

# Cálculo Numérico Computacional

## Aula 6 - Zero de Função: Isolamento de Raízes

---

Professor Paulo Flabes

# Sumário:

## 1 – Introdução

### 1.1 – Isolamento das raízes

### 1.2 – Refinamento

## 2 – Método da Bisseção

### 2.1 – Interpretação Geométrica

### 2.2 – Algoritmo

### 2.3 – Estimativa do Número de Iterações

## 3 – Método de Newton - Raphson

### 3.1 – Interpretação Geométrica

### 3.2 – Estudo da convergência do MNR

### 3.3 – Algoritmo

## 4 – Método Secantes

### 4.1 – Comparação entre os métodos estudados

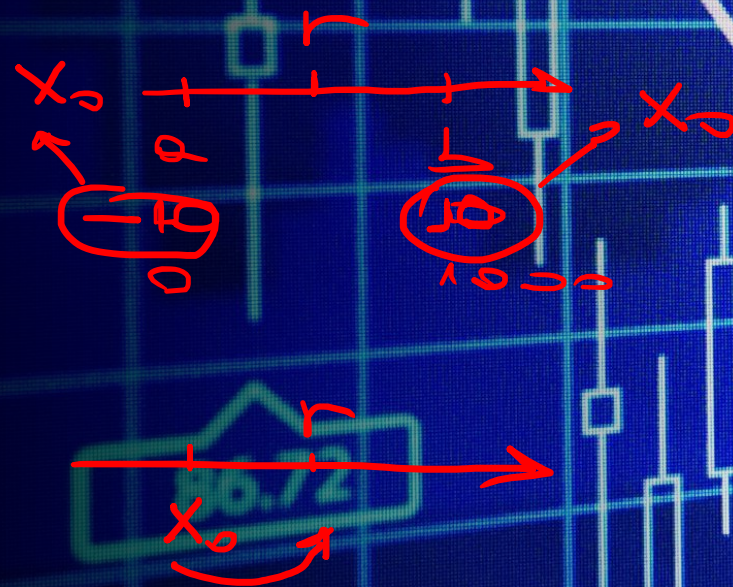
# 1.1 – Fase I: Isolamento da raiz

---



Nesta fase é realizada  
uma análise gráfica, teórica ou  
física da função com o objetivo  
de determinar o intervalo  
[a b] ou o ponto inicial  $x_0$

[a b]



