UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS E EXATAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA

Disciplina: Controle de Processos Químicos I

Capítulo 3
Ferramentas matemáticas para o controle de processos

Prof. Davi Leonardo de Souza
davi.souza@uftm.edu.com

Conteúdo da aula

1.0 - Transformada de Laplace (TL)

2.0 - Algumas propriedades da Transformada de Laplace

3.0 - Exemplos de Transformada de Laplace mais utilizadas em controle

4.0 - Resolução de EDO's utilizando a Transformada de Laplace

5.0 - Funções de Transferência (FT)

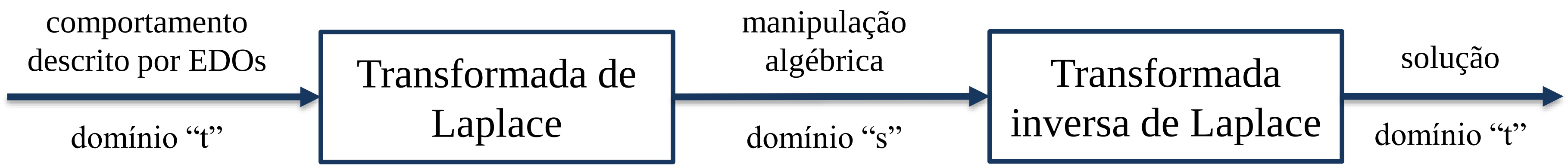
6.0 - Propriedades das Funções de Transferência

7.0 - Linearização de modelos

1.0 - Transformada de Laplace (TL)

O método de Transformada de Laplace é um método muito útil para resolver EDOs. Com a Transformada de Laplace, pode-se converter muitas funções comuns, tais como, senoidais e amortecidas, em equações algébricas de uma variável “s”. As equações diferenciais também podem ser transformadas em equações algébricas através da Transformada de Laplace (TL).

A transformada de Laplace é uma operação semelhante à transformada logarítmica. As equações diferenciais são transformadas em equações algébricas, em que pode-se realizar operações algébricas normais no domínio “s”, depois retorna ao domínio “t” através da inversa. Representando esquematicamente, observa-se:



O matemático Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827) descobriu um meio para resolver EDOs, que consiste em:

1 - Multiplicar cada termo da equação por e^{-st};
2 - Integrar cada termo em relação ao tempo, de zero à infinito;
3 - “s” é uma constante de unidade tempo (1/tempo).

A transformada de Laplace da função f(t) é denotada e definida por:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

Onde, L[ ] é o símbolo da Transformada de Laplace, f(t) é a função do tempo contínuo para $0 < t < \infty$ e L é o operador de Laplace.

A transformada inversa é definida como: $f(t) = L^{-1}F(s)$ (2)

sendo, L^{-1} o operador inverso de Laplace.

2.0 - Algumas propriedades da Transformada de Laplace

As propriedades essenciais da Transformada de Laplace são:

1 - Soma de duas funções:

$$L[f_1(t)+f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] = F_1(s)+F_2(s) \qquad (3)$$

2 - Multiplicação por constante:

$$L[af_1(t)] = aL[f_1(t)] = aF_1(s) \qquad (4)$$

3 - Função com atraso no tempo (translação real):

$$L[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}F(s) \qquad (5)$$

4 - Teorema da diferenciação real:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f_0 \qquad (6)$$

com f(0) = f(t=0)

Em geral temos:

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - \left.\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} \qquad (7)$$

Em controle de processos geralmente admitimos que as condições iniciais estejam em estado estacionário, e que as variáveis são desvios das condições iniciais (o valor inicial é zero). Para este caso a expressão geral para a diferenciação real se reduz a:

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) \qquad (8)$$

5 - Teorema da integração real:

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s} F(s) \qquad (9)$$

6 - Teorema do valor final: Podemos descobrir o valor final ou valor no estado estacionário de uma função a partir de sua transformada.

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{10}$$

7 - Teorema da diferenciação complexa:

$$L[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds} \tag{11}$$

8 - Teorema da translação complexa:

$$L[e^{at} f(t)] = F(s-a) \tag{12}$$

com, “a” o atraso.

9 - Teorema do valor inicial: Permite o cálculo do valor inicial de uma função a partir de sua transformada.

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{13}$$

Exemplo 2.1: Encontre a TL da equação abaixo, em condições iniciais nulas.

$$9\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=2x(t)$$

Solução: $y(0)=0$ e $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{(0)}=0$

$$9L\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right]+6L\left[\frac{dy(t)}{dt}\right]+L\left[y(t)\right]=2L\left[x(t)\right]$$

$$9s^2Y(s)+6sY(s)+Y(s)=2X(s)$$

$$Y(s)=\frac{2}{9s^2+6s+1}X(s)$$

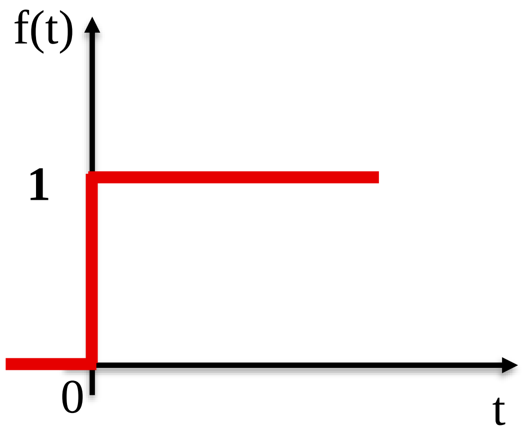
3.0 - Exemplos de Transformada de Laplace mais utilizadas em controle

