

Strings

Definição de string

Prof. Edson Alves - UnB/FGA

1. Motivação
2. Definições
3. Strings Notáveis

Motivação

Motivações para o estudo de strings

- Sequências de caracteres, ou strings, constituem uma maneira natural de representar informações

Motivações para o estudo de strings

- Sequências de caracteres, ou strings, constituem uma maneira natural de representar informações
- As strings aparecem em diversas áreas além da Computação, como a Biologia (estudo das moléculas e DNA), Letras (ortografia, sintaxe e morfologia), Criptografia (codificação e decodificação de mensagens), dentre outras

Motivações para o estudo de strings

- Sequências de caracteres, ou strings, constituem uma maneira natural de representar informações
- As strings aparecem em diversas áreas além da Computação, como a Biologia (estudo das moléculas e DNA), Letras (ortografia, sintaxe e morfologia), Criptografia (codificação e decodificação de mensagens), dentre outras
- O algoritmo fundamental para o estudo e entendimento de strings é o *pattern matching*, que consiste na localização informações (padrões) em um texto (string)

Motivações para o estudo de strings

- Sequências de caracteres, ou strings, constituem uma maneira natural de representar informações
- As strings aparecem em diversas áreas além da Computação, como a Biologia (estudo das moléculas e DNA), Letras (ortografia, sintaxe e morfologia), Criptografia (codificação e decodificação de mensagens), dentre outras
- O algoritmo fundamental para o estudo e entendimento de strings é o *pattern matching*, que consiste na localização informações (padrões) em um texto (string)
- A importância do *pattern matching* para o estudo das strings equivale à importância dos algoritmos de ordenação no estudo de algoritmos

Motivações para o estudo de strings

- Os padrões a serem localizados podem ser exatos, ou escritos em uma representação que utiliza caracteres especiais para marcar sequências ou repetições, denominada *regex* (*regular expressions*)

Motivações para o estudo de strings

- Os padrões a serem localizados podem ser exatos, ou escritos em uma representação que utiliza caracteres especiais para marcar sequências ou repetições, denominada *regex* (*regular expressions*)
- A linguagem awk (Aho, Weinberger, Kernighan) é inteiramente baseada em expressões regulares e é focada na manipulação de strings

Motivações para o estudo de strings

- Os padrões a serem localizados podem ser exatos, ou escritos em uma representação que utiliza caracteres especiais para marcar sequências ou repetições, denominada *regex* (*regular expressions*)
- A linguagem awk (Aho, Weinberger, Kernighan) é inteiramente baseada em expressões regulares e é focada na manipulação de strings
- O ambiente UNIX dispõe de várias ferramentas para textos (grep, cat, more, less, sed, diff, etc), que permitem *pattern matching*, exibição, busca, identificação, filtragem, e manipulação de strings, dentre outros

Motivações para o estudo de strings

- Os padrões a serem localizados podem ser exatos, ou escritos em uma representação que utiliza caracteres especiais para marcar sequências ou repetições, denominada *regex* (*regular expressions*)
- A linguagem awk (Aho, Weinberger, Kernighan) é inteiramente baseada em expressões regulares e é focada na manipulação de strings
- O ambiente UNIX dispõe de várias ferramentas para textos (grep, cat, more, less, sed, diff, etc), que permitem *pattern matching*, exibição, busca, identificação, filtragem, e manipulação de strings, dentre outros
- Estas ferramentas podem ser utilizadas isoladamente ou em conjunto, oferecendo uma grande gama de opções aos seus usuários

Definições

Definição de string

- Um alfabeto Σ é um conjunto finito de símbolos

Definição de string

- Um alfabeto Σ é um conjunto finito de símbolos
- Os elementos de um alfabeto Σ são denominados letras, caracteres ou símbolos

Definição de string

- Um alfabeto Σ é um conjunto finito de símbolos
- Os elementos de um alfabeto Σ são denominados letras, caracteres ou símbolos
- Exemplos de alfabetos comumente utilizados são as letras maiúsculas e minúsculas, os dígitos decimais e a tabela ASCII

