$$\frac{\hat{u}(s)}{\hat{\varepsilon}(s)} = k_p + k_p T_d s \quad (4.9)$$



Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Compensador Proporcional mais Integral mais Derivativo

É a tentativa de combinar as propriedades dos compensadores anteriores.

$$u(t) = k_p \varepsilon(t) + \frac{k_p}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + k_p T_d \dot{\varepsilon}(t) \quad (4.10)$$

Aplicando a TL:

$$\frac{\hat{u}(s)}{\hat{\varepsilon}(s)} = \frac{k_p T_d T_i s^2 + k_p T_i s + k_p}{T_i s} \quad (4.11)$$

Observação

Os compensadores PD e PID não são causais!

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Efeito do Sensor na Dinâmica do Sistema

- ▶ Muitos sensores têm dinâmica muito rápida e podem ser tratados como ganhos;
- ▶ Para plantas com dinâmicas também rápidas, é necessário analisar a dinâmica do sensor;
- ▶ Como exemplo, cita-se sensores térmicos, que respondem como sistemas de 2^a ordem sobreamortecidos.

Observação

Analise o comportamento dinâmico do LM35, conforme seu datasheet.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo

Considere um sistema de controle em realimentação negativa, compensação P, com:

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{s + p_g} \quad \hat{h}(s) = \frac{1}{s + p_h}$$

Neste caso, usando (2.4):

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{c}(s)\hat{g}(s)}{1 + \hat{c}(s)\hat{g}(s)\hat{h}(s)} = \frac{k(s + p_h)}{s^2 + (p_g + p_h)s + p_g p_h + k}$$

E o sistema resultante é de segunda ordem, com um zero cujo valor não pode ser alterado pelo compensador.

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada**
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

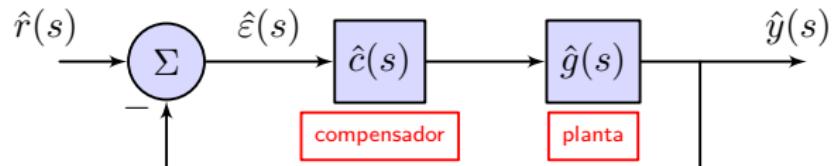
Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Erro em Regime em Malha Fechada I

Considere o sistema em **realimentação unitária**:



Defina as FTs do compensador e da planta:

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{n}_g(s)}{\hat{d}_g(s)} \quad (4.12)$$

$$\hat{c}(s) = \frac{\hat{n}_c(s)}{\hat{d}_c(s)} \quad (4.13)$$

Note que:

$$\hat{\varepsilon}(s) = \hat{r}(s) \frac{1}{1 + \hat{c}(s)\hat{g}(s)} = \frac{\hat{d}_c(s)\hat{d}_g(s)}{\hat{d}_c(s)\hat{d}_g(s) + \hat{n}_c(s)\hat{n}_g(s)} \hat{r}(s) \quad (4.14)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

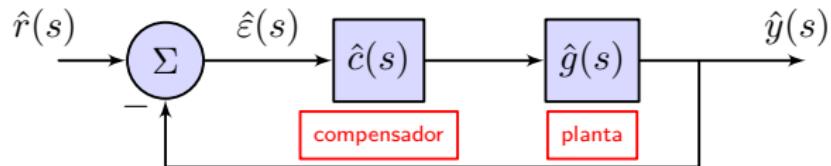
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Erro em Regime em Malha Fechada II



- ▶ Geralmente, interessa levar o erro a zero;
- ▶ Aplicando o Teorema do Valor Final a (4.14):

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\hat{d}_c(s)\hat{d}_g(s)}{\hat{d}_c(s)\hat{d}_g(s) + \hat{n}_c(s)\hat{d}_g(s)} \hat{r}(s) \quad (4.15)$$

Observação

Se a entrada for um degrau, a FTMA deverá ter um polo na origem para erro nulo!

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Compensadores Integral e Derivativo

- ▶ A principal função do compensador I é eliminar o erro em regime em sistemas sob entrada degrau.

$$\hat{c}_{int}(s) = \frac{k_i}{s} \quad (4.16)$$

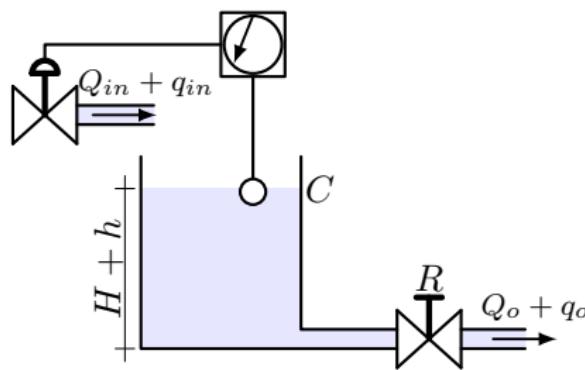
- ▶ O compensador D “aumenta a estabilidade” do sistema;

$$\hat{c}_{der}(s) = k_d s \quad (4.17)$$

- ▶ O compensador D apresenta problemas com amplificação de ruídos;
- ▶ Pior ainda, é **anti-causal!** (Como implementar seu efeito?)

Exemplo: Controle de Nível

Modelo da planta (vide aula 07):



FT do conjunto
bóia/referência

$$\frac{\hat{h}(s)}{\hat{q}_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

$$\frac{\hat{q}_i(s)}{\hat{\varepsilon}(s)} = k_p$$

Calculemos o erro em regime com (4.15)

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{RCs + 1}{RCs + 1 + k_p R} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + k_p R} > 0$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

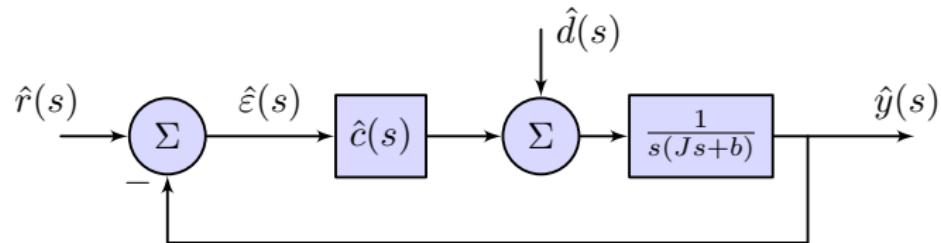
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

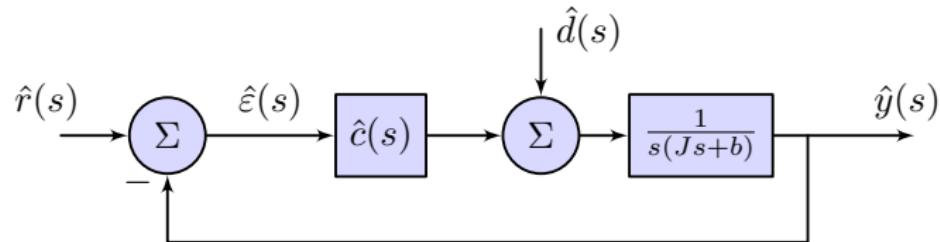
Exemplo: Servomotor DC



- ▶ Planta com polo na origem: erro nulo para a referência;
- ▶ Porém, não para a perturbação (não está em realimentação unitária);
- ▶ Considerando compensador P:

$$\frac{\hat{e}(s)}{\hat{d}(s)} = -\frac{\frac{1}{s(Js+b)}}{1 + \frac{k_p}{s(Js+b)}} = -\frac{1}{Js^2 + bs + k_p}$$

Exemplo: Servomotor DC



Assim, para perturbação degrau:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(-\frac{1}{Js^2 + bs + k_p} \frac{1}{s} \right) = -\frac{1}{k_p}$$

Por outro lado, ao tentar usar um compensador I:

$$\frac{\hat{\varepsilon}(s)}{\hat{d}(s)} = -\frac{\frac{1}{s(Js + b)}}{1 + \frac{k_i}{s^2(Js + b)}} = -\frac{s}{Js^3 + bs^2 + k_i}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

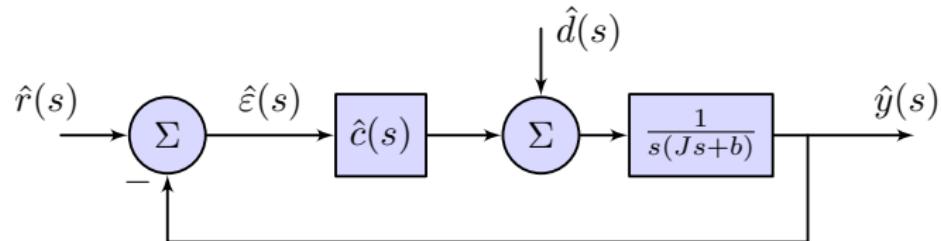
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Servomotor DC

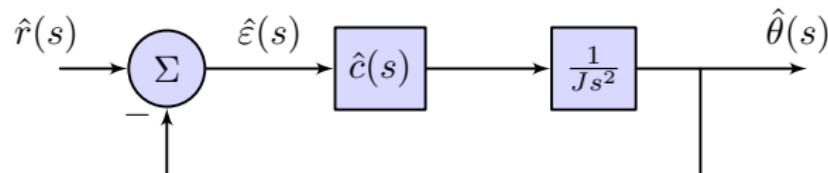


- ▶ Porém... **Polinômios incompletos são sempre instáveis!**
- ▶ Os problemas anteriores podem ser resolvidos com um PI bem projetado.

Observação

Refaça este exemplo, com o modelo obtido na Aula 06.

Exemplo: Posicionamento de Satélite



Note que a FTMF deste sistema é

$$\frac{\hat{\theta}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{c}(s)}{Js^2 + \hat{c}(s)}$$

Para compensador P, existirão **oscilações sustentadas**, pois os polos serão:

$$p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{k_p}{J}}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

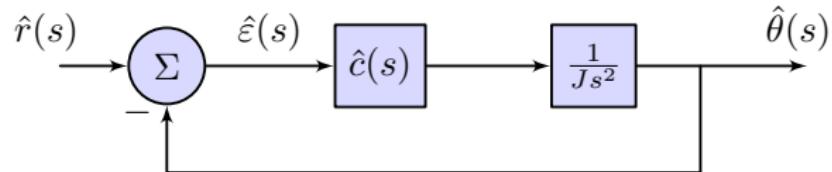
Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Posicionamento de Satélite



Observando (3.11) com $\zeta = 0$ e $\omega_n^2 = \frac{k_p}{J}$ e aplicando em (3.17):

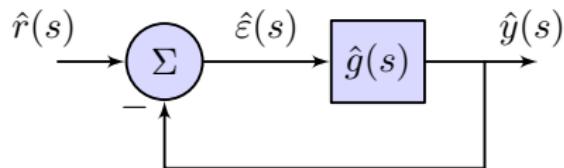
$$\theta(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

Adicionando **amortecimento** para eliminar as oscilações, com o PD (4.9):

$$\frac{\hat{\theta}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{k_p T_d s + k_p}{J s^2 + k_p T_d s + k_p}$$

Erros em Regime em Realimentação Unitária

Determinemos a relação entre o erro e a FTMA na realimentação unitária:



A FT da entrada para o erro é, usando (2.4):

$$\frac{\hat{\varepsilon}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{1}{1 + \hat{g}(s)} \quad (4.18)$$

Considere a FTMA sob a forma (N é o **tipo** do sistema):

$$\hat{g}(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^N \prod_{i=1}^{n-N} (T_i s + 1)} \quad (4.19)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Erros em Regime em Realimentação Unitária

Este é um caso mais simples de (4.14), originando:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{\varepsilon}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + \hat{g}(s)} \hat{r}(s) \quad (4.20)$$

Para três sinais de entrada, determinaremos o erro estático:

- ▶ Entrada degrau: origina o erro estático de posição;
- ▶ Entrada rampa: origina o erro estático de velocidade;
- ▶ Entrada quadrática: origina o erro estático de aceleração.

[Introdução](#)[Modelagem](#)[Resp. Transitória](#)[Sist.
Realimentados](#)[Aula 10](#)[Aula 11](#)[Aula 12](#)[Aula 13](#)[Lugar das Raízes](#)[Resp. em
Frequência](#)[Controle PID](#)[Controle Moderno](#)

Erro Estático de Posição

Sendo a referência um degrau, tem-se:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + \hat{g}(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \hat{g}(0)} \quad (4.21)$$

Define-se a **constante de erro estático de posição** e, referindo-se a (4.19):

$$K_p = \hat{g}(0) = \begin{cases} K & \text{se } N = 0 \\ \infty & \text{se } N > 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Importante!

Para anular o erro estático de posição, é necessário que o sistema seja, ao menos, de tipo 1.

Erro Estático de Velocidade

Sendo a referência uma rampa, tem-se:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + \hat{g}(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s\hat{g}(s)} \quad (4.23)$$

Define-se a **constante de erro estático de velocidade** e, referindo-se a (4.19):

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{g}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } N = 0 \\ K & \text{se } N = 1 \\ \infty & \text{se } N > 1 \end{cases} \quad (4.24)$$

Importante!

*Se o sistema for de tipo 0, o erro estático de velocidade torna-se **infinito**. Para anulá-lo, é necessário que o sistema seja, ao menos, de tipo 2.*

Erro Estático de Aceleração

Sendo a referência $r(t) = t^2 \tilde{1}(t)$, tem-se:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + \hat{g}(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 \hat{g}(s)} \quad (4.25)$$

Define-se a **constante de erro estático de aceleração** e, referindo-se a (4.19):

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \hat{g}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } N \leq 1 \\ K & \text{se } N = 2 \\ \infty & \text{se } N > 2 \end{cases} \quad (4.26)$$

Importante!

*Se o sistema for de tipo 0 ou 1, o erro estático de aceleração é **infinito**. Para anulá-lo, é necessário que o sistema seja, ao menos, de tipo 3.*

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Regime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz**
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Freqüência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

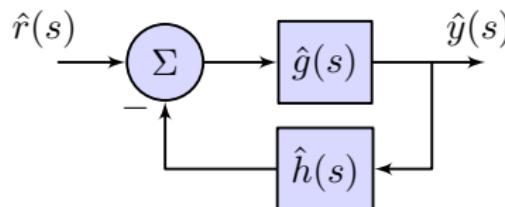
- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Sistemas de Ordem Superior

Considerando



$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{n}_g(s)}{\hat{d}_g(s)} \quad (4.27a)$$

$$\hat{h}(s) = \frac{\hat{n}_h(s)}{\hat{d}_h(s)} \quad (4.27b)$$

Assim, observe que são possíveis as formas:

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{n}_g(s)\hat{d}_h(s)}{\hat{d}_g(s)\hat{d}_h(s) + \hat{n}_g(s)\hat{n}_h(s)} \quad (4.28a)$$

$$= \sum_{j=0}^m \beta_j s^j \Bigg/ \sum_{i=0}^n \alpha_i s^i, \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} \quad (4.28b)$$

$$= K \prod_{j=1}^m (s - z_j) \Bigg/ \prod_{i=1}^n (s - p_i), \quad K \in \mathbb{R} \text{ e } p_i, z_j \in \mathbb{C}$$

$$(4.28c)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

1º Caso: Apenas Polos Reais

Para **entrada degrau** e aplicando a EFP a (4.28c):

$$\hat{y}(s) = \frac{A_o}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - p_i} \quad (4.29)$$

onde os A_i são obtidos pelo método de Heavyside.

Aplicando a TIL a (4.29):

$$y(t) = A_o + \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} \quad (4.30)$$

Observação

Quando um sistema de ordem qualquer com polos todos reais será estável?

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

1º Caso: Apenas Polos Reais

Observação

- i *Todos os polos do sistema devem ser negativos, ou algum termo exponencial de (4.30) cresceria indefinidamente;*
- ii *Se houver $p_i = z_j$ para algum i, j , então o resíduo A_i é nulo;*
- iii *Esta é uma forma de cancelar o efeito de um polo;*
- iv *Se algum polo estiver muito afastado da origem (em relação aos demais), sua exponencial reduz-se muito mais rapidamente;*
- v *O efeito deste polo pode, então, ser desprezado;*
- vi *Efeitos análogos ocorrem para polos múltiplos.*

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

2º Caso: Presença de Polos Não Reais

Novamente, aplicando a entrada degrau e a EFP a (4.28c):

$$\hat{y}(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{s \prod_{i=1}^{n_1} (s - p_i) \prod_{k=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)} \quad (4.31a)$$

$$= \frac{A_o}{s} + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A_i}{s - p_i} + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{B_k(s + \zeta_k \omega_k) + C_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (4.31b)$$

onde $n = n_1 + 2n_2$ e $0 < \zeta_k < 1$.

2º Caso: Presença de Polos Não Reais

Aplicando a TIL a (4.31b)

$$y(t) = A_o + \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} + \sum_{k=1}^{n_2} e^{-\zeta_k \omega_k t} (B_k \cos \omega_{d_k} t + C_k \sin \omega_{d_k} t) \quad (4.32)$$

Observação

Quando um sistema de ordem qualquer será estável?

Observação

- i *Para que y não cresça indefinidamente, deve-se ter $p_i < 0$ e $\zeta_k \omega_k > 0$;*
- ii *O decréscimo dos termos exponenciais depende das partes reais de seus respectivos polos;*
- iii *O cancelamento de polos e zeros também é válido para os termos complexos.*

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Comentários Importantes

Importante!

Polo dominante: Se p_1 e p_2 são polos com parte real negativa e $\text{Re}(p_1) \gg \text{Re}(p_2)$, então os efeitos de p_2 são suprimidos pelos de p_1 . Diz-se que p_1 **domina** p_2 .

Importante!

Estabilidade: Para garantir que $y(t)$ não cresça indefinidamente (para entrada limitada), devemos assegurar que todos os polos da FTMF estejam no semi-plano complexo esquerdo. Neste caso, diz-se que o sistema é estável. A estabilidade de um sistema é uma característica inerente, independendo da entrada aplicada.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Polinômios e Estabilidade

- ▶ Os polos da FTMF devem estar no semi-plano esquerdo;
- ▶ Fatorar polinômios é uma tarefa complexa;
- ▶ Acima do 5º grau, é impossível através de operações elementares em seus radicais (teorema de Abel-Ruffini);

Observação

Objetivo do Critério de Routh-Hurwitz (CRH): determinar se um sistema é estável sem fatorar seus polinômios.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

O Critério de Routh-Hurwitz

Considere a FTMF do sistema em malha fechada como em (2.4):

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{g}(s)}{1 + \hat{g}(s)\hat{h}(s)} = \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)} \quad (4.33)$$

Referindo ao denominador de (4.33), considere o polinômio:

$$\hat{d}(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 \quad (4.34)$$

Lema

Se (4.33) é estável, então $\alpha_i \alpha_j > 0$, $0 \leq i, j \leq n$.

O Critério de Routh-Hurwitz

Com coeficientes todos positivos, escreva o **arranjo de Routh**:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\dots
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots

onde $a_i = \alpha_{n-i}$ e :

$$b_i = \frac{a_1 a_{2i} - a_0 a_{2i+1}}{a_1} \quad (4.35)$$

Escreva as linhas s^{n-3}, \dots, s^0 de forma análoga.

Teorema (Critério de Routh-Hurwitz)

O número de raízes de (4.34) com partes reais positivas é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna do arranjo de Routh.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo 1

O polinômio $\hat{d}(s) = 5s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 2s + 1$ é estável?

s^4	5	3	1	
s^3	4	2		Dividindo esta linha por 2...
s^2	2	1		
s^1	0,5	1		
s^0	-3			
	1			

Assim, conclui-se que $\hat{d}(s)$ tem dois polos no semi-plano direito.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo 2

Para quais valores de k o polinômio

$$\hat{d}(s) = s^3 + s^2 + s + k$$

é estável?

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 1 & k \\ s^1 & 1 - k \\ \hline s^0 & k \end{array}$$

Donde se nota que se deve ter $k, 1 - k > 0$, ou seja:

$$0 < k < 1$$

para estabilidade.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Elemento Nulo na 1^a Coluna

Considere o polinômio $\hat{d}(s) = 2s^4 + s^3 + 2s^2 + s + 1$.

$$\begin{array}{c|cccc} s^4 & 2 & 2 & 1 \\ s^3 & 1 & 1 \\ \textcolor{red}{s^2} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{1} \\ s^2 & \varepsilon & 1 \\ \hline s^1 & \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \\ s^0 & 1 \end{array}$$

► Troque o zero em s^2 por um $\varepsilon > 0$;

► Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0_+$, tem-se:
$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rightarrow -\infty$$

Logo, o polinômio possui duas raízes no semi-plano direito.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Linha Nula

Considerando o exemplo:

s^5	1	11	28
s^4	5	23	12
s^3	6,4	25,6	
s^2	3	12	
s^1	0		
s^0	6		
	12		

- ▶ Considere a linha acima da linha nula

$$\begin{bmatrix} a_i & a_{i-2} & a_{i-4} & \dots \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

- ▶ Tome o polinômio auxiliar:

$$P_i(s) = a_i s^i + a_{i-2} s^{i-2} + \\ + a_{i-4} s^{i-4} + \dots \quad (4.37)$$

- ▶ Para a linha $i - 1$, tome os coeficientes de P' ;
- ▶ As raízes de P_i são raízes de P . Assim...

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Estabilidade Relativa

- ▶ De acordo com (4.32) (e (4.30)) a parte real da raiz determina a rapidez do transitório;
- ▶ Assim, é interessante não só garantir a estabilidade de um sistema, mas esta queda;
- ▶ Ou seja, $\operatorname{Re}(p_i) < \sigma_{\min}, i = 1, 2, \dots, n$;
- ▶ Isto equivale a fazer, no arranjo de Routh:

$$s = \hat{s} + \sigma \quad (4.38)$$

[Introdução](#)[Modelagem](#)[Resp. Transitória](#)[Sist.
Realimentados](#)[Aula 10](#)[Aula 11](#)[Aula 12](#)[Aula 13](#)[Lugar das Raízes](#)[Resp. em
Frequência](#)[Controle PID](#)[Controle Moderno](#)

Exemplo 3

Sabemos que $\hat{d}(s) = s^3 + s^2 + s + k$ é estável para $0 < k < 1$. Determinemos a faixa de valores para a qual os polos terão parte real menor que $-0,5$.