61.6%: 99.19

104.19

86.72

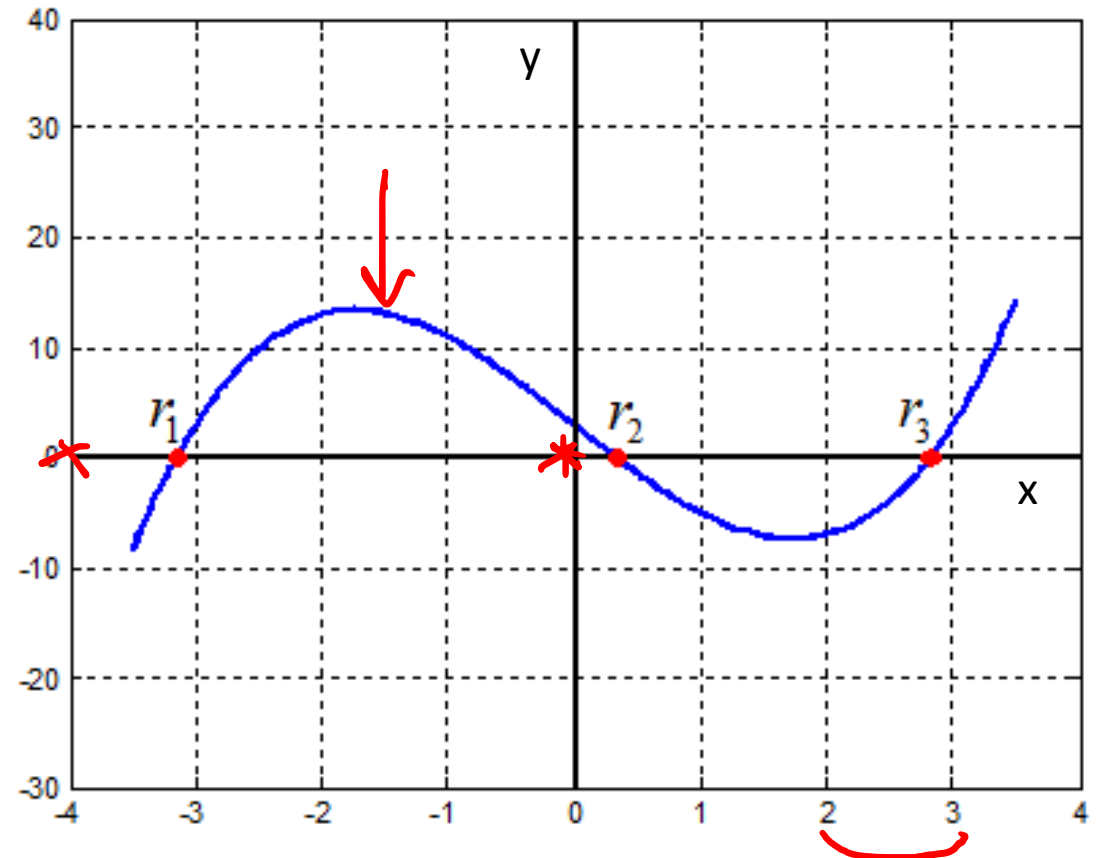


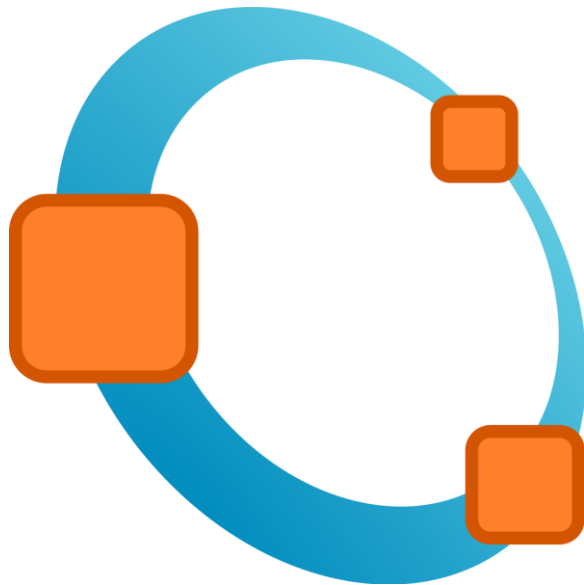
# Análise Gráfica

Consiste em esboçar o gráfico da função e, visualmente, determinar o intervalo em que a curva cruza o eixo  $x$  :

**Exemplo:**  $f(x) = x^3 - 9x + 3$

$r_1 \in [-4, -3]$   $r_2 \in [0, 1]$





$$f(x) = \underbrace{e^x - \text{sen}(x)}_{r_1 \in [-5, 0]} = 0$$

# Análise Teórica

Consiste em usar o Teorema de Bolzano para determinar o intervalo  $[a, b]$ .