Definição de string

- Um alfabeto Σ é um conjunto finito de símbolos
- Os elementos de um alfabeto Σ são denominados letras, caracteres ou símbolos
- Exemplos de alfabetos comumente utilizados são as letras maiúsculas e minúsculas, os dígitos decimais e a tabela ASCII
- Uma string s (ou texto ou palavra) é uma sequência ordenada $s = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ de caracteres a_i de um alfabeto Σ

Definição de string

- Um alfabeto Σ é um conjunto finito de símbolos
- Os elementos de um alfabeto Σ são denominados letras, caracteres ou símbolos
- Exemplos de alfabetos comumente utilizados são as letras maiúsculas e minúsculas, os dígitos decimais e a tabela ASCII
- Uma string s (ou texto ou palavra) é uma sequência ordenada $s = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ de caracteres a_i de um alfabeto Σ
- O i -ésimo termo de s também é denotado por s_i ou $s[i]$

Definição de string

- Um alfabeto Σ é um conjunto finito de símbolos
- Os elementos de um alfabeto Σ são denominados letras, caracteres ou símbolos
- Exemplos de alfabetos comumente utilizados são as letras maiúsculas e minúsculas, os dígitos decimais e a tabela ASCII
- Uma string s (ou texto ou palavra) é uma sequência ordenada $s = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ de caracteres a_i de um alfabeto Σ
- O i -ésimo termo de s também é denotado por s_i ou $s[i]$
- O número N de elementos da sequência s pode ser notado como $|s|$

- Um intervalo é uma subsequência contígua

$$s[i..j] = s[i]s[i+1] \dots s[j]$$

de elementos de s

Substrings

- Um intervalo é uma subsequência contígua

$$s[i..j] = s[i]s[i+1] \dots s[j]$$

de elementos de s

- Observe que $|s[i..j]| = j - i + 1$

Substrings

- Um intervalo é uma subsequência contígua

$$s[i..j] = s[i]s[i+1] \dots s[j]$$

de elementos de s

- Observe que $|s[i..j]| = j - i + 1$
- Uma substring b de s , com $|b| = M$, é uma string b tal que $b = s[(i+1)..(i+M)]$ para algum inteiro i

Substrings

- Um intervalo é uma subsequência contígua

$$s[i..j] = s[i]s[i+1] \dots s[j]$$

de elementos de s

- Observe que $|s[i..j]| = j - i + 1$
- Uma substring b de s , com $|b| = M$, é uma string b tal que $b = s[(i+1)..(i+M)]$ para algum inteiro i
- Uma subsequência $a = s[i_1]s[i_2] \dots s[i_M]$ de uma string s pode ser obtida a partir da remoção de zero ou mais elementos de s , não necessariamente consecutivos

Substrings

- Um intervalo é uma subsequência contígua

$$s[i..j] = s[i]s[i+1] \dots s[j]$$

de elementos de s

- Observe que $|s[i..j]| = j - i + 1$
- Uma substring b de s , com $|b| = M$, é uma string b tal que $b = s[(i+1)..(i+M)]$ para algum inteiro i
- Uma subsequência $a = s[i_1]s[i_2] \dots s[i_M]$ de uma string s pode ser obtida a partir da remoção de zero ou mais elementos de s , não necessariamente consecutivos
- Os inteiros i_1, i_2, \dots, i_M formam uma sequência crescente de índices de s (isto é, $i_u < i_v$ para $u < v$)

- Um prefixo de uma string s é uma substring x , de tamanho $|x| = M$, tal que $x = s[1..M]$

Prefixos e sufixos

- Um prefixo de uma string s é uma substring x , de tamanho $|x| = M$, tal que $x = s[1..M]$
- Um sufixo y de s , de tamanho $|y| = T$, é uma substring de s tal que $y = s[(N - T + 1)..N]$, onde $|s| = N$