1 - Função constante:

$$f(t) = a \rightarrow F(s) = \frac{a}{s} \qquad (14)$$

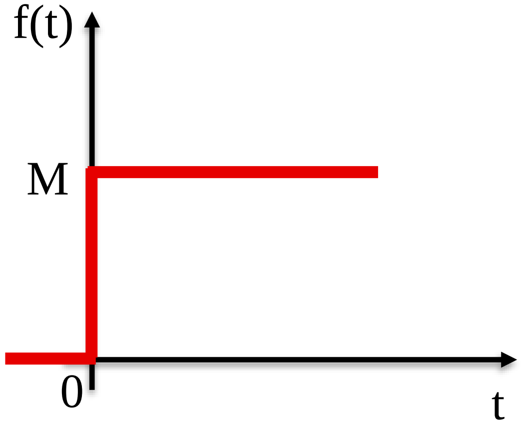
2 - Função degrau:

→ Unitário



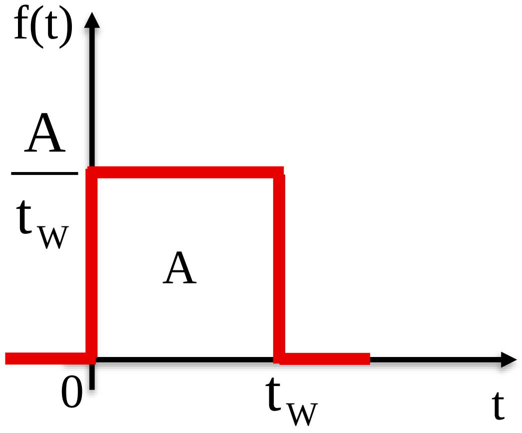
$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ 1 \text{ para } t \geq 0 \end{cases} \rightarrow F(s) = \frac{1}{s} \qquad (15)$$

→ Degrau de amplitude M:



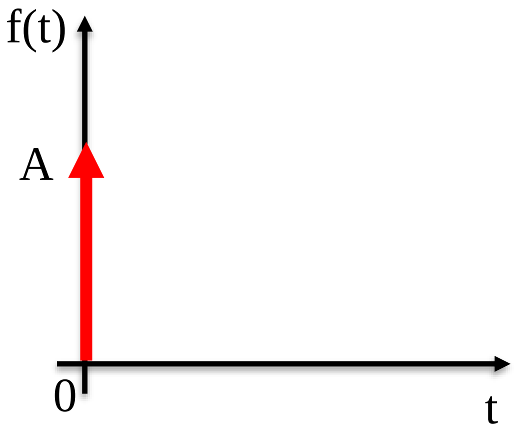
$$f\left(t\right)=\begin{cases}0 \text{ para } t<0\\ M \text{ para } t\geq 0\end{cases}\rightarrow F(s)=\frac{M}{s} \qquad (16)$$

3 - Função Pulso:



$$f\left(t\right)=\begin{cases}0 \text{ para } t<0\\ \dfrac{A}{t_W} \text{ para } 0\leq t<t_W\\ 0 \text{ para } t\geq t_W\end{cases}\rightarrow F(s)=\frac{A}{t_W s}\left(1-e^{-t_W s}\right) \qquad (17)$$

4 - Função impulso (Delta de Dirac):



$$\delta(t) = \begin{cases} f(t) = \lim\limits_{t_w \to 0} \dfrac{A}{t_w} \text{ para } 0 < t < t_0 \\ f(t) = 0 \text{ para } t < 0 \text{ e } t > t_w \end{cases}$$

$$L[f(t)] = \lim_{t_w \to 0} \frac{A}{t_w s}(1 - e^{-t_w s}) \to F(s) = A \qquad (18)$$

5 - Função exponencial:

$$f(t) = e^{-bt} \to F(s) = \frac{1}{b+s} \qquad (19)$$

A Transformada de Laplace é definida para $b < 0$.

6 - Onda senoidal de frequência ω:

$$f(t) = \text{sen}(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \to F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \qquad (20)$$

4.0 - Resolução de EDO's utilizando a Transformada de Laplace

É comum e prático utilizarmos a Transformada de Laplace para resolução de EDO's. Dentro deste contexto, necessitamos do entendimento da manipulação das equações algébricas através da expansão em frações parciais.

1 - Fatores lineares no denominador:

Seja a seguinte expressão:

$$G(s) = \frac{z(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} \tag{21}$$

em que p_i são as raízes do polinômio do denominador, com i = 1:n.

Frações parciais:

$$G(s) = \frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} + \ldots + \frac{N}{s - p_n} \qquad (22)$$

com $A = \lim_{s \to p_1}[(s - p_1)G(s)]$

Generalizando:

$$N = \lim_{s \to p_n}[(s - p_n)G(s)] \qquad (23)$$

2 - Fatores lineares repetidos:

Seja a expressão:

$$G(s) = \frac{z(s)}{(s - p_1)^k (s - p_2) \ldots (s - p_n)} \qquad (24)$$

com, k o número de vezes que a raiz repete.

