

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS E EXATAS**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA**  
**Disciplina: Controle de Processos Químicos I**



# **Capítulo 2**

# **Conceitos fundamentais de controle de processos químicos**

**Prof. Davi Leonardo de Souza**  
**davi.souza@uftm.edu.com**

## Conteúdo da aula

1.0 - Introdução

2.0 - Motivação

3.0 - Terminologia de controle

4.0 - Modelagem matemática de processos químicos

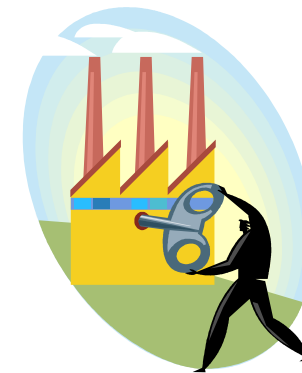
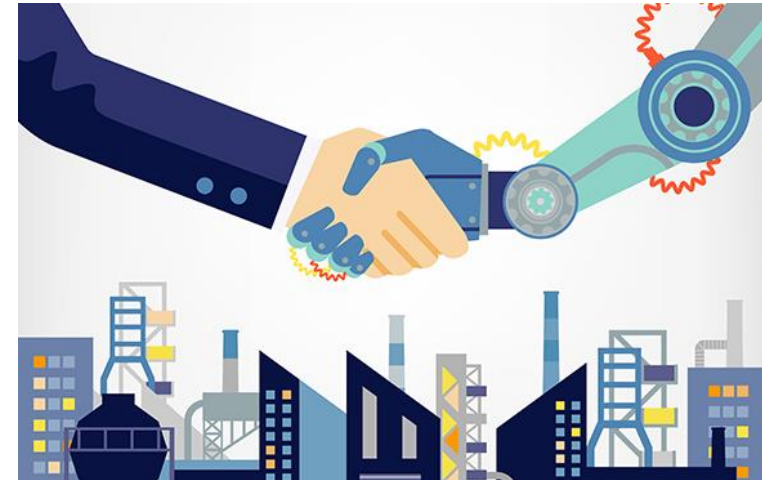
5.0 - Desenvolvimento de modelos dinâmicos

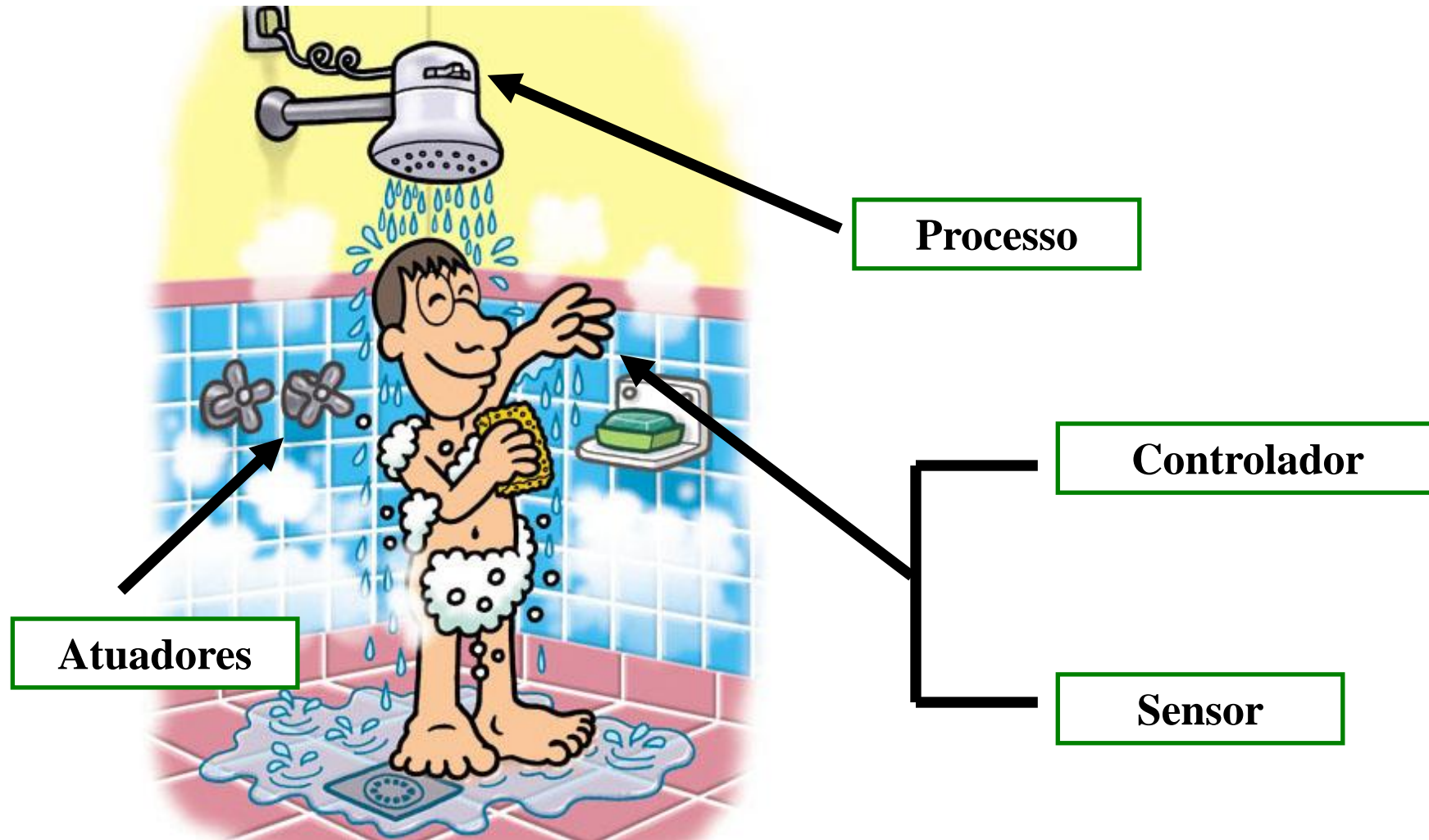
6.0 - Análise dos graus de liberdade na modelagem

## 1.0 - Introdução

O que é controle de processos?

É a técnica de manter as variáveis de um processo em valores determinados, conhecidos como *setpoint*, a partir de ferramentas (instrumentos) que utilizam uma ou mais variáveis medidas do processo por um equipamento de controle.





Fonte: diariodebiologia.com

Por que surgiu a necessidade de controlar?

Porque o homem não era capaz de manter o **controle satisfatório**.



- ✓ Produção elevada do sistema;
- ✓ Ritmo acelerado de produção;
- ✓ Precisão requerida na produção;
- ✓ Confiabilidade;
- ✓ Aumento do nível de perigo.

Porque surgiu a necessidade da **elevação da produtividade**.



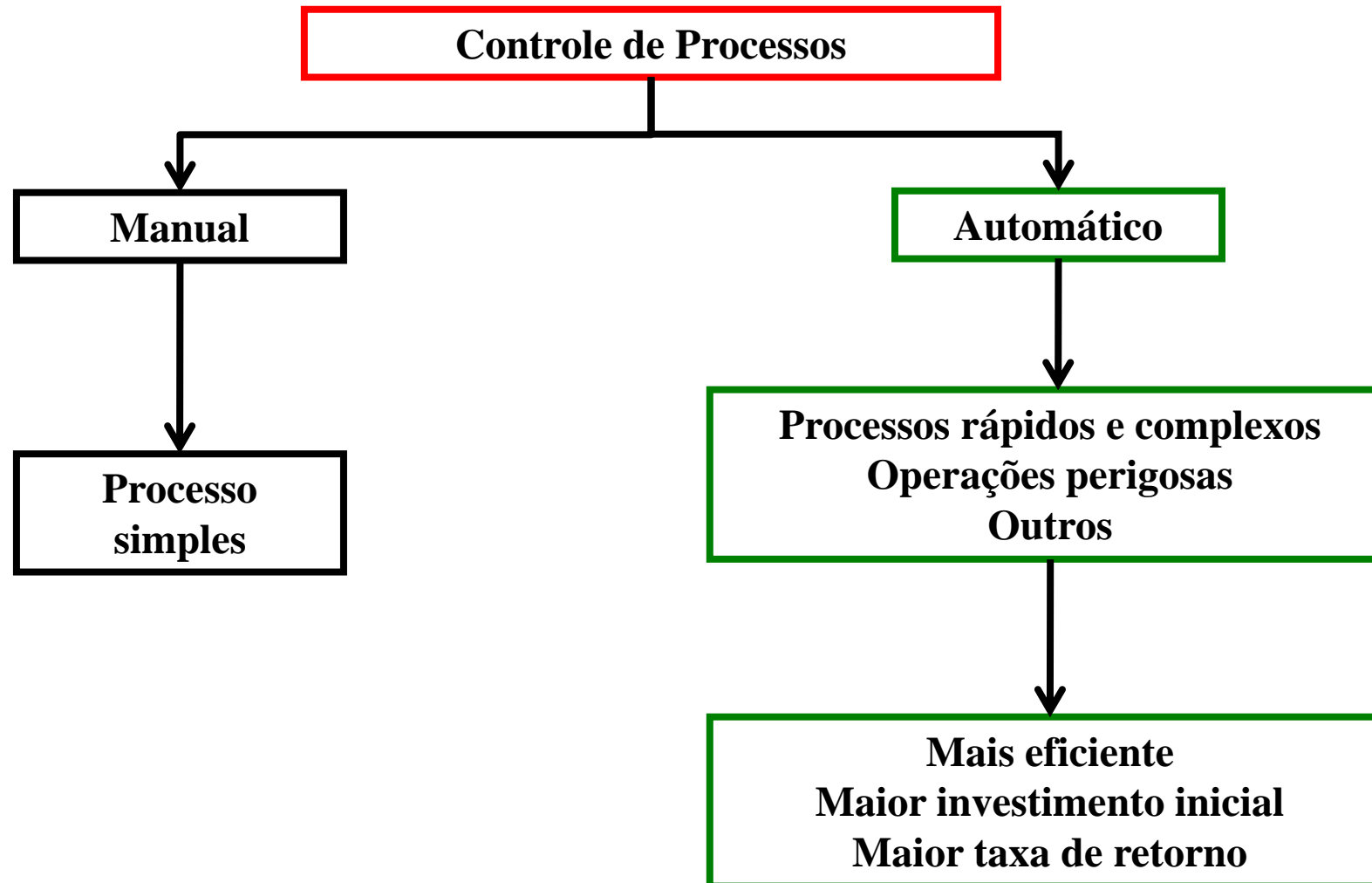
- ✓ Redução da mão de obra;
- ✓ Aumento da eficiência operacional das instalações;
- ✓ Redução de custo operacional do equipamento.