Prefixos e sufixos

- Um prefixo de uma string s é uma substring x , de tamanho $|x| = M$, tal que $x = s[1..M]$
- Um sufixo y de s , de tamanho $|y| = T$, é uma substring de s tal que $y = s[(N - T + 1)..N]$, onde $|s| = N$
- Uma borda B de uma string s é uma substring que é, simultaneamente, prefixo e sufixo de s

Prefixos e sufixos

- Um prefixo de uma string s é uma substring x , de tamanho $|x| = M$, tal que $x = s[1..M]$
- Um sufixo y de s , de tamanho $|y| = T$, é uma substring de s tal que $y = s[(N - T + 1)..N]$, onde $|s| = N$
- Uma borda B de uma string s é uma substring que é, simultaneamente, prefixo e sufixo de s
- Uma vez que a string vazia (isto é, $|s| = 0$) e a própria string s são sempre bordas (triviais) de s , define-se $border(s)$ como a mais longa (de maior tamanho) dentre as bordas de s que são distintas da própria string s

Prefixos e sufixos

- Um prefixo de uma string s é uma substring x , de tamanho $|x| = M$, tal que $x = s[1..M]$
- Um sufixo y de s , de tamanho $|y| = T$, é uma substring de s tal que $y = s[(N - T + 1)..N]$, onde $|s| = N$
- Uma borda B de uma string s é uma substring que é, simultaneamente, prefixo e sufixo de s
- Uma vez que a string vazia (isto é, $|s| = 0$) e a própria string s são sempre bordas (triviais) de s , define-se $border(s)$ como a mais longa (de maior tamanho) dentre as bordas de s que são distintas da própria string s
- Por exemplo, as strings "ame", "rica" e "a" são exemplos de prefixo, sufixo e borda da string "america", respectivamente

Período de uma string

- Um período de uma string s é um inteiro p , $0 < p \leq |s|$ tal que $s[i] = s[i + p]$, para todo $i = 0, 1, \dots, |s| - p$

Período de uma string

- Um período de uma string s é um inteiro p , $0 < p \leq |s|$ tal que $s[i] = s[i + p]$, para todo $i = 0, 1, \dots, |s| - p$
- Para qualquer string, $|s|$ é um período, de modo que define-se $period(s)$ como o menor período de s

Período de uma string

- Um período de uma string s é um inteiro p , $0 < p \leq |s|$ tal que $s[i] = s[i + p]$, para todo $i = 0, 1, \dots, |s| - p$
- Para qualquer string, $|s|$ é um período, de modo que define-se $period(s)$ como o menor período de s
- A string s é dita periódica se $period(s) \leq |s|/2$

Período de uma string

- Um período de uma string s é um inteiro p , $0 < p \leq |s|$ tal que $s[i] = s[i + p]$, para todo $i = 0, 1, \dots, |s| - p$
- Para qualquer string, $|s|$ é um período, de modo que define-se $period(s)$ como o menor período de s
- A string s é dita periódica se $period(s) \leq |s|/2$
- Por exemplo, para as strings $s_1 = \text{"marítima"}$, $s_2 = \text{"ticotico"}$ e $s_3 = \text{"Brasilia"}$, temos $period(s_1) = 6$, $period(s_2) = 4$ e $period(s_3) = 8$

Período de uma string

- Um período de uma string s é um inteiro p , $0 < p \leq |s|$ tal que $s[i] = s[i + p]$, para todo $i = 0, 1, \dots, |s| - p$
- Para qualquer string, $|s|$ é um período, de modo que define-se $period(s)$ como o menor período de s
- A string s é dita periódica se $period(s) \leq |s|/2$
- Por exemplo, para as strings $s_1 = \text{"marítima"}$, $s_2 = \text{"ticotico"}$ e $s_3 = \text{"Brasilia"}$, temos $period(s_1) = 6$, $period(s_2) = 4$ e $period(s_3) = 8$
- Dentre as três, apenas s_2 é periódica

Os diferentes períodos de uma mesma string s se relacionam de uma maneira não trivial, que pode ser expressa pelos dois lemas a seguir.