As frações parciais serão:

$$G(s)=\frac{A_1}{(s-p_1)^k}+\frac{A_2}{(s-p_1)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_k}{(s-p_1)}+\frac{B}{s-p_2}+\ldots+\frac{N}{s-p_n} \tag{25}$$

Logo:

$$A_1=\lim_{s\to p_1}[(s-p_1)^k G(s)] \tag{26}$$

$$A_k=\lim_{s\to p_1}\left[\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}[(s-p_1)^k G(s)]\right] \tag{27}$$

Desta forma, duas soluções de EDO's podem ser encontradas, fazendo a inversa das expressões em frações parciais:

1 - Fatores lineares no denominador: $g(t)=Ae^{p_1 t}+Be^{p_2 t}+\ldots+Ne^{p_n t}$ (28)

2 - Fatores lineares repetidos no denominador, com A_k (k = 1, 2, ..., m):

$$g(t)=\left[\frac{A_1 t^{k-1}}{(m-1)!}+\frac{A_2 t^{k-2}}{(m-2)!}+\ldots+A_k\right]e^{p_1 t}+\ldots+Ne^{p_n t} \tag{29}$$

Exemplo 4.1: Resolva a EDO utilizando TL. Considere a resposta para um degrau unitário em x(t):

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

Solução: Aplicando a TL, teremos:

$$L\left[\frac{d^3y(t)}{dt^3}\right] + 6L\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] + 11L\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] + 6L\left[y(t)\right] = L\left[x(t)\right]$$

$$s^3Y(s) + 6s^2Y(s) + 11sY(s) + 6Y(s) = X(s)$$

$$Y(s)(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = X(s)$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}X(s)}$$

Aplicando degrau unitário em x(t) teremos:

$$X(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}\frac{1}{s}$$

DICA: Sempre fatore o polinômio, para facilitar a manipulação das frações parciais!

Fatorando o polinômio do denominador, teremos:

$$Y(s)=\frac{1}{s}\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Em frações parciais teremos:

$$G(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)} + \frac{D}{(s+3)}$$

Logo:

$$A = \lim_{s \to 0}\left[\cancel{(s-0)}\frac{1}{\cancel{s}}\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right] = \frac{1}{6}$$

$$B = \lim_{s \to -1}\left[\cancel{(s+1)}\frac{1}{s}\frac{1}{\cancel{(s+1)}(s+2)(s+3)}\right] = -\frac{1}{2}$$

$$C = \lim_{s \to -2}\left[\cancel{(s+2)}\frac{1}{s}\frac{1}{(s+1)\cancel{(s+2)}(s+3)}\right] = \frac{1}{2}$$

$$D = \lim_{s \to -3}\left[\cancel{(s+3)}\frac{1}{s}\frac{1}{(s+1)(s+2)\cancel{(s+3)}}\right] = -\frac{1}{6}$$

Assim, substituindo as constantes na Eq. (28), temos a solução: $\boxed{y(t) = \frac{1}{6} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-3t}}{6}}$

5.0 - Funções de Transferência (FT)

Em teoria de controle, funções chamadas de Funções de Transferência (FT) são comumente usadas para caracterizar as relações de entrada-saída de componentes ou sistemas que podem ser descritos por EDO's. A Função de Transferência de um sistema de EDO's lineares é definida como a relação da Transformada de Laplace da saída para a Transformada de Laplace da entrada. Consideremos o sistema definido pela seguinte EDO:

$$a_n \frac{dy^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{dx^m}{dt^m} + b_{m-1}\frac{dx^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \qquad (30)$$

com "y" a saída e "x" a entrada, e $n \geq m$.

A Função de Transferência (FT) do sistema é obtida tomando-se a Transformada de Laplace de ambos os membros da Eq. (30):

$$FT = G(s) = \left.\frac{L[\text{saída}]}{L[\text{entrada}]}\right|_{\text{condições iniciais nulas}} \qquad (31)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s + a_0}=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \qquad (32)$$

Usando o conceito de Função de Transferência (FT) é possível representar a dinâmica do sistema pelas equações algébricas em “s”.

A aplicação do conceito de FT é limitada aos sistemas de EDO’s lineares, desta forma, sistemas representados por EDO não lineares, deve-se fazer a linearização antes de aplicar a TL!

5.1 - Funções de transferência de sistemas dinâmicos

Suponha a seguinte EDO de primeira ordem:

$$V_p C_p \frac{dT}{dt} = Wc_p (T_i - T) + Q \qquad (33)$$

Se o processo está inicialmente em EE, temos: $T(0) = \bar{T};\ T_i(0) = \bar{T}_i;\ Q(0) = \bar{Q};$

$$\text{Saída } \bar{T} \rightarrow \ \text{Entradas} \begin{cases} \bar{T}_i \\ \bar{Q} \end{cases} \rightarrow \text{No EE teremos: } 0 = Wc_p (\bar{T}_i - \bar{T}) + \bar{Q}$$

Para eliminar a dependência do modelo das condições estacionárias, utiliza-se o conceito de "variável desvio", subtraindo-se a relação do EE da EDO do modelo:

$$\frac{V_p}{W} \frac{d(T - \bar{T})}{dt} = [(T_i - \bar{T}_i) - (T - \bar{T})] + \frac{1}{Wc_p}(Q - \bar{Q}) \qquad (34)$$