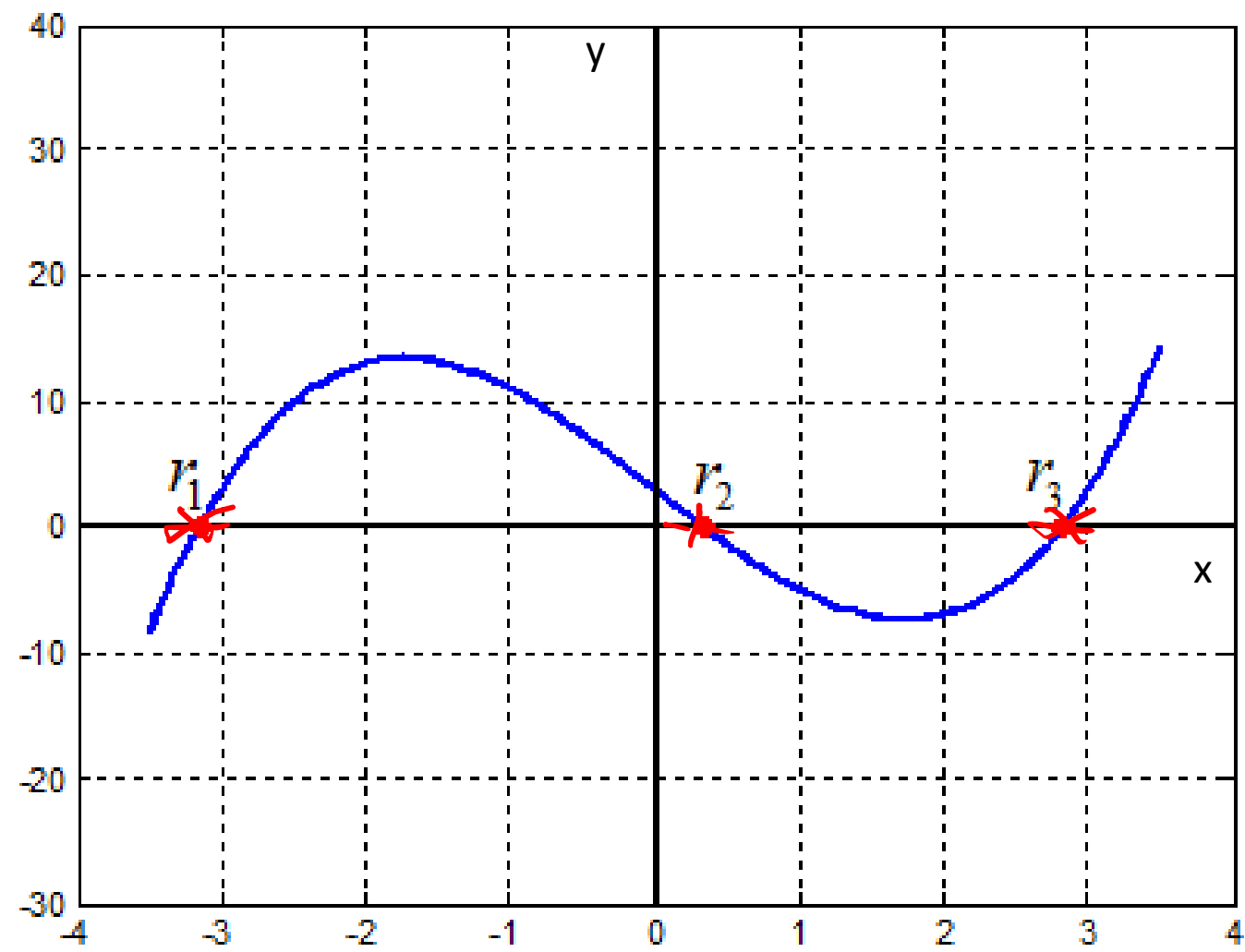
$$y_1 * y_2 < 0$$

$f(x)$

$x_0$

"Seja uma função contínua no intervalo  $[a, b]$ . Se  $f(a) * f(b) < 0$ , então existe pelo menos uma raiz no intervalo  $[a, b]$ ."



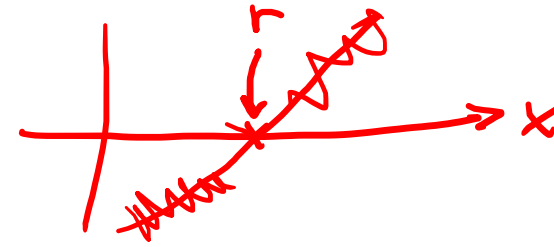




**Exemplo:**  $f(x) = x^3 - 9x + 3$

$x$	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
$f(x)$									

**Exemplo:**  $f(x) = x^3 - 9x + 3$



$x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-77	-25	3	13	11	3	-5	-7	3

Red annotations on the table: A bracket above the x-values -4 and -3 is labeled  $[-4, -3]$ . Red circles are drawn around the function values -25, 3, 3, -5, -7, and 3. Blue curved arrows point from the circled values -25 and 3 to the interval  $r_1 \in [-4, -3]$ . Another set of blue curved arrows points from the circled values 3, -5, and -7 to the interval  $r_2 \in [0, 1]$ . A third set of blue curved arrows points from the circled values -7 and 3 to the interval  $r_3 \in [2, 3]$ . Red arrows also point from the circled values 3, 13, 11, and 3 to the interval  $r_1$ .

$$r_1 \in [-4, -3]$$

$$r_2 \in [0, 1]$$

$$r_3 \in [2, 3]$$

# Análise Física

Consiste analisar a física o problema e determinar o intervalo  $[a, b]$  que fisicamente é possível.



**Exemplo:** A equação

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cancel{sen(\alpha)} \cos(\alpha)}{\cancel{\frac{gR}{v^2}} - \cos^2(\alpha)}$$

Permite calcular o ângulo de inclinação,  $\alpha$ , em que o lançamento do míssil deve ser feito para atingir um determinado alvo.