## 2.0 - Motivação

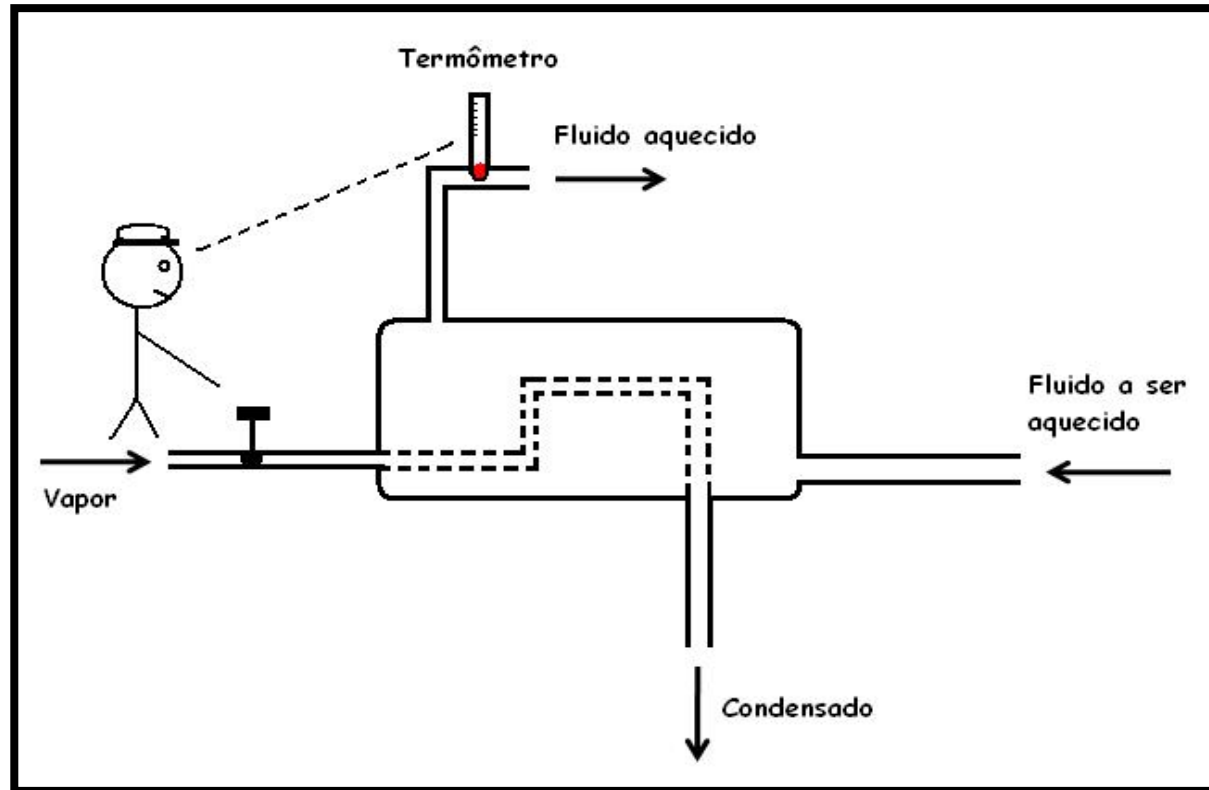
- ✓ Diminuir o desgaste dos equipamentos;
- ✓ Evitar as perdas no processo;
- ✓ Aumentar a produção;
- ✓ Elevar a qualidade dos produtos;
- ✓ Aumentar os lucros;
- ✓ Buscar a estabilidade de um processo químico;
- ✓ Proporcionar segurança e bem estar pessoal;
- ✓ Atender a legislação ambiental;
- ✓ Aumentar a eficiência no uso de matérias primas, energia e recursos naturais;
- ✓ Reduzir a poluição.



## 2.1 - Tipos de controle de processos



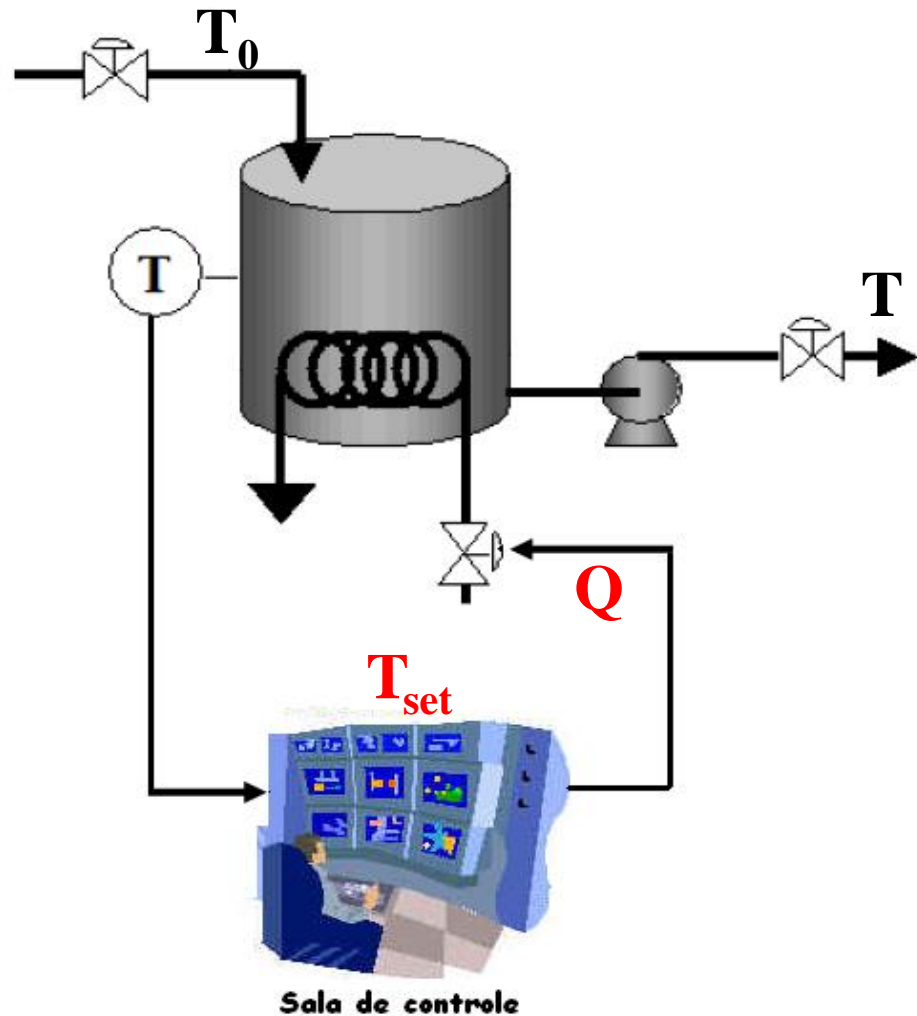
## ➤ Controle manual



**Objetivo:** Controlar a temperatura do fluido, manipulando a vazão de vapor.



## ➤ Controle automático



**Objetivo:** Controlar a temperatura do reator ( $T$ ), manipulando a vazão de fluido quente na serpentina ( $Q$ ).



Variável **controlada**:  $T$   
Variável **manipulada**:  $Q$

Se  $T > T_{set}$   $\longrightarrow$  Diminui  $Q$   
Se  $T < T_{set}$   $\longrightarrow$  Aumenta  $Q$

## 3.0 - Terminologia de controle

**Variáveis controladas:** são as variáveis que desejamos manter no valor desejado (*setpoint*). Elas qualificam o desempenho ou qualidade de produto final. São também chamadas de **saídas do processo**.

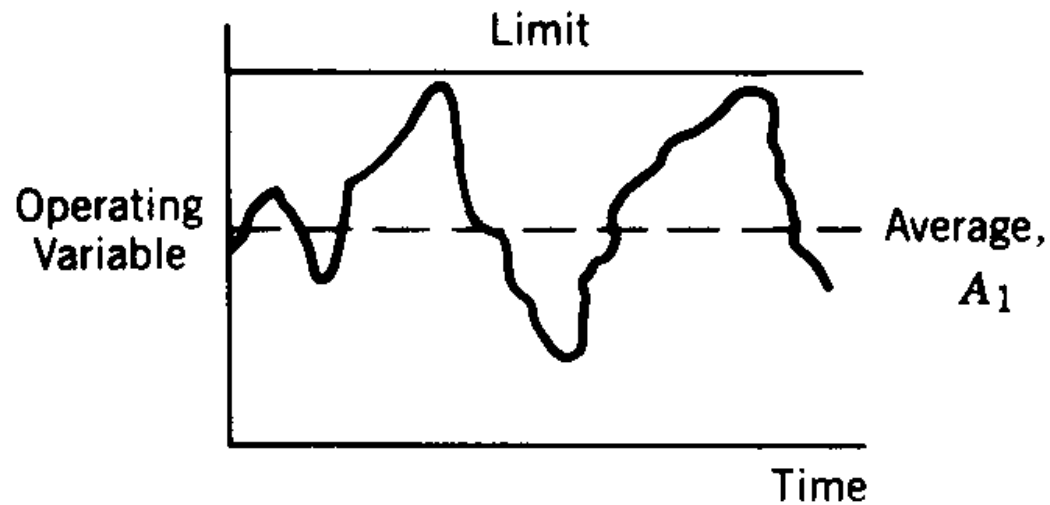
**Variáveis manipuladas:** são **entradas do processo** as quais são ajustadas dinamicamente para manter as variáveis controladas em seus *setpoints*.

**Perturbações:** são entradas do processo que variam dinamicamente mas não podem ser ajustadas. Elas afetam as variáveis controladas causando desvios do *setpoint*. Elas são também chamadas de **cargas do processo**.