Lemas de Periodicidade

Os diferentes períodos de uma mesma string s se relacionam de uma maneira não trivial, que pode ser expressa pelos dois lemas a seguir.

Lema da Periodicidade

Sejam p e q dois períodos de uma string s . Se $p + q < |s|$, então $\text{mdc}(p, q)$ também é período de s .

Lemas de Periodicidade

Os diferentes períodos de uma mesma string s se relacionam de uma maneira não trivial, que pode ser expressa pelos dois lemas a seguir.

Lema da Periodicidade

Sejam p e q dois períodos de uma string s . Se $p + q < |s|$, então $\text{mdc}(p, q)$ também é período de s .

Lema Forte da Periodicidade

Sejam p e q dois períodos de uma string s . Se $p + q - \text{mdc}(p, q) \leq |s|$, então $\text{mdc}(p, q)$ também é período de s .

Relação entre períodos e bordas

- Há uma interessante relação entre bordas e períodos

Relação entre períodos e bordas

- Há uma interessante relação entre bordas e períodos
- A sequência

$$|s| - |\textit{border}(s)|, |s| - |\textit{border}^2(s)|, \dots, |s| - |\textit{border}^k(s)|$$

é a sequência crescente de todos os possíveis períodos de s , onde k é o menor inteiro positivo tal que $\textit{border}^k(s)$ é uma string vazia

Relação entre períodos e bordas

- Há uma interessante relação entre bordas e períodos
- A sequência

$$|s| - |\textit{border}(s)|, |s| - |\textit{border}^2(s)|, \dots, |s| - |\textit{border}^k(s)|$$

é a sequência crescente de todos os possíveis períodos de s , onde k é o menor inteiro positivo tal que $\textit{border}^k(s)$ é uma string vazia

- Por exemplo, para a string $s = \text{"teteatete"}$, tem-se $|s| = 9$ e

$$\textit{border}(s) = \text{"tete"}$$

$$\textit{border}^2(s) = \textit{border}(\text{"tete"}) = \text{"te"}$$

$$\textit{border}^3(s) = \textit{border}(\text{"te"}) = \text{" "}$$

os quais formam a sequência de períodos $9 - 4 = 5$, $9 - 2 = 7$ e $9 - 0 = 9$

Pattern matching

- O problema fundamental de strings é o *pattern matching*

Pattern matching

- O problema fundamental de strings é o *pattern matching*
- Dada uma string P , que representa um padrão, o *pattern matching* consiste em determinar se P ocorre ou não em s

Pattern matching

- O problema fundamental de strings é o *pattern matching*
- Dada uma string P , que representa um padrão, o *pattern matching* consiste em determinar se P ocorre ou não em s
- O *pattern matching* é um problema de decisão, isto é, a resposta é booleana: o padrão ocorre ou não, embora uma variante comum é determinar o índice da primeira posição onde P ocorre ou um valor sentinela, caso não ocorra

Pattern matching

- O problema fundamental de strings é o *pattern matching*
- Dada uma string P , que representa um padrão, o *pattern matching* consiste em determinar se P ocorre ou não em s
- O *pattern matching* é um problema de decisão, isto é, a resposta é booleana: o padrão ocorre ou não, embora uma variante comum é determinar o índice da primeira posição onde P ocorre ou um valor sentinela, caso não ocorra
- Em geral, $|P| \leq |s|$

Pattern matching

- O problema fundamental de strings é o *pattern matching*
- Dada uma string P , que representa um padrão, o *pattern matching* consiste em determinar se P ocorre ou não em s
- O *pattern matching* é um problema de decisão, isto é, a resposta é booleana: o padrão ocorre ou não, embora uma variante comum é determinar o índice da primeira posição onde P ocorre ou um valor sentinela, caso não ocorra
- Em geral, $|P| \leq |s|$
- Uma notação possível é $match(P, s)$