Na equação acima,

$\alpha$ : ângulo de inclinação com a superfície da terra com a qual é feita o lançamento do míssil

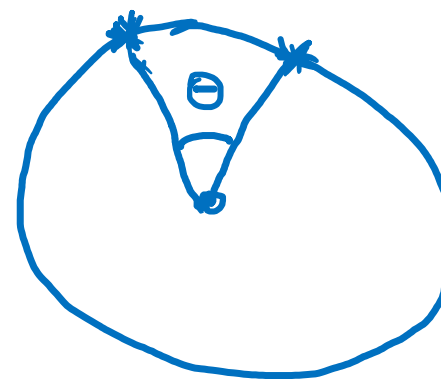
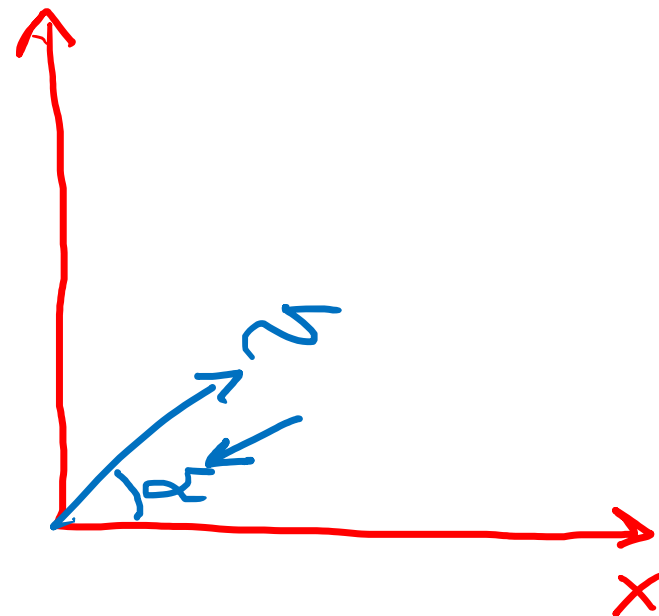
$g$ : aceleração da gravidade  $\approx 9.81 \text{ m/s}^2$

$R$ : raio da terra  $\approx 6371000 \text{ m}$

$v$ : velocidade de lançamento do míssil (m/s)

$\theta$ : ângulo (medido do centro da Terra) entre o ponto de lançamento e o ponto de impacto desejado

Resolva o problema considerando:  $\theta=80^\circ$  e  $v=8840 \text{ m/s}$ .





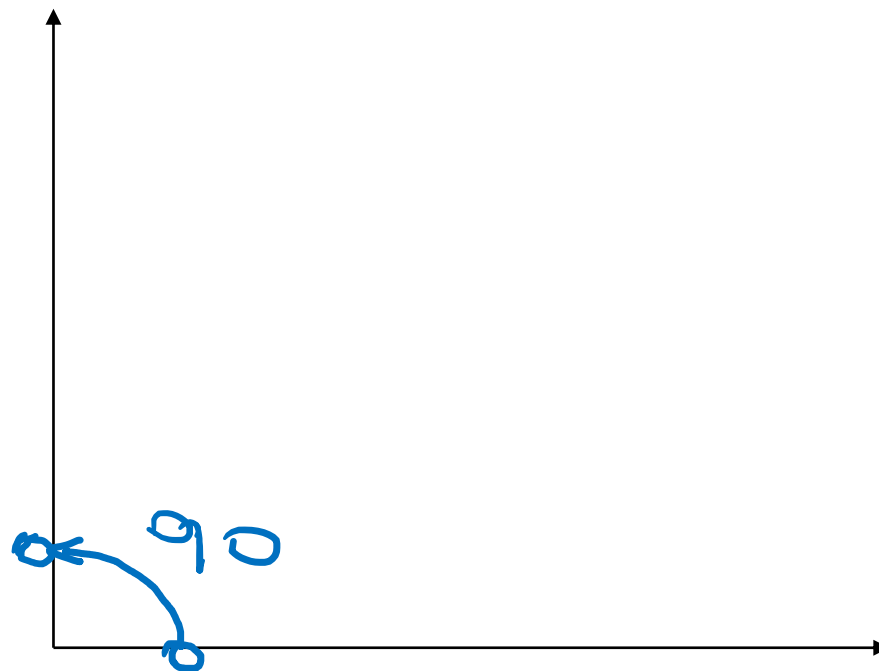
Substituindo as constantes...