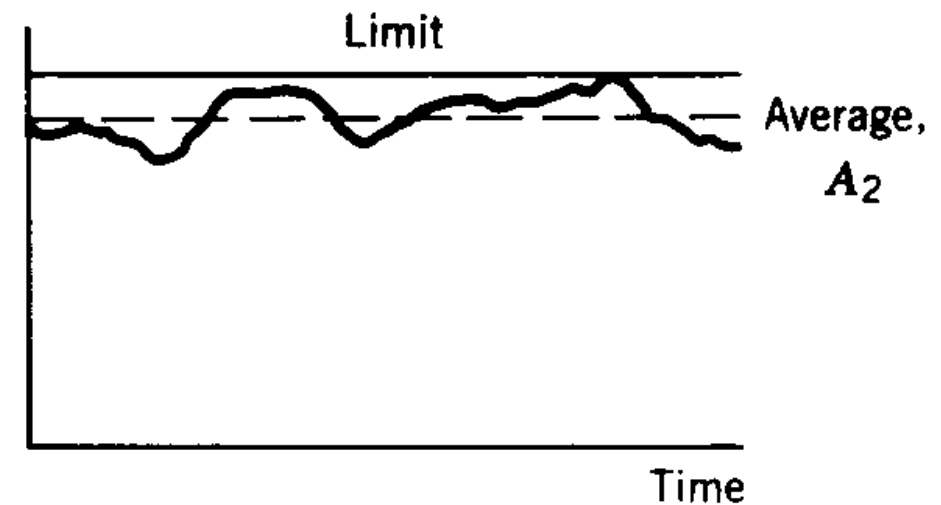
**Mudança de *setpoint*:** Introdução de uma mudança desejada nas condições de operação do sistema. Quando o *setpoint* é alterado a variável manipulada é ajustada apropriadamente para se alcançar as novas condições de operação. É também chamada de **problema servo**.

**Mudança na carga (Perturbação):** É quando uma entrada do sistema sofre uma mudança (aleatória) e o processo entra em regime transiente. É também chamada de **problema regulador**. O sistema de controle deve ser capaz de trazer o sistema de volta para o seu *setpoint*.

## 3.1 - Controle de processos: incentivo econômico



Sem controle de processos

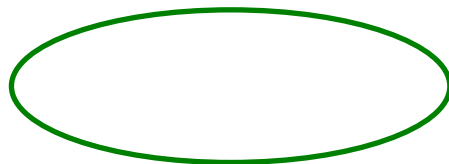


Com controle de processos

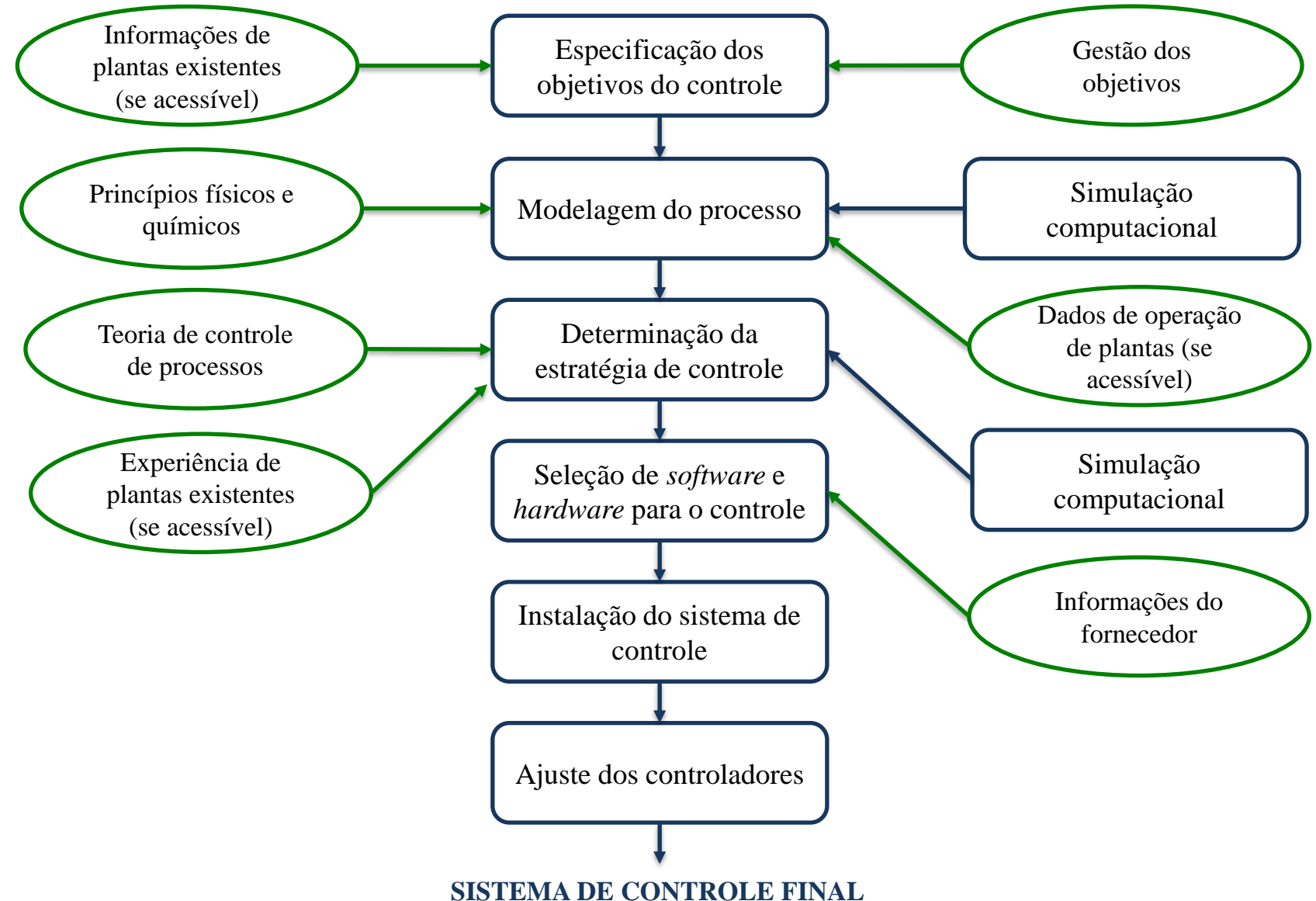
## 3.2 - Estratégia de controle



Atividade de Engenharia



Base de informação



## 4.0 - Modelagem matemática de processos químicos

**Modelo matemático:** “É uma representação de aspectos essenciais de um sistema, de forma a tornar disponível numa forma matemática as informações sobre este sistema”.

### Objetivos:

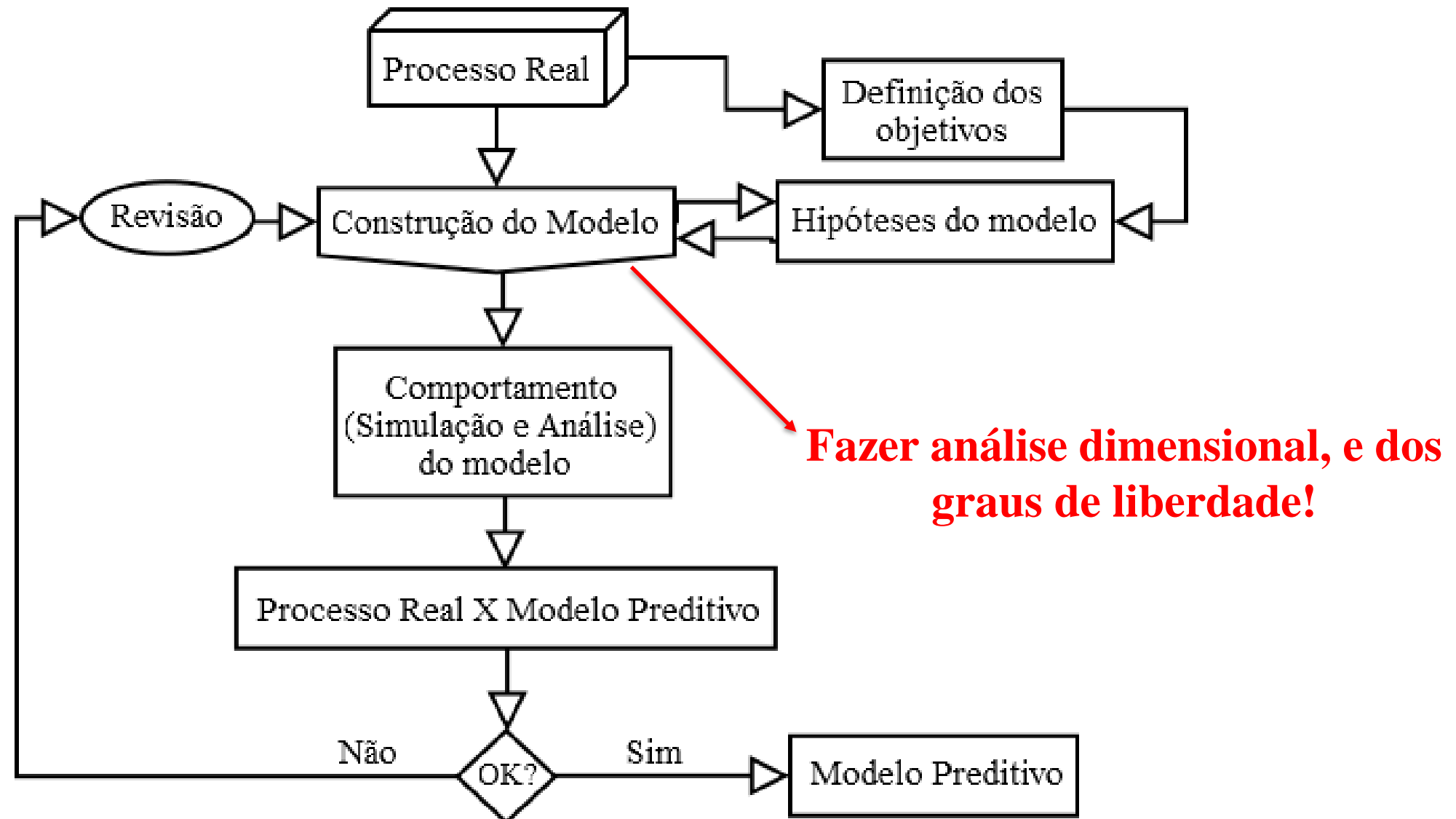
- ✓ melhorar o entendimento do sistema;
- ✓ treinar pessoal da operação;
- ✓ projetar estratégias de controle;
- ✓ realizar sintonia de controladores;
- ✓ otimizar a operação de uma planta ou processo.