Strings Notáveis

Strings de Fibonacci

- As strings de Fibonacci F_n , com $n \geq 0$, são definidas como

$$F_0 = ""$$

$$F_1 = "b"$$

$$F_2 = "a"$$

$$F_n = F_{(n-1)}F_{(n-2)}, n > 2$$

onde a expressão $F_{(n-1)}F_{(n-2)}$ significa a concatenação das últimas duas strings de Fibonacci

Strings de Fibonacci

- As strings de Fibonacci F_n , com $n \geq 0$, são definidas como

$$F_0 = ""$$

$$F_1 = "b"$$

$$F_2 = "a"$$

$$F_n = F_{(n-1)}F_{(n-2)}, n > 2$$

onde a expressão $F_{(n-1)}F_{(n-2)}$ significa a concatenação das últimas duas strings de Fibonacci

- Por exemplo, $F_3 = "ab"$, $F_4 = "aba"$ e $F_5 = "abaab"$

Strings de Fibonacci

- As strings de Fibonacci F_n , com $n \geq 0$, são definidas como

$$F_0 = ""$$

$$F_1 = "b"$$

$$F_2 = "a"$$

$$F_n = F_{(n-1)}F_{(n-2)}, n > 2$$

onde a expressão $F_{(n-1)}F_{(n-2)}$ significa a concatenação das últimas duas strings de Fibonacci

- Por exemplo, $F_3 = "ab"$, $F_4 = "aba"$ e $F_5 = "abaab"$
- Há 3 fatos notáveis a respeito das strings de Fibonacci:

Strings de Fibonacci

- As strings de Fibonacci F_n , com $n \geq 0$, são definidas como

$$F_0 = ""$$

$$F_1 = "b"$$

$$F_2 = "a"$$

$$F_n = F_{(n-1)}F_{(n-2)}, n > 2$$

onde a expressão $F_{(n-1)}F_{(n-2)}$ significa a concatenação das últimas duas strings de Fibonacci

- Por exemplo, $F_3 = "ab"$, $F_4 = "aba"$ e $F_5 = "abaab"$
- Há 3 fatos notáveis a respeito das strings de Fibonacci:
 - removidas as duas últimas letras de uma string de Fibonacci, o resultado é um palíndromo

Strings de Fibonacci

- As strings de Fibonacci F_n , com $n \geq 0$, são definidas como

$$F_0 = ""$$

$$F_1 = "b"$$

$$F_2 = "a"$$

$$F_n = F_{(n-1)}F_{(n-2)}, n > 2$$

onde a expressão $F_{(n-1)}F_{(n-2)}$ significa a concatenação das últimas duas strings de Fibonacci

- Por exemplo, $F_3 = "ab"$, $F_4 = "aba"$ e $F_5 = "abaab"$
- Há 3 fatos notáveis a respeito das strings de Fibonacci:
 - removidas as duas últimas letras de uma string de Fibonacci, o resultado é um palíndromo
 - qualquer string de Fibonacci F_n com $n \geq 2$ é prefixo de outra string de Fibonacci

Strings de Fibonacci

- As strings de Fibonacci F_n , com $n \geq 0$, são definidas como

$$F_0 = ""$$

$$F_1 = "b"$$

$$F_2 = "a"$$

$$F_n = F_{(n-1)}F_{(n-2)}, n > 2$$

onde a expressão $F_{(n-1)}F_{(n-2)}$ significa a concatenação das últimas duas strings de Fibonacci

- Por exemplo, $F_3 = "ab"$, $F_4 = "aba"$ e $F_5 = "abaab"$
- Há 3 fatos notáveis a respeito das strings de Fibonacci:
 - removidas as duas últimas letras de uma string de Fibonacci, o resultado é um palíndromo
 - qualquer string de Fibonacci F_n com $n \geq 2$ é prefixo de outra string de Fibonacci
 - todas strings de Fibonacci F_n com $n \geq 2$ são prefixos de F_∞