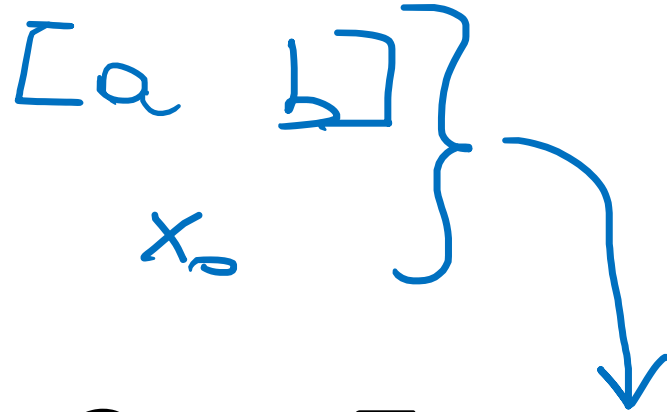
$$tg\left(\frac{80}{2}\right) = \frac{\text{sen}(\alpha) \cos(\alpha)}{\frac{9,81 \times 6371000}{8840^2} - \cos^2(\alpha)}$$

Encontrando o zero de função...

$$\frac{\text{sen}(\alpha) \cos(\alpha)}{\frac{9,81 \times 6371000}{8840^2} - \cos^2(\alpha)} - tg\left(\frac{80}{2}\right) = 0$$

$$\alpha \in ]0 \ 90[$$

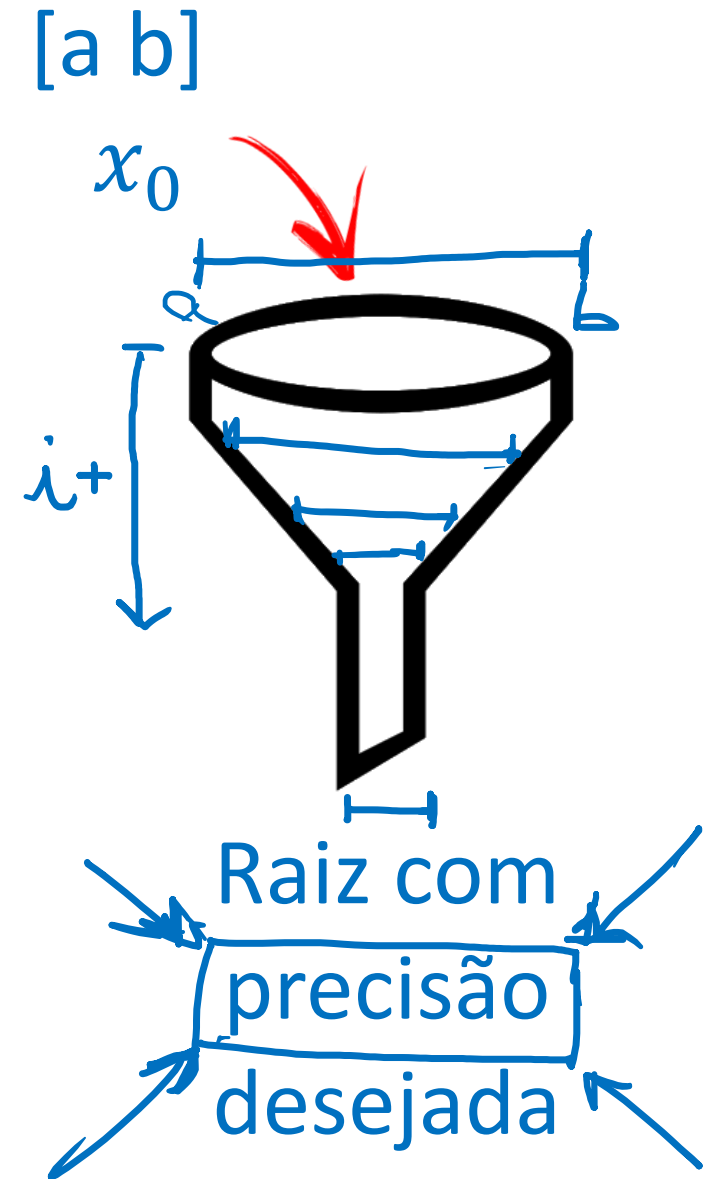




## 1.2 – Fase II: Refinamento da raiz

---

Consiste em reduzir o intervalo  
[a b] até que seja  
suficientemente pequeno  
(o quanto desejado)



Para realizar o refinamento estudaremos 3 métodos:

- 
- • Método da Bisseção
  - • Método de Newton-Raphson
  - • Método da Secante





COMING SOON