## Princípios gerais da modelagem

- Os modelos são aproximações dos processos reais;
- **Provérbio:** “Todos os modelos são errados mas alguns são úteis”;
- **Modelagem:** envolve um compromisso entre precisão e complexidade de um lado, e custo e esforço requerido de outro lado;
- A modelagem de processo “gravita” entre ciência e arte. Criatividade é necessária para se conceber as hipóteses simplificadoras que resultam em modelo apropriado;
- Modelos dinâmicos de processos químicos consistem de EDOs e/ou EDPs juntamente com equações algébricas.

## Abordagem sistemática para desenvolvimento de modelos dinâmicos

- 1) Tenha em mente os objetivos e uso final do modelo. Eles determinam o nível desejado de detalhes e precisão requerida;
- 2) Desenhe um diagrama esquemático do processo e nomeie todas as variáveis do processo;
- 3) Liste todas as hipóteses envolvidas no desenvolvimento do modelo. Seja parcimonioso, ou seja, o modelo não deve ser mais complicado que o necessário para se atingir os objetivos;
- 4) Determine se variações espaciais das variáveis são importantes. Em caso afirmativo, EDPs serão requeridas;
- 5) Escreva as equações de conservação adequadas (massa, componente, energia, momento linear);
- 6) Introduza as relações de equilíbrio e outras equações algébricas (da termodinâmica, fenômenos de transporte, cinética química, geometria de equipamentos e etc);
- 7) Faça uma análise dos graus de liberdade para garantir que as equações possam ser resolvidas;
- 8) Simplifique o modelo. Geralmente é possível arranjar as equações de forma que as variáveis dependentes apareçam no lado esquerdo e as variáveis independentes no lado direito. Esta forma é conveniente para a solução computacional do modelo;
- 9) Classifique as entradas como variáveis manipuladas ou como perturbações (carga).





## ✓ Natureza dos modelos quanto ao tipo:

**Teóricos** → princípios de conservação de massa e energia

**Empíricos** → análise matemática (estatística) + dados

**Semi-empíricos** → combinação dos 2 métodos anteriores

Foco do Capítulo 02



**Teóricos**

## Modelos Teóricos...

### ✓ Princípios Físico-Químicos:

*Modelo Molecular e Atômico:* trata o sistema como se o mesmo fosse constituído por “entidades” individuais, cada uma das quais obedecendo um certo conjunto de regras, como por exemplo, a aditividade;

*Modelo Microscópico:* considera o sistema como um contínuo, isto é, as interações entre as moléculas são ignoradas e o sistema é tratado via abordagem fenomenológica;

*Modelo Macroscópico:* ignora todas as características internas do sistema, isto é, as equações não contém gradientes espaciais (são valores médios sobre o volume do sub-sistema considerado).

*Modelo de Gradientes Múltiplos:* equivalente ao modelo microscópico, mas com uma diferença fundamental, o uso de coeficientes efetivos. Estes coeficientes são empíricos e devem ser determinados para cada tipo de equipamento ou unidade de interesse ou calculados por correlações apropriadas;

*Modelo de Gradientes Máximos:* este consiste da simplificação do modelo de gradientes múltiplos, cujos termos de dispersão são negligenciados e somente o maior componente do gradiente da variável dependente é mantido nos balanços;

## ✓ Definição das Variáveis:

O modelo pode ser constituído por variáveis inteiras, binárias, discretas ou contínuas, ou uma mescla de todas essas;

## ✓ Modelos a Parâmetros Concentrados ou Modelos a Parâmetros Distribuídos:

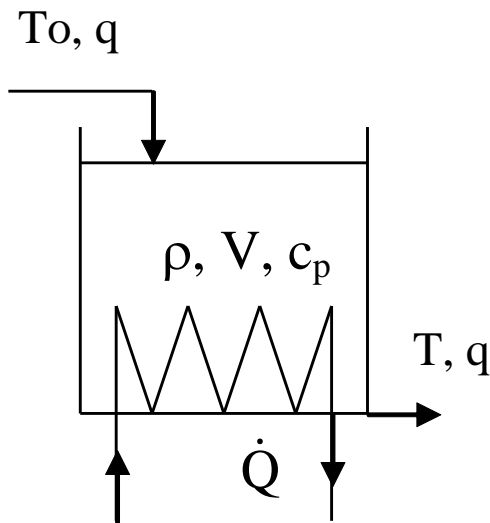
Parâmetros concentrados  $\rightarrow$  variáveis dependentes não está em função das coordenadas geométricas,

Parâmetros distribuídos  $\rightarrow$  variáveis dependentes está em função das coordenadas geométricas, podendo ser função também do tempo.

## ✓ Modelo estacionário ou dinâmico:

Estacionário → não existem variações temporais

Dinâmico → existe pelo menos uma variável ou propriedade do sistema que muda com o tempo.



Estacionário

$$\dot{Q} = \rho q c_p (T - T_o)$$

Dinâmico

$$V \rho c_p \frac{dT}{dt} = \dot{Q} - \rho q c_p (T - T_o)$$

↓  
(variação temporal)

## ✓ Modelos Determinísticos ou Modelos Probabilísticos:

Determinísticos → variáveis e parâmetros tem valores fixos para qualquer conjunto de condições.

Probabilísticos → variáveis ou os parâmetros usados para descrever as relações entre entrada e saída e a estrutura dos elementos não são conhecidos com precisão.

## ✓ Modelos Lineares ou Modelos Não Lineares:

Um modelo é dito linear se a(s) saída(s) depende(m) linearmente da(s) entrada(s), bem como de prováveis perturbações, caso contrário ele é não-linear.

## ✓ Tempo Contínuo versus Tempo Discreto:

Contínuo → modelagem descrita por equações diferenciais, com o tempo contínuo.

Discreto → descrevem as variáveis de saída em pontos específicos (discretizados) no tempo, geralmente descritas por equações de diferenças.

## 5.0 - Desenvolvimento de modelos dinâmicos

Princípio da conservação da massa:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{massa no} \\ \text{sistema} \end{array} \right\} \Big|_{t+\Delta t} = \left\{ \begin{array}{c} \text{massa no} \\ \text{sistema} \end{array} \right\} \Big|_t + \left\{ \begin{array}{c} \text{massa} \\ \text{que entra} \end{array} \right\} \Big|_{\Delta t} - \left\{ \begin{array}{c} \text{massa} \\ \text{que sai} \end{array} \right\} \Big|_{\Delta t} + \left\{ \begin{array}{c} \text{massa} \\ \text{transformada} \end{array} \right\} \Big|_{\Delta t}$$




$\div(\Delta t)$  e  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$



$$\left\{ \begin{array}{c} \text{acúmulo} \\ \text{de massa} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{massa} \\ \text{que entra} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{massa} \\ \text{que sai} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{massa} \\ \text{transformada} \end{array} \right\}$$

Princípio da conservação de energia:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{energia no} \\ \text{sistema} \end{array} \right\} \bigg|_{t+\Delta t} = \left\{ \begin{array}{c} \text{energia no} \\ \text{sistema} \end{array} \right\} \bigg|_t + \left\{ \begin{array}{c} \text{energia} \\ \text{que entra} \end{array} \right\} \bigg|_{\Delta t} - \left\{ \begin{array}{c} \text{energia} \\ \text{que sai} \end{array} \right\} \bigg|_{\Delta t} +$$


 $\div (\Delta t) \text{ e } \lim_{\Delta t \rightarrow 0}$

$$+ \left\{ \begin{array}{c} \text{energia gerada} \\ \text{ou consumida} \end{array} \right\} \bigg|_{\Delta t} + \left\{ \begin{array}{c} \text{energia} \\ \text{trocada} \end{array} \right\} \bigg|_{\Delta t} + \left\{ \begin{array}{c} \text{trabalho} \\ \text{de eixo} \end{array} \right\} \bigg|_{\Delta t}$$



$$\left\{ \begin{array}{c} \text{acúmulo} \\ \text{de energia} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{energia} \\ \text{que entra} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{energia} \\ \text{que sai} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{energia gerada} \\ \text{ou consumida} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{energia} \\ \text{trocada} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{trabalho} \\ \text{de eixo} \end{array} \right\}$$

De forma geral:

Conservação de massa na sua forma mais comum:

$$V \frac{d(C_j)}{dt} + C_j \frac{d(V)}{dt} = \sum_{i=1}^{ne} F_{e_i} C_{je_i} - \sum_{i=1}^{ns} F_{s_i} C_{js_i} + \dot{R}_j V \quad (1)$$

Conservação de energia na sua forma mais comum:

$$\left( \rho V C_p + \rho V T \frac{d(C_p)}{dT} + C_p V T \frac{d(\rho)}{dT} \right) \frac{d(T)}{dt} + \rho C_p T \frac{d(V)}{dt} = \sum_{i=1}^{ne} F_{e_i} \rho_{e_i} C_{pe_i} T_{e_i} - \sum_{i=1}^{ne} F_{s_i} \rho_{s_i} C_{ps_i} T_{s_i} + \dot{Q} + \dot{W}_{eixo} + \sum_{i=1}^M (-\Delta H_{Ri}) r_i V \quad (2)$$



## Exemplo 5.1 - Processo de mistura

$w_1$ ,  $w_2$ , e  $w$  são vazões mássicas

$x_1$ ,  $x_2$ , e  $x$  são frações mássicas

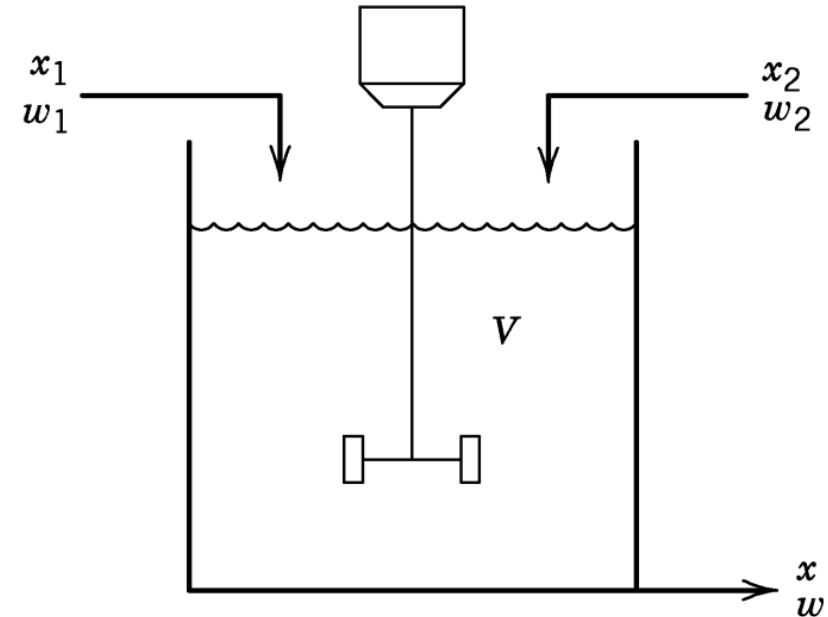
Hipóteses:

- 1 - Densidade do líquido é constante ( $\rho$ );
- 2 - Tanque é de mistura perfeita;
- 3 - Sistema binário: soluto + solvente.