Fazendo $T' = T - \bar{T};\ T_i' = T_i - \bar{T}_i$ e $Q' = Q - \bar{Q}$ variáveis desvio, teremos:

$$\frac{V_p}{W}\frac{dT'}{dt} = [T_i' - T'] + \frac{1}{Wc_p}Q' \qquad (35)$$

com:

$$\tau = \frac{V_p}{W} \text{ e } K = \frac{1}{Wc_p}$$

Teremos:

$$\tau\frac{dT'}{dt} = [T_i' - T'] + KQ' \qquad (36)$$

Aplicando Laplace:

$$\tau \cdot L[\frac{dT'}{dt}] = L[T_i' - T'] + K \cdot L[Q'] \qquad (37)$$

Teremos: $\tau s T'(s) = T_i'(s) - T'(s) + KQ'(s)$

$$(\tau s + 1)T'(s) = T_i'(s) + KQ'(s)$$

$$T'(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)} T_i'(s) + \frac{K}{(\tau s + 1)} Q'(s) \Rightarrow \boxed{T'(s) = G_1(s)T_i'(s) + G_2(s)Q'(s)} \quad (38)$$

Com

$$G_1(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)} \text{ e } G_2(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)}$$

5.2 - Considerações sobre funções de transferência

- ✓ É um modelo matemático expresso através de uma EDO, que relaciona saída com entrada;
- ✓ Independe da magnitude e da natureza da entrada;
- ✓ Inclui as unidades das entradas e saídas;
- ✓ Não fornece informações sobre a estrutura física do sistema;
- ✓ Pode ser estabelecida experimentalmente introduzindo-se entradas conhecidas e analisando as saídas.

5.3 - FT utilizando matrizes no espaço de estados

Dado o modelo linear em espaço de estados

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{39}$$

A FT do modelo, utilizando as matrizes A, B, C e D, no espaço de estados, pode ser escrita por:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \tag{40}$$

Com $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$, teremos:

$$G(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] \tag{41}$$

6.0 - Propriedades das Funções de Transferência

1 - Ganho da função de transferência

O ganho no estado-estacionário é a razão entre a variação da saída com a variação da entrada. Pode ser calculado diretamente, fazendo **s = 0** na FT, caso ela exista.

$$K = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} = \frac{b_0}{a_0} \tag{42}$$

em que 1 e 2 indicam diferentes estados-estacionários para $\bar{y}$ e $\bar{x}$.

Se a FT tiver um ganho, então:

$$K = \lim_{s \to 0} G(s) \tag{43}$$

Exemplo 6.1: Obter o Ganho das FTs do modelo:

$$T'(s) = \frac{1/\rho q c_p}{(s\tau+1)} Q'(s) + \frac{1}{(s\tau+1)} T_0'(s) \qquad (44)$$

$$K_1 = \lim_{s\to 0} G_1(s) = \lim_{s\to 0} \frac{T'(s)}{Q'(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1/\rho q c_p}{(s\tau+1)} \Longrightarrow \boxed{K_1 = 1/\rho q c_p}$$

$$K_2 = \lim_{s\to 0} G_2(s) = \lim_{s\to 0} \frac{T'(s)}{T_0'(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{(s\tau+1)} \Longrightarrow \boxed{K_2 = 1}$$

2 - Ordem da função de transferência

A ordem da função de transferência é a maior potência de "s" no denominador do polinômio que é a ordem da equação diferencial equivalente. O sistema é chamado de *n-ésima* ordem.

$$G(s) = \frac{2s^2 + 5}{3s^3 + 5s^2 + 3}$$

FT de 3ª ordem

3 - Constante de tempo da função de transferência

Se ambos os polinômios, do numerador e do denominador forem fatorados na forma de produto, teremos:

$$\beta \prod_i (\tau_i s + 1) \tag{45}$$

Ao fatorar, deve aparecer o termo "1" para cada raiz do polinômio

O termo que acompanha "s" é chamado constante de tempo (τ_i) que dá uma informação da velocidade e das características da resposta do sistema, e β a constante resultante da fatoração do polinômio, para n raízes (i = 1, 2, ..., n).

4 - Realização física

Dado um sistema descrito pela FT:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_{n-1} s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad (46)$$

Polinômio característico $\longrightarrow$

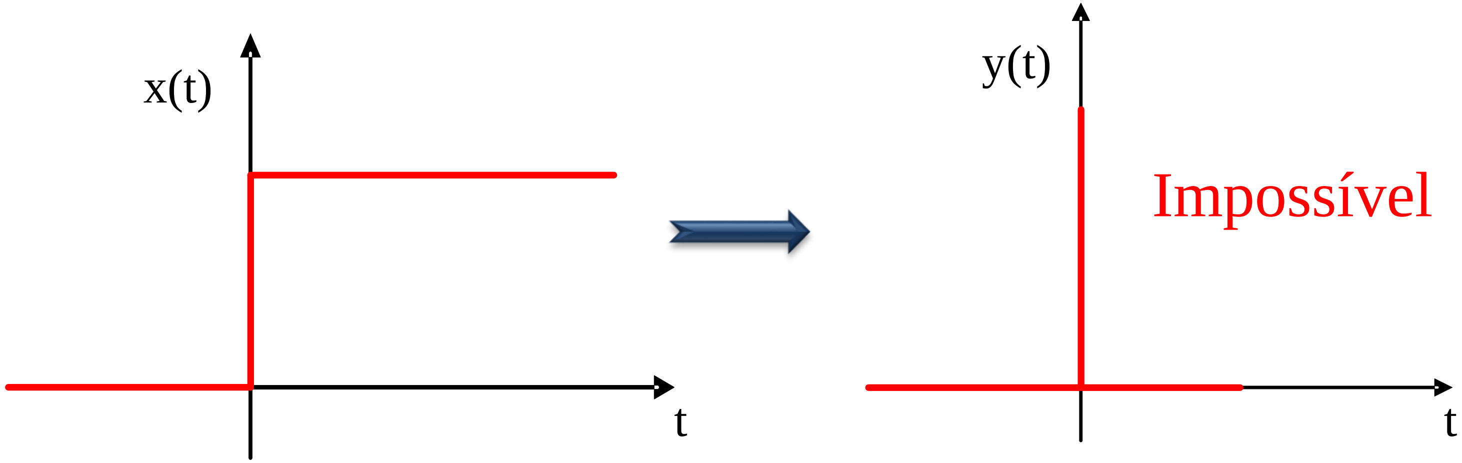
é fisicamente possível se $n \geq m$ (grau do polinômio do denominador for $\geq$ que o grau do polinômio do numerador).