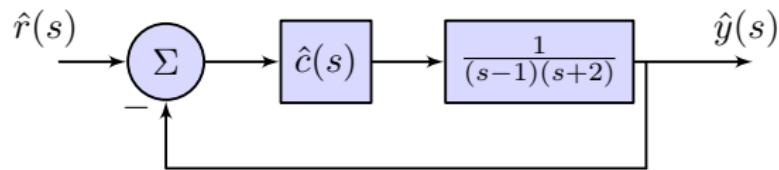
Para tanto, com (4.38):

$$\begin{aligned}\hat{d}(\hat{s}) &= (\hat{s} + \sigma)^3 + (\hat{s} + \sigma)^2 + (\hat{s} + \sigma) + k \\ &= \hat{s}^3 + (3\sigma + 1)\hat{s}^2 + (3\sigma^2 + 2\sigma + 1)\hat{s} + \sigma^3 + \sigma^2 + \sigma + k\end{aligned}$$

Donde concluímos que não existe k para este decaimento mínimo. (**Por quê?**)

Exemplo 4

Considere o sistema de controle



Determinemos os compensadores PI capazes de estabilizar este sistema. Usando (4.7):

$$\hat{c}(s) = \frac{k_p s + k_i}{s}$$

Assim, a FTMF torna-se:

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{k_p s + k_i}{s^3 + s^2 + (k_p - 2)s + k_i}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

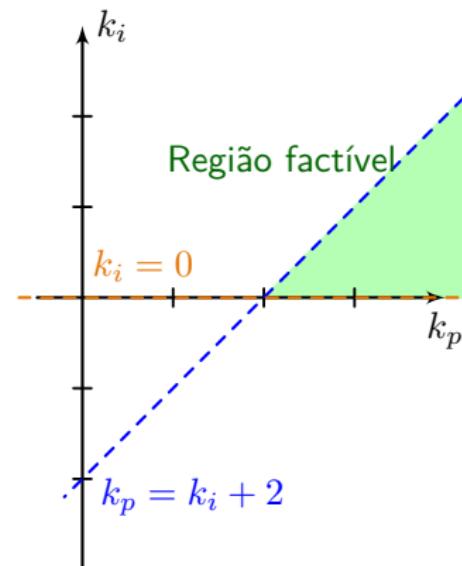
Controle Moderno

Exemplo 4

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & k_p - 2 \\ s^2 & 1 & k_i \\ s^1 & k_p - 2 - k_i & \\ \hline s^0 & k_i & \end{array}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} k_i > 0 \\ k_p > k_i + 2 \end{cases}$$



Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas Incertos

- ▶ **Sistema Incerto:** É aquele que tem ao menos um parâmetro cujo valor não é precisamente conhecido;
- ▶ Fatores que conduzem a incertezas: limitações de fabricação, envelhecimento, variações na operação, entre outros;
- ▶ Considere a FT de um sistema incerto:

$$\hat{g}(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad \text{com } \begin{cases} 0 < \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i \\ \underline{b}_j \leq b_j \leq \bar{b}_j \end{cases} \quad (4.39)$$

- ▶ **Estabilidade Robusta:** O sistema é estável para qualquer variação paramétrica apresentada em (4.39).

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

O Teorema de Kharitonov

Teorema (Kharitonov)

O sistema incerto (4.39) é robustamente estável se, e somente se, forem Hurwitz seus quatro polinômios de Kharitonov:

$$\mathcal{K}_{D1}(s) = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \underline{a}_5 s^5 + \dots \quad (4.40a)$$

$$\mathcal{K}_{D2}(s) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \bar{a}_4 s^4 + \bar{a}_5 s^5 + \dots \quad (4.40b)$$

$$\mathcal{K}_{D3}(s) = \underline{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \bar{a}_5 s^5 + \dots \quad (4.40c)$$

$$\mathcal{K}_{D4}(s) = \bar{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \bar{a}_4 s^4 + \underline{a}_5 s^5 + \dots \quad (4.40d)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo 5 (Prova P2 2020-1)

Considere um sistema em realimentação unitária e planta

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{s^3 + cs^2 + bs + a}, \quad 2 \leq a, b, c \leq 3.$$

Determinemos todos os compensadores \mathbf{I} que garantem sua estabilidade robusta.

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{c}(s)\hat{g}(s)}{1 + \hat{c}(s)\hat{g}(s)} = \frac{k_i}{s^4 + cs^3 + bs^2 + as + k_i}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo 5 (Prova P2 2020-1)

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & b & k_i \\ s^3 & c & a & \\ s^2 & bc - a & ck_i & \\ s^1 & a(bc - a) - c^2 k_i & & \\ s^0 & k_i & & \end{array}$$

- ▶ As linhas s^4 e s^3 são evidentemente positivas;
- ▶ Para a linha s^2 , a condição mais desfavorável ocorre em $\underline{bc} - \bar{a} = 1$;
- ▶ Para a linha s^1 , deve-se ter $k_i < \frac{a(bc - a)}{c^2}$, o que leva a

$$k_i < \min \left\{ \frac{\underline{a}(\bar{b}\bar{c} - \underline{a})}{\bar{c}^2}, \frac{\bar{a}(\underline{b}\underline{c} - \bar{a})}{\underline{c}^2}, \frac{\bar{a}(\bar{b}\underline{c} - \bar{a})}{\underline{c}^2}, \frac{\underline{a}(\bar{b}\bar{c} - \underline{a})}{\bar{c}^2} \right\} = 0,75$$

- ▶ A linha s^0 apenas exige $k_i > 0$.

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Regime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

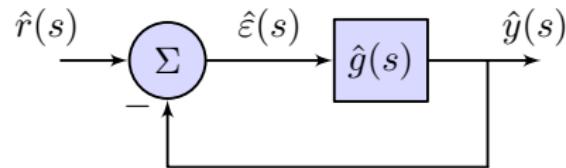
Alocação de Polos

- ▶ A partir das condições (3.26)-(3.29), é possível escolher posições de polos adequadas para a FTMF;
- ▶ O processo descrito é chamado **alocação de polos**;

Importante!

Problema: Dados os polos desejados e tendo a planta fixa, como determinar o comepensador de forma a alocar os polos de malha fechada nas posições escolhidas?

O Sistema em Realimentação Unitária



Escrevamos as FTs da planta e do compensador como:

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{n}_g(s)}{\hat{d}_g(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m_g} \beta_j s^j}{\sum_{i=0}^{n_g} \alpha_i s^i} \quad (4.41)$$

$$\hat{c}(s) = \frac{\hat{n}_c(s)}{\hat{d}_c(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m_c} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n_c} a_i s^i} \quad (4.42)$$

Usando a regra de feedback (2.4):

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{c}(s)\hat{g}(s)}{1 + \hat{c}(s)\hat{g}(s)} = \frac{\hat{n}_c(s)\hat{n}_g(s)}{\hat{n}_c(s)\hat{n}_g(s) + \hat{d}_c(s)\hat{d}_g(s)} \quad (4.43)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

O Polinômio Característico de Alocação

Observação

Note que, se a planta e o controlador têm ordens n_g e n_c , respectivamente, então o polinômio característico de alocação, $\hat{q}(s)$ poderá ter $n_g + n_c$ polos à escolha.

Sejam $p_1, p_2, \dots, p_{n_c+n_g}$ os polos desejados, então:

$$\hat{q}(s) = \prod_{i=1}^{n_c+n_g} (s - p_i) = \sum_{i=0}^{n_c+n_g} q_i s^i \quad (4.44)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

A Equação Diofantina

Combinando as observações feitas em (4.43) e em (4.44):

$$\hat{n}_c(s)\hat{n}_g(s) + \hat{d}_c(s)\hat{d}_g(s) = \hat{q}(s) \quad (4.45)$$

que é chamada **equação diofantina**.

Observação

- ▶ Note que $\hat{n}_c(s)$ e $\hat{d}_c(s)$ são as incógnitas de (4.45);
- ▶ Sob quais circunstâncias existe solução para (4.45)?
- ▶ A solução, se existe, é única?
- ▶ Como encontrar a solução?
- ▶ Como não há produto de incógnitas, a dependência entre estas e os coeficientes de \hat{d}_g e \hat{n}_g é linear.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Solução da Equação Diofantina

Observando (4.41) e (4.42), note que:

$$\hat{n}_c(s)\hat{n}_g(s) = b_0\beta_0 + (b_1\beta_0 + b_0\beta_1)s + (b_2\beta_0 + b_1\beta_1 + \\ + b_0\beta_2)s^2 + \dots + \left(\sum_{i=0}^{m_c+m_g} b_i\beta_{m_c+m_g-i} \right) s^{m_c+m_g}$$

$$\hat{d}_c(s)\hat{d}_g(s) = a_0\alpha_0 + (a_1\alpha_0 + a_0\alpha_1)s + (a_2\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \\ + a_0\alpha_2)s^2 + \dots + \left(\sum_{i=0}^{n_c+n_g} a_i\alpha_{n_c+n_g-i} \right) s^{n_c+n_g}$$

Observação

Como α_i, β_j são dados e a_i, b_j são as incógnitas, a Equação Diofantina é um problema linear!

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Solução da Equação Diofantina

- ▶ Dois polinômios são iguais se seus respectivos coeficientes o são.
- ▶ Para os termos de grau zero de (4.45):

$$\alpha_0 a_0 + \beta_0 b_0 = q_0$$

- ▶ Para o termo de primeiro grau:

$$\alpha_1 a_0 + \alpha_0 a_1 + \beta_1 b_0 + \beta_0 b_1 = q_1$$

- ▶ Para o termo de i -ésimo grau:

$$\sum_{k=0}^i (\alpha_{i-k} a_k + \beta_{i-k} b_k) = q_i$$

A Matriz de Sylvester

- ▶ De (4.45), surge um sistema de equações lineares;
- ▶ Convém utilizar a matriz de Sylvester.
- ▶ Defina o bloco de Sylvester de \hat{d}_g :

$$\mathbf{S}_D = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n_g} & \alpha_{n_g-1} & \alpha_{n_g-2} & \dots & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{n_g} & \alpha_{n_g-1} & \dots & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n_g} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_c+n_g+1) \times (n_c+1)} \quad (4.46)$$

Solução da Equação Diofantina

- ▶ O bloco do numerador é feito similarmente e com dimensão $\mathbf{S}_N \in \mathbb{R}^{(n_c+n_g+1) \times (m_c+1)}$;
- ▶ Escrevamos:

$$\mathbf{a} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n_c}]'$$

$$\mathbf{b} = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{m_c}]'$$

$$\mathbf{q} = [q_0 \quad q_1 \quad \dots \quad q_{n_c+n_g}]'$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_D \quad \mathbf{S}_N]$$

- ▶ A solução de (4.45) é obtida do sistema:

$$\mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{q} \quad (4.47)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Comentários sobre a Matriz de Sylvester

- ▶ Para haver solução única, \mathbf{S} deve ser invertível, o que implica em:

$$m_c = n_g - 1 \quad (4.48)$$

- ▶ De toda forma, note que se deve fazer $n_c \geq m_c$;
- ▶ Não há interesse em fazer $m_c \geq n_g - 1$, pois aumenta a complexidade de C desnecessariamente;
- ▶ Há um problema não resolvido, o do **controlador de ordem reduzida**, onde $m_c < n_g - 1$;
- ▶ Neste caso, porém, a Equação Diofantina pode não ter solução.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Controladores Reduzidos e Mínimos Quadrados

- ▶ É possível que um polinômio, \hat{q} , não seja atendido por (4.47);
- ▶ Assim, propõe-se solucionar o problema:

$$\min_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left\| \mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} - \mathbf{q} \right\| \quad (4.49)$$

- ▶ (4.49) é um problema de **mínimos quadrados**, cuja solução é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = (\mathbf{S}'\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}'\mathbf{q} \quad (4.50)$$

Comentários ao Método da Equação Diofantina

- ▶ Não se garante que (4.50) atenderá às especificações de projeto;
- ▶ A solução encontrada deve ser testada;
- ▶ É comum ter que se projetar um controlador que imponha um **tipo mínimo**;
- ▶ Procedimento simples:
 - i Troque \hat{g} por $\hat{\tilde{g}} = \frac{\hat{g}}{s^k}$, onde k leva ao tipo desejado;
 - ii Solucione a Equação Diofantina, obtendo $\hat{\tilde{c}}$;
 - iii A solução verdadeira será $\frac{\hat{\tilde{c}}}{s^k}$.

Observação

Principal desvantagem da Equação Diofantina: os polos desejados devem ser exatamente especificados, o que leva a pouca flexibilidade do método.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Tanques Comunicantes

Considere o sistema de tanques comunicantes (Aula 07), com:

$$R_1 = 1\text{s/m}^2, R_2 = 0,4\text{s/m}^2, C_1 = 2\text{m}^2 \text{ e } C_2 = 5\text{m}^2$$

Assim, se a variável controlada for o nível do tanque 2:

$$\frac{\hat{h}_2(s)}{\hat{q}(s)} = \frac{0,4}{4s^2 + 4,8s + 1}$$

Verifiquemos se existe um controlador com:

- ▶ Erro estático de posição nulo;
- ▶ Tempo de acomodação inferior a 10s (critério 2%);
- ▶ Overshoot inferior a 10%.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Aula 10

Aula 11

Aula 12

Aula 13

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Tanques Comunicantes

Devemos inserir um polo na origem. Logo, usaremos:

$$\frac{\hat{g}(s)}{s} = \frac{0,4}{4s^3 + 4,8s^2 + s}$$

Para garantir solução da Equação Diofantina, façamos $m_c = 2$. Assim:

$$s\hat{c}(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_1s + a_0} \quad (\text{o polo extra está em } \hat{g}/s)$$

Os blocos de Sylvester de \hat{g}/s são:

$$\mathbf{S}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4,8 & 1 \\ 4 & 4,8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_N = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Tanques Comunicantes

- ▶ Para $M_p \leq 0,1$, deve-se ter $\zeta \geq 0,6$;
- ▶ Para $t_s < 10s$, deve-se ter $\zeta\omega_n > 0,4$ (critério 2%);
- ▶ Façamos $\zeta = 0,65$ e $\omega_n = 0,7$.
- ▶ Polos **dominantes**: $-0,455 \pm j0,532$
- ▶ Os demais polos serão reais, com σ dez vezes maior.
Assim:

$$\begin{aligned}\hat{q}(s) &= (s + 0,455 + j0,532)(s + 0,455 - j0,532)(s + 5)^2 \\ &= s^4 + 10,9s^3 + 34,6s^2 + 27,7s + 12,3\end{aligned}$$

- ▶ Aplicando (4.47):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,425 & 0,25 & 30,75 & 63,19 & 56,78 \end{bmatrix}'$$

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Lugar das Raízes: Introdução

Observação

*Os polos de malha fechada são chamados **raízes** do sistema.*

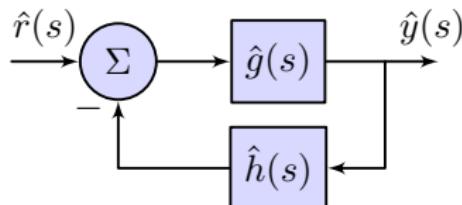
- ▶ A localização das raízes determina:
 - ▶ a estabilidade (aula 12), e;
 - ▶ o desempenho do sistema (aulas 08 e 09).
- ▶ O cálculo das raízes pode ser feito numericamente;
- ▶ Pode-se utilizar o Critério de Routh-Hurwitz, também;

Importante!

A análise do Lugar das Raízes (LR) ("root locus") determina a mudança da posição das raízes, à medida em que algum parâmetro do sistema é alterado.

Conceitos Preliminares I

Considere o sistema de controle e (2.4):



$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{g}(s)}{1 + \hat{g}(s)\hat{h}(s)}$$

- ▶ Considere, em $\hat{g}(s)$, a inclusão do **compensador**.
- ▶ Para encontrar o LR, deve-se resolver:

$$\hat{g}(s)\hat{h}(s) = -1 \quad (5.1)$$

Importante!

O método LR, determina os polos da FTMF, a partir de informações da FTMA. Logo, não é necessário determinar a FTMF!

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Conceitos Preliminares II

Como as raízes são complexas, pode-se reescrever (5.1):

$$|\hat{g}(s)\hat{h}(s)| = 1 \quad (5.2a)$$

$$\arg(\hat{g}(s)\hat{h}(s)) = 180^\circ(2k + 1), k \in \mathbb{N} \quad (5.2b)$$

Considere a forma Zero-Polo-Ganho (ZPK) da FTMA (4.28c):

$$\hat{g}(s)\hat{h}(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = K \frac{\prod_{j=1}^m |s - z_j| e^{j\psi_j}}{\prod_{i=1}^n |s - p_i| e^{j\varphi_i}} \quad (5.3)$$

Importante!

Como determinar as raízes à medida em que $K \in (0, \infty)$ é alterado?

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Conceitos Preliminares III

As condições (5.2) são reescritas com (5.3):

$$K = \prod_{i=1}^n |s - p_i| \Bigg/ \prod_{j=1}^m |s - z_j| \quad (5.4a)$$

$$\sum_{j=1}^m \psi_j - \sum_{i=1}^n \varphi_i = 180^\circ(2k + 1), k \in \mathbb{N} \quad (5.4b)$$

Observação

► Com a forma racional para a FTMA, se reescreve (5.1):

$$\hat{d}(s) + K\hat{n}(s) = 0 \quad (5.5)$$

- É evidente que $\text{gr}(\hat{d}) = n \geq m = \text{gr}(\hat{n})$;
- Cada polo gera uma raiz e seu traçado é dito um **ramo** do LR.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

1^a Regra: Simetria, Início e Fim do Traçado

Lema (Simetria)

O eixo real é um eixo de simetria do LR

Demonstração.

Basta notar que a equação característica tem coeficientes todos reais, logo, as raízes complexas aparecem em pares conjugados. □

Lema (Início e Fim do Traçado)

Os ramos do LR iniciam-se em seu polo e terminam em um zero da FTMA.

Demonstração.

Basta fazer $k \rightarrow 0$ e $k \rightarrow \infty$ em (5.5). □

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

2ª Regra: LR sobre o Eixo Real

Lema (LR sobre o Eixo Real)

Todos os pontos do eixo real que estejam à esquerda de um número ímpar de polos e zeros fazem parte do LR.

Demonstração.

Seja s um ponto do eixo real. Assim, se:

- ▶ $\varphi, \psi \in \mathbb{C}$: Então, $\varphi + \psi = 0$;
- ▶ $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ à esquerda: Então, $\varphi = \psi = 0$;
- ▶ $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ à direita: Então, $\varphi = \psi = 180^\circ$. Neste caso, se o número for ímpar, atende-se a (5.4).



Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

3^a Regra: Retas Assíntotas

Observação

Cada ramo LR inicia em um polo e termina em um zero. **E** se $n > m$?

Lema (Retas Assíntotas)

O LR possui $n - m$ ramos tendendo ao infinito assintoticamente a $n - m$ retas com coeficientes linear e angular:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_i}{n - m} \quad (5.6a)$$

$$\theta_{ak} = \frac{2k - 1}{n - m} 180^\circ, \quad k = 1, 2, \dots, n - m \quad (5.6b)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

4^a Regra: Ramificação do LR

Observação

Se existe LR no eixo real e fora dele, de onde partem tais ramos?

Lema (Ramificação)

Se $s_b \in \mathbb{C}$ é tal que existe cruzamento de ramos do LR, então:

$$\hat{d}(s_b)\hat{n}'(s_b) = \hat{n}(s_b)\hat{d}'(s_b) \quad (5.7)$$

Demonstração.

Note que s_b é raiz múltipla de (5.5), para um $K > 0$ bem escolhido. Logo, é raiz da derivada em relação a s de (5.5), para o mesmo K . Combinando estes resultados, chega-se a (5.7). □

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

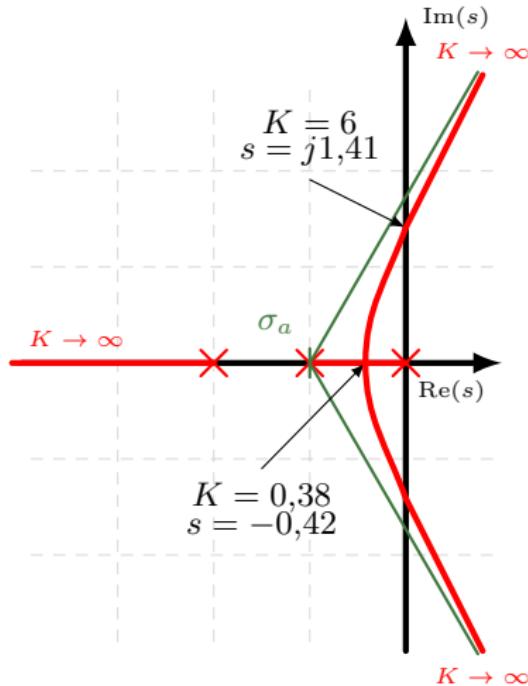
Controle Moderno

Sumário das Regras para o Traçado do LR

- i Posicione os polos ($K = 0$) e zeros ($K \rightarrow \infty$) no plano complexo;
- ii Determine o LR sobre o eixo real;
- iii Determine as assíntotas do LR com (5.6);
- iv Determine os pontos de ramificação com os respectivos ganhos K com (5.7);
- v Determine os pontos de cruzamento do eixo imaginário com os respectivos ganhos K , com o **critério de Routh-Hurwitz**;
- vi Determine os ângulos de partida e de chegada com (5.4b);

Exemplo

$$\hat{g}(s)\hat{h}(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$



Assíntotas com (5.6):

$$\sigma_a = \frac{0 - 1 - 2}{3 - 0} = -1$$

$$\theta_{ak} = (2k - 1)60^\circ$$

Quebras com (5.7) e (5.4a):

$$3s^2 + 6s + 2 = 0 \begin{cases} s_{b1} = -0,42 \\ s_{b2} = -1,58 \end{cases}$$

$$K = |s_{b1}(s_{b1} + 1)(s_{b1} + 2)| = 0,38$$

Cruzamento de $\text{Im}(s)$:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & 6 - K & (s = \pm j\sqrt{2}) \\ s^0 & K \end{array} \quad (K = 6)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

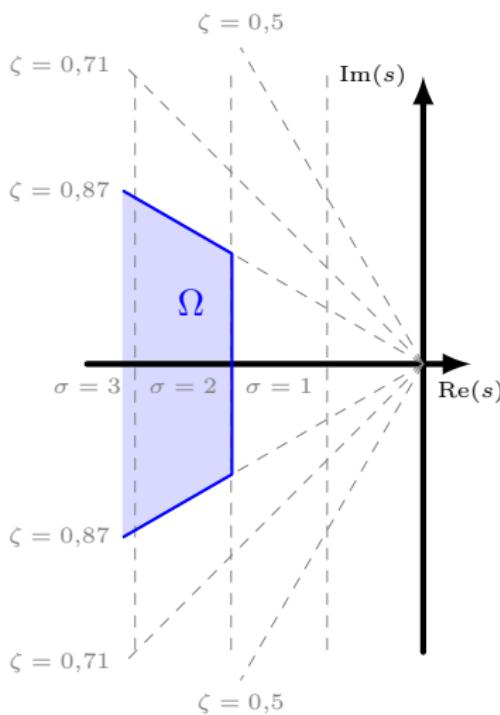
Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

A Região Ω de Desempenho Garantido



- Overshoot, de (3.28):

$$\exp\left(-\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) < M_{max} \quad (5.8)$$

- Tempo de acomodação, de (3.29):

$$\sigma_{max} > -\frac{\ln(\varepsilon)}{t_{\varepsilon max}} \quad (5.9)$$

- Para $M_{max} < 0,4\%$ e $\varepsilon(2s) < 2\%$...

Observação

Desempenho garantido: o desempenho real é, **pelo menos**, o das especificações!