Do princípio da conservação da massa:

Balanço de massa global:

$$\frac{d(V\rho)}{dt} = w_1 + w_2 - w \quad (3)$$



Balanço de massa por componente:

$$\frac{d(V\rho x)}{dt} = w_1 x_1 + w_2 x_2 - w x \quad (4)$$

No estado estacionário (EE):

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{w}_1 + \bar{w}_2 - \bar{w} \\ 0 &= \bar{w}_1 \bar{x}_1 + \bar{w}_2 \bar{x}_2 - \bar{w} \bar{x} \end{aligned} \quad (5)$$

Para  $\rho$  constante, teremos:

$$\rho \frac{dV}{dt} = w_1 + w_2 - w \quad (6)$$

$$\frac{\rho d(Vx)}{dt} = w_1 x_1 + w_2 x_2 - w x \quad (7)$$

Sabemos que:

$$\rho \frac{d(Vx)}{dt} = \rho V \frac{dx}{dt} + \rho x \frac{dV}{dt} \quad (8)$$

$$\rho V \frac{dx}{dt} + \rho x \frac{dV}{dt} = w_1 x_1 + w_2 x_2 - wx \quad (9)$$

Substituindo (6) em (9), teremos:

$$\rho V \frac{dx}{dt} + x(w_1 + w_2 - w) = w_1 x_1 + w_2 x_2 - wx \quad (10)$$

Rearranjando, teremos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho} (w_1 + w_2 - w) \quad (11)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{w_1}{V\rho} (x_1 - x) + \frac{w_2}{V\rho} (x_2 - x) \quad (12)$$

Importância da simulação → Conhecer a dinâmica do processo!

Dados de operação (condições nominais):

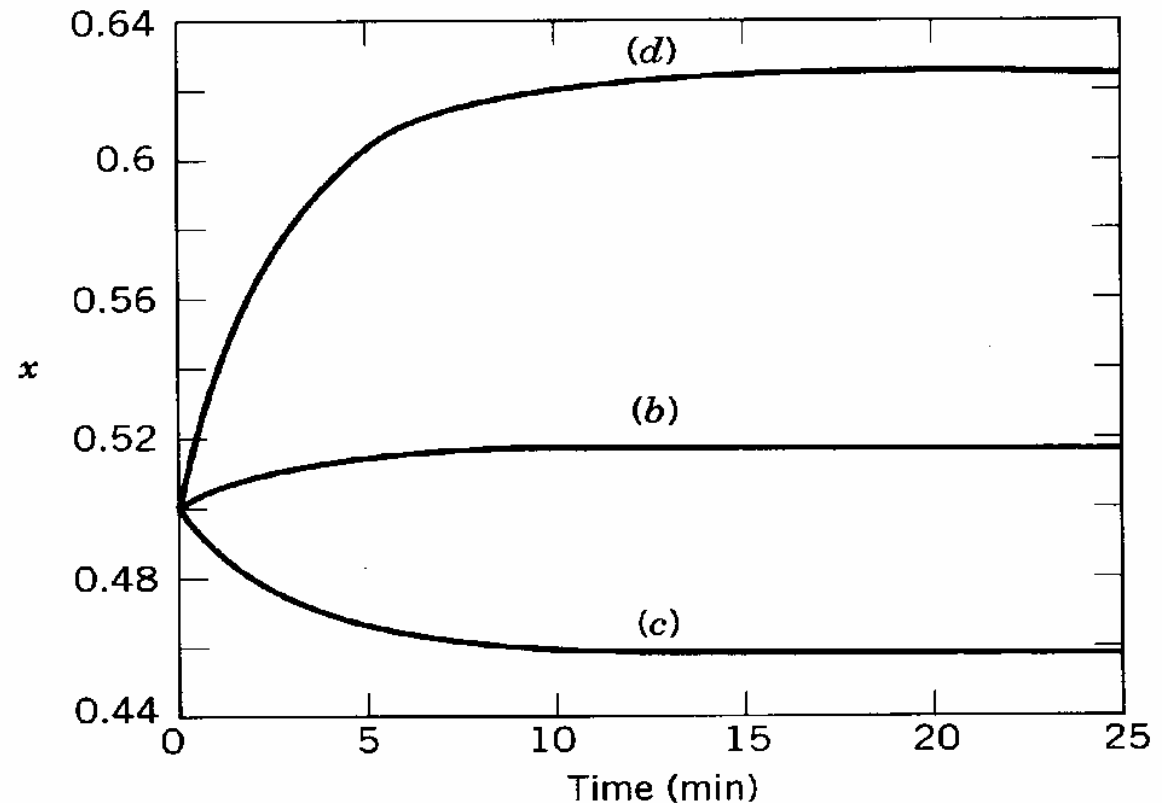
$V = 2 \text{ m}^3$ ;  $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$ ;  $w_1 = 500 \text{ kg/min}$ ;  
 $w_2 = 200 \text{ kg/min}$ ;  $x_1 = 0,4$ ;  $x_2 = 0,75$ .

O que acontece com  $x(t)$  quando:

(b)-  $w_1$  sofre um degrau de 500 para 400 kg/min?

(c)-  $w_2$  sofre um degrau de 200 para 100 kg/min?

(d)-  $w_2$  sofre um degrau 200 para 100 kg/min e  
 $x_1$  de 0,4 para 0,6?



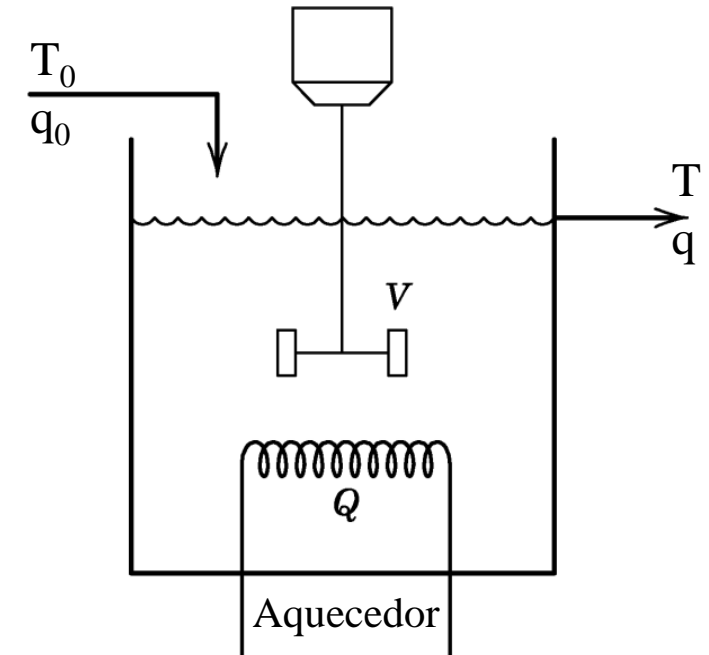
## 5.2 - Tanque de aquecimento

Hipóteses:

- 1 - Mistura perfeita (T de saída é a T do tanque);
- 2 -  $\rho$  e  $c_p$  são constantes;
- 3 - Isolamento perfeito do tanque. Perdas de calor são desprezíveis;
- 4 - Transferência de calor é instantânea para o meio.

Entradas do modelo:  $T_0(t)$ ,  $q_0(t)$ ,  $q(t)$  e  $Q(t)$

Saídas do modelo:  $V(t)$  e  $T(t)$



Balanço de massa (BM):

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho q_0 - \rho q \rightarrow \frac{dV}{dt} = q_0 - q \quad (13)$$

Balanço de energia (BE):

$$c_p \frac{d[\rho V(T - T_{\text{ref}})]}{dt} = \rho q_0 c_p (T_0 - T_{\text{ref}}) - \rho q c_p (T - T_{\text{ref}}) + Q$$

$$\rho c_p (T - T_{\text{ref}}) \frac{dV}{dt} + \rho V c_p \frac{dT}{dt} = \rho q_0 c_p (T_0 - T_{\text{ref}}) - \rho q c_p (T - T_{\text{ref}}) + Q$$

$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = \rho q_0 c_p (T_0 - T_{\text{ref}}) - \rho q c_p (T - T_{\text{ref}}) - \rho q_0 c_p (T - T_{\text{ref}}) + \rho q c_p (T - T_{\text{ref}}) + Q$$

$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = \rho q_0 c_p (T_0 - T) + Q \quad (14)$$

$$\text{Resumindo} \left\{ \begin{array}{l} \text{BM: } \frac{dV}{dt} = q_0 - q \\ \text{BE: } \frac{dT}{dt} = \frac{q_0(T_0 - T)}{V} + \frac{Q}{\rho V c_p} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (15) \\ (16) \end{array}$$

Conhecendo-se as entradas do modelo:  $T_0(t)$ ,  $q_0(t)$ ,  $q(t)$  e  $Q(t)$ , as duas EDOs podem ser integradas para se calcular as saídas do modelo  $V(t)$  e  $T(t)$ .

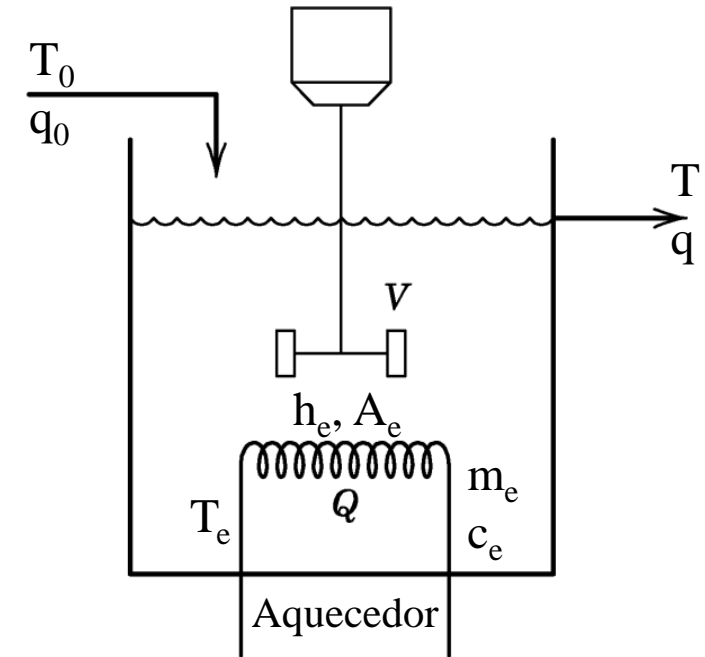


**Dinâmica de processo:** o controle de processo está inerentemente preocupado com o comportamento transiente do sistema.