Prova: Suponha um sistema onde n = 0 e m = 1: $a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$

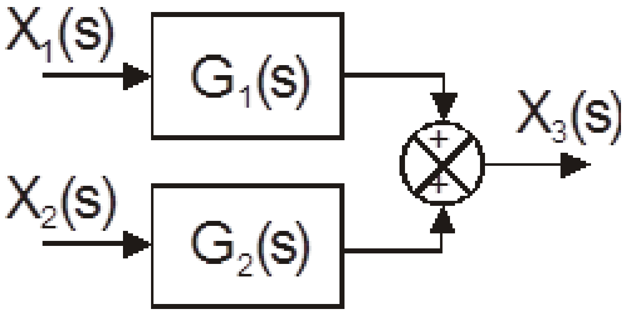
Entrada degrau

$\Downarrow$

Saída impulso em t=0

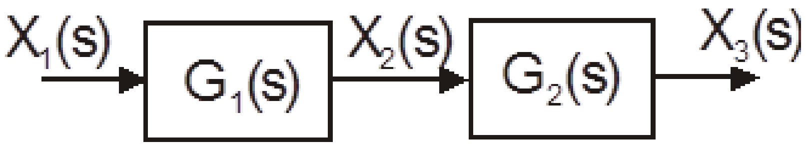


5 - Propriedade aditiva (sistema em paralelo)



$$X_3(s) = G_1(s)X_1(s) + G_2(s)X_2(s) \qquad (47)$$

6 - Propriedade multiplicativa (sistema em série)



$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = G_1(s) \text{ e } \frac{X_3(s)}{X_2(s)} = G_2(s)$$

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)}\frac{X_3(s)}{X_2(s)} = G_1(s)G_2(s) \rightarrow X_3(s) = [G_1(s)G_2(s)]X_1(s) \qquad (48)$$

7 - Polos e Zeros

Dada a função de transferência de acordo com a Eq (46):

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

Esta expressão pode ser fatorada em:

$$G(s) = \left(\frac{b_m}{a_n}\right) \frac{(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)} \tag{49}$$

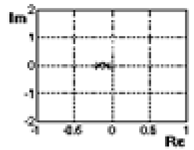
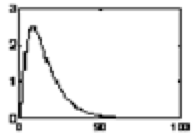
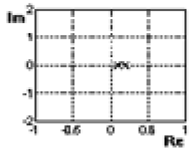
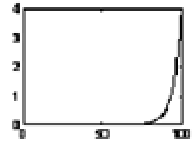
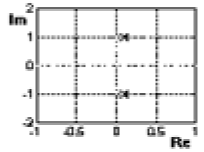
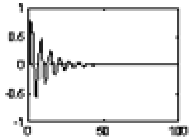
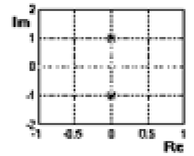
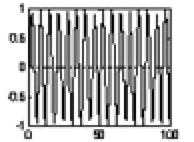
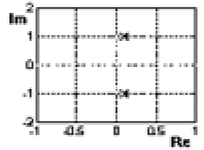
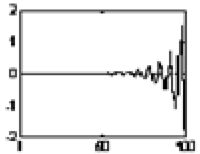
em que: z_i são os zeros da função de transferência

p_i são os polos da função de transferência

Os polos e zeros tem um papel importante na determinação do comportamento dinâmico do sistema!

Podemos visualizar o tipo de comportamento dinâmico associado a cada tipo de polo:

- ✓ distintos e reais;
- ✓ pares complexos e conjugados (a ± bj);
- ✓ múltiplos.

		raízes	forma	Lugar das raízes	Comportamento
1	*pólos reais e negativos*	$p_1 = -a_1$	$y(t) = C_1 e^{-a_1 t}$		
2	*pólos reais e positivos*	$p_1 = a_1$	$y(t) = C_1 e^{a_1 t}$		
3	*pólos complexos conjugados com parte real negativa*	$p_1 = -a + bi$ $p_2 = -a - bi$	$y(t) = e^{-at}(C_1 \cos bt + C_2 \operatorname{sen} bt)$		
4	*pólos imaginários puros*	$p_1 = bi$ $p_2 = -bi$	$y(t) = C_1 \cos bt + C_2 \operatorname{sen} bt$		
5	*pólos complexos conjugados com parte real positiva*	$p_1 = a + bi$ $p_2 = a - bi$	$y(t) = e^{at}(C_1 \cos bt + C_2 \operatorname{sen} bt)$		

7.0 - Linearização de modelos

Seja o modelo:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, x) \qquad (50)$$

com y a saída e x a entrada.