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes**

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

O Projeto via Lugar das Raízes

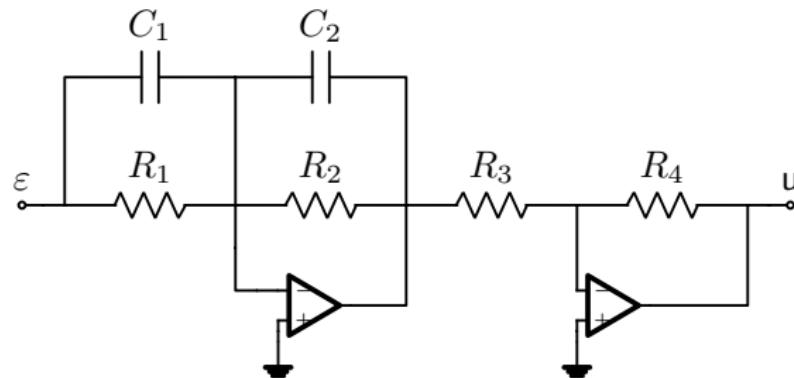
- ▶ O projeto de sistemas de controle deve atender a certas especificações:
 - ▶ Precisão (erro);
 - ▶ Estabilidade relativa;
 - ▶ Velocidade de resposta.
- ▶ Em muitos casos, um compensador P é suficiente;
- ▶ Em outros, o traçado do LR deve ser alterado;
- ▶ A planta é considerada dada. Esta alteração é responsabilidade do **compensador!**

Observação

O conhecimento do traçado do LR facilita o projeto do compensador!

Avanço e Atraso de Fase

- ▶ O compensador pode assumir qualquer estrutura: P, PI, PD, etc.
- ▶ Outra estrutura compensadora: avanço (atraso) de fase.



$$\hat{c}(s) = k_c \frac{s - z}{s - p} \quad (5.10)$$

- ▶ Se $p < z$, compensação avanço. Do contrário, atraso.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Considerações Gerais

- ▶ O compensador avanço aproxima-se do PD;
- ▶ Encontro das assíntotas: vai para a esquerda (sistema “mais estável”);
- ▶ $\hat{c}(0) < k_c$, os erros estáticos tendem a aumentar (vide aula 11);
- ▶ O compensador atraso aproxima-se do PI;
- ▶ Faz o contrário das características do PD;

Observação

*O projeto de sistemas de controle via LR é interessante para especificações no **domínio do tempo**: taxa de amortecimento, frequência natural não-amortecida, overshoot, tempos de subida e de acomodação.*

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Compensação em Avanço de Fase

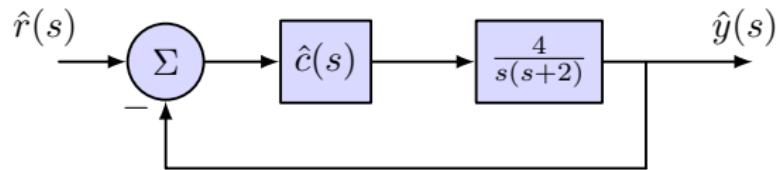
Reescreva (5.10) na forma avanço ($0 < \alpha < 1$):

$$\hat{c}(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (5.11)$$

Procedimento para projeto:

1. Estabeleça a localização das raízes dominantes;
2. Verifique se é possível obter as raízes por ajuste de ganho no LR;
3. Obtenha α e T a partir da necessidade angular (5.4b);
4. Obtenha k_c a partir da condição de magnitude (5.4a).

Exemplo de Projeto



- ▶ Especificações: $\varepsilon_p(\infty) = 0$, $t_s \leq 2\text{s}$ ($\varepsilon \leq 2\%$) e $M_p \leq 16\%$;
- ▶ A especificação de erro já foi atendida pela planta;
- ▶ Não é possível obter as raízes para as especificações dadas com compensador P (Por quê?);
- ▶ Escolha das raízes desejadas:

$$t_s \leq 2\text{s} (\varepsilon \leq 2\%) \xrightarrow{(3.29)} \sigma \geq 2$$

$$M_p = 16\% \xrightarrow{(3.28)} \zeta = 0,5 \implies \beta = 60^\circ$$

$$s_d = -2 \pm j2 \operatorname{tg} 60^\circ = -2 \pm j2\sqrt{3}$$

Exemplo de Projeto

Critério angular (15.4b):

$$\arg \left(\frac{4}{s(s+2)} \right) \Big|_{s=s_d} = -\arg(s_d) - \arg(s_d + 2) = -210^\circ$$

Assim, $\arg(\hat{c}(s_d)) = 30^\circ$ para que s_d entre no LR.
Posicionemos o zero em $-2,5$ e determinemos o polo:

$$\arg \left(k_c \frac{s+2,5}{s-p} \right) \Big|_{s=s_d} = 30^\circ \Rightarrow p = -4,7$$

Para que a raiz seja escolhida, deve-se ajustar o ganho com (5.4a):

$$K = 4k_c = \frac{|s_d + 4,7|}{|s_d + 2,5|} |s_d| |s_d + 2| = 17,4$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Compensação em Atraso de Fase

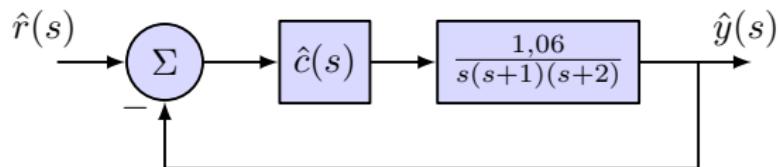
Reescreva (5.10) na forma avanço ($\alpha > 1$, constantes de tempo):

$$\hat{c}(s) = \alpha k_c \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad (5.12)$$

Procedimento para projeto:

1. Estabeleça a localização das raízes dominantes;
2. Determine o valor a ser adicionado à constante de erro;
3. Escolha o polo e o zero para esta adição, mas próximos entre si e da origem (assim, não alterarão o LR);
4. Desenhe o novo LR;
5. Determine k_c , com (5.4a), para as raízes desejadas.

Exemplo de Projeto



- ▶ Especificações: $\varepsilon_v(\infty) \leq 20\%$, $t_s \leq 12\text{s}$ ($\varepsilon \leq 2\%$) e $M_p \leq 16\%$;
- ▶ Não é possível adicionar um integrador puro;
- ▶ Erro atual:
$$\varepsilon_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s \hat{g}(s)} = 1,9$$
- ▶ A constante de erro de velocidade deve aumentar em 10 vezes!

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo de Projeto

- ▶ As raízes dominantes atuais, $s_d = -0,3307 \pm j0,5864$, já atendem as exigências de acomodação e overshoot.
- ▶ A forma (5.12) é útil neste caso, pois já se tem $\alpha k_c = 10$;
- ▶ Escolhe-se $\frac{1}{T} = 0,05$ e $\frac{1}{\alpha T} = 0,005$
- ▶ Para o ajuste de ganho, usa-se (5.4a):

$$K = \frac{1}{1,06} \left| \frac{s(s + 0,005)(s + 1)(s + 2)}{s + 0,05} \right|_{s=s_d} = 0,9656$$

Observação

Qual o preço pago pela melhoria do erro estático de velocidade?

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Compensação em Avanço e Atraso de Fase

Procedimento para projeto:

1. Estabeleça a localização das raízes dominantes;
2. Determine a deficiência angular a ser provida pela parcela avanço;
3. Projete a parcela avanço, prevendo que o ganho da parcela atraso será próximo à unidade;
4. Corrija o erro estático com a parcela atraso, mantendo:
 - ▶ Magnitude próxima à unidade;
 - ▶ Decremento inferior a 5° na fase.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

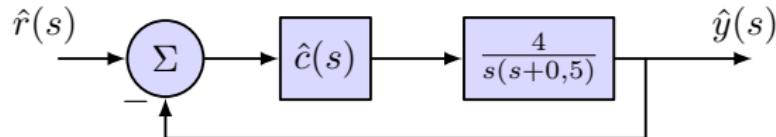
Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo de Projeto



- ▶ Especificações: $\zeta \geq 0,5$, $\sigma \leq -2$ e $K_v \geq 80$;
- ▶ As raízes atuais, $-0,25 \pm j1,98$, não atendem;
- ▶ A constante de erro de velocidade, tampouco.

Importante!

Para atender às especificações, pode ser interessante posicionar as raízes desejadas “mais para dentro” da região Ω . Aqui, faremos $s_d = -3 \pm j4$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Aula 14

Aula 15

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo de Projeto

► Etapa avanço:

Posicionando o zero do compensador em -1 , note que a deficiência angular é de 48° . Logo:

$$\arg(s_d - p) = 48^\circ \Rightarrow p = -6,6$$

Do critério de magnitude (5.4a):

$$\left| k_c \frac{s+1}{s+6,6} \frac{4}{s(s+0,5)} \right| = 1 \Rightarrow k_c = 7,1$$

► Etapa atraso:

Note que $K_v = 8,6$ com a inserção do avanço. Usando (5.12) (sem k_c), devemos fazer $\alpha \approx 9,3$. Usando a recomendação de que o polo e o zero devem ser próximos entre si e da origem, escolhe-se $T = 10$.

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Avanço e Atraso na Resposta Senoidal I

Considere um SLIT-C-SISO estável, submetido a uma excitação da forma:

$$u(t) = U_{\max} \operatorname{sen} \omega t \quad (6.1)$$

A FT do sistema pode ser escrita como:

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{n}(s)}{\prod_{i=1}^n s - s_i} \quad (6.2)$$

Logo, a saída fica:

$$\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s) = \frac{\hat{n}(s)}{\prod_{i=1}^n s - s_i} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} U_{\max} \quad (6.3)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Avanço e Atraso na Resposta Senoidal II

Aplicando a TIL a (6.3):

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{s - s_i} \right] \\&= ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + \underbrace{\sum_{i=1}^n b_i e^{s_i t}}_{\text{vai a } 0 \text{ para } t \rightarrow \infty}\end{aligned}\quad (6.4)$$

Observação

Em (6.4), por simplicidade, foi desconsiderada a possibilidade da existência de polos múltiplos. Se existirem, então teremos termos da forma $t^h e^{s_i t}$ para o i -ésimo resíduo.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Avanço e Atraso na Resposta Senoidal III

Calculemos os resíduos a e \bar{a} .

$$a = U_{\max} \hat{g}(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{U_{\max}}{j2} \hat{g}(-j\omega) \quad (6.5)$$

Como \bar{a} é o conjugado de a :

$$\bar{a} = \frac{U_{\max}}{j2} \hat{g}(j\omega) \quad (6.6)$$

Defina-se

$$\hat{g}(j\omega) = |\hat{g}(j\omega)| e^{j\varphi} \quad (6.7a)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\text{Im}(\hat{g}(j\omega))}{\text{Re}(\hat{g}(j\omega))} \quad (6.7b)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Avanço e Atraso na Resposta Senoidal IV

Aplicando (6.5), (6.6) e (6.7) a (6.4), com

$t \gg \max_{i=1:n} \{-\operatorname{Re}(s_i)^{-1}\}$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{U_{\max}}{j2} |\hat{g}(j\omega)| e^{j\varphi} e^{j\omega t} - \frac{U_{\max}}{j2} |\hat{g}(j\omega)| e^{-j\varphi} e^{-j\omega t} \\ &= U_{\max} |\hat{g}(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}}{j2} \\ &= U_{\max} |\hat{g}(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Importante!

Um SLIT-C excitado por uma entrada senoidal responde de forma senoidal, na mesma frequência da entrada.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Resposta em Frequência

- ▶ **Resposta em Frequência:** Resposta em regime a uma entrada senoidal.
- ▶ A representação gráfica da resposta em frequência, $\hat{g}(j\omega)$, pode ser feita por:
 - ▶ Diagramas de Bode (logarítmicos);
 - ▶ Diagramas de Nyquist (polares);
 - ▶ Diagramas de Black-Nichols (log magnitude *versus* fase).

Diagramas de Bode

A resposta em frequência pode ser reescrita como:

$$\hat{g}(j\omega) = |\hat{g}(j\omega)| e^{j \arg(\hat{g}(j\omega))} \quad (6.9)$$

Para simplificar as respostas de produtos de FTs, define-se:

$$||\hat{g}(j\omega)|| = 20 \log |\hat{g}(j\omega)| \quad [\text{dB}] \quad (6.10)$$

Pois, para $\hat{g}(s)\hat{h}(s)$:

$$\hat{g}(j\omega)\hat{h}(j\omega) = |\hat{g}(j\omega)\hat{h}(j\omega)| e^{j(\arg(\hat{g}(j\omega))+\arg(\hat{h}(j\omega)))} \quad (6.11)$$

Logo:

$$||\hat{g}(j\omega)\hat{h}(j\omega)|| = ||\hat{g}(j\omega)|| + ||\hat{h}(j\omega)|| \quad (6.12a)$$

$$\arg(\hat{g}(j\omega)\hat{h}(j\omega)) = \arg(\hat{g}(j\omega)) + \arg(\hat{h}(j\omega)) \quad (6.12b)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Regras para o Traçado

Observação

Diagramas de Bode: Dois gráficos, $||\hat{g}|| \times \log \omega$ e $\arg(\hat{g}) \times \log \omega$.

O traçado dos diagramas de Bode necessita de papel mono-log!

- ▶ Como a FT é uma função racional, determinamos apenas 4 termos:
 - ▶ Termo constante;
 - ▶ Fator integrador ou derivador;
 - ▶ Fator de 1^a ordem;
 - ▶ Fator de 2^a ordem.
- ▶ Diagramas exatos: Difícil construção, não apresenta erro;
- ▶ Diagramas assintóticos: Simples, porém com erros.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Termos Constante e Integrador/Derivador

Ganho constante ($K > 0$):

$$||K|| = 20 \log |K| \quad (6.13a)$$

$$\arg(K) = 0^\circ \quad (6.13b)$$

Termo integrador/derivador:

$$||(j\omega)^{\pm 1}|| = 20 \log |(j\omega)^{\pm 1}| = \pm 20 \log |\omega| \quad (6.14a)$$

$$\arg((j\omega)^{\pm 1}) = \arg(\pm j\omega^{\pm 1}) = \pm 90^\circ \quad (6.14b)$$

Observação

Termo constante: ganho constante e fase nula para $\omega \in [0, \infty)$.

Termo integrador/derivador: variação de $\pm 20\text{dB}$ por década, desde a origem e fase constante em $\pm 90^\circ$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Termo de 1^a Ordem $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$

Determinação de ganho e de fase:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &= 20 \log \left| \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1} \right| = \pm 20 \log \left| 1 + j\frac{\omega}{\omega_n} \right| \\ &= \pm 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right) \quad (6.15a) \end{aligned}$$

$$\arg(\cdot) = \pm \arctg \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \quad (6.15b)$$

Regras assintóticas:

- ▶ Ganho: Nulo até ω_n , a partir de então $\pm 20\text{dB}$ por década.
- ▶ Fase: Nula até uma década antes de ω_n . $\pm 90^\circ$ uma década após ω_n . Variação linear entre estes valores.

Termo de 1^a Ordem $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

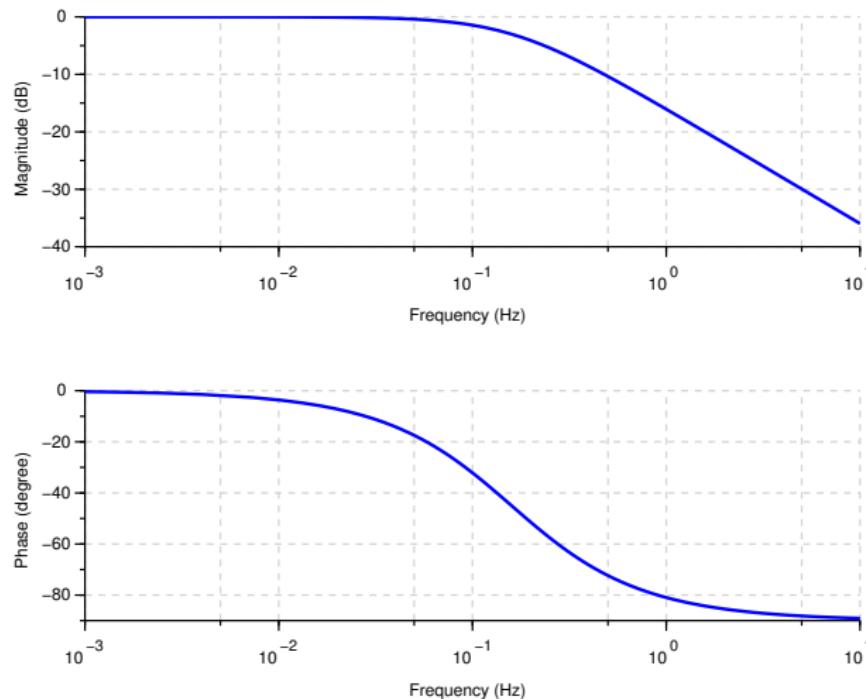
Controle PID

Controle Moderno

$\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$	$ \hat{g} [\text{dB}]$	$\arg(\hat{g})[^\circ]$
-3	$\pm 4,34 \cdot 10^{-6}$	$\pm 0,057$
-2	$\pm 4,34 \cdot 10^{-4}$	$\pm 0,57$
-1	$\pm 4,32 \cdot 10^{-2}$	$\pm 5,7$
0	$\pm 3,01$	± 45
1	$\pm 20,04$	$\pm 84,29$
2	± 40	$\pm 89,43$
3	± 60	$\pm 89,94$

Termo de 1^a Ordem $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$

- Introdução
- Modelagem
- Resp. Transitória
- Sist. Realimentados
- Lugar das Raízes
- Resp. em Frequência
- Aula 16
- Aula 17
- Aula 18
- Aula 19
- Aula 20
- Controle PID
- Controle Moderno



Termo de 2^a Ordem $\left(1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{\pm 1}$

- Introdução
- Modelagem
- Resp. Transitória
- Sist. Realimentados
- Lugar das Raízes
- Resp. em Frequência
- Aula 16
- Aula 17
- Aula 18
- Aula 19
- Aula 20
- Controle PID
- Controle Moderno

Observação

Interessa apenas o caso subamortecido. Por quê?

Ganho e fase:

$$|| \cdot || = \pm 10 \log \left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right) \quad (6.16a)$$

$$\arg(\cdot) = \pm \arctg \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right) \quad (6.16b)$$

Termo de 2^a Ordem $\left(1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^{\pm 1}$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Algumas observações:

- ▶ Traçado fortemente dependente do amortecimento!
- ▶ Para $\omega \ll \omega_n$: $\|\cdot\|, \arg(\cdot) \rightarrow 0$;
- ▶ Para $\omega \gg \omega_n$: $\arg(\cdot) \rightarrow 180^\circ$, e:

$$\|\cdot\| \rightarrow \pm 40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \quad (6.17)$$

- ▶ Para $\omega = \omega_n$, $\arg(\cdot) = \pm 90^\circ$ e o ganho:

$$\|\cdot\| = \pm 20 \log(2\zeta) \quad (6.18)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Frequência e Pico de Ressonância

Considere a FT senoidal:

$$\hat{g}(j\omega) = \frac{1}{\hat{d}(j\omega)} = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (6.19)$$

- ▶ **Pico de ressonância (M_r):** Máximo ganho;
- ▶ **Freq. de ressonância (ω_r):** Frequência onde ocorre M_r .

Aplicando as técnicas de obtenção de mínimo em $||\hat{d}(j\omega)||$:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (6.20a)$$

$$M_r = ||\hat{g}(j\omega_r)|| = \left(2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}\right)^{-1} \quad (6.20b)$$

Observação

Não há ressonância para $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

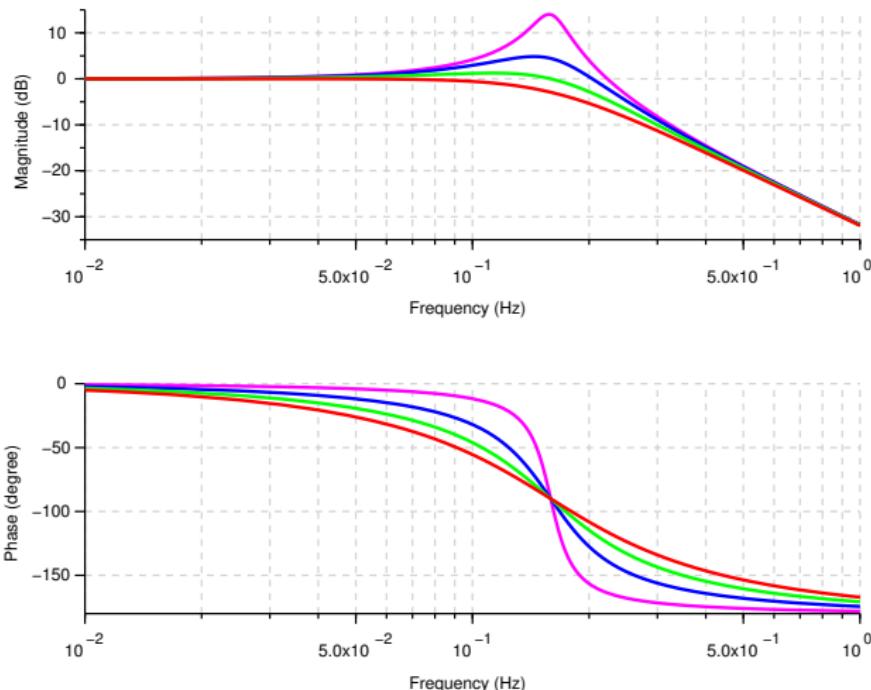
Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

$\zeta = 0,1$, $\zeta = 0,3$, $\zeta = 0,5$ e $\zeta = 0,707$



Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas de Fase Mínima

Importante!

Considere um SLIT-C **estável**. Diz-se que este é de fase mínima se seus zeros estiverem no semi-plano complexo esquerdo.

Importante!

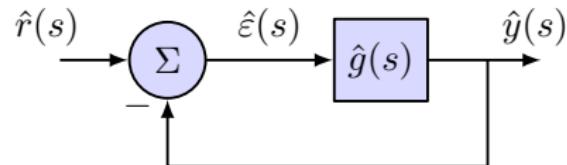
Sejam $\hat{g}(s)$ e $\hat{h}(s)$ SLIT-Cs estáveis, $\hat{g}(s)$ de fase mínima, e $||\hat{g}(j\omega)|| = ||\hat{h}(j\omega)||$, $\forall \omega > 0$. Então a excursão de fase de \hat{g} é menor ou igual à de \hat{h} .

Observação

O sistema $\hat{g}(s) = e^{-sT}$, $T > 0$ (atraso de transporte puro) é de fase não-mínima. (**Por quê?**)

Curva de Ganho e Erros Estáticos

Considere o sistema:



Partindo de (11.8), pode-se reescrever:

$$\hat{g}(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^N} \frac{\prod_{k=1}^m (1 + j\omega\tau_k)}{\prod_{i=1}^{n-N} (1 + j\omega T_i)} \quad (6.21)$$

Observação

Note que, com o TVF, $s \rightarrow 0 \Rightarrow \omega \rightarrow 0$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Curva de Ganho e Erros Estáticos

Partindo de (4.22):

$$\|\hat{g}(j0)\| = 20 \log K_p, \quad N = 0 \quad (6.22)$$

Partindo de (4.24):

$$\|\hat{g}(j\omega)\| = 20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega} \right|, \quad N = 1 \quad (6.23)$$

Em (4.23), $\|\hat{g}(jK_v)\| = 0$ dB. Partindo de (4.26):

$$\|\hat{g}(j\omega)\| = 20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega)^2} \right|, \quad N = 2 \quad (6.24)$$

Similarmente, para $\|\hat{g}(j\sqrt{K_a})\| = 0$, obtém-se a constante de erro.