## 5.3 - Tanque de aquecimento com resistência à transferência de calor

Hipóteses:

- 1 - Mistura perfeita ( $T$  de saída é a  $T$  do tanque);
- 2 - Volume do tanque ( $V$ ) é constante;
- 3 -  $\rho$ ,  $c_p$ , e  $c_e$  são constantes;
- 4 - Isolamento perfeito do tanque. Perdas de calor são desprezíveis;
- 5 - Resistência à transferência de calor, isto é, calor não é transferido instantaneamente;
- 6 - Calor fornecido afeta a temperatura do elemento de aquecimento.



Entradas do modelo:  $T_0(t)$ ,  $q_0(t)$ ,  $q(t)$  e  $Q(t)$

Saídas do modelo:  $T(t)$



Taxa de calor gerado =  $Q$  (não é transferido instantaneamente)

Taxa de calor transferida =  $h_e A_e (T_e - T)$  (“atraso” na transferência de calor)

BE no tanque:

$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = \rho q_0 c_p (T_0 - T) + h_e A_e (T_e - T) \quad (17)$$

No estado estacionário:

$$0 = \rho q_0 c_p (\bar{T}_0 - \bar{T}) + h_e A_e (\bar{T}_e - \bar{T}) \quad (18)$$

BE no elemento de aquecimento:

$$m_e c_e \frac{dT_e}{dt} = Q - h_e A_e (T_e - T) \quad (19)$$

No estado estacionário :

$$0 = \bar{Q} - h_e A_e (\bar{T}_e - \bar{T}) \quad (20)$$

Derivando (17) em relação a “t”, substituindo a (19) na (17), e fazendo  $y = T - \bar{T}$ ,  $u = Q - \bar{Q}$  e  $T_0$  constante:

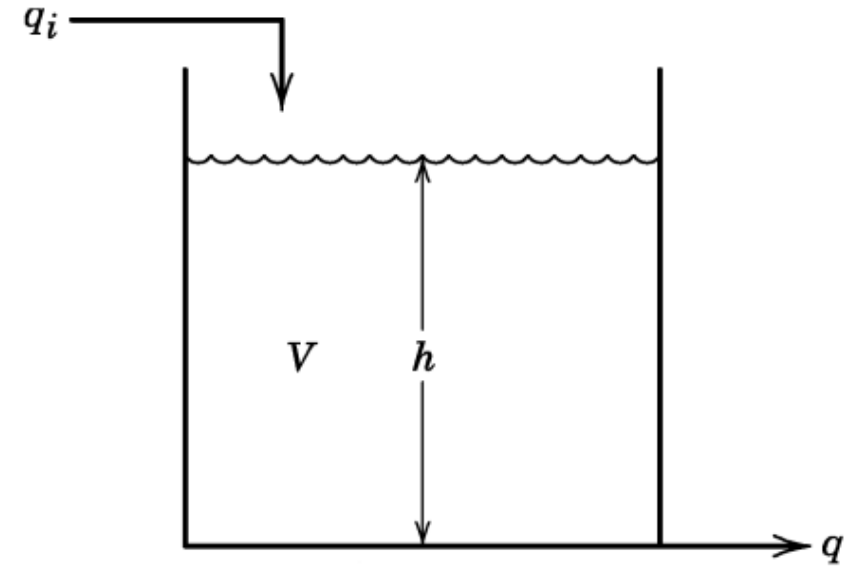
$$\frac{\rho V m_e c_e}{h_e A_e} \frac{d^2 y}{dt^2} + \left( \frac{m_e c_e}{h_e A_e} + \frac{m_e c_e}{\rho q_0 c_p} + \frac{V}{q_0} \right) \frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{\rho V c_p} u \quad (21)$$

## 5.4 - Armazenamento de líquidos

Hipóteses:

- 1 -  $\rho$  e área de seção transversal ( $A$ ) são constantes;
- 2 -  $V = A \cdot h$ .

$$\text{BM: } \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho q_i - \rho q \rightarrow A \frac{dh}{dt} = q_i - q \quad (22)$$



➤ **Caso a:**  $q = \text{constante}$  (bomba de deslocamento positivo)

$$A \frac{dh}{dt} = q_i - q \quad (23)$$

$$p / t = 0 \rightarrow h = h_i$$

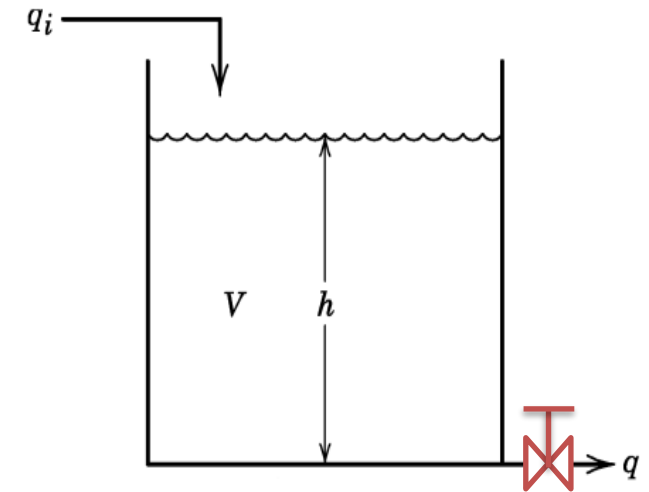


Como  $q \neq q(h)$ , após perturbação em  $q_i$ ,  $h(t)$  não mais atinge EE!

## ➤ Caso b: Válvula linear na linha de saída (resistência ao fluxo)

$$\text{Neste caso: } h \propto q \rightarrow q = \frac{1}{R}h \rightarrow A \frac{dh}{dt} = q_i - \frac{1}{R}h \quad (24)$$

$$p / t = 0 \rightarrow h = h_i$$



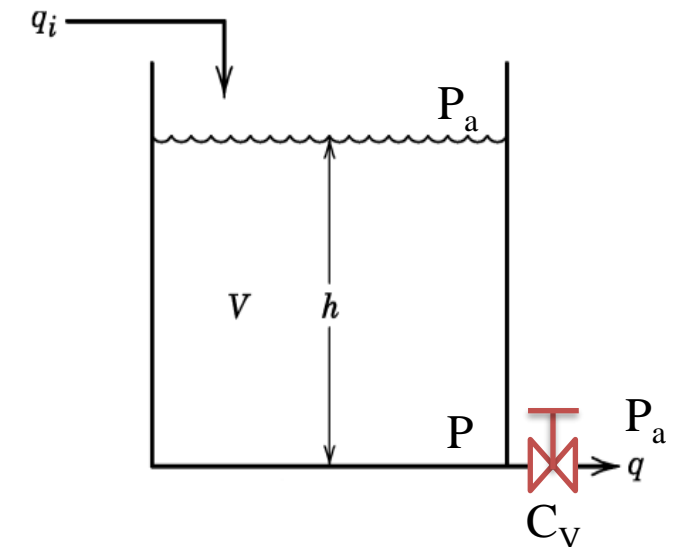
## ➤ Caso c: Escoamento com queda de pressão através da válvula

com  $\Delta P = P - P_a$ ,  $C_v$  o coeficiente da válvula,  $P$  a pressão no fundo do tanque e  $P_a$  a pressão ambiente.

$$q^2 \propto \Delta P \rightarrow q = C_v \sqrt{\Delta P}$$

$$\text{Como } P = P_a + \rho gh \rightarrow A \frac{dh}{dt} = q_i - C_v \sqrt{\rho gh} \quad (25)$$

$$p / t = 0 \rightarrow h = h_i$$

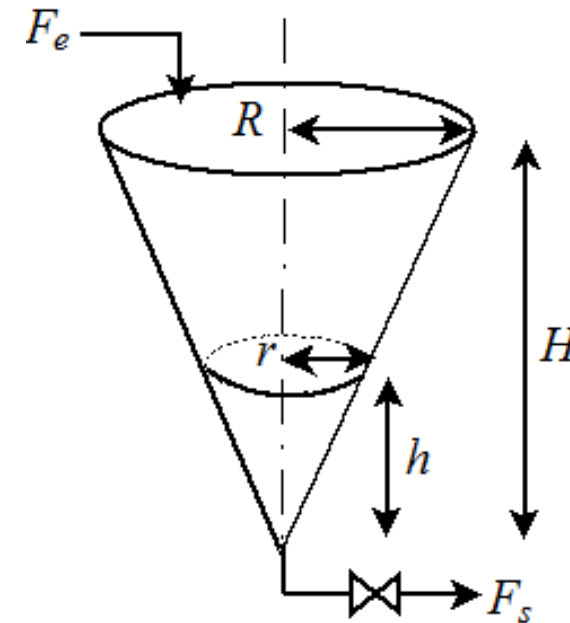


## Exemplo 5.5 – Tanque Cônico

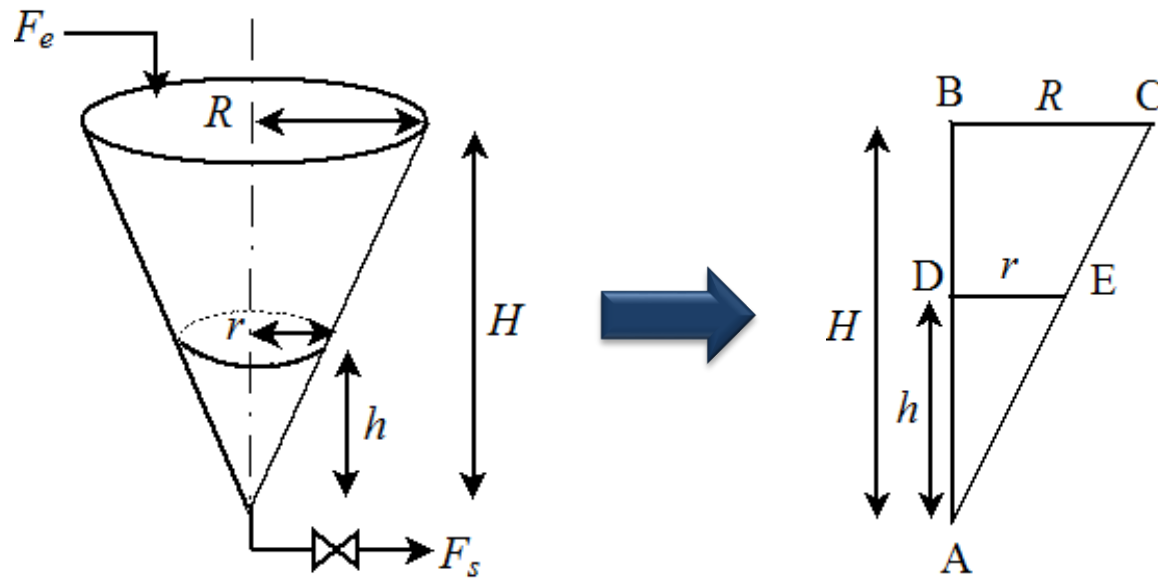
Considere um cone de raio  $R$  e altura  $H$  que contém um líquido não volátil. Sabendo que o tanque tem altura inicial igual a  $h$  e que  $F_e$  e  $F_s$  são as vazões volumétricas da entrada e saída de massa no sistema, respectivamente, determine o modelo matemático que representa a variação da altura da coluna de líquido ( $h$ ) em função do tempo.