Expandindo a Eq. (50) em série de Taylor em torno do ponto de EE ($\bar{y}$ e $\bar{x}$) e truncando no termo de 1ª ordem:

$$f(y, x) \approx f(\bar{y}, \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{\bar{y},\bar{x}} (y - \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\bar{y},\bar{x}} (x - \bar{x}) \qquad (51)$$

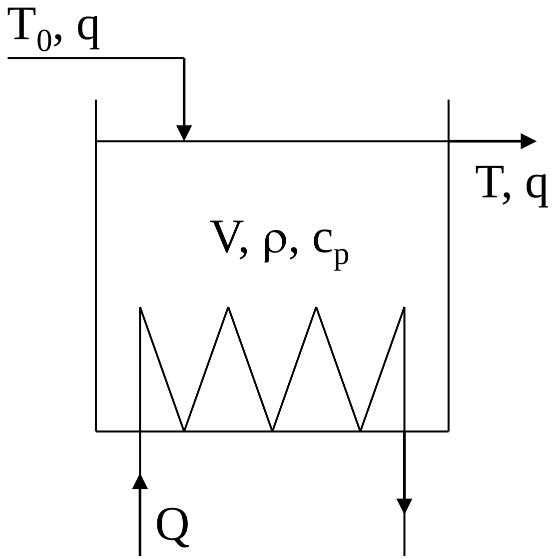
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{\bar{y},\bar{x}} y' + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\bar{y},\bar{x}} x' \qquad (52)$$

Exemplo 7.1: Encontre as FTs do processo abaixo admitindo $q = q(t)$, $T_0 = T_0(t)$ e $Q = Q(t)$.

$$V\rho c_p \frac{dT}{dt} = \rho q c_p (T_0 - T) + Q$$

Condições iniciais: $\begin{cases} T(0) = \bar{T} \\ T_0(0) = \bar{T}_0 \end{cases}$

$$\frac{dT}{dt} = \underbrace{\frac{q}{V}(T_0 - T)}_{\textbf{Não linearidade}} + \frac{1}{\rho V c_p} Q$$



Linearizando:

$$\frac{dT'}{dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{EE} T' + \left.\frac{\partial f}{\partial Q}\right|_{EE} Q' + \left.\frac{\partial f}{\partial T_0}\right|_{EE} T_0' + \left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{EE} q'$$

Temos que:

$$f = \frac{q}{V}(T_0 - T) + \frac{1}{\rho V c_p} Q \Rightarrow \boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{EE} = \frac{-\bar{q}}{V}} \quad \boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial Q}\right|_{EE} = \frac{1}{\rho V c_p}} \quad \boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial T_0}\right|_{EE} = \frac{\bar{q}}{V}} \quad \boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{EE} = \frac{(\bar{T}_0 - \bar{T})}{V}}$$

Substituindo na equação da linearização, teremos:

$$\frac{dT'}{dt} = -\frac{\bar{q}}{V}T' + \frac{1}{\rho V c_p}Q' + \frac{\bar{q}}{V}T_0' + \frac{(\bar{T}_0 - \bar{T})}{V}q'$$

Com o modelo linear no EE, podemos então aplicar a TL:

$$sT'(s) = -\frac{\bar{q}}{V}T'(s) + \frac{1}{\rho V c_p}Q'(s) + \frac{\bar{q}}{V}T_0'(s) + \frac{(\bar{T}_0 - \bar{T})}{V}q'(s)$$

$$\left(\frac{V}{\bar{q}}s + 1\right)T'(s) = \frac{1}{\rho \bar{q} c_p}Q'(s) + T_0'(s) + \frac{(\bar{T}_0 - \bar{T})}{\bar{q}}q'(s)$$

$$\boxed{T'(s) = \frac{K_1}{(\tau s + 1)}Q'(s) + \frac{1}{(\tau s + 1)}T_0'(s) + \frac{K_2}{(\tau s + 1)}q'(s)}$$

com $K_1 = 1/\rho \bar{q} c_p$; $K_2 = (\bar{T}_o - \bar{T})/\bar{q}$ e $\tau = V/\bar{q}$

Funções de Transferência do modelo

$$G_1(s) = \frac{T'(s)}{Q'(s)} = \frac{K_1}{(\tau s + 1)}$$

$$G_2(s) = \frac{T'(s)}{T_0'(s)} = \frac{1}{(\tau s + 1)}$$

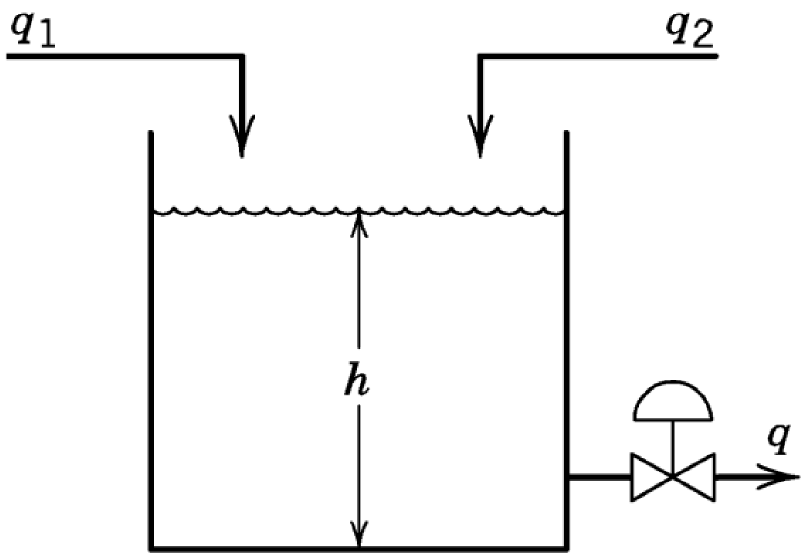
$$G_3(s) = \frac{T'(s)}{q'(s)} = \frac{K_2}{(\tau s + 1)}$$

Exemplo 7.2: Considere o sistema, em que deve-se obter as Funções de Transferência para o perfil de nível com o tempo.