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist**
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Diagramas de Nyquist: Introdução

- ▶ Nesta representação, a frequência está **implícita**;
- ▶ Diagrama de Nyquist (DN): $\text{Re}(\hat{g}(j\omega)) \times \text{Im}(\hat{g}(j\omega))$;
- ▶ Vantagens: plotagem única, obtenção de magnitude e ângulo por simples inspeção;
- ▶ Desvantagem: não é possível determinar as contribuições individuais dos polos e zeros;
- ▶ A título ilustrativo, faremos o estudo dos termos possíveis em uma FT.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

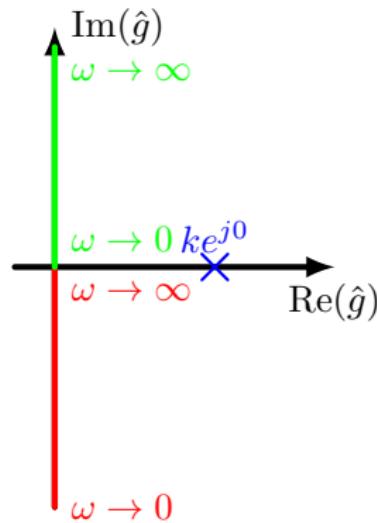
Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Termo Constante e Termo Integrador/Derivador



Termo constante:

$$\hat{g}(j\omega) = K = Ke^{j0} \quad (6.25)$$

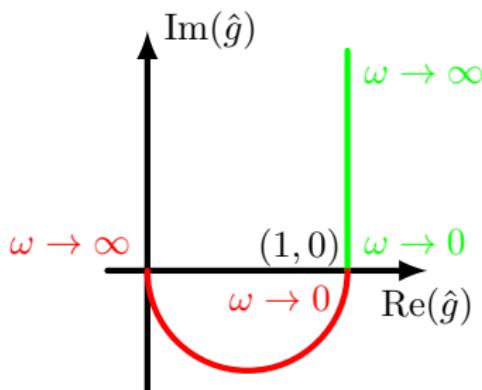
Termo integrador/derivador:

$$\hat{g}(j\omega) = (j\omega)^{\pm 1} = \omega^{\pm 1} e^{\pm j\frac{\pi}{2}} \quad (6.26)$$

Observação

Para o termo constante, temos apenas um ponto. Para integrador/derivador, uma semi-reta vertical iniciando na origem.

Termo de 1^a Ordem



É trivial o resultado para expoente positivo de

$$\hat{g}(j\omega) = \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$$

Para o caso negativo, note que:

$$|\hat{g}(j\omega) - 0,5| = \left| \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_n}} - 0,5 \right| = \left| 0,5 \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_n}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_n}} \right| = 0,5$$

Ou seja, é parte de uma circunferência de raio e centro iguais a 0,5. Na verdade, a parte inferior. (Por quê?)

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

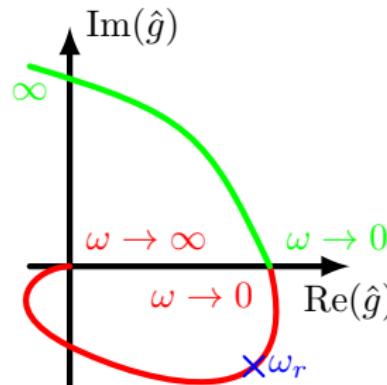
Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Termo de 2^a Ordem



- ▶ O caso dos zeros é trivial;
- ▶ Só interessa o caso dos polos subamortecidos;
- ▶ Observe que:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{g}(j\omega) = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{g}(j\omega) = 0$$

$$\hat{g}(j\omega_n) = -j \frac{1}{2\zeta}$$

- ▶ A frequência de ressonância ocorre no ponto mais distante da origem.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Efeito do Atraso de Transporte

O atraso de transporte, no domínio da frequência é escrito como:

$$\hat{g}(j\omega) = e^{-j\omega T} = \cos \omega T - j \sin \omega T \quad (6.27)$$

Observação

O DN do atraso de transporte é a circunferência unitária centrada na origem, girando no sentido horário.

Importante!

*O atraso de transporte adiciona a fase $-\omega T$ a **todos** os pontos do diagrama de Nyquist traçado com os demais termos.*

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

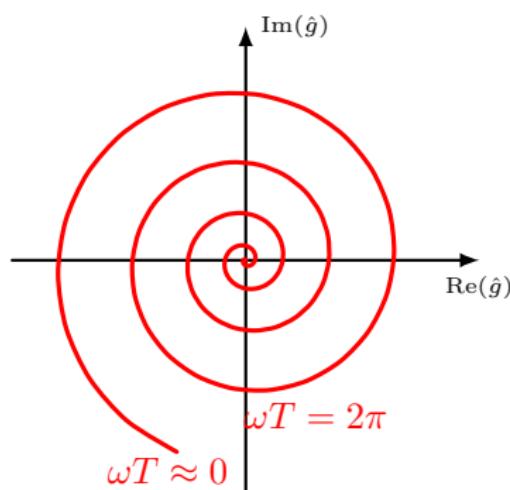
Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Exemplo: Integrador com Atraso $\hat{g}(s) = \frac{e^{-sT}}{s}$



Observe que:

$$\begin{aligned}\hat{g}(j\omega) &= -j \frac{1}{\omega} e^{-j\omega T} \\ &= \frac{1}{\omega} e^{-j\left(\omega T + \frac{\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

Assim:

- ▶ $|\hat{g}(j0)| \rightarrow \infty;$
- ▶ $\arg(\hat{g}(j0)) \rightarrow -90^\circ;$
- ▶ $|\hat{g}(j\infty)| \rightarrow 0$
- ▶ O diagrama “gira” no sentido horário.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Regras Gerais do Diagrama de Nyquist

Considere uma FT senoidal dada por (6.21), causal e estritamente própria. Se:

- ▶ $N = 0$, o DN inicia-se perpendicularmente ao eixo real em um valor positivo e termina na origem, tangenciando um dos eixos;
- ▶ $N = 1$, o DN inicia-se com magnitude infinita e fase de -90° e termina com magnitude nula, tangenciando um dos eixos;
- ▶ $N = 2$: similar ao anterior, com fase inicial de -180° .
- ▶ O traçado intermediário do DN depende dos termos do numerador.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Funções Complexas e Seus Mapeamentos

Seja $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa. Então:

- 1º Se $l \subset \mathcal{D}(F)$ é uma curva fechada que não contém singularidades de F , então $F(l) \subset \mathcal{CD}(F)$ é fechada;
- 2º Se l contém n polos (m zeros) de F em seu interior e gira no sentido horário, então $F(l)$ circundará a origem n (m) vezes no sentido anti-horário (horário);

Teorema (Mapeamento)

Sejam $F(s)$ uma função complexa racional e P e Z , respectivamente o número de polos e de zeros de F , circundados por uma curva fechada $l \subset \mathcal{D}(F)$ que não passe por polo ou zero de F . Então, o número de circundações de $F(l)$ em torno da origem no sentido horário, N , é:

$$N = Z - P \tag{6.28}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

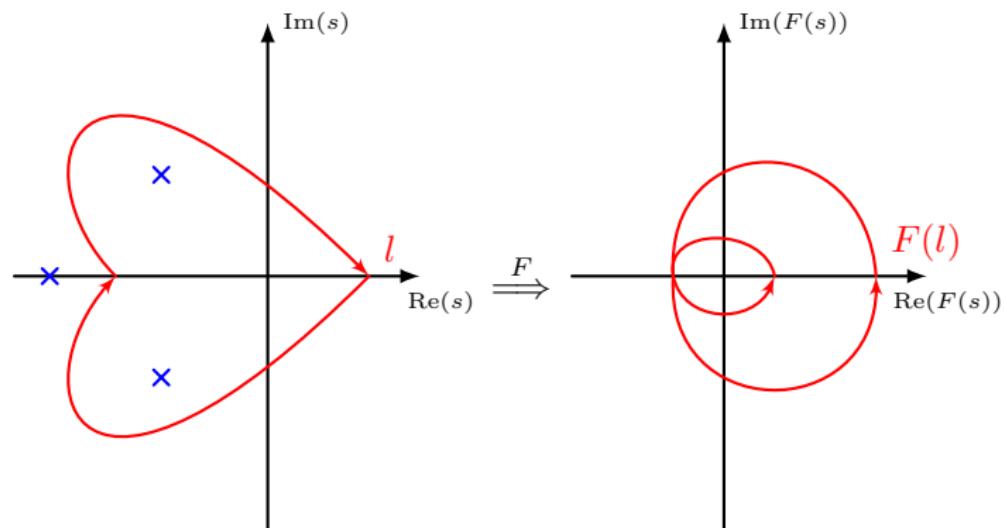
Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Funções Complexas e Seus Mapeamentos



Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Mapeamento e Estabilidade de SLIT-Cs

Considere o sistema realimentado, (2.4), então:

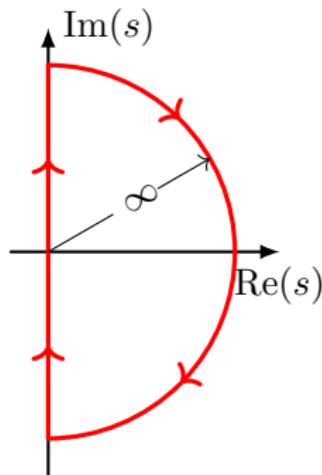
$$F(s) = 1 + \hat{g}(s)\hat{h}(s) \quad (6.29)$$

deverá ter todas as raízes (zeros!) no semi-plano esquerdo.

- ▶ A curva da figura é chamada **caminho de Nyquist**;
- ▶ Tal caminho não poderá conter zeros de (6.29) (para estabilidade);

Observação

Apenas o caminho de $-j\infty$ a $j\infty$ será utilizado para o DN se for constante



$$\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{g}(s)\hat{h}(s) \quad (6.30)$$

Critério de Estabilidade de Nyquist

Teorema (Critério de Estabilidade de Nyquist)

Se a FTMA tem k polos no semi-plano direito (no domínio) e (6.30) vale, então o DN dessa FTMA, com $\omega \in (-\infty, \infty)$, deverá circundar k vezes o ponto $-1 + j0$ no sentido anti-horário para que o sistema seja estável.

Importante!

Em outras palavras, adaptando (6.28):

$$P_f = N + P_a \quad (6.31)$$

- ▶ *N é contado positivo no sentido horário e em torno de $-1 + j0$;*
- ▶ *O critério vale mesmo com polos ou zeros da FTMA sobre a origem.*
- ▶ *Se o DN passar por $-1 + j0$, há raiz sobre o eixo imaginário (E daí?);*

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho**
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

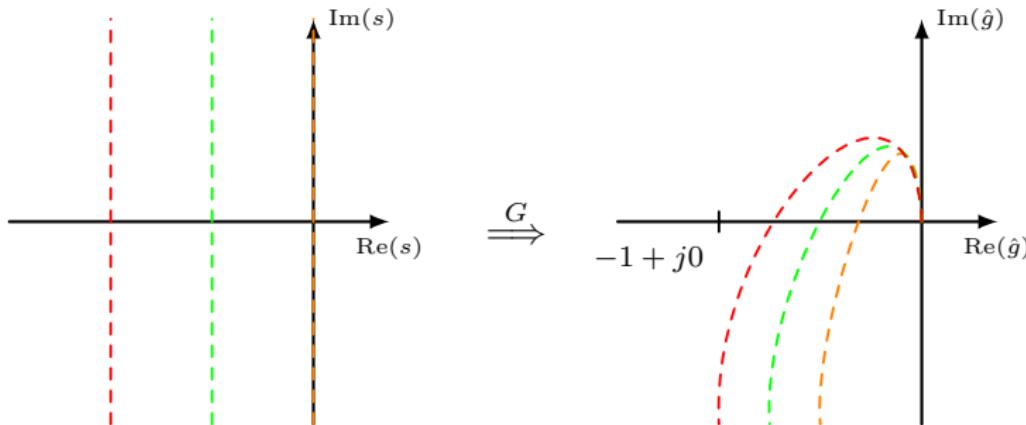
- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Estabilidade Relativa

- ▶ Pode ser realizada com a mudança de variável proposta em (4.38);
- ▶ Para **realimentação unitária** tome a FTMA estável $\hat{g}(s)$;
- ▶ Considere o mapeamento:



Importante!

O diagrama de Nyquist não pode abraçar o ponto $-1 + j0$!

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Margens de Fase e de Ganho

Com a finalidade de verificar a estabilidade relativa, define-se:

- ▶ **Margem de Fase (MF)**: É o avanço de fase, na frequência de cruzamento do ganho ($||\hat{g}(j\omega_g)|| = 0\text{dB}$), que leva o sistema à estabilidade marginal.
- ▶ **Margem de Ganho (MG)**: É o inverso da magnitude na frequência em que a fase torna-se $\arg(\hat{g}(j\omega_f)) = 180^\circ$.

$$MF = 180^\circ + \arg(\hat{g}(j\omega_g)) \quad (6.32a)$$

$$MG = -20 \log |\hat{g}(j\omega_f)| \quad (6.32b)$$

Observação

Para estabilidade absoluta, deve-se ter $MF, MG > 0$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

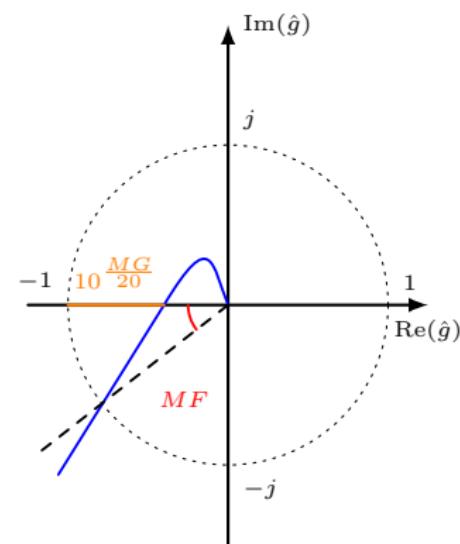
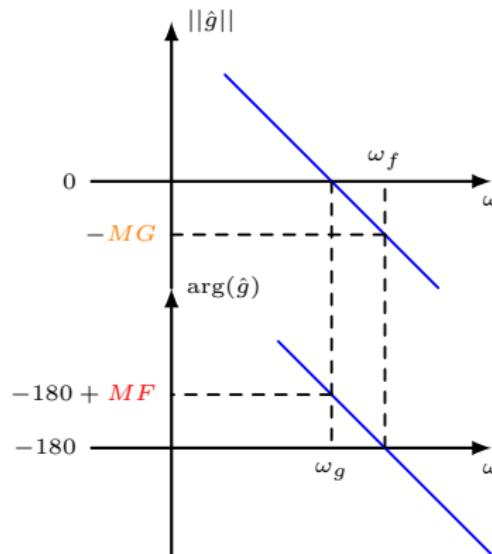
Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

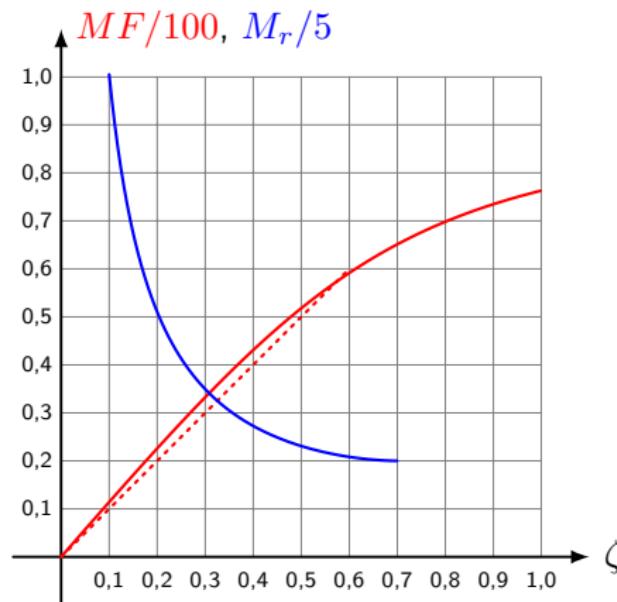
Margens de Fase e de Ganhos



Observação

O critério de estabilidade com MF e MG supõe sistema de fase mínima!

Correlação entre MF , M_r e ζ



Relação entre MF e ζ (sistema de 2^a ordem):

$$MF = \arctg \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \quad (6.33)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

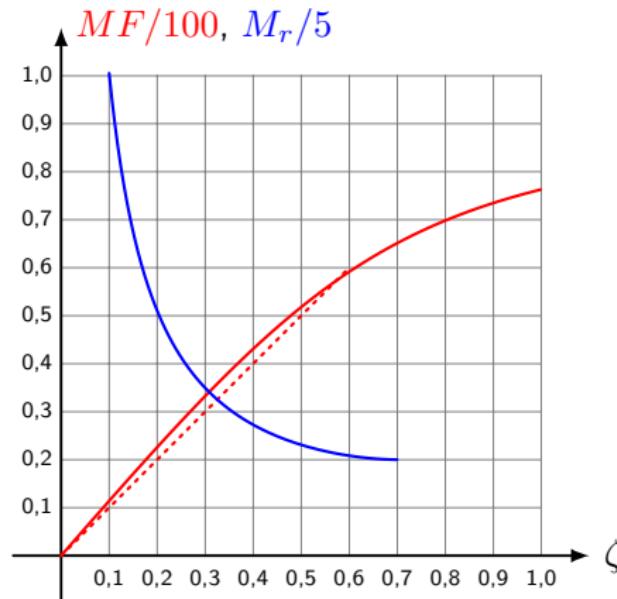
Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Correlação entre MF , M_r e ζ



Para $0 \leq \zeta \leq 0,6$, vale:

$$MF \approx 100\zeta \quad (6.34)$$

Frequência de Corte, Banda Passante e Dinâmica

- A **frequência de corte** é a frequência ω_b , tal que se $\omega > \omega_b$, então:

$$||\hat{g}(j\omega)|| - ||\hat{g}(j0)|| \leq -3\text{dB} \quad (6.35)$$

- O intervalo $[0, \omega_b]$ é chamado **banda passante** e indica:
 - i Velocidade de resposta: alto ω_b , pequeno t_r ;
 - ii Características de filtragem de ruídos de alta frequência.

Exemplo

Faça a análise da planta em realimentação unitária

$$\hat{g}(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+5)}$$

para $k = 10$ e $k = 100$.

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada**
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Relação Malha Aberta e Malha Fechada

Considere sistema em malha fechada e realimentação unitária:

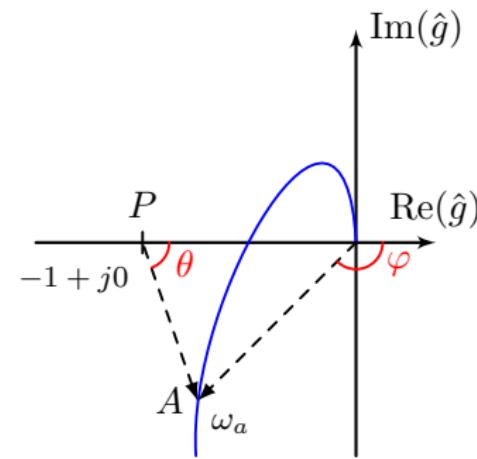
Observe que $\vec{OA} = \hat{g}(j\omega_a)$ e que $\vec{PA} = 1 + \hat{g}(j\omega_a)$. Logo:

$$\frac{\|\vec{OA}\|}{\|\vec{PA}\|} = \left| \frac{\hat{g}(j\omega_a)}{1 + \hat{g}(j\omega_a)} \right| \quad (6.36a)$$

$$\arg \left(\frac{\hat{g}(j\omega_a)}{1 + \hat{g}(j\omega_a)} \right) = \varphi - \theta \quad (6.36b)$$

Defina:

$$\frac{\hat{y}(j\omega)}{\hat{r}(j\omega)} = M(j\omega) e^{j\alpha(j\omega)} \quad (6.37)$$



Observação

Deseja-se determinar os lugares geométricos de ganho e de fase constantes, para a FTMF.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Lugares de Magnitude Constante I

Escreva $\hat{g}(j\omega) = X(j\omega) + jY(j\omega) = X + jY$. Tendo em vista (6.36a), a magnitude, M , é dada por:

$$M^2 = \frac{|X + jY|^2}{|1 + X + jY|^2} = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}$$

ou, ainda:

$$(1 - M^2)X^2 - 2M^2X - M^2 + (1 - M^2)Y^2 = 0 \quad (6.38)$$

Importante!

Se $M = 1$, temos uma reta vertical, passando por $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Lugares de Magnitude Constante II

Para $M \neq 1$, pode-se fazer:

$$\left(X + \frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} \quad (6.39)$$

Observação

(6.39) é uma circunferência com centro em $\left(-\frac{M^2}{M^2 - 1}, 0\right)$ e raio

$$\left| \frac{M}{M^2 - 1} \right|.$$

Note, ainda, que:

$M < 1 \Rightarrow$ centro à direita da reta (6.38)

$M > 1 \Rightarrow$ centro à esquerda da reta (6.38)

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Lugares de Fase Constante I

De forma similar à obtenção do ganho, para a fase, temos:

$$\alpha = \arg\left(\frac{X + jY}{1 + X + jY}\right) = \arctg \frac{Y}{X} - \arctg \frac{Y}{1 + X}$$

Definindo $N = \tg \alpha$ e usando $\tg(A - B) = \frac{\tg A - \tg B}{1 + \tg A \tg B}$:

$$N = \frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{1+X}}{1 + \frac{Y}{X} \frac{Y}{1+X}} \Rightarrow X^2 + X + Y^2 - \frac{1}{N}Y = 0$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Lugares de Fase Constante II

Somando $\frac{1}{4} + \frac{1}{(2N)^2}$ a ambos os membros:

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{(2N)^2} \quad (6.40)$$

Observação

- i *O N-círculo de α e o de $\alpha \pm 180^\circ$ são o mesmo.*
- ii *Os M-círculos e N-círculos, no diagrama de Nyquist, dão origem à carta de Hall.*

Diagrama de Black e a Carta de Nichols

- ▶ **Diagrama de Black:** É a representação gráfica de $||\hat{g}|| \times \arg(\hat{g})$;
- ▶ Frequência implícita, mas MF e MG são facilmente reconhecíveis;
- ▶ **Carta de Nichols:** Plotagem dos M -círculos e N -círculos no diagrama de Black;
- ▶ Esses círculos não aparecerão como tais no diagrama de Black. (**Por quê?**)

Exemplo

Analice o sistema com:

$$\hat{g}(s) = \frac{k}{s(s+1)(0,5s+1)}$$

e obtenha MF, MG, ζ , M_r e ω_b . O que ocorre com a alteração de k ?