Hipóteses:

- 1 – As propriedades físicas do líquido são constantes ( $\rho_e = \rho = \rho_s$ );



Como a área da seção transversal do cone varia com a altura da coluna de líquido ( $h$ ), podemos obter uma relação entre as variáveis geométricas, através da semelhança de triângulos, considerando um cone projetado no plano:



$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} \rightarrow r = \frac{R}{H}h \quad (26)$$

Sabemos que, o volume de um cone é:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad (27)$$

Substituindo (26) em (27) teremos:

$$V = \frac{\pi}{3} \left( \frac{R}{H} \right)^2 h^3 \quad (28)$$

Do balanço de massa, temos:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho_e F_e - \rho_s F_s \quad (29)$$

Substituindo (28) em (29), teremos:

$$\frac{d\left(\rho \frac{\pi}{3} \left(\frac{R}{H}\right)^2 h^3\right)}{dt} = \rho_e F_e - \rho_s F_s \quad (30)$$

$$\rho \frac{\pi}{3} \left(\frac{R}{H}\right)^2 \frac{dh^3}{dt} = \rho_e F_e - \rho_s F_s \rightarrow \rho \frac{\pi}{3} \left(\frac{R}{H}\right)^2 3h^2 \frac{dh}{dt} = \rho_e F_e - \rho_s F_s \quad (31)$$

Como as propriedades físicas são constantes, simplificando a equação (31), obtêm-se:

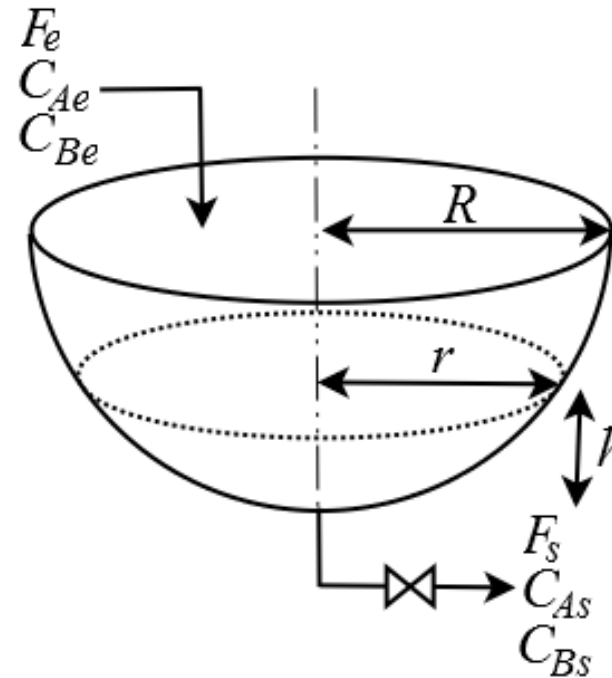
$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_e - F_s}{\pi h^2 \left(\frac{R}{H}\right)^2}, \quad h(0)=h_0 \quad (32)$$

## Exemplo 5.6 – Tanque em forma de calota esférica com reação

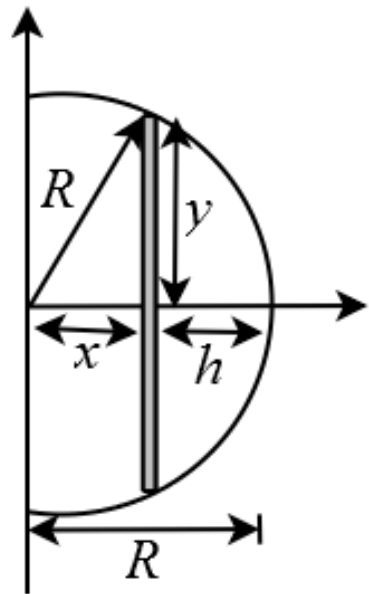
Seja uma calota esférica definida a partir de uma esfera de raio  $R$  onde acontece uma reação elementar  $A \rightarrow B$  de primeira ordem e com constante cinética  $k$ . Determinar o modelo matemático que representa a altura da coluna de líquido ( $h$ ) em função do tempo, e do perfil de concentração de  $A$  com o tempo.

Hipóteses:

- mistura perfeita;
- sistema isotérmico;
- $F_e$  constante;
- propriedades físicas constantes;
- $F_s = \beta\sqrt{h}$ .



Como a área da seção transversal da calota esférica varia com a altura da coluna de líquido (h), podemos obter o volume da calota, considere a mesma, projetado no plano:



Seja um elemento de volume com altura infinitesimal  $dx$ . Se  $dx$  tender a zero, o volume deste elemento de controle se aproxima do volume de um cilindro ( $V_{\text{cilindro}}$ ):

$$V_{\text{cilindro}} = \pi y^2 dx$$

onde  $y$  ( $0 \leq y \leq R$ ) representa um raio genérico.

Assim, o volume da calota pode ser obtido através da integral:

$$V_{\text{calota}} = \int_{R-h}^R \pi y^2 dx$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, para relacionar  $x$  com  $y$ , teremos:  $R^2 = x^2 + y^2$

$$V_{\text{calota}} = \pi \int_{R-h}^R (R^2 - x^2) dx \rightarrow V_{\text{calota}} = -\frac{\pi(R^3 - (R-h)^3)}{3} + \pi R^2 h \quad (33)$$



Do balanço de massa, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d(\rho V)}{dt} &= \rho_e F_e - \rho_s F_s \\ \frac{d(V)}{dt} &= F_e - F_s\end{aligned}\tag{34}$$

Substituindo (33) em (34), teremos:

$$\begin{aligned}\left(-\pi(R-h)^2 + \pi R^2\right) \frac{dh}{dt} &= F_e - F_s \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{F_e - F_s}{-\pi(R-h)^2 + \pi R^2}, \quad h(0)=h_0\end{aligned}\tag{35}$$

Para o componente A, do balanço de massa, resulta em:

$$\frac{d(C_A V)}{dt} = F_e C_{Ae} - F_s C_{As} - k C_A V \quad (36)$$

em que  $C_A$  é concentração do componente A no reator,  $C_{Ae}$  e  $C_{As}$  são as concentrações de entrada e saída do componente A no reator.

Como o volume é função da altura, e por consequência, do tempo, têm-se:

$$V \frac{d(C_A)}{dt} + C_A \frac{d(V)}{dt} = F_e C_{Ae} - F_s C_{As} - k C_A V \quad (37)$$

Substituindo as informações do volume da equação (34), na equação (37), teremos:

$$V \frac{d(C_A)}{dt} + C_A (F_e - F_s) = F_e C_{Ae} - F_s C_{As} - k C_A V$$

Rearranjando:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_e (C_{Ae} - C_A)}{V} - k C_A V \quad (38)$$

Assim, temos o modelo final:

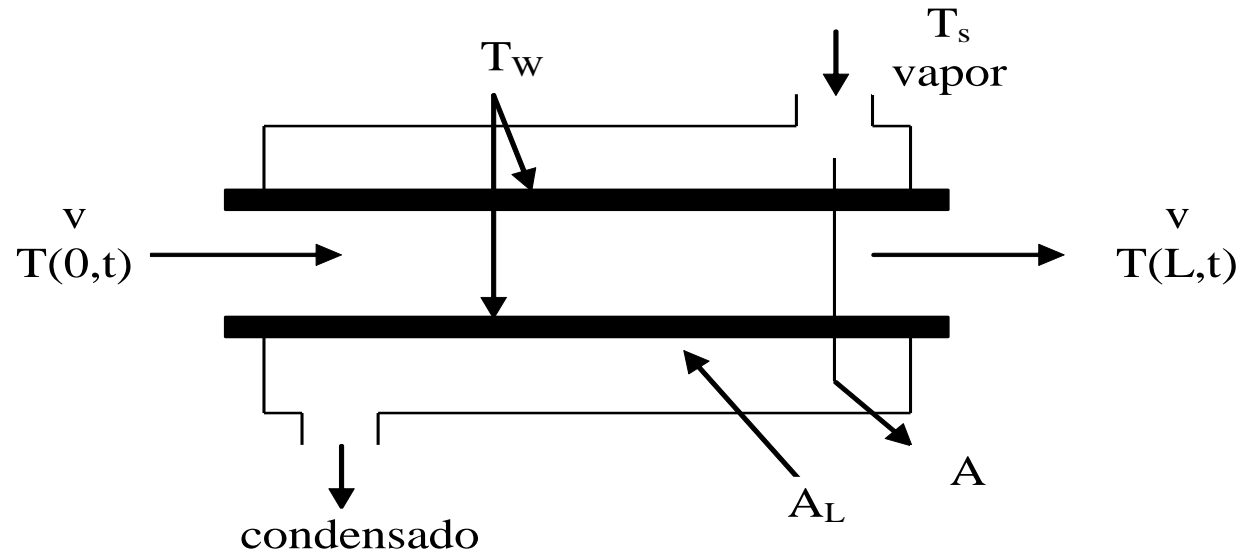
$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_e - F_s}{-\pi(R-h)^2 + \pi R^2}, \quad h(0)=h_0$$