A vazão através da válvula de descarga é proporcional à raiz quadrada do nível.

$$q = C_v \sqrt{h}$$

com C_v a constante da válvula.



Solução: BM

$$\frac{dV}{dt} = q_1 + q_2 - q \text{ com } V = Ah \text{ e } q = C_v \sqrt{h}$$

Assim, teremos:

$$A\frac{dh}{dt} = q_1 + q_2 - C_V \sqrt{h}$$

Linearizando, e colocando em variável desvio, teremos:

$$\frac{dh'}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\bigg|_{EE} q_1' + \frac{\partial f}{\partial q_2}\bigg|_{EE} q_2' + \frac{\partial f}{\partial h}\bigg|_{EE} h' \quad \Rightarrow \quad A\frac{dh'}{dt} = q_1' + q_2' - \frac{C_V}{2\sqrt{\bar{h}}}h'$$

Definindo a resistência da válvula, como: $\frac{1}{R} = \frac{C_V}{2\sqrt{\bar{h}}}$ $\Rightarrow$ $A\frac{dh'}{dt} = q_1' + q_2' - \frac{1}{R}h'$

Aplicando a TL:

$$AsH'(s) = Q_1'(s) + Q_2'(s) - \frac{1}{R}H'(s) \quad \times\ R$$

$$(ARs+1)H'(s) = RQ_1'(s) + RQ_2'(s)$$

Assim, ficamos com:

$$\boxed{H'(s) = \frac{R}{(ARs+1)}Q_1'(s) + \frac{R}{(ARs+1)}Q_2'(s)}$$

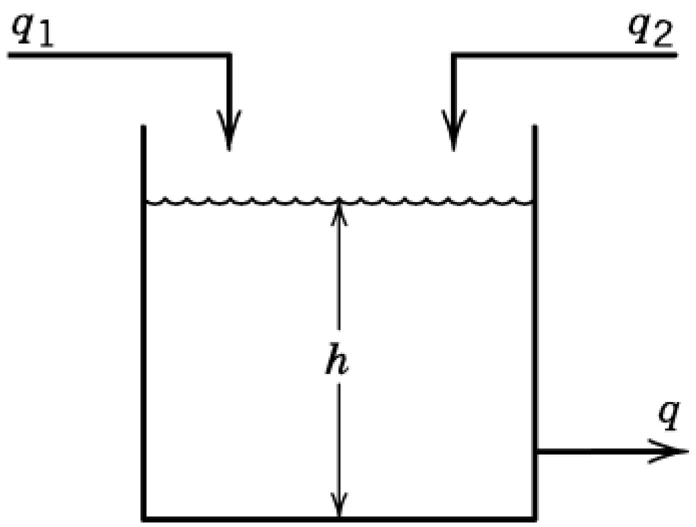
Funções de Transferência do modelo

$$G_1(s) = \frac{H'(s)}{Q_1'(s)} = \frac{R}{(ARs+1)}$$

$$G_2(s) = \frac{H'(s)}{Q_2'(s)} = \frac{R}{(ARs+1)}$$

Exemplo 7.3: Seja o tanque para estocagem de líquidos, de acordo com a figura ao lado. As condições normais de operação são:

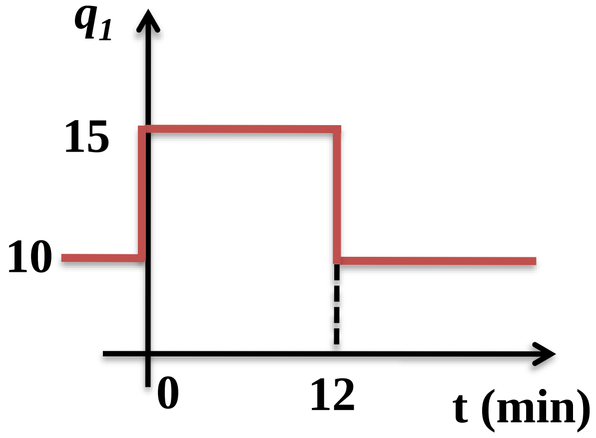
$$\bar{q}_1 = 10\,ft^3/min \qquad \bar{q}_2 = 5\,ft^3/min \qquad e \qquad \bar{h} = 4\,ft$$



O tanque possui 6 ft de diâmetro e o fluido é incompressível. Supondo que há uma mudança do tipo pulso em q_1, que pode ser observada no gráfico a seguir, pede-se:

a- A FT relacionando H' e Q_1';
b- A expressão para h(t) que corresponde ao pulso (Perturbação);
c- O valor do novo EE após perturbação;
d- Para o mesmo intervalo de tempo, repita os itens (b) e (c) para uma mudança de duplo pulso em q_1 = 10 → 15 → 5 → 10 (ft^3/min). Desenhe esta perturbação.