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Determinação Experimental de FTs

- ▶ Em muitos casos, é difícil estabelecer um modelo analítico para sistemas;
- ▶ Um modelo aproximado pode ser obtido por testes na resposta em frequência;
- ▶ Procedimento:
 - 1º Excitar a entrada do sistema com um sinal senoidal: amplitude, frequência e fase conhecidas;
 - 2º Coletar o sinal (senoidal) de saída: amplitude e fase;
 - 3º Repetir para diversas frequências;
 - 4º Traçar os diagramas de Bode e obter uma FT aproximada;

Sistemas de Fase Mínima

Importante!

Ao observar o diagrama de fase em $\omega \rightarrow \infty$:

$$\arg(\hat{g}(j\infty)) = -90^\circ(n - m) \Leftrightarrow \text{fase mínima (Por quê?)}$$

► Com os dados experimentais observe-se:

- i Cada variação de $\pm 20\text{dB/década}$ implica em um termo da forma

$$\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^{\pm 1} \quad (6.41)$$

- ii Cada variação de $\pm 40\text{dB/década}$ implica em um termo da forma

$$\left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_o} + \left(\frac{s}{\omega_o}\right)^2\right)^{\pm 1} \quad (6.42)$$

- iii O valor de ζ é obtido ao observar o pico de ressonância (em ω_o).

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Sistemas de Fase Mínima

► Na região de baixa frequência ($\omega \ll \min\{\omega_{c_i}, \omega_{o_i}\}$):

- i Apenas termos constantes, derivadores ou integradores são detectados:

$$k \cdot s^{\pm N} \quad (6.43)$$

- ii Sistemas tipo 0: O ganho é horizontal e igual a $20 \log k$
- iii Sistemas tipo 1: Inclinação de -20dB/década e $\hat{g}(jk) = 0 \text{dB}$.
- iv Sistemas tipo 2: Inclinação de -40dB/década e $\hat{g}(j\sqrt{k}) = 0 \text{dB}$.

Sistemas de Fase Não-Mínima

- ▶ O caso mais comum ocorre quando há uma variação constante da fase com a frequência;
- ▶ Assim, pode-se assumir que há um atraso de transporte no sistema, da forma:

$$\hat{g}(s) = \hat{h}(s)e^{-Ts} \quad (6.44)$$

- ▶ Assim, observe que:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d}{d\omega} \arg(\hat{h}(s)e^{-Ts}) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d}{d\omega} (-90^\circ(n-m) - \omega T) = -T$$

- ▶ Então, a partir dessa inclinação, para a região $\omega \gg \max\{\omega_{c_i}, \omega_{o_i}\}$, se pode obter o termo referente ao atraso de transporte.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Comentários Finais

- ▶ É mais simples obter medidas acuradas de amplitude do que de fase;
- ▶ O equipamento de medida deve ter resposta em frequência:
 - ▶ plana para magnitude;
 - ▶ proporcional à frequência para a fase;
- ▶ O sistema a ser caracterizado pode ter muitas não-linearidades. Estas podem acarretar:
 - ▶ Saturação para sinais de teste com grande amplitude;
 - ▶ Zona morta para sinais de teste com pequena amplitude;

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Regime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores**

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Projeto de Compensadores: Introdução

- ▶ Se a compensação introduzida não for tipo P, o DN altera seu formato;
- ▶ Assim, é mais conveniente o uso de diagramas de Bode para projetar compensadores;
- ▶ Características desejadas na resposta em malha aberta:
 - ▶ alto ganho na região de baixa frequência;
 - ▶ cruzamento de ganho com inclinação de -20dB por década;
 - ▶ atenuação significativa na região de alta frequência.

Observação

Os objetivos das compensações a serem apresentadas aqui são as mesmas na abordagem pelo LR.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Compensação em Avanço de Fase I

Este compensador foi apresentado em (5.11) e será reescrito como:

$$\hat{c}(s) = \alpha k_c \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (6.45)$$

Observe que $\hat{c}(j0) = \alpha k_c$ e que $\hat{c}(j\infty) = k_c$. Para o restante de seu DN:

$$\begin{aligned} \left| \hat{c}(j\omega) - \frac{k_c(1 + \alpha)}{2} \right| &= k_c \left| \alpha \frac{j\omega T + 1}{j\alpha\omega T + 1} - \frac{1 + \alpha}{2} \right| \\ &= \frac{k_c(1 - \alpha)}{2} \left| \frac{j\alpha\omega T - 1}{j\alpha\omega T + 1} \right| \\ &= k_c \frac{1 - \alpha}{2} \end{aligned} \quad (6.46)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Aula 16

Aula 17

Aula 18

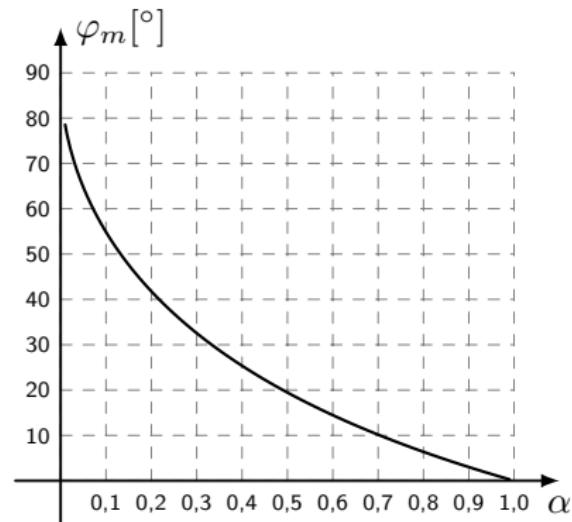
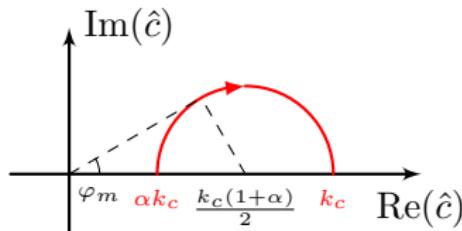
Aula 19

Aula 20

Controle PID

Controle Moderno

Compensação em Avanço de Fase II



Avanço máximo de fase:

$$\varphi_m = \text{arcsen} \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right) \quad (6.47)$$

Frequência onde φ_m ocorre:

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad (6.48)$$

Compensação em Avanço de Fase - Projeto

O procedimento para o projeto segue os passos:

- i Determine o ganho (αk_c) necessário para a exigência de erro estático;
- ii Plote os diagramas de Bode e avalie a margem de fase;
- iii Determine α a partir de (6.47);
- iv Escolha a nova frequência de cruzamento de ganho com:

$$\|\hat{g}(j\tilde{\omega}_g)\| = 10 \log \alpha \quad (6.49)$$

- v Use (6.48) para determinar T ;
- vi Determine k_c com os resultados anteriores.

Exemplo

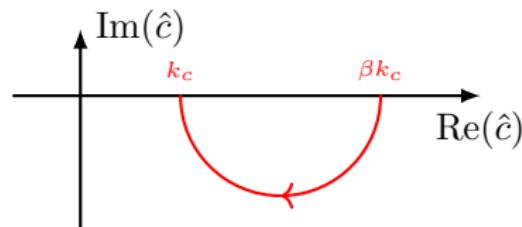
Projete um compensador avanço para $K_v \geq 20$, $MF \geq 50^\circ$ e $MG \geq 10\text{dB}$, para a planta:

$$\hat{g}(s) = \frac{4}{s(s + 2)}$$

Compensação em Atraso de Fase I

Este compensador foi apresentado em (5.12) e será reescrito como:

$$\hat{c}(s) = \beta k_c \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}, \quad \beta > 1 \quad (6.50)$$



Observação

O atraso mínimo deste compensador não é de interesse pois, se usado de forma análoga à compensação avanço, a margem de fase seria reduzida.

Compensação em Atraso de Fase II

- ▶ O compensador atraso afeta a MG. Considere
 - ▶ $\omega_f \gg T^{-1} > (\beta T)^{-1}$, e
 - ▶ K_e e \tilde{K}_e as constantes de erro atual e desejada, respectivamente.
- ▶ Aplicando TVF a $\hat{c}\hat{g}$, tem-se

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} s\hat{c}\hat{g} = \lim_{s \rightarrow 0_+} \hat{c} \lim_{s \rightarrow 0_+} s\hat{g} = \beta k_c K_e = \tilde{K}_e$$

- ▶ Por outro lado, na frequência ω_f tem-se

$$\hat{c}(j\omega_f) = \beta k_c \frac{j\omega_f T + 1}{j\beta\omega_f T + 1} \approx \frac{\tilde{K}_e}{\beta K_e}$$

- ▶ Assim, o fator a ser adicionado à MG atual é o ganho nessa frequência, ou seja

$$\|\hat{c}(j\omega_f)\| \approx 20 \log \left(\frac{\tilde{K}_e}{\beta K_e} \right) \quad (6.51)$$

Compensação em Atraso de Fase - Projeto

O procedimento para o projeto segue os passos:

- i Determine o ganho (βk_c) necessário para a exigência de erro estático;
- ii Plote os diagramas de Bode e determine a frequência ω_{gdes} que teria a *MF* desejada (com uma folga);
- iii Escolha o zero do compensador em valores bem abaixo de ω_{gdes} (pelo menos, uma década);
- iv Determine β para impor ganho de 0dB em ω_{gdes} com:

$$\|\hat{g}(j\omega_{gdes})\| = 20 \log \beta \quad (6.52)$$

- v Determine o polo e k_c .

Exemplo

Projete um compensador atraso para $K_v \geq 5$, $MF \geq 40^\circ$ e $MG \geq 10$ dB, para a planta:

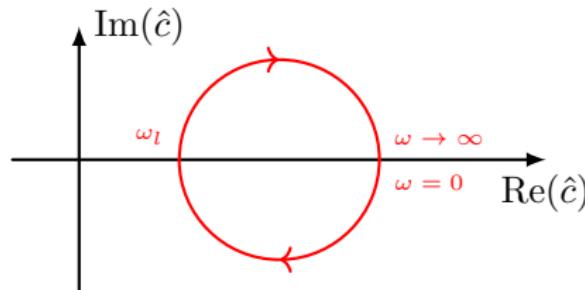
$$\hat{g}(s) = \frac{1}{s(s+1)(0,5s+1)}$$

Compensação em Avanço-Atraso de Fase I

Sua formulação pode ser escrita como a combinação de (6.45) e (6.50):

$$\hat{c}(s) = \alpha\beta k_c \frac{T_1 s + 1}{\alpha T_1 s + 1} \frac{T_2 s + 1}{\beta T_2 s + 1}, \quad 0 < \alpha < 1 \text{ e } \beta > 1 \quad (6.53)$$

Para $\alpha\beta = 1$:



com:

$$\omega_l = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \quad (6.54)$$

Observação

Devido às exigências de projeto, deve-se fazer $T_2 \gg T_1$.

Comentários sobre os Compensadores

- i O compensador avanço realiza a compensação pelo seu avanço de fase, aumentando a MF .
- ii O compensador atraso o faz pela atenuação em altas frequências, aumentando a MG .
- iii O compensador avanço tende a aumentar a largura de banda, reduzindo o tempo de acomodação, porém, pode introduzir ruído no canal de controle;
- iv O compensador avanço requer maior ganho para corrigir o erro em regime.

Exemplo

Projete um compensador avanço-atraso para $K_v \geq 10$, $MF \geq 50^\circ$ e $MG \geq 10\text{dB}$, para a planta:

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Aula 21

Controle Moderno

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Aula 21

Controle Moderno

Introdução

- A estrutura do PID foi apresentada em (4.10)-(4.11):

$$\hat{c}_{pid}(s) = k_p + \frac{k_p}{T_i s} + k_p T_d s \quad (7.1)$$

- Amplamente utilizada na indústria, devido à **natureza incerta** das plantas;
- Além disto, é comum haver apenas dados experimentais da planta;
- Muitas regras de sintonia de PIDs foram feitas:
 - Método de Ziegler-Nichols (ZN);
 - Método de Cohen-Coon;
 - Método de Tyreus-Luyben;
 - Método de Åström-Hägglund.

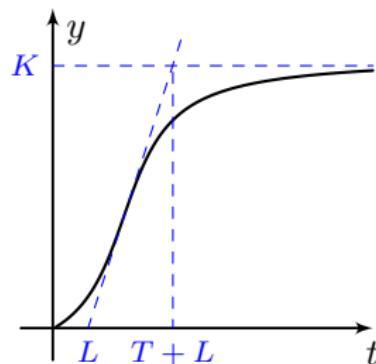
1º Método de Ziegler-Nichols

- ▶ Supõe planta sem integradores, nem polos conjugados dominantes;
- ▶ Forma assumida para a planta:

$$\hat{g}(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-Ls} \quad (7.2)$$

- ▶ Aplique um degrau à **entrada da planta** e verifique sua saída.

Sintonia proposta:



$$\hat{c}(s) = \begin{cases} \frac{T}{L} & \text{se P} \\ 0,9\frac{T}{L} + 0,27\frac{T}{L^2 s} & \text{se PI} \\ 0,6T\frac{(s + L^{-1})^2}{s} & \text{se PID} \end{cases} \quad (7.3)$$

2º Método de Ziegler-Nichols

- ▶ Monte um sistema em realimentação unitária com compensador P;
- ▶ Eleve k_p até um valor, k_{cr} , onde o sistema apresente **oscilações sustentadas**;
- ▶ De posse de k_{cr} e T_{cr} (período da oscilação sustentada), a sintonia proposta é

$$\hat{c}(s) = \begin{cases} 0,5k_{cr} & \text{se P} \\ 0,45k_{cr} + 0,54\frac{k_{cr}}{T_{cr}s} & \text{se PI} \\ 0,075k_{cr}T_{cr}\frac{(s + 4T_{cr}^{-1})^2}{s} & \text{se PID} \end{cases} \quad (7.4)$$

Comentários aos Métodos de ZN

- 1º As regras de ZNs são muito usadas em plantas não precisamente conhecidas (controle robusto de sistemas incertos);
- 2º essas regras podem ser utilizadas em plantas precisamente conhecidas;
- 3º Se a planta apresentar integrador, as regras podem não ser aplicáveis;
- 4º Ambos os métodos almejam overshoot inferior a 25% para entrada degrau.

Exemplo

Projete compensadores PID para as plantas:

$$\hat{g}(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)(s+5)} \quad \text{e} \quad \hat{g}(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

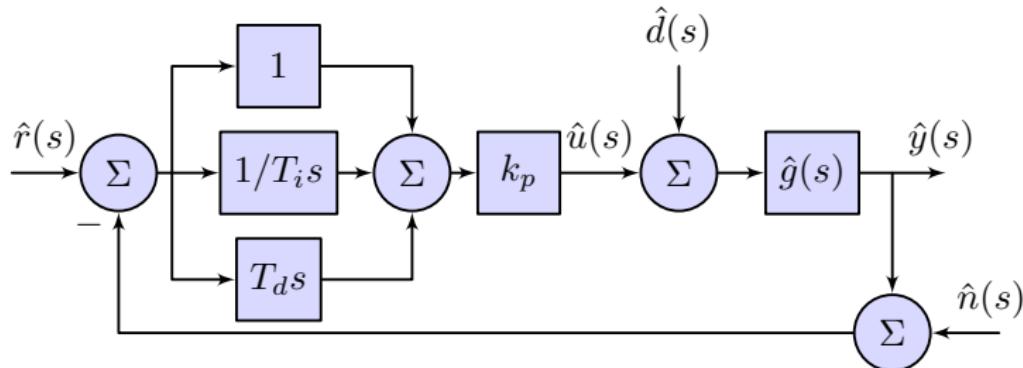
Resp. em
Frequência

Controle PID

Aula 21

Controle Moderno

Controle PID Convencional



- ▶ O degrau introduz um termo impulsivo, devido à parcela D;
- ▶ Ao invés de $T_d s$, é comum a introdução de:

$$\hat{c}_d(s) = \frac{T_d s}{1 + \gamma T_d s}, \quad \gamma \approx 0,1 \quad (7.5)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

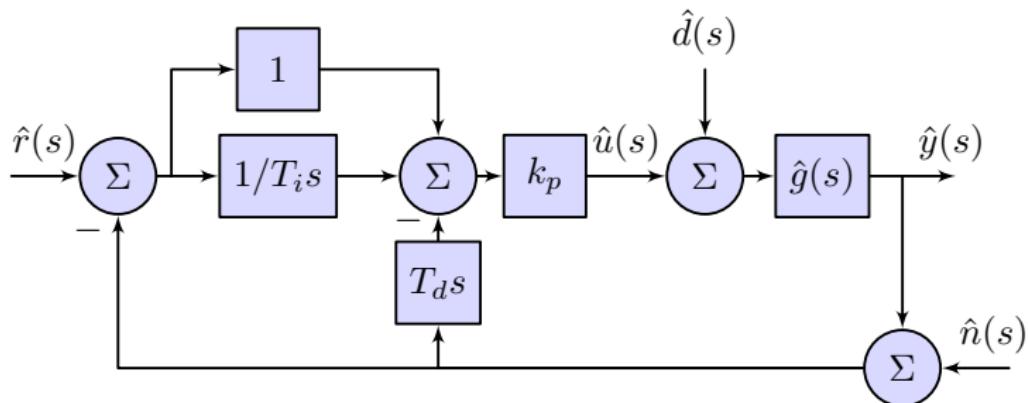
Controle PID

Aula 21

Controle Moderno

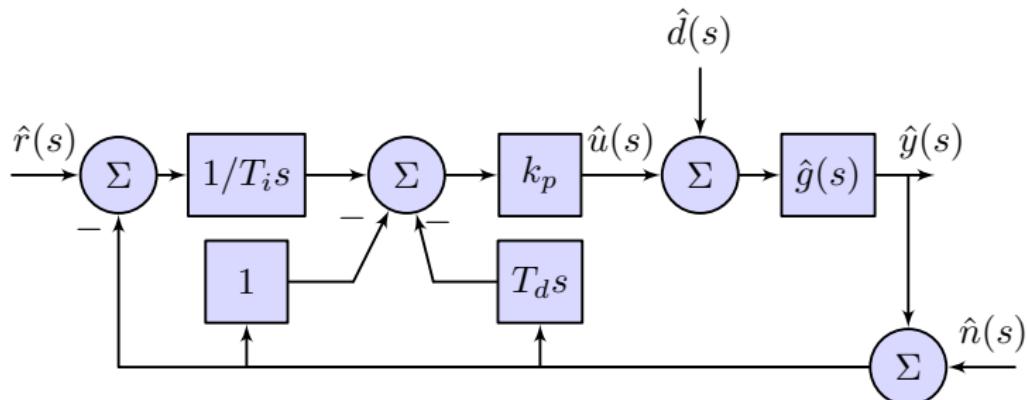
Controle PI-D

- ▶ Troca-se o impulso por um pulso abrupto ("set point kick");
- ▶ A fim de evitá-lo, usa-se o PI-D:



Controle I-PD

- ▶ Existem aplicações onde não se deseja um sinal degrau na atuação;
- ▶ Para evitá-lo, usa-se o I-PD:



Funções Transferência

As FTMFs para os diferentes PIDs são:

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\tilde{c}(s)\hat{g}(s)}{1 + \hat{c}_{pid}(s)\hat{g}(s)} \quad (7.6)$$

onde:

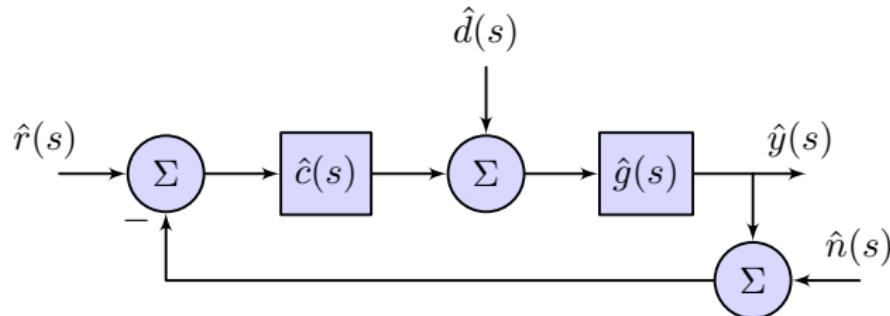
$$\tilde{c}(s) = \begin{cases} \hat{c}_{pid}(s) & \text{se PID} \\ k_p + \frac{k_p}{T_i s} & \text{se PI-D} \\ \frac{k_p}{T_i s} & \text{se I-PD} \end{cases} \quad (7.7)$$

Observação

$\hat{y}(s)/\hat{d}(s)$ não se altera nas estruturas apresentadas. (Sim, provar este fato e (7.6)-(7.7) é um **exercício!**)

Controle com Dois Graus de Liberdade I

Considere o sistema de controle



$$\hat{y}(s) = \frac{\hat{g}(s)}{1 + \hat{c}(s)\hat{g}(s)} \begin{bmatrix} \hat{r}(s) \\ \hat{d}(s) \\ \hat{n}(s) \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Observação

Como a planta é dada, ao projetar $\hat{c}(s)$ para o canal referência-saída, os demais ficam fixos.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

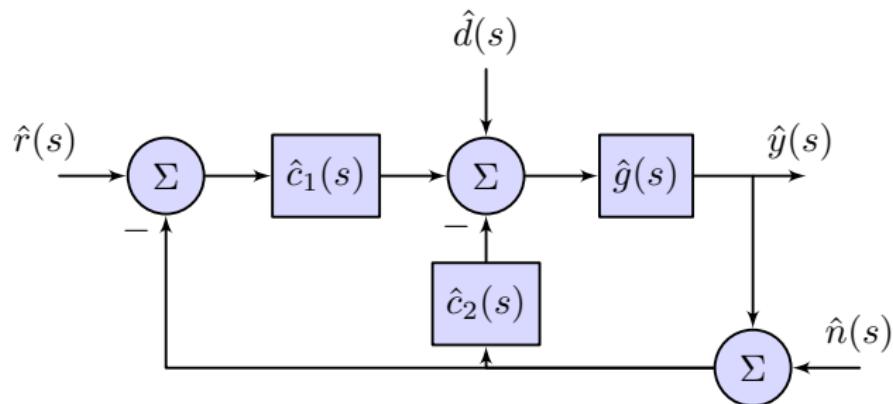
Controle PID

Aula 21

Controle Moderno

Controle com Dois Graus de Liberdade II

Para aumentar a flexibilidade do projeto, faz-se



$$\hat{y} = \frac{\hat{g}}{1 + (\hat{c}_1 + \hat{c}_2)\hat{g}} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 & 1 & -(\hat{c}_1 + \hat{c}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{d} \\ \hat{n} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Aula 21

Controle Moderno

Considerações no Controle Robusto

Na presença de perturbações e ruídos, além dos critérios já estudados, deve-se incluir:

- a Bom desempenho no seguimento de referência;
- b Rejeição de perturbações;
- c Insensibilidade a erros de modelagem;
- d Margem de estabilidade, e;
- e Insensibilidade ao ruído.