Prefixos de Thue-Morse

- Considere a string infinita T_∞ , definida da seguinte maneira, onde $g(k)$ é o número dígitos 1 (um) na representação binária do inteiro não-negativo k :

$$T_\infty(k) = \begin{cases} \text{'a'}, & \text{se } g(k) \text{ é par} \\ \text{'b'}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Prefixos de Thue-Morse

- Considere a string infinita T_∞ , definida da seguinte maneira, onde $g(k)$ é o número dígitos 1 (um) na representação binária do inteiro não-negativo k :

$$T_\infty(k) = \begin{cases} \text{'a'}, & \text{se } g(k) \text{ é par} \\ \text{'b'}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Os prefixos de Thue-Morse $T(n)$ são os prefixos de T_∞ de tamanho 2^n

Prefixos de Thue-Morse

- Considere a string infinita T_∞ , definida da seguinte maneira, onde $g(k)$ é o número dígitos 1 (um) na representação binária do inteiro não-negativo k :

$$T_\infty(k) = \begin{cases} \text{'a'}, & \text{se } g(k) \text{ é par} \\ \text{'b'}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Os prefixos de Thue-Morse $T(n)$ são os prefixos de T_∞ de tamanho 2^n
- Os quatro primeiros prefixos de Thue-Morse são: $T(1) = \text{"ab"}$, $T(2) = \text{"abba"}$, $T(3) = \text{"abbabaab"}$ e $T(4) = \text{"abbabaabbaababba"}$

Prefixos de Thue-Morse

- Considere a string infinita T_∞ , definida da seguinte maneira, onde $g(k)$ é o número dígitos 1 (um) na representação binária do inteiro não-negativo k :

$$T_\infty(k) = \begin{cases} \text{'a'}, & \text{se } g(k) \text{ é par} \\ \text{'b'}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Os prefixos de Thue-Morse $T(n)$ são os prefixos de T_∞ de tamanho 2^n
- Os quatro primeiros prefixos de Thue-Morse são: $T(1) = \text{"ab"}$, $T(2) = \text{"abba"}$, $T(3) = \text{"abbabaab"}$ e $T(4) = \text{"abbabaabbaababba"}$
- Estas strings são livres de *overlaps*, isto é, não existe nenhuma string não vazia s que ocorre em duas posições distintas de $T(n)$ com distância entre estas posições menor do que $|s|$

Prefixos de Thue-Morse

- Considere a string infinita T_∞ , definida da seguinte maneira, onde $g(k)$ é o número dígitos 1 (um) na representação binária do inteiro não-negativo k :

$$T_\infty(k) = \begin{cases} \text{'a'}, & \text{se } g(k) \text{ é par} \\ \text{'b'}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Os prefixos de Thue-Morse $T(n)$ são os prefixos de T_∞ de tamanho 2^n
- Os quatro primeiros prefixos de Thue-Morse são: $T(1) = \text{"ab"}$, $T(2) = \text{"abba"}$, $T(3) = \text{"abbabaab"}$ e $T(4) = \text{"abbabaabbaababba"}$
- Estas strings são livres de *overlaps*, isto é, não existe nenhuma string não vazia s que ocorre em duas posições distintas de $T(n)$ com distância entre estas posições menor do que $|s|$
- Também são livre de quadrados: não existe um string s tal que a concatenação de s consigo mesma seja substring de $T(n)$

Palavras binárias P_n

- A palavra binária P_n é obtida a partir da n -ésima linha do triângulo de Pascal, onde seu i -ésimo caractere é dado por

$$P_n[i] = \binom{n}{i} \pmod{2}$$

Palavras binárias P_n

- A palavra binária P_n é obtida a partir da n -ésima linha do triângulo de Pascal, onde seu i -ésimo caractere é dado por

$$P_n[i] = \binom{n}{i} \pmod{2}$$

- As primeiras 5 palavras binárias P_n são

$$P_0 = "1"$$

$$P_1 = "11"$$

$$P_2 = "101"$$

$$P_3 = "1111"$$

$$P_4 = "10001"$$

Palavras binárias P_n

- A palavra binária P_n é obtida a partir da n -ésima linha do triângulo de Pascal, onde seu i -ésimo caractere é dado por

$$P_n[i] = \binom{n}{i} \pmod{2}$$

- As primeiras 5 palavras binárias P_n são

$$P_0 = "1"$$

$$P_1 = "11"$$

$$P_2 = "101"$$

$$P_3 = "1111"$$

$$P_4 = "10001"$$

- O número de ocorrências do caractere '1' em P_n é igual a $2^{g(n)}$, onde $g(k)$ tem a mesma definição dada nos prefixos de Thue-Morse