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_e (C_{Ae} - C_A)}{V} - k C_A V, \quad C_A(0) = C_{Ae}$$

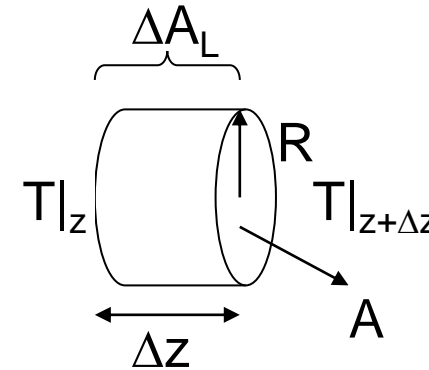
$$V = -\frac{\pi(R^3 - (R-h)^3)}{3} + \pi R^2 h$$

$$F_s = \beta \sqrt{h}$$

## 5.7 - Trocador de calor (sistema com parâmetros distribuídos)



Volume de controle



$$\Delta A_L = 2\pi R \cdot \Delta z$$

$$V_C = \pi R^2 \cdot \Delta z$$

Hipóteses:

- 1 - Propriedades do líquido são constantes ( $c_p$ , etc);
- 2 - Perdas externas são desprezíveis (isolamento perfeito);
- 3 - Resistência à transferência de energia na direção radial é desprezível;
- 4 - Líquido é incompressível ( $\rho$  constante).

$$\text{BE no líquido: } \rho(A\Delta z)c_p(T_{t+\Delta t,z} - T_{t,z}) = \rho(Av)c_p\Delta t(T_{z,t} - T_{z+\Delta z,t}) + h_L\Delta A_L(T_w - T)\Delta t \quad (39)$$

Fazendo:  $\div(\Delta z\Delta t)$  e  $\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}}$

$$\rho A c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho A v c_p \frac{\partial T}{\partial z} + h_L (2\pi R)(T_w - T) \rightarrow$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{h_L A_L}{\rho c_p A} (T_w - T) \quad (40)$$

$$p / t = 0 \rightarrow T(0, z) = \bar{T}(z)$$

$$p / z = L \rightarrow \frac{\partial T(t, L)}{\partial z} = 0$$

$$\text{BE na parede: } \rho_w A_w c_{pw} \frac{\partial T_w}{\partial t} = h_s A_s (T_s - T_w) - h_L A_L (T_w - T) \quad (41)$$

$$\frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{h_s A_s}{\rho_w A_w c_{pw}} (T_s - T_w) - \frac{h_L A_L}{\rho_w A_w c_{pw}} (T_w - T) \quad (42)$$

$$p / t = 0 \rightarrow T_w = \bar{T}_w(z)$$

## 6.0 - Análise dos graus de liberdade na modelagem

Procedimento:

- 1) Liste todos os parâmetros no modelo que são conhecidos ou podem ser especificados (dimensões de equipamentos, propriedades físicas, etc.);
- 2) Determine o número de equações ( $N_E$ ) e o número de variáveis do processo ( $N_V$ ). O tempo não é considerado uma variável do processo porque ele não é uma entrada nem uma saída do processo;
- 3) Calcule o número de graus de liberdade,  $N_F = N_V - N_E$ ;
- 4) Identifique as variáveis de saída ( $N_E$ ) que serão obtidas pela solução do modelo do processo;
- 5) Identifique as variáveis de entrada ( $N_V$ ) que devem ser especificadas ou como perturbações ou como variáveis manipuladas de forma a “zerar” os graus de liberdade ( $N_F$ ).

Temos que:  $N_F = N_V - N_E$  (43)

$N_F$ : graus de liberdade

$N_V$ : número de variáveis

$N_E$ : número de equações

## Categorias de problemas na modelagem:

$N_F = 0$  processo exatamente determinado

$N_F > 0$  processo indeterminado  $\rightarrow N_V > N_E$  (infinitas soluções)

$N_F < 0$  processo sobre-determinado  $\rightarrow N_V < N_E$  (sem solução)

Assim:

$N_F = 0$  caso satisfatório

$N_F > 0$  número de entradas do processo não foi totalmente identificado

$N_F < 0$  equações adicionais precisam ser determinadas

**Exemplo 6.1:**  $q_0 = q \rightarrow V = \text{constante}$ .

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q_0(T_0 - T)}{V} + \frac{Q}{\rho V c_p}$$

Parâmetros:  $V$ ,  $\rho$ ,  $c_p$

Variáveis:  $q_0$ ,  $T_0$ ,  $T$  e  $Q$

Equações: BE

$$N_F = 4 - 1$$

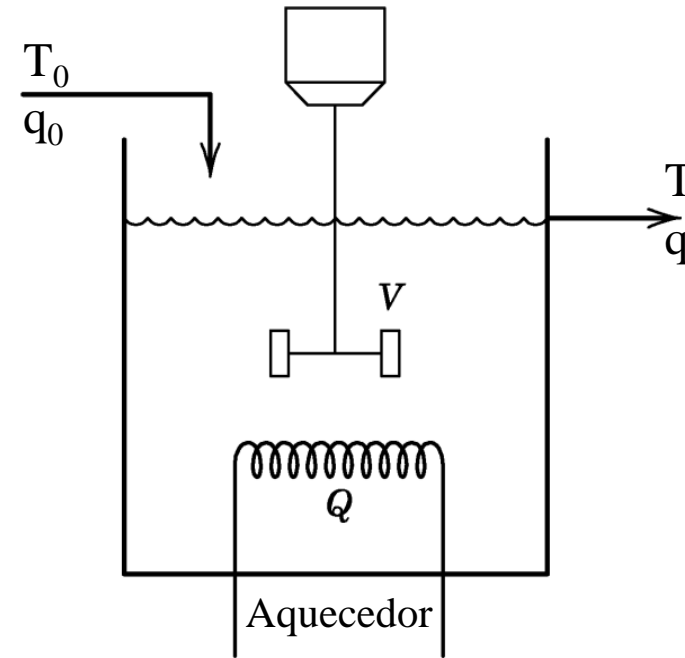
$$\mathbf{N_F = 3}$$

Então teremos:

Entradas:  $q_0$ ,  $T_0$  e  $Q$

Saída:  $T$

Observação: se especificarmos 3 entradas  $\rightarrow \mathbf{N_F = 0}$





**Exemplo 6.2:**  $q_0 \neq q \rightarrow V = \text{variável}.$

$$\frac{dV}{dt} = q_0 - q$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q_0(T_0 - T)}{V} + \frac{Q}{\rho V c_p}$$

Parâmetros:  $\rho, c_p$

Variáveis:  $V, q_0, q, T_0, T$  e  $Q$

Equações: BM e BE

$$N_F = 6 - 2$$

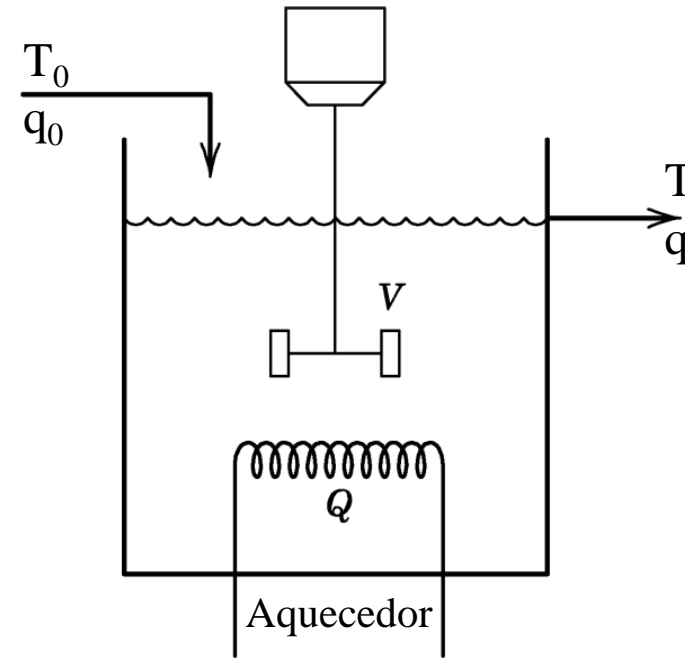
$$\mathbf{N_F = 4}$$

Então teremos:

Entradas:  $q_0, q, T_0$  e  $Q$

Saída:  $V$  (ou  $h$  - nível) e  $T$

Observação: se especificarmos 4 entradas  $\rightarrow \mathbf{N_F = 0}$



## PROPOSTA DE EXERCÍCIOS (Entrega não necessária!):

- 1)- Refazer os exercícios do capítulo;
- 2)- Refazer os exercícios resolvidos do Capítulo 2 do Livro Texto (SEBORG D. E. *et al* - 2ª Edição);
- 3)- Fazer os exercícios 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.15 e 2.16 do Livro Texto (SEBORG D. E. *et al* - 2ª Edição);
- 4)- Demais exercícios de outras bibliografias referente ao assunto do capítulo.

**BOM ESTUDO!**

## Bibliografia

- 1)- SEBORG, D. E., EDGAR, T. F., MELLCHAMP, D. A. – Process Dynamics and Control, Wiley, 2011.
- 2)- SMITH, C. A., CORRIPIO, A. B. – Princípios e Práticas do Controle Automático de Processos, LTC, 3ª edição, 2008.
- 3)- OGATA, K – Engenharia de Controle Moderno, Pearson, 5ª edição, 2011.
- 4)- HENRIQUE, H. M. – Notas de aula. Universidade Federal de Uberlândia, 2009.
- 5)- LUYBEN, W. L. – Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers, 2a. Edição, McGraw Hill, 1990.
- 6)- BEQUETTE, B. W. – Process Control. Modeling, Design, and Simulation. Prentice Hall, 2003.
- 7)- SIGHIERI, L., NISHINARI, A. Controle Automático de Processos Industriais – Instrumentação, 2ª Ed, Edgard Blucher, 1997.
- 8)- COUGHANOWR, D.; LEBLANC, S. Process Systems Analysis and Control, McGraw Hill, ed 3, 2008.
- 9)- STEPHANOPOULOS, G. – Chemical Process Control. An Introduction to Theory and Practice, Prentice Hall, 1984.



# Obrigado! Bom estudo!

**Prof. Davi Leonardo de Souza**  
**davi.souza@uftm.edu.com**