Observação

*Estes parâmetros dependem de uma função a ser estabelecida: a **sensibilidade**.*

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Aula 21

Controle Moderno

Sensibilidade

- ▶ Seja $\hat{g}(s)$ a FT de um dado sistema;
- ▶ Suponha que $\hat{g}(s)$ não seja precisamente conhecida, mas varie para $\hat{g}(s) + \Delta\hat{g}(s)$;
- ▶ Neste caso, $\hat{y}(s)$ variará para $\hat{y}(s) + \Delta\hat{y}(s)$.

Importante!

A sensibilidade é o quociente entre a variação relativa da saída para uma variação relativa da FTMF. Ou seja:

$$\mathcal{S}(s) = \lim_{\Delta\hat{g}(s) \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta\hat{y}(s)}{\hat{y}(s)}}{\frac{\Delta\hat{g}(s)}{\hat{g}(s)}} = \frac{d \hat{y}(s)}{d \hat{g}(s)} \frac{\hat{g}(s)}{\hat{y}(s)} = \frac{d \ln \hat{y}(s)}{d \ln \hat{g}(s)} \quad (7.10)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Aula 21

Controle Moderno

Sensibilidade: Sistemas em Malha Fechada

- ▶ Considere o sistema realimentado com um grau de liberdade;
- ▶ A planta, $\hat{g}(s)$, é incerta, mas não o compensador $\hat{c}(s)$.
- ▶ Assim, tem-se com a definição (7.10):

$$\mathcal{S}(s) = \frac{d\hat{y}}{d\hat{g}} \frac{\hat{g}}{\hat{y}} \stackrel{(3.4)}{=} \frac{1 + \hat{c}\hat{g}}{\hat{c}} \frac{d}{d\hat{g}} \left(\frac{\hat{c}\hat{g}}{1 + \hat{c}\hat{g}} \right) = \frac{1}{1 + \hat{c}\hat{g}} \quad (7.11)$$

Observação

Note que a sensibilidade coincide com a FT da referência para o erro para sistemas sem perturbação e ruído.

Sensibilidade: Sistemas sob Perturbação e Ruído

Neste caso, lembrando que $\varepsilon = r - y$ e, aplicando (7.11) a (7.8), tem-se:

$$\hat{\varepsilon}(s) = \underbrace{\frac{1}{1 + \hat{c}(s)\hat{g}(s)}}_{\mathcal{S}(s)} (\hat{r}(s) - \hat{g}(s)\hat{d}(s)) + \underbrace{\frac{\hat{c}(s)\hat{g}(s)}{1 + \hat{c}(s)\hat{g}(s)}}_{\mathcal{T}(s)} \hat{n}(s) \quad (7.12)$$

Importante!

- ▶ $\mathcal{T}(s)$ é chamada **sensibilidade complementar** e corresponde à FT do ruído para o erro.
- ▶ Note que $\mathcal{S} + \mathcal{T} = 1$. Logo, são parâmetros **conflictantes**!
- ▶ Obedecer a todos os critérios estabelecidos para o controle robusto é impossível! Há “trade off”.

Exercício

Estude para o caso com dois graus de liberdade.

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Introdução

- ▶ A análise no espaço de estado pode ser usada para sistemas SISO;
- ▶ Para sistemas MIMO, simplifica enormemente a abordagem matemática;
- ▶ Projetos avançados de controladores são feitos no espaço de estado:
 - ▶ Realimentação de estado;
 - ▶ Realimentação estática e dinâmica de saída.
- ▶ Alguns detalhes a respeito da notação:
 - ▶ Letras em negrito são vetores-coluna (minúsculas) ou matrizes (maiúsculas);
 - ▶ Transposições são notadas por (').

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Autovalores, Polos e Representação I

- ▶ Foi mostrado em (2.14) que os autovalores de \mathbf{A} são os polos da FT;
- ▶ A representação no espaço de estado não é única;
- ▶ Tome, então uma transformação linear bijetora (**isomorfismo**), $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e um vetor $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$. Aplicando a (2.12):

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (8.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (8.1b)$$

Observação

Ou seja, com um isomorfismo adequadamente escolhido, pode-se trocar as matrizes de estado $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$, $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}$, $\mathbf{C} \mapsto \mathbf{C} \mathbf{T}$ e $\mathbf{D} \mapsto \mathbf{D}$ e o vetor de estado $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{z}$. O que acontece com os autovalores com a aplicação de \mathbf{T} ?

[Introdução](#)[Modelagem](#)[Resp. Transitória](#)[Sist.
Realimentados](#)[Lugar das Raízes](#)[Resp. em
Frequência](#)[Controle PID](#)[Controle Moderno](#)[Aula 22](#)[Aula 23](#)[Aula 24](#)[Aula 25](#)[Aula 26](#)[Aula 27](#)[Aula 28](#)

Autovalores, Polos e Representação II

Lema (Invariância de Autovalores)

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, \mathbf{T} invertível. Então, os autovalores de \mathbf{A} e os de $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ são iguais.

Demonstração.

Basta notar que:

$$\begin{aligned}\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}) &= \det(\lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{IT} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}) \\ &= \det(\mathbf{T}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{T}) \\ &= \det(\mathbf{T}^{-1}) \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \det(\mathbf{T}) \\ &= \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}) \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &= \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\end{aligned}$$



Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Exemplo: Permutações

Matrizes de permutação, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, são invertíveis e $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}'$. Logo, prestam-se a ser transformações de similaridade. Considere o caso:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^{-1}} \mathbf{x}$$

Desta forma, as matrizes do sistema (considere SISO) ficam:

$$\mathbf{A}_z = \mathbf{P}' \mathbf{A}_x \mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_{x22} & a_{x21} \\ a_{x12} & a_{x11} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_z = \mathbf{P}' \mathbf{B}_x = \begin{bmatrix} b_{x2} \\ b_{x1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_z = \mathbf{C}_x \mathbf{P} = \begin{bmatrix} c_{x2} & c_{x1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_z = \mathbf{D}_x$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Caso Homogêneo ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$)

Considere a EDO (2.12a), com $\mathbf{u} = \mathbf{0}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o \in \mathbb{R}^n$$

É razoável (pense na série de Taylor) supor a solução da forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}_o + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{f}_i t^i \quad (8.2)$$

com vetores $\mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^n$ fixos e adequadamente escolhidos. Note que, com esta escolha:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o = \mathbf{f}_o$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Caso Homogêneo ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$)

Substituindo (8.2) na EDO:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \mathbf{f}_i t^{i-1} = \mathbf{A} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{f}_i t^i$$

Ou seja:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{Af}_o = \mathbf{Ax}_o$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{Af}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 \mathbf{f}_o = \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_o$$

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{3} \mathbf{Af}_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} \mathbf{A}^3 \mathbf{f}_o = \frac{1}{2 \cdot 3} \mathbf{A}^3 \mathbf{x}_o$$

⋮

$$\mathbf{f}_i = \frac{1}{i!} \mathbf{A}^i \mathbf{f}_o = \frac{1}{i!} \mathbf{A}^i \mathbf{x}_o$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Caso Homogêneo ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$)

Substituindo em (8.2):

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!} \mathbf{x}_o}_{e^{\mathbf{A}t}} \quad (8.3)$$

Importante!

- ▶ A série $e^{\mathbf{A}t}$ é chamada *matriz exponencial* de $\mathbf{A}t$;
- ▶ A matriz exponencial de $\mathbf{A}t$ converge absolutamente para todo t finito!
- ▶ $e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t)$ é a *matriz de transição de estado* para SLIT-Cs, pois:

$$\Phi(t - t_o) \mathbf{x}(t_o) = e^{\mathbf{A}(t-t_o)} \mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x}(t) \quad (8.4)$$

transita o estado do tempo t_o para o tempo t .

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

A Matriz Exponencial $e^{\mathbf{A}}$

Lema (Propriedades da Matriz Exponencial)

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e $a, b \in \mathbb{R}$. Valem, então, as propriedades:

$$e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I} \quad (8.5a)$$

$$e^{(a+b)\mathbf{A}} = e^{a\mathbf{A}}e^{b\mathbf{A}} \quad (8.5b)$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \Rightarrow e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \quad (8.5c)$$

$$\exists \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow e^{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}} = \mathbf{A}^{-1}e^{\mathbf{B}}\mathbf{A} \quad (8.5d)$$

$$e^{\mathbf{A}'} = (e^{\mathbf{A}})' \quad (8.5e)$$

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{At}} = \mathbf{A}e^{\mathbf{At}} \quad (8.5f)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Caso Homogêneo via TL

Aplicando a TL a (2.12a), com $\mathbf{u} = \mathbf{0}$:

$$\mathcal{L}\{\dot{\mathbf{x}}\} = \mathcal{L}\{\mathbf{Ax}\} \Rightarrow s\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_o = \mathbf{Ax} \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_o$$

Aplicando a TIL ao resultado anterior, escreve-se:

$$\mathbf{x} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{x}_o \quad (8.6)$$

Observação

Comparando (8.3) e (8.6):

$$\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} = e^{\mathbf{At}} \quad (8.7)$$

Exemplo

Solucionemos o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o$.

Observe que:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

Para inverter esta matriz, usamos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{\text{adj}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})}{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A})} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Exemplo

Aplicando a TIL:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \right\} \\ &\stackrel{\text{EFP}}{=} \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

E a solução é imediata com o uso de (8.6), para qualquer condição inicial.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Caso Não-Homogêneo ($\mathbf{u} \neq 0$)

Considere a EDO (2.12a):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o \in \mathbb{R}^n$$

Rearranjando a EDO e pré-multiplicando por $e^{-\mathbf{At}}$:

$$e^{-\mathbf{At}} [\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{Ax}] = e^{-\mathbf{At}} \mathbf{Bu}$$

Observe que o lado esquerdo da igualdade corresponde a $\frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{At}} \mathbf{x}]$.

$$e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{x} \Big|_0^t = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{Bu} d\tau$$

Portanto:

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{At}} \mathbf{x}_o + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{Bu} d\tau \quad (8.8)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Caso Não-Homogêneo via TL

Aplicando a TL a (2.12a):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot{\mathbf{x}}\} &= \mathcal{L}\{\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}\} \Rightarrow s\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_o = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \\ &\Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{x}_o + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}})\end{aligned}$$

Aplicando a TIL ao resultado anterior, escreve-se:

$$\mathbf{x} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{x}_o + \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}\} \quad (8.9)$$

Observação

(8.8) é obtida de (8.9) com a aplicação do *Teorema da Convolução*.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Exemplo

Solucionemos o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o, \quad u = \tilde{1}$$

Usando (8.8) e os resultados obtidos no exemplo anterior:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_o + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{x}_o + \\ &\quad + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau \end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{x}_o + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade**
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Introdução

- ▶ Até agora, vimos esquemas de realimentação pela leitura da saída;
- ▶ Estratégia até então adotada: detectar o erro e levá-lo a zero;
- ▶ **Realimentação de estado:** leitura de x via sensores!
- ▶ Objetivo da realimentação de estado: transferir o estado de um sistema $x_o \mapsto x_f$ no tempo $t_o \mapsto t_f$;
- ▶ Pergunta imediata: “Sob quais condições isto é possível?”

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Definição de Controlabilidade

Definição (Controlabilidade)

A EDO (2.12a) é dita controlável se, dados um estado inicial e um final, $\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^n$, existe uma entrada, \mathbf{u} , tal que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f$ para algum instante de tempo $t_0 < t < \infty$.

- ▶ A controlabilidade responde à questão: “É possível transferir o estado a qualquer ponto em tempo finito, com um sinal de controle conveniente?”
- ▶ Se a controlabilidade for verificada para um dado sistema, diz-se que o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável;
- ▶ Como verificar a controlabilidade de um dado par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) ?

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Matriz de Controlabilidade I

À solução de (2.12a), (8.8), com a definição acima, $t_o = 0$ e $\mathbf{x}_f = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f = \mathbf{0} = e^{\mathbf{A}t_f} \mathbf{x}_o + \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}(t_f - \tau)} \mathbf{B} \mathbf{u} d\tau$$

Assim:

$$\mathbf{x}_o = - \int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u} d\tau$$

Usando a **fórmula de interpolação de Sylvester**:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_o &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \underbrace{\int_0^{t_f} -\alpha_k(\tau) \mathbf{u} d\tau}_{\beta_k} \\ &= [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.10}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Matriz de Controlabilidade II

Ao observar (8.10), nota-se que a transformação linear

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

deve ser capaz de gerar qualquer vetor $\mathbf{x}_o \in \mathbb{R}^n$.

Teorema

A EDO (2.12a) é controlável se, e somente se

$$\text{rank}(\mathcal{C}) = n \quad (8.12)$$

além disto, a controlabilidade de um sistema não é afetada por nenhuma transformação de similaridade, \mathbf{T} .

Exemplo

Considere o sistema massa-mola-amortecedor (aula 04):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0] \mathbf{x}\end{aligned}$$

Determinemos a matriz de controlabilidade:

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & -\frac{k}{m^2} \end{bmatrix}$$

Neste caso, para $k, m > 0$, $\text{rank}(\mathcal{C}) = 2$. Logo, este sistema é controlável.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Forma Canônica Controlável

Definição (Forma Canônica Controlável)
Um SLIT-C da forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_m & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{I}_m \\ -\alpha_0 \mathbf{I}_m & -\alpha_1 \mathbf{I}_m & -\alpha_2 \mathbf{I}_m & \cdots & -\alpha_{n-2} \mathbf{I}_m & -\alpha_{n-1} \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (8.13a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (8.13b)$$

é dito estar na **Forma Canônica Controlável (FCC)**.

Qual a importância da FCC?

Calculemos a matriz de controlabilidade de (8.13):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \\ -\alpha_{n-1}\mathbf{I}_m \end{bmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ -\alpha_{n-1}\mathbf{I}_m \\ (\alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-2})\mathbf{I}_m \\ \vdots \end{bmatrix}$$

que possui sempre n colunas LI!

Lema

- i A FCC é controlável.
- ii Todo SLIT-C similar à FCC é controlável.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Alguns Comentários

- ▶ No item ii do lema anterior, vale a recíproca!
- ▶ A controlabilidade no plano s ocorre se não ocorrer cancelamentos na FT;
- ▶ Pode ser necessário determinar a **controlabilidade de saída**;
- ▶ Neste caso, é possível mostrar que a matriz:

$$\mathcal{C}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \dots & \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

deve ser tal que $\text{rank}(\mathcal{C}_y) = p$, para tal controlabilidade.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

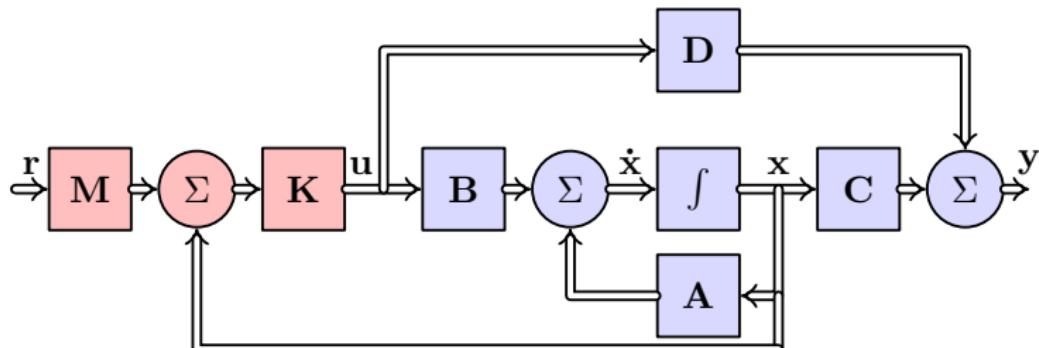
Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Diagrama de Blocos em Malha Fechada



- ▶ O sinal de controle é:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{M}\mathbf{r} + \mathbf{x}) \quad (8.15)$$

- ▶ Todas as variáveis de estado devem possuir sensor;

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

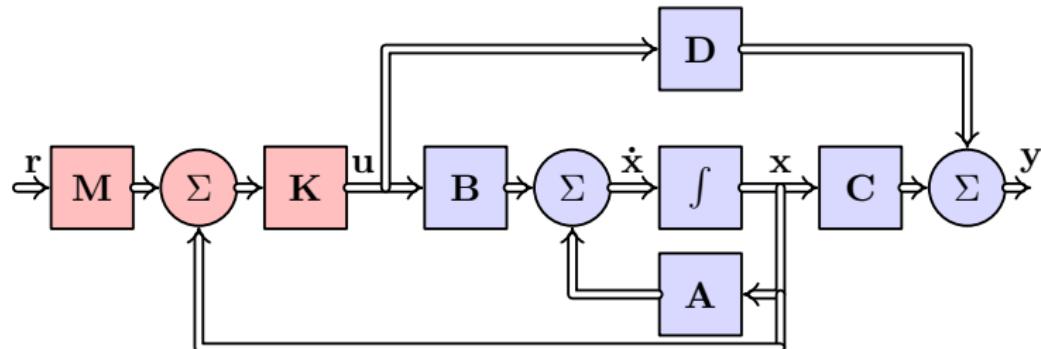
Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Representação em Malha Fechada



Substituindo (8.15) em (2.12), tem-se:

$$\dot{x} = (A + BK)x + BKMr \quad (8.16a)$$

$$y = (C + DK)x + DKMr \quad (8.16b)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Princípios de Projeto (SISO)

- ▶ Tome um SLIT-C-SISO;
- ▶ Ao usar a lei (8.15), troca-se a FT (2.13) por:

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \left[(\mathbf{C} + \mathbf{DK}) (s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK}))^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{KM} \quad (8.17)$$

- ▶ Dada uma **região Ω** , como posicionar os autovalores nessa região?
- ▶ Note que apenas \mathbf{K} interfere nesta etapa de projeto!
- ▶ Este é o chamado problema de **alocação de polos**.

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado**
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Forma Canônica Controlável de SLIT-C-SISO

Dada a EDO (2.12), se pode escrever sua FCC com:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_n} & \dots & -\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (8.18a)$$

$$y = [\beta_0 \ \ \beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \dots \ \ \beta_{n-2} \ \ \beta_{n-1}] \mathbf{x} + [\beta_n] u \quad (8.18b)$$

Observação

- ▶ A saída de interesse, (8.18b), **não** corresponde à da EDO (2.12a);
- ▶ Obter (8.18) é um **exercício!**

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Alocação de Polos I

- ▶ Neste problema, iremos impor uma dinâmica desejada ao sistema (2.12), transformando-o em (8.16);
- ▶ Para tanto, devemos projetar a matriz de realimentação de estado, \mathbf{K} de forma a localizar os polos de malha fechada na região Ω desejada;
- ▶ Perguntas:
 - ▶ Isto é possível?
 - ▶ Se for, como se faz o projeto da matriz \mathbf{K} ?
 - ▶ Existe alguma restrição aos polos impostos ao sistema em malha fechada?

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Alocação de Polos II

- ▶ Seja um SLIT-C-SISO com realimentação de estado, dado por (2.12), (8.15) e $r = 0$.
- ▶ Considere, ainda, uma condição inicial, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o$, devida a uma perturbação.
- ▶ Sua solução, a partir de (8.3) torna-se:

$$\mathbf{x} = e^{(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})t} \mathbf{x}_o \quad (8.19)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Alocação de Polos: Condição Suficiente I

Lema

Sejam $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times 1}$ um par controlável, $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times 1}$ o par canônico controlável e \mathcal{C} e $\tilde{\mathcal{C}}$ suas respectivas matrizes de controlabilidade. Então

$$\mathbf{T} = \mathcal{C}\tilde{\mathcal{C}}^{-1} \quad (8.20)$$

é a transformação de similaridade entre estes pares.

Demonstração.

Se existe a similaridade, então $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}})$. Note que $\mathbf{A}^i \mathbf{B} = \underbrace{\mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}}_{i \text{ vezes}} \mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}^i \tilde{\mathbf{B}}$. Assim:

$$\mathcal{C} \stackrel{(8.11)}{=} [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

$$= [\mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}} \quad \mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}^{n-1}\tilde{\mathbf{B}}] = \mathbf{T}\tilde{\mathcal{C}}$$



Alocação de Polos: Condição Suficiente II

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ os autovalores escolhidos (possivelmente em pares conjugados). Então, pode-se escrever o **polinômio característico desejado**:

$$P(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} s^i, \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad (8.21)$$

Seja \mathbf{T} a similaridade que leva $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ em (\mathbf{A}, \mathbf{B}) . Logo, tem-se:

$$u = \mathbf{Kx} = \mathbf{KT}\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \dots & \tilde{k}_n \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \quad (8.22)$$

Assim, referindo ao sistema em FCC, tem-se, em (2.12):

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}u = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT})\tilde{\mathbf{x}}$$

Deseja-se fazer (lembre da invariância de autovalores)

$$\begin{aligned} P(s) &= \det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})) = \det(s\mathbf{I} - (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT})) \\ &= \det(s\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{BKT}})) \end{aligned}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Alocação de Polos: Condição Suficiente III

Por outro lado

$$\det(s\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{K}\mathbf{T})) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s & -1 \\ a_1 - \tilde{k}_1 & a_2 - \tilde{k}_2 & a_3 - \tilde{k}_3 & \dots & a_{n-1} - \tilde{k}_{n-1} & s + a_n - \tilde{k}_n \end{bmatrix}$$

$$= s^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - \tilde{k}_{i+1})s^i$$

Donde sai a condição:

$$\tilde{k}_i = a_i - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.23)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Alocação de Polos: Condição Suficiente IV

- ▶ As condições (8.23) sempre podem ser atendidas, se o sistema for controlável;
- ▶ Assim, pode-se enunciar o seguinte

Teorema

Se o par $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times 1}$ for controlável, então $\exists \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, tal que os autovalores de $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ podem ser alocados em qualquer posição do plano complexo, desde que os autovalores complexos ocorram em pares conjugados.

- ▶ A condição do teorema é também necessária!!!!!!

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Alocação de Polos: Procedimento de Projeto

1º Verifique se o sistema dado é controlável;

2º Escreva o polinômio característico de \mathbf{A} :

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}s^i \quad (8.24)$$

3º Determine \mathbf{T} com (8.20) (se necessário, use (8.18) também);

4º Determine o polinômio característico desejado com (8.21);

5º Determine a matriz de ganho de realimentação de estado com (8.22) e (8.23).