String de dígitos

- Considere a string infinita W composta pela representação decimal dos números naturais consecutivos, isto é,

$W = "012345678910111213141516171819202122232425\dots"$

String de dígitos

- Considere a string infinita W composta pela representação decimal dos números naturais consecutivos, isto é,

$$W = "012345678910111213141516171819202122232425\dots"$$

- W_n é o prefixo de W de tamanho n

String de dígitos

- Considere a string infinita W composta pela representação decimal dos números naturais consecutivos, isto é,

$$W = "012345678910111213141516171819202122232425\dots"$$

- W_n é o prefixo de W de tamanho n
- Seja s uma string composta por dígitos decimais. A função $occ_n(s)$ computa o número de ocorrências de s em W_n

String de dígitos

- Considere a string infinita W composta pela representação decimal dos números naturais consecutivos, isto é,

$$W = "012345678910111213141516171819202122232425\dots"$$

- W_n é o prefixo de W de tamanho n
- Seja s uma string composta por dígitos decimais. A função $occ_n(s)$ computa o número de ocorrências de s em W_n
- Para duas strings s, t de mesmo tamanho,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{occ_n(s)}{occ_n(t)} \right) = 1$$

String de dígitos

- Considere a string infinita W composta pela representação decimal dos números naturais consecutivos, isto é,

$$W = "012345678910111213141516171819202122232425\dots"$$

- W_n é o prefixo de W de tamanho n
- Seja s uma string composta por dígitos decimais. A função $occ_n(s)$ computa o número de ocorrências de s em W_n
- Para duas strings s, t de mesmo tamanho,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{occ_n(s)}{occ_n(t)} \right) = 1$$

- Esta propriedade dá um sentido “randômico” para a sequência W

- Seja $\Sigma = \{a, b\}$. Existem 2^k strings de tamanho k formadas por elementos de Σ

Strings de Brujin

- Seja $\Sigma = \{a, b\}$. Existem 2^k strings de tamanho k formadas por elementos de Σ
- Uma pergunta natural que surge é: qual é o comprimento mínimo $\gamma(k)$ de uma string que contenha todas estas substrings?

Strings de Bruijin

- Seja $\Sigma = \{a, b\}$. Existem 2^k strings de tamanho k formadas por elementos de Σ
- Uma pergunta natural que surge é: qual é o comprimento mínimo $\gamma(k)$ de uma string que contenha todas estas substrings?
- Um limite inferior é $\gamma(k) = 2^k + k - 1$, pois qualquer string menor não teria 2^k substrings de tamanho k

Strings de Bruijin

- Seja $\Sigma = \{a, b\}$. Existem 2^k strings de tamanho k formadas por elementos de Σ
- Uma pergunta natural que surge é: qual é o comprimento mínimo $\gamma(k)$ de uma string que contenha todas estas substrings?
- Um limite inferior é $\gamma(k) = 2^k + k - 1$, pois qualquer string menor não teria 2^k substrings de tamanho k
- Efetivamente, $\gamma(k) = 2^k + k - 1$

Strings de Bruijin

- Seja $\Sigma = \{a, b\}$. Existem 2^k strings de tamanho k formadas por elementos de Σ
- Uma pergunta natural que surge é: qual é o comprimento mínimo $\gamma(k)$ de uma string que contenha todas estas substrings?
- Um limite inferior é $\gamma(k) = 2^k + k - 1$, pois qualquer string menor não teria 2^k substrings de tamanho k
- Efetivamente, $\gamma(k) = 2^k + k - 1$
- Uma string com este tamanho, contendo todas as substrings de tamanho k formadas por elementos de Σ , é denominada string de Bruijin