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Exemplo

Posicione os autovalores em $-2 \pm j4$ e -10 para o SLIT-C com matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 0 \\ -1 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1º passo: Matriz de controlabilidade

$$\det \mathcal{C} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 25 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix} = -1 \Rightarrow \text{Sistema controlável}$$

2º passo: Polinômio característico

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 1 \\ 1 & s+5 & 0 \\ 1 & 5 & s+1 \end{bmatrix} = s^3 + 6s^2 + 5s + 1$$

Exemplo

3º passo: Transformação de similaridade

Com o polinômio característico do passo anterior e observando (8.18a):

$$\tilde{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(8.20)} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4º passo: Polinômio desejado

$$P(s) = (s+2-j4)(s+2+j4)(s+10) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200$$

5º passo: Determinação de \mathbf{K}

Com (8.23):

$$\mathbf{KT} = \begin{bmatrix} -199 & -55 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -199 & -55 & 47 \end{bmatrix}$$

[Introdução](#)[Modelagem](#)[Resp. Transitória](#)[Sist.
Realimentados](#)[Lugar das Raízes](#)[Resp. em
Frequência](#)[Controle PID](#)[Controle Moderno](#)[Aula 22](#)[Aula 23](#)[Aula 24](#)[Aula 25](#)[Aula 26](#)[Aula 27](#)[Aula 28](#)

Fórmula de Ackermann I

Considere o SLIT-C-SISO controlável (2.12a), com realimentação de estado (8.15) e $r = 0$. Defina:

$$\mathcal{A} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} \quad (8.25)$$

Observe as identidades:

$$\mathcal{A}^0 = \mathbf{I} \quad \mathcal{A}^1 = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} \quad \mathcal{A}^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathcal{A} \quad \dots$$

Ou seja:

$$\mathcal{A}^k = \mathbf{A}^k + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \mathbf{K} \mathcal{A}^{k-i} \quad (8.26)$$

Fórmula de Ackermann II

Tome os autovalores desejados, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, gerando (8.21). Então:

$$P(s) = \prod_{j=1}^n (s - \lambda_j) = s^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{j+1} s^j = \det(s\mathbf{I} - \mathcal{A})$$

Pelo **Teorema de Cayley-Hamilton**, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= P(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{j+1} \mathcal{A}^j \\ &= \mathbf{A}^n + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \mathbf{K} \mathcal{A}^{n-i} + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{j+1} \left(\mathbf{A}^j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \leq j}}^j \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \mathbf{K} \mathcal{A}^{j-i} \right) \\ &= P(\mathbf{A}) + \mathbf{B}(\mathbf{K} \mathcal{A}^{n-1} + \alpha_n \mathbf{K} \mathcal{A}^{n-2} + \dots + \alpha_2 \mathbf{K}) + \mathbf{A}\mathbf{B}(\mathbf{K} \mathcal{A}^{n-2} + \\ &\quad + \alpha_n \mathbf{K} \mathcal{A}^{n-3} + \dots + \alpha_3 \mathbf{K}) + \dots + \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} \mathbf{K} \end{aligned}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Fórmula de Ackermann III

Em notação matricial:

$$P(\mathbf{A}) = -\mathcal{C} \begin{bmatrix} \mathbf{K}\mathcal{A}^{n-1} + \alpha_n \mathbf{K}\mathcal{A}^{n-2} + \dots + \alpha_2 \mathbf{K} \\ \mathbf{K}\mathcal{A}^{n-2} + \alpha_n \mathbf{K}\mathcal{A}^{n-3} + \dots + \alpha_3 \mathbf{K} \\ \vdots \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

Lema (Fórmula de Ackermann)

Nas condições do Teorema da Alocação de Polos, a expressão

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ -1] \mathcal{C}^{-1} P(\mathbf{A}) \quad (8.27)$$

determina a matriz de ganho de estado.

Regime Permanente à Entrada Degrau

Para que a saída do sistema siga uma referência degrau, a FT (8.17) deve apresentar valor unitário para $s = 0$. Assim:

$$[\mathbf{D} - (\mathbf{C} + \mathbf{DK})(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}]\mathbf{KM} = 1 \quad (8.28)$$

É possível provar o seguinte lema:

Lema

O SLIT-C-SISO com realimentação de estado (8.16) seguirá uma referência degrau com erro nulo em regime permanente se a matriz de ganho de referência, \mathbf{M} , satisfizer (8.28). Além disto, a solução com menor norma euclidiana é dada por:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{[\mathbf{D} - (\mathbf{C} + \mathbf{DK})(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}] \cdot \|\mathbf{K}'\|^2} \mathbf{K}' \quad (8.29)$$

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado

Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída

- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Observação de Estado: Introdução

- ▶ Estratégia da realimentação de estado: medir todas as variáveis de estado e usar (8.15);
- ▶ E se não se dispuser de todos os sensores requeridos?
- ▶ Nova estratégia: fazer a leitura da saída e, de alguma forma, estimar o estado;
- ▶ **Realimentação dinâmica da saída:** Usar o estado estimado no lugar do real em (8.15);
- ▶ Pergunta imediata: “Sob quais condições isto é possível?”

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Definição de Observabilidade

Definição (Observabilidade)

O SLIT-C homogêneo (2.12) é dito observável se, dada a saída do sistema em um intervalo $[t_o, t_f]$, então é possível determinar $\mathbf{x}(t_o)$.

- ▶ A observabilidade responde à questão: “É possível determinar o estado a partir da leitura da saída?”
- ▶ Se a observabilidade for verificada para um dado sistema, diz-se que o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável;
- ▶ Como verificar a observabilidade de um dado par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) ?

Matriz de Observabilidade I

Considere a solução homogênea de (2.12), (8.3):

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} = \mathbf{Ce}^{\mathbf{At}}\mathbf{x}_o$$

Aplicando novamente a fórmula de interpolação de Sylvester:

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{C} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) \mathbf{A}^k \mathbf{x}_o = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) \mathbf{CA}^k \mathbf{x}_o \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{CA}^k \alpha_k(t) \mathbf{x}_o\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, com $\mathbf{x}_o = \mathbf{0}$, deve-se resolver o sistema:

$$\mathbf{CA}^k \mathbf{x}_o = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Matriz de Observabilidade II

Assim, a transformação linear

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

deve ser injetora.

Teorema

O SLIT-C autônomo (2.12) é observável se, e somente se

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = n \quad (8.31)$$

além disto, a observabilidade de um sistema não é afetada por nenhuma transformação de similaridade, \mathbf{T} .

Exemplo

Considere o sistema massa-mola-amortecedor (aula 04):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

Determinemos a matriz de observabilidade:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$$

Logo, este sistema é observável.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Forma Canônica Observável

Definição (Forma Canônica Observável)

Um SLIT-C da forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_0 \mathbf{I}_m \\ \mathbf{I}_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_1 \mathbf{I}_m \\ 0 & \mathbf{I}_m & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_2 \mathbf{I}_m \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_m & \dots & 0 & 0 & -\alpha_3 \mathbf{I}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{I}_m & 0 & -\alpha_{n-2} \mathbf{I}_m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{I}_m & -\alpha_{n-1} \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (8.32a)$$

$$\mathbf{y} = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ \mathbf{I}_m] \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (8.32b)$$

é dito estar na **Forma Canônica Observável (FCO)**.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Qual a importância da FCO?

Teorema (Dualidade)

O par (A, C) é observável se, e somente se, o par (A', C') for controlável.

Tendo em vista o que já foi exposto para a FCC:

Lema

i) A FCO é observável.

ii) Todo SLIT-C similar à FCO é observável.

- ▶ No item ii do lema anterior, vale a recíproca!
- ▶ A observabilidade no plano s ocorre se não ocorrer cancelamentos na FT;

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Forma Canônica Observável de SLIT-C-SISO

- ▶ Considere a FCC (8.18) da EDO (2.12);
- ▶ Faça o seguinte mapeamento:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_o & \mathbf{C}'_o \\ \mathbf{B}'_o & \mathbf{D}_o \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

- ▶ Desta forma, obtém-se a Forma Canônica Observável (FCO);
- ▶ O vetor de estado **não** é o mesmo!

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

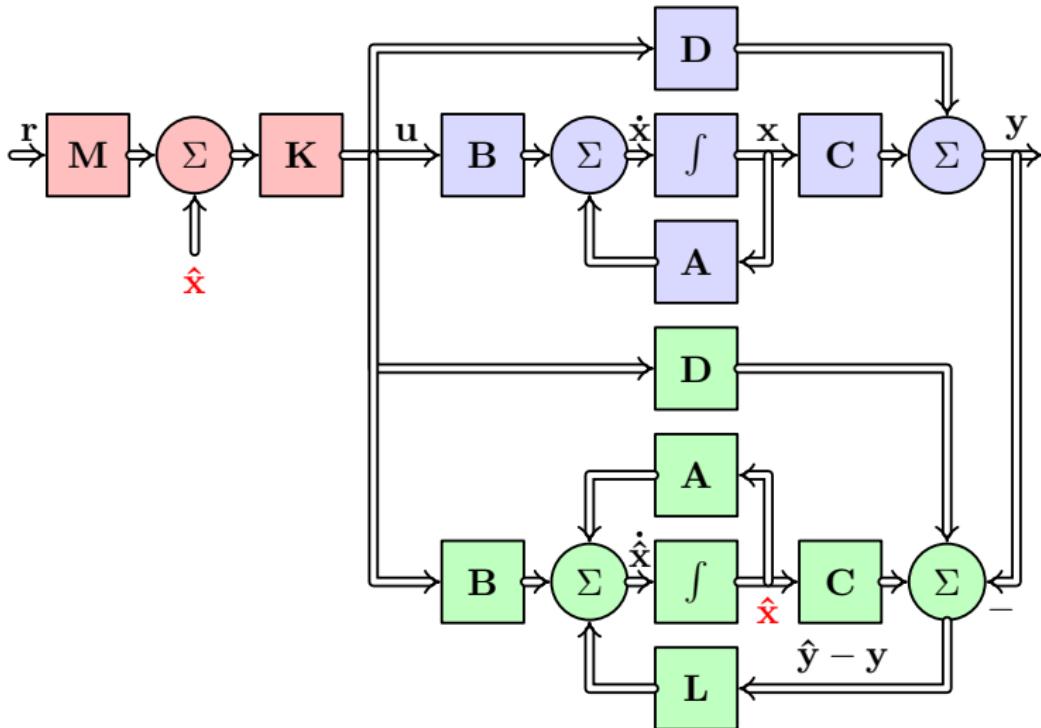
Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Diagrama de Blocos



Observador de Estado

- ▶ Nem todas as variáveis de estado possuem sensor;
- ▶ Assim, x não está completo e deve-se estimá-lo a partir de y ;
- ▶ Estratégia: construir um “clone” do sistema original, da forma

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \quad (8.34a)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + Du \quad (8.34b)$$

- ▶ \hat{x} é a estimativa de x .
- ▶ Note que, em geral:
 - ▶ $x(0) \neq \hat{x}(0)$;
 - ▶ C não é invertível (do contrário, o problema seria trivial).
- ▶ Troca-se a realimentação de estado (8.15) por

$$u = K(Mr + \hat{x}) \quad (8.35)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Questões para Projeto

- ▶ Sob quais condições tem-se $\hat{x} = x$?
- ▶ Sob quais condições o sistema mostrado é estável?
- ▶ A inserção do observador altera a dinâmica do sistema?
De que forma?
- ▶ O projeto do observador é afetado pela escolha de **K** e de **M**?
- ▶ Existe alguma relação entre a dinâmica do observador e da planta?
- ▶ O problema a ser resolvido é chamado **estimação de estado**.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Erro de Observação

- ▶ Devemos, primeiro determinar a “eficiência” do observador (2.12);
- ▶ Será que ele consegue fazer $\hat{x} = x$?
- ▶ Restrinjamos nosso estudo a SLIT-C-SISOs;
- ▶ Definamos o **erro de observação** com (2.12a) e (8.34a):

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y)) \\ &= A\varepsilon + L(y - \hat{y}) \\ &\stackrel{(2.12b)}{=} A\varepsilon + L(Cx + Du - (C\hat{x} + Du)) \\ &= (A + LC)\varepsilon \end{aligned} \tag{8.36}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Dualidade e Projeto de Observadores

Lema

Seja ε o erro de estimativa do SLIT-C-SISO (2.12)-(8.34a). Então $\varepsilon \rightarrow 0$, para $t \rightarrow \infty$ se, e somente se, $\exists \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, tal que $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$ tenha seus autovalores no semi-plano complexo esquerdo.

Importante!

Defina o **sistema dual** de (2.12):

$$\dot{\chi} = \mathbf{A}'\chi + \mathbf{C}'\nu \quad (8.37a)$$

$$\nu = \mathbf{B}'\chi + \mathbf{D}\nu \quad (8.37b)$$

O lema proposto nos induz a aplicar a solução do problema da alocação de polos ao sistema dual para resolver o problema da observação de estado, com realimentação:

$$\nu = \mathbf{L}'\chi \quad (8.38)$$

Observadores de Estado: Projeto

- 1º O projeto é feito a partir do sistema dual. Verifique se este é controlável, ou seja, se o primal é observável;
- 2º Escreva o polinômio característico de \mathbf{A}' :

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}') = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}s^i \quad (8.39)$$

- 3º Determine \mathbf{T} com (8.20) (se necessário, use (8.18) também);
- 4º Determine o polinômio característico desejado com (8.21);
- 5º Determine a transposta da matriz de ganho de saída com (8.22) e (8.23).

Observação

- ▶ Adapte os passos 3 a 5: use a matriz de controlabilidade dual e o polinômio alocador para os autovalores do observador.
- ▶ É possível aplicar a fórmula de Ackermann de forma adequada.

Exemplo

Posicione os autovalores do observador em $-2 \pm j0,2$ para o SLIT-C com matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1º passo: Matriz de controlabilidade dual

$$\det \mathcal{C}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}' = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Sist. dual controlável} \\ \text{e primal observável} \end{array}$$

2º passo: Polinômio característico do sist. dual

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}') = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s-5 \end{bmatrix} = s^2 - 4s - 5$$

Exemplo

3º passo: Transformação de similaridade

Com o polinômio característico do passo anterior e observando (8.18a):

$$\tilde{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(8.20)} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4º passo: Polinômio desejado

$$P(s) = (s + 2 - j0,2)(s + 2 + j0,2) = s^2 + 4s + 4,04$$

5º passo: Determinação de \mathbf{L}

Com (8.23):

$$\mathbf{L}'\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -9,04 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -8 \\ -49,04 \end{bmatrix}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Teorema da Separação I

- ▶ Garantimos que $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}$ para $t \rightarrow \infty$;
- ▶ Mas, como o sistema se comportará, já que, em geral $\hat{\mathbf{x}}_o \neq \mathbf{x}_o$?
- ▶ Reescrevamos o sistema (2.12), (8.34) e (8.35), obtendo o **sistema aumentado**:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{M} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r \quad (8.40a)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K} & -\mathbf{D}\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{K}\mathbf{M}r \quad (8.40b)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Teorema da Separação II

Lema

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in (\mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{R}^{m \times m})$. Então:

i) $\lambda \in \Lambda \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \right) \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda(\mathbf{A}) \text{ ou } \lambda \in \Lambda(\mathbf{C}), \text{ e;}$

ii) A multiplicidade de λ em $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ é a soma de suas multiplicidades em \mathbf{A} e em \mathbf{C} .

Teorema (Separação)

O projeto das matrizes de realimentação de estado e de ganho da saída podem ser realizados independentemente e alocando os polos de $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ e de $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$ em posições arbitrárias do plano complexo, desde que valores complexos ocorram em pares conjugados, respectivamente.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Projeto da Matriz de Ganho da Referência

- ▶ FT de (8.40), usando (2.13) é (8.17), ou seja, mesmo com a realimentação dinâmica de saída, não se altera (em relação à realimentação de estado);
- ▶ Logo, o projeto da matriz de ganho da referência, M , pode ser feito com (8.28);
- ▶ Pode-se usar (8.29) para a norma euclidiana possível;
- ▶ É interessante posicionar os autovalores do observador de 2 a 5 vezes mais à esquerda do último autovalor da planta (realimentada).

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov**
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Introdução à Teoria de Lyapunov

- ▶ Para SLIT-Cs, muitos critérios de estabilidade estão disponíveis:
 - ▶ Critério de Routh-Hurwitz;
 - ▶ Critério de Nyquist.
- ▶ Se o sistema não for linear ou não for invariante, esses critérios são inválidos.
- ▶ A Teoria de Lyapunov (formulada em 1892!) é aplicável a tais situações.
- ▶ Para SLIT-Cs, a Teoria de Lyapunov proporciona uma análise e síntese de controladores mais versátil.

Importante!

*A Teoria de Lyapunov **não invalida** o que estudamos até aqui! Apenas é mais completa (e complexa) do que os métodos anteriormente estudados.*

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Sistemas em Tempo Contínuo (SCs)

- ▶ Considere um SC definido pela Equação Diferencial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (8.41)$$

onde \mathbf{f} é uma função dependente do estado, \mathbf{x} , e, possivelmente, do tempo, t .

- ▶ (8.41) define um **campo vetorial** em \mathbb{R}^n .
- ▶ Suponha que $\phi(t; \mathbf{x}_o, t_o)$ seja a solução única de (8.41).

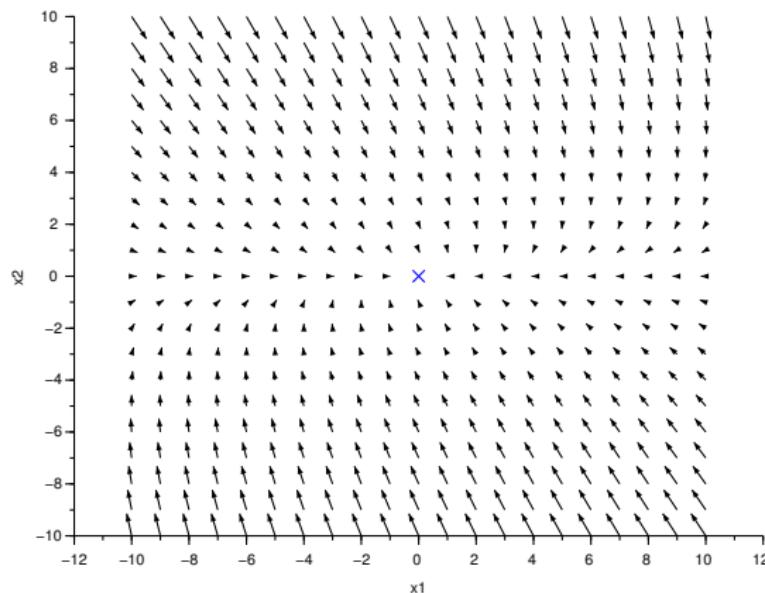
Definição (Ponto de Equilíbrio)

Seja $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$, tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = \mathbf{0}, \forall t \geq 0$. Então, \mathbf{x}_e é dito um ponto de equilíbrio de (8.41).

Exemplo: Campo Vetorial de SLIT-Cs

Considere o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ -5x_2 \end{bmatrix}$$



Definições de Estabilidade I

Observação

Se $\mathbf{x}_e \neq \mathbf{0}$, pode-se fazer $\mathbf{z}_e = \mathbf{0}$, onde \mathbf{z} é obtida por uma mudança adequada de variáveis de estado (translação) em \mathbf{x} .

Definição (Estabilidade no Sentido de Lyapunov)

O ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e é dito (localmente) estável no sentido de Lyapunov (ou Lyapunov-estável) se, dado $\varepsilon > 0$, então $\exists \delta > 0$, tal que:

$$\|\mathbf{x}_o - \mathbf{x}_e\| < \delta \Rightarrow \|\phi(t; \mathbf{x}_o, t_o) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon$$

Definição (Estabilidade Assintótica)

O ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e é dito (localmente) assintoticamente estável se, além de Lyapunov-estável, verifica-se, para $t \rightarrow \infty$, $\phi(t; \mathbf{x}_o, t_o) \rightarrow \mathbf{x}_e$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

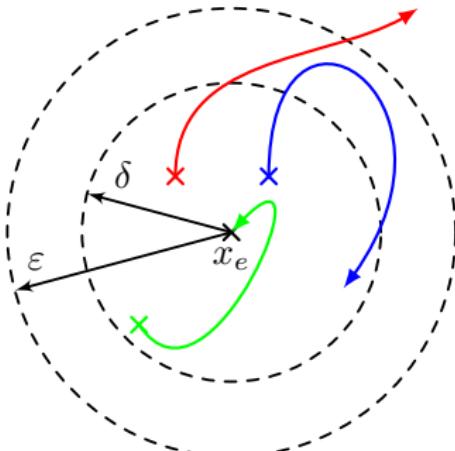
Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Definições de Estabilidade II



Lyapunov-estável
Assintoticamente estável
Instável

- ▶ Os fatos ilustrados na figura devem ocorrer para todo x na esfera δ !
- ▶ Se cada definição de estabilidade ocorre para $\delta \rightarrow \infty$, então a estabilidade é dita **global**.
- ▶ Se dado $\varepsilon > 0$ não existir δ (mesmo muito pequeno) para as definições dadas, o ponto de equilíbrio é dito **instável**.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Positividade

Definição (Positividade de Funções)

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. V será dita positiva-definida se:

- i $V(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega;$
- ii $V(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Observação

- Na definição de positividade, se $V(\mathbf{x}) = 0$, para algum $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (além do próprio vetor nulo), V é dito positivo-semidefinido.
- De maneira análoga, define-se negatividade de funções.
- Uma função que não se enquadra nestas definições é dita *indefinida*.

Positividade: Formas Quadráticas e Autovalores

Considere $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$. Uma importante classe de funções $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dada pela **forma quadrática**:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (8.42)$$

Da Álgebra Linear, tem-se:

- ▶ V é positiva definida se, e somente se, todos os autovalores de \mathbf{P} forem positivos (\mathbf{P} é uma matriz positiva-definida);
- ▶ V é negativa definida se, e somente se, todos os autovalores de \mathbf{P} forem negativos (\mathbf{P} é uma matriz negativa-definida);

Lema (Critério de Sylvester)

$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$, é *positiva-definida* se, e somente se:

$$p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & * \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, |\mathbf{P}| > 0$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

O Teorema da Estabilidade de Lyapunov

Teorema (Lyapunov)

Seja (8.41) um SC tendo a origem como ponto de equilíbrio. Se houver uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, tal que:

- i V é positiva-definida, e;
- ii \dot{V} é negativa-definida.

então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

Adicionalmente, se $V \rightarrow \infty$ para $\|x\| \rightarrow \infty$, a estabilidade é global.

- ▶ Sistemas mecânicos (e elétricos) são estáveis se a energia (que é positiva-definida) decai (derivada negativa-definida);
- ▶ Em outros sistemas, pode ser difícil definir “energia”;
- ▶ Ideia de Lyapunov: definir uma função **energia fictícia** no sistema.