Strings de Bruijin e Ciclos de Euler

- Há uma relação entre strings de Bruijin e ciclos de Euler

Strings de Bruijin e Ciclos de Euler

- Há uma relação entre strings de Bruijin e ciclos de Euler
- Seja G_k um grafo cujos vértices são todas as strings de elementos de Σ de tamanho $k - 1$

Strings de Bruijin e Ciclos de Euler

- Há uma relação entre strings de Bruijin e ciclos de Euler
- Seja G_k um grafo cujos vértices são todas as strings de elementos de Σ de tamanho $k - 1$
- Para qualquer string $x = a_1a_2 \dots a_{k-1}$ temos duas arestas direcionadas:

$$a_1a_2 \dots a_{k-1} \xrightarrow{a} a_2a_3 \dots a_{k-1}a$$

$$a_1a_2 \dots a_{k-1} \xrightarrow{b} a_2a_3 \dots a_{k-1}b$$

Strings de Bruijin e Ciclos de Euler

- Há uma relação entre strings de Bruijin e ciclos de Euler
- Seja G_k um grafo cujos vértices são todas as strings de elementos de Σ de tamanho $k - 1$
- Para qualquer string $x = a_1a_2 \dots a_{k-1}$ temos duas arestas direcionadas:

$$a_1a_2 \dots a_{k-1} \xrightarrow{a} a_2a_3 \dots a_{k-1}a$$

$$a_1a_2 \dots a_{k-1} \xrightarrow{b} a_2a_3 \dots a_{k-1}b$$

- Este grafo tem um ciclo de Euler direcionado, que contém cada aresta uma única vez

Strings de Bruijin e Ciclos de Euler

- Há uma relação entre strings de Bruijin e ciclos de Euler
- Seja G_k um grafo cujos vértices são todas as strings de elementos de Σ de tamanho $k - 1$
- Para qualquer string $x = a_1a_2 \dots a_{k-1}$ temos duas arestas direcionadas:

$$a_1a_2 \dots a_{k-1} \xrightarrow{a} a_2a_3 \dots a_{k-1}a$$

$$a_1a_2 \dots a_{k-1} \xrightarrow{b} a_2a_3 \dots a_{k-1}b$$

- Este grafo tem um ciclo de Euler direcionado, que contém cada aresta uma única vez
- Seja $e_1e_2 \dots e_N$ a sequência de arestas do ciclo de Euler

Strings de Bruijin e Ciclos de Euler

- Há uma relação entre strings de Bruijin e ciclos de Euler
- Seja G_k um grafo cujos vértices são todas as strings de elementos de Σ de tamanho $k - 1$
- Para qualquer string $x = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ temos duas arestas direcionadas:

$$a_1 a_2 \dots a_{k-1} \xrightarrow{a} a_2 a_3 \dots a_{k-1} a$$

$$a_1 a_2 \dots a_{k-1} \xrightarrow{b} a_2 a_3 \dots a_{k-1} b$$

- Este grafo tem um ciclo de Euler direcionado, que contém cada aresta uma única vez
- Seja $e_1 e_2 \dots e_N$ a sequência de arestas do ciclo de Euler
- Segue que $N = 2^k$ e que a sequência

$$a_1 a_2 \dots a_N a_1 a_2 \dots a_{k-1}$$

forma uma string de Bruijin, onde a_i é o rótulo da aresta e_i , $i = 1, 2, \dots, N$

1. **HALIM**, Steve; **HALIM**, Felix. *Competitive Programming 3*, Lulu, 2013.
2. **CROCHEMORE**, Maxime; **RYTTER**, Wojciech. *Jewels of Stringology: Text Algorithms*, WSPC, 2002.
3. Wikipedia. [ASCII](#), acesso em 06/02/2017.
4. Wikipedia. [Fibonacci Word](#), acesso em 07/02/2017.