Exemplo: Função “Energia”

Para o exemplo anterior, seja $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{Ix} = \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2$.
Calculando sua derivada:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \nabla V' \cdot \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ -5x_2 \end{bmatrix} = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - 10x_2^2 \\ &= -2[(x_1 - x_2)^2 + 4x_2^2]\end{aligned}$$

que é negativa-definida. Por outro lado, também tem-se:

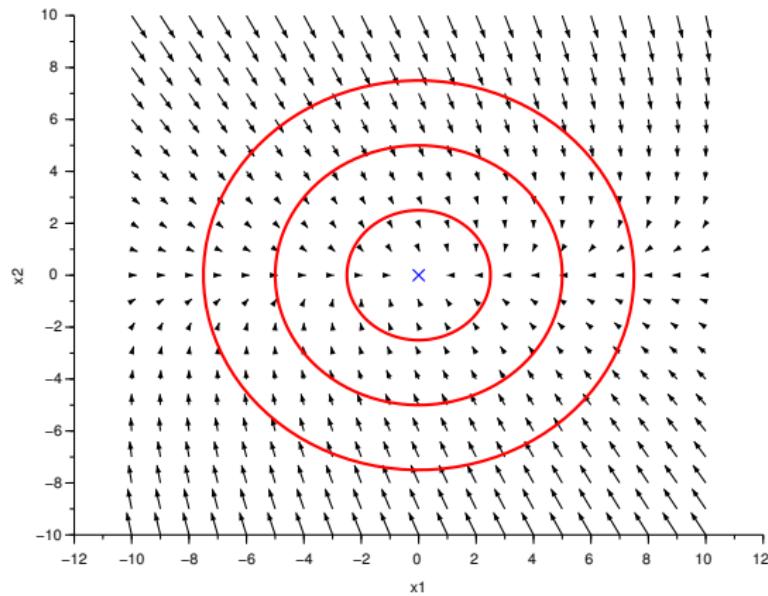
$$\dot{V} = \nabla V' \cdot \dot{\mathbf{x}} = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - 10x_2^2 = -\mathbf{x}' \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

cujos autovalores são $-1,5$ e $-10,5$. Ainda, pelo critério de Sylvester:

$$\det[2] = 2 \quad \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} = 16$$

Logo, a origem deste sistema é global e assintoticamente estável.

Exemplo: Função “Energia”



- ▶ As trajetórias entram nas hiperfícies de energia constante;
- ▶ Nem sempre as hiperfícies de energia constante serão esferas...

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Teorema Recíproco de Lyapunov

Teorema (Lyapunov Recíproco)

Seja (8.41) um SC tendo a origem como ponto de equilíbrio.

Se houver uma função $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, tal que:

- i W é positiva-definida em algum $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$;
- ii \dot{W} é positiva-definida em Ω , e;
- iii $\mathbf{0} \in \Omega$.

então o ponto de equilíbrio é instável.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Alguns Fatos sobre Estabilidade de SLIT-Cs

Lema

Considere o SLIT-C homogêneo (2.12). Se \mathbf{A} for invertível, então a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema.

Lema

Em um SLIT-C, as seguintes afirmativas são equivalentes:

- i A origem é global e assintoticamente estável;
- ii Os autovalores de \mathbf{A} estão no semi-plano complexo esquerdo;
- iii Existem $c > 0$ e $\lambda < 0$, tais que:

$$\|\phi(t; \mathbf{x}_o, 0)\| = \|e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_o\| \leq c \cdot e^{\lambda t} \quad (8.43)$$

- iv Existe uma função de Lyapunov quadrática para o sistema.

Como Construir a Função de Lyapunov?

Considere (8.42) como uma função candidata a Lyapunov.
Derivemo-la:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}' \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}' \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} \mathbf{x})' \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}' (\mathbf{A}' \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \quad (8.44)\end{aligned}$$

Note que (8.44) deve ser negativa-definida para a estabilidade. Assim:

Teorema

Seja (4.1) um SLIT-C homogêneo. Uma condição necessária e suficiente para sua estabilidade global e assintótica é que, dada $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$, positiva-definida, exista $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$, positiva-definida, tal que

$$\mathbf{A}' \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (8.45)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Exemplo

Considere o SLIT-C homogêneo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Façamos $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ e apliquemos (8.45):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & \star \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & \star \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & \star \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O que origina:

$$\begin{aligned} -2p_2 &= -1 \\ p_1 - p_2 - p_3 &= 0 \\ 2p_2 - 2p_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo**
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução ao Controle Ótimo

- ▶ Na Teoria de Lyapunov aplicada a para SLIT-Cs, vimos que todo sistema assintoticamente estável possui uma função de Lyapunov quadrática;
- ▶ Como usar este fato para proporcionar estabilidade a sistemas ainda instáveis?
- ▶ Em outras palavras, como projetar uma matriz de ganho de estado, **K**, para estabilizar o sistema?
- ▶ Como, ainda, projetar este **K** para tornar algum índice de desempenho o melhor possível?
- ▶ Os resultados a serem apresentados aqui dependem de estudos de um tópico da Matemática conhecido como **Cálculo de Variações**;
- ▶ Assim sendo, as demonstrações serão omitidas e as afirmações serão tomadas como verdadeiras.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Índices de Desempenho

- ▶ O índice de desempenho de um sistema é dado por uma forma integral a ser minimizada:

$$J = \int_0^{\infty} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \, dt \quad (8.46)$$

- ▶ (8.46) é conhecido como um índice de otimização em horizonte (de tempo) infinito;

Importante!

Fato: Se L for uma forma quadrática em $[\mathbf{x}' \quad \mathbf{u}']'$, então é possível minimizar (8.46) com uma lei linear da forma (8.15) (com $r = 0$).

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

O Regulador Linear Quadrático

Importante!

Considerando o índice geral (8.46), um problema de otimização de grande importância é o do Regulador Linear Quadrático (LQR), dado por:

$$\min_u J(u) = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{R} \mathbf{u}] dt \quad (8.47)$$

onde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{Q}, \mathbf{R} \succeq 0$ são dados e $u = \mathbf{Kx}$.

- ▶ Se o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) não for controlável, não se aplica o critério quadrático (nem o LQR);
- ▶ Muitos métodos foram (e são) desenvolvidos para este problema;
- ▶ Veremos a abordagem via Teoria de Lyapunov.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

LQR: Um Caso Simples

Em um SLIT-C autônomo, o índice (8.47) reduz-se a

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} dt$$

Suponha que haja $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{P} \succ 0$ com

$$\mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x}) = -\dot{V}(\mathbf{x})$$

Usando (8.45), o sistema é global e assintoticamente estável.

Ainda:

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} dt = [-V(\mathbf{x})]_0^{\infty} = V(\mathbf{x}_o) \quad (8.48)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

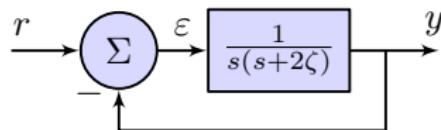
Aula 26

Aula 27

Aula 28

Exemplo: Minimização de Erro

Considere o sistema sob excitação degrau unitário:



Encontremos a solução para o problema de minimização de

$$J = \int_0^\infty [(\varepsilon(t))^2 + k(\dot{\varepsilon}(t))^2] dt, \quad k > 0$$

Observe que sua EDO é:

$$\ddot{y} + 2\zeta\dot{y} + y = r \stackrel{\varepsilon=r-y}{\implies} \ddot{\varepsilon} + 2\zeta\dot{\varepsilon} + \varepsilon = \ddot{r} + 2\zeta\dot{r} = 0, \forall t > 0$$

Como $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, então $\varepsilon(0) = 1$ e $\dot{\varepsilon}(0) = 0$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Exemplo: Minimização de Erro

Fazendo $x_1 = \varepsilon$ e $x_2 = \dot{\varepsilon}$, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Voltando ao critério de desempenho:

$$J = \int_0^\infty [(\varepsilon(t))^2 + k(\dot{\varepsilon}(t))^2] dt = \int_0^\infty \mathbf{x}' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \mathbf{x} dt$$

Observando (8.45) e (8.48):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & * \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & * \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Exemplo: Minimização de Erro

Donde se obtém:

$$J = \mathbf{x}_o' \mathbf{P} \mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta + \frac{1+k}{4\zeta} & * \\ 0,5 & \frac{1+k}{4\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \zeta + \frac{1+k}{4\zeta}$$

Aplicando o teste da derivada primeira a esta expressão (em relação a ζ):

$$\zeta_{otimo} = \frac{\sqrt{1+k}}{2}$$

Assim, para minimizar a integral do quadrado do erro ($k \rightarrow 0$), deve-se fazer $\zeta = 0,5$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

LQR em SLIT-C-SISOs

Ao adaptar (8.47) para SLIT-C-SISOs, tem-se:

$$\min_u J(u) = \int_0^\infty [\mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} + \rho u^2] \mathrm{d}t \quad (8.49)$$

- ▶ Note que, se ρ for grande, o critério irá reduzir o sinal de controle, \mathbf{u} ;
- ▶ Por outro lado, se \mathbf{Q} for “muito positiva-definida”, o critério irá fazer as trajetórias próximas à origem;
- ▶ Estas características são conflitantes!

Observação

O que é \mathbf{Q} “muito positiva-definida”? Tome $\alpha \gg 0$ e faça $\mathbf{Q} - \alpha \mathbf{I} \succ 0$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

A Equação Algébrica de Riccati

Teorema

Seja (4.1) um SLIT-C-SISO, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q} \succeq 0$ e $\rho > 0$. Se existir $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{P} \succeq 0$, tal que (8.50) valha, então:

- i A realimentação de estado (8.51) minimiza (8.49) em $V(\mathbf{x}_o)$;
- ii A origem é global e assintoticamente estável;

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \rho^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (8.50)$$

$$u = -\rho^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{x} \quad (8.51)$$

Observação

(8.50) é chamada Equação Algébrica de Riccati (ARE). Sua solução não é tão simples quanto a da equação de Lyapunov.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

O Lugar das Raízes Simétrico

Teorema

Sejam $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, com $\mathbf{Q} = \mathbf{V}'\mathbf{V}$, para o critério quadrático (8.47) e a FT:

$$\varphi(s) = \mathbf{V}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (8.52)$$

Os polos do sistema em malha fechada $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$, onde \mathbf{K} é o ganho ótimo que satisfaz (8.47), são as n raízes no semiplano esquerdo de:

$$1 + \rho^{-1}\varphi(s)\varphi(-s) = 0 \quad (8.53)$$

Observação

O teorema soluciona o LQR para o caso particular da saída fictícia:

$$y_f = \mathbf{V}\mathbf{x} \quad (8.54)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Exemplo: Motor de Corrente Contínua

Um motor de corrente contínua tem a FT:

$$G(s) = \frac{0,0714}{s^2 + 1,0714s + 0,1429}$$

e representação de estado ($\mathbf{x} = [\nu \quad \dot{\nu}]$ e $u = V_{in}$):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,1429 & -1,0714 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [0,0714 \quad 0] \mathbf{x}\end{aligned}$$

Projete um controlador que leve em consideração apenas a velocidade no critério quadrático.

Observadores Sujeitos a Ruídos

Considere uma planta sujeita a duas origens de ruído:

- ▶ $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^n$, um ruído aditivo presente nas variáveis de estado, e;
- ▶ $v(t) \in \mathbb{R}$, um ruído aditivo na medição da saída.

Assim, a representação da planta fica

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{w} \quad (8.55a)$$

$$y = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} + v. \quad (8.55b)$$

Retornando à Aula 25, calculando o erro, obtém-se

$$\dot{\varepsilon} = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\varepsilon + \mathbf{Lv} + \mathbf{w} \quad (8.56)$$

Observação

Um observador com um ganho considerável minimiza a dinâmica do erro, mas amplifica ruídos!

Ruído Branco Determinístico

- ▶ Um ruído é dito *branco* quando constante no eixo da frequência;
- ▶ Escrevamos os ruídos presentes no controle como

$$\mathbf{w} = \mathbf{W}\delta(t), \quad \mathbf{W} \in \mathbb{R}^n \quad (8.57a)$$

$$v = \sqrt{\mu}\delta(t) \quad (8.57b)$$

- ▶ A partir de (8.8), a solução de (8.56) sob estado inicial nulo é

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \int_0^t e^{(\mathbf{A} + \mathbf{LC})(t-\tau)} (\mathbf{w} + \mathbf{Lv}) \, d\tau \\ &= \underbrace{e^{(\mathbf{A} + \mathbf{LC})t} \mathbf{W}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_w} + \underbrace{\sqrt{\mu} e^{(\mathbf{A} + \mathbf{LC})t} \mathbf{L}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_v} \end{aligned} \quad (8.58)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Desempenho do Observador

Será proposta a minimização do critério quadrático

$$\begin{aligned} J(\mathbf{L}) &= \int_0^{\infty} (\boldsymbol{\varepsilon}'_w \boldsymbol{\varepsilon}_w + \boldsymbol{\varepsilon}'_v \boldsymbol{\varepsilon}_v) dt \\ &= \int_0^{\infty} \left(\mathbf{W}' e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})' t} e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})t} \mathbf{W} \right. \\ &\quad \left. + \mu \mathbf{L} e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})' t} e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})t} \mathbf{L} \right) dt \\ &= \text{Tr} \left(\int_0^{\infty} e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})t} (\mathbf{W}\mathbf{W}' + \mu\mathbf{L}\mathbf{L}') e^{(\mathbf{A}+\mathbf{LC})' t} dt \right) \end{aligned} \tag{8.59}$$

Observação

Note a similaridade entre (8.59) e o LQR em (8.49).

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

O Observador Ótimo

Teorema

Seja (8.55) um SLIT-C-SISO, (8.56) a equação que descreve o erro de observação, $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^n$ e $\mu > 0$. Se existir $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{P} \succ 0$, que satisfaça a

$$\mathbf{AP} + \mathbf{PA}' - \mu^{-1} \mathbf{PCC}' \mathbf{P} + \mathbf{WW}' = \mathbf{0}, \quad (8.60)$$

então a matriz de ganho do observador

$$\mathbf{L} = -\mu^{-1} \mathbf{PC}' \quad (8.61)$$

assegura que $\min J(\mathbf{L}) = \text{Tr}(\mathbf{P})$.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Observador Ótimo via Lugar das Raízes Simétrico

Teorema

Considere a FT para o sistema (8.55)-(8.56)

$$\varphi(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{W}. \quad (8.62)$$

Os autovalores de $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$, L o ganho ótimo do observador, são as raízes no semiplano esquerdo de

$$1 + \mu^{-1}\varphi(s)\varphi(-s) = 0. \quad (8.63)$$

Controle e Servomecanismos

Prof. Victor L.
Yoshimura

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist. Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Sumário

Tópico 1 - Introdução

- Aula 01: Introdução aos Sistemas de Controle
- Aula 02: Transformada de Laplace e Funções Transferência

Tópico 2 - Modelagem

- Aula 03: Diagramas de Blocos
- Aula 04: O Espaço de Estado
- Aula 05: Modelagem de Sistemas Mecânicos
- Aula 06: Modelagem de Circuitos Elétricos e Eletrônicos
- Aula 07: Modelagem de Sistemas de Nível e de Temperatura

Tópico 3 - Resposta Transitória

- Aula 08: Análise da Resposta Transitória I
- Aula 09: Análise da Resposta Transitória II

Tópico 4 - Sistemas Realimentados

- Aula 10: Estrutura Básica de Controle por Realimentação
- Aula 11: Erros em Régime Permanente em Malha Fechada
- Aula 12: O Critério de Routh-Hurwitz
- Aula 13: A Equação Diofantina

Tópico 5 - Lugar das Raízes

- Aula 14: Análise do Lugar das Raízes
- Aula 15: Projeto via Lugar das Raízes

Tópico 6 - Resposta em Frequência

- Aula 16: Diagramas de Bode
- Aula 17: O Critério de Nyquist
- Aula 18: Parâmetros de Desempenho
- Aula 19: Resposta em Malha Fechada
- Aula 20: Projeto de Compensadores

Tópico 7 - Controle PID

- Aula 21: Controle PID

Tópico 8 - Introdução ao Controle Moderno

- Aula 22: Solução de EDOs no Espaço de Estado
- Aula 23: Controlabilidade
- Aula 24: Projeto via Realimentação de Estado
- Aula 25: Realimentação Dinâmica de Saída
- Aula 26: Introdução à Teoria de Lyapunov
- Aula 27: Introdução ao Controle Ótimo
- Aula 28: Introdução aos Sistemas Não-Lineares

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

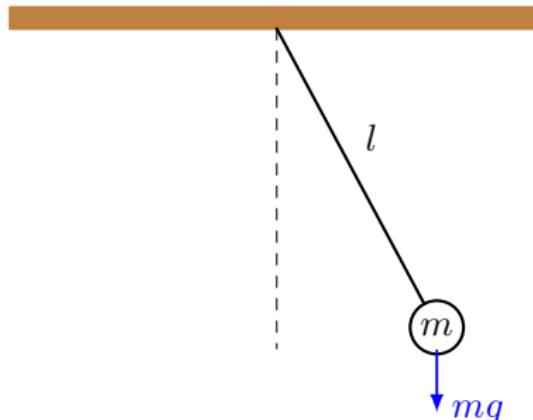
Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Um Problema Não-Linear: O Pêndulo Simples



ED não linear:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

ED linearizada:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

A solução da Equação Diferencial (ED) linearizada é

$$\theta = a \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + b \right),$$

na qual a e b dependem do estado inicial.

Plano de Fase

- Em sistemas de 2^a ordem, pode-se plotar o gráfico (x_1, x_2) .

$$\omega = \dot{\theta} \implies \ddot{\theta} = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{d\omega}{d\theta}\omega$$

- Substituindo nas EDs não-linear e linearizada, tem-se

$$\omega d\omega + \frac{g}{l} \sin(\theta) d\theta = 0 \Rightarrow \int \omega^2 - 2 \frac{g}{l} \cos(\theta) = c$$

$$\omega d\omega + \frac{g}{l} \theta d\theta = 0 \Rightarrow \int \omega^2 + \frac{g}{l} \theta^2 = d$$

- Ainda, com $x_1 = \theta$ e $x_2 = \omega$, tem-se:

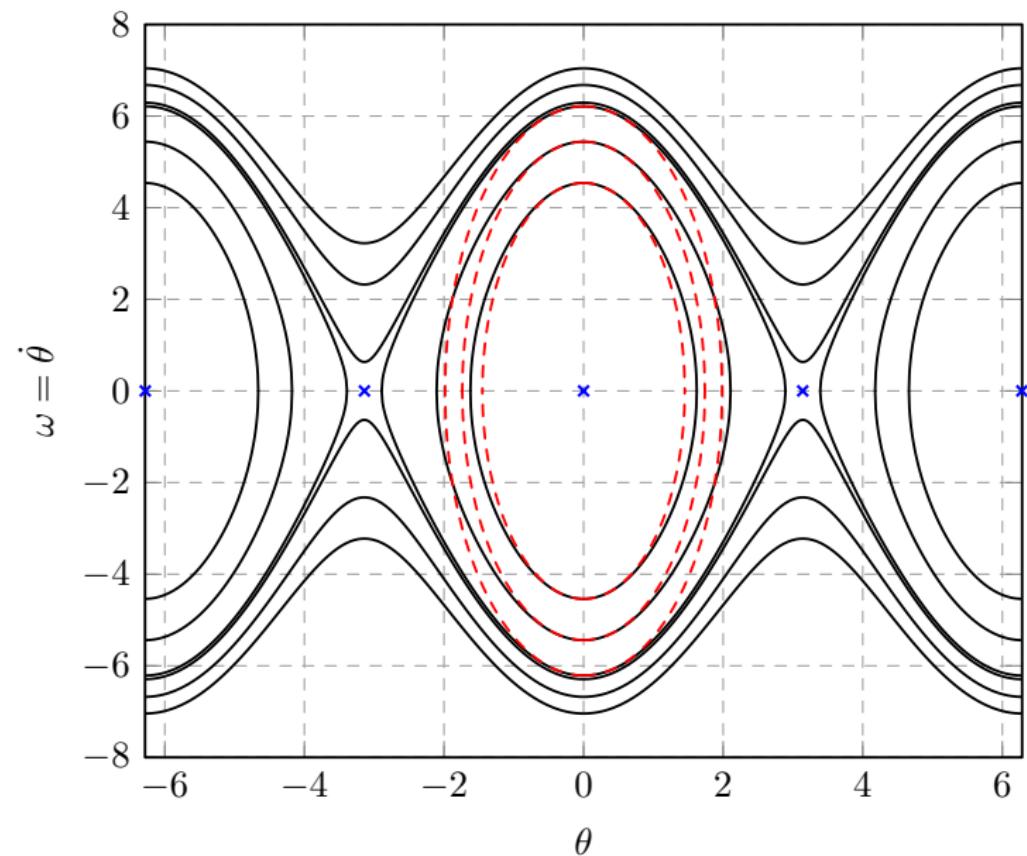
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$x_{2e} = 0$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1)$$

$$x_{1e} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Plano de Fase



Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Sistemas Tipo Lur'e

Um sistema tipo Lur'e (lê-se "Lur i") tem a forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (8.64a)$$

$$y = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (8.64b)$$

$$u = -\phi(y), \quad (8.64c)$$

onde ϕ é uma função não-linear de realimentação.

Se a parte linear não tiver transmissão direta, pode-se escrever

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{B}\phi(\mathbf{Cx}), \quad (8.65)$$

cuja estabilidade pode ser estudada por um célebre resultado: o **critério de Popov**.

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Sistemas Tipo Persidiskii

Um sistema tipo Persidiskii tem a ED

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \psi_1(x_1) \\ \psi_2(x_2) \\ \vdots \\ \psi_n(x_n) \end{bmatrix}, \quad (8.66)$$

na qual:

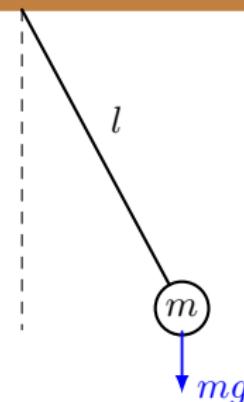
i $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;

ii $\psi_i(x_i)x_i > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, e;

iii $\lim_{|x_i| \rightarrow \infty} \int_0^{x_i} \psi_i(\xi) d\xi = \infty$.

Observe que cada componente da função não-linear ψ depende apenas da respectiva componente do estado.

Exemplo: Pêndulo com Atrito Viscoso



ED não linear:

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

Com o estado antes definido:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{b}{ml^2}x_2$$

Note que este sistema é tipo Lur'e, pois se pode escrever

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{l} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$u = \sin(y)$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

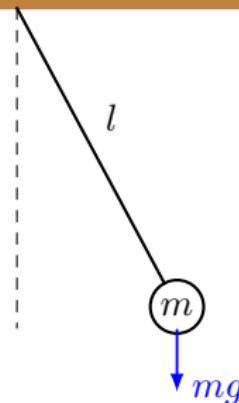
Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Exemplo: Pêndulo com Atrito Viscoso



ED não linear:

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

Com o estado antes definido:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{b}{ml^2}x_2$$

Este sistema também é tipo Persidiskii, pois é possível escrever

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(x_1) \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Introdução

Modelagem

Resp. Transitória

Sist.
Realimentados

Lugar das Raízes

Resp. em
Frequência

Controle PID

Controle Moderno

Aula 22

Aula 23

Aula 24

Aula 25

Aula 26

Aula 27

Aula 28

Critério de Persidiskii

Teorema

Considere o sistema tipo Persidiskii (8.66). Se existir $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, diagonal e positiva-definida, tal que $\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}$ seja negativa-definida, então a origem do sistema é global e assintoticamente estável.

A prova deste teorema se apoia na construção da função de Lyapunov

$$V(\mathbf{x}) = 2 \sum_{i=1}^n p_i \int_0^{x_i} \psi_i(\xi) d\xi. \quad (8.67)$$

Exercício

Mostre a estabilidade do sistema de pêndulo com atrito viscoso, utilizando o critério de Persidiskii.