Mudança do tipo pulso em q_1



Solução:

a- BM: $\dfrac{dV}{dt} = q_1 + q_2 - q \quad \Rightarrow \quad A\dfrac{dh}{dt} = q_1 + q_2 - q$

Colocando em variável desvio, teremos:

$$\frac{dh'}{dt} = \frac{q_1'}{A} + \frac{q_2'}{A} - \frac{q'}{A}$$

Aplicando a TL:

$$sH'(s) = \frac{Q_1'(s)}{A} + \frac{Q_2'(s)}{A} - \frac{Q'(s)}{A}$$

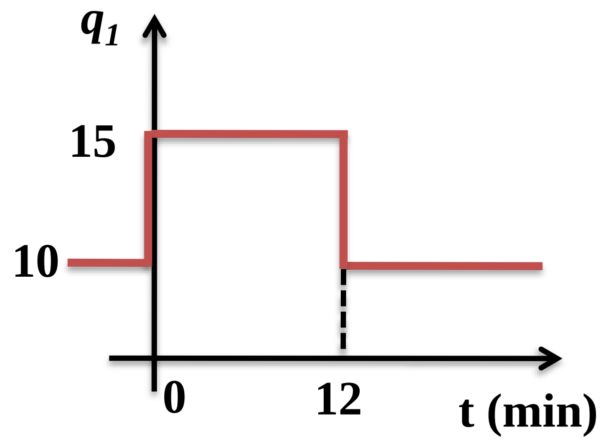
Logo:

$$\boxed{G_1(s) = \frac{H'(s)}{Q_1'(s)} = \frac{1}{As}}$$

b- Perturbação pulso

$$F(s)=\frac{A}{t_w s}(1-e^{-t_w s})$$

Mudança do tipo pulso em q_1



Assim, pelo gráfico teremos: $Q_1'(s)=\frac{5}{s}(1-e^{-12s})$

Logo: $H'(s)=\frac{1}{As}Q_1'(s) \Rightarrow H'(s)=\frac{1}{\frac{\pi D^2}{4}s}\frac{5}{s}(1-e^{-12s})$

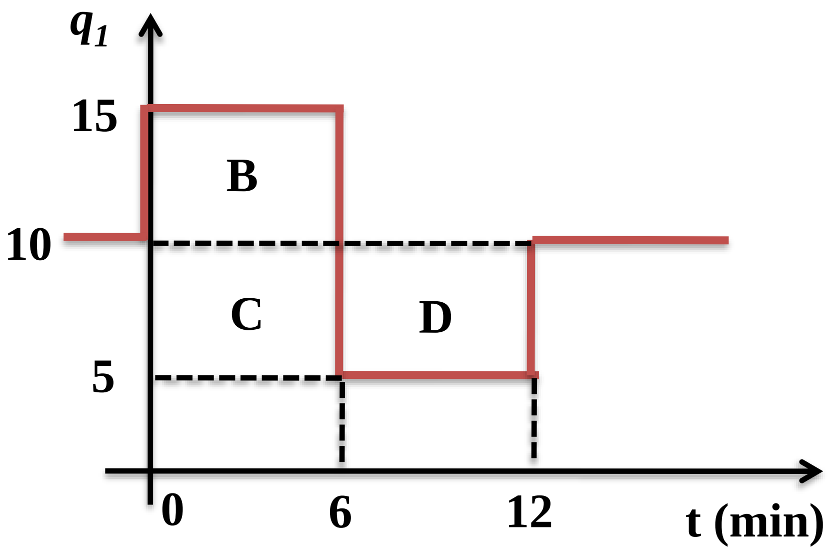
$H'(s)=\frac{5}{9\pi s^2}-\frac{5}{9\pi s^2}e^{-12s}$, aplicando a TL inversa, teremos:

$$L^{-1}\left[H'(s)\right]=\frac{5}{9\pi}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-\frac{5}{9\pi}L^{-1}\left[\frac{e^{-12s}}{s^2}\right]$$

$$h'(t)=\frac{5}{9\pi}t-\frac{5}{9\pi}(t-12) \Rightarrow h'(t)=\frac{5}{9\pi}(12) \Rightarrow \boxed{h'(t)=2{,}12\text{ft}}$$

c- $h'(t) = h(t) - \bar{h}(t) \Rightarrow 2{,}12 = h(t) - 4 \Rightarrow \boxed{h(t) = 6{,}12\text{ft}}$

d- Duplo pulso:



Podemos dividir o pulso em 3 partes: A, B e C:

$$Q_1'(s) = B + C - D$$

$$Q_1'(s) = \frac{5}{s}(1 - e^{-6s}) + \frac{5}{s}(1 - e^{-6s}) - \frac{5}{s}(1 - e^{-12s}) \Rightarrow Q_1'(s) = \frac{5}{s} - \frac{10}{s}e^{-6s} + \frac{5}{s}e^{-12s}$$

Logo:

$$H'(s) = \frac{1}{As} Q_1'(s)$$

Substituindo Q_1’(s) na equação acima e aplicando a TL inversa, teremos:

$$L^{-1}\left[H'(s)\right] = \frac{5}{9\pi}\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - 2L^{-1}\left[\frac{e^{-6s}}{s^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{e^{-12s}}{s^2}\right]\right\}$$

$$h'(t) = \frac{5}{9\pi}\left[t - 2(t-6) + (t-12)\right]$$

$$\boxed{h'(t) = 0ft}$$

Logo o novo EE é:

$$h'(t) = h(t) - \overline{h}(t) \Rightarrow 0 = h(t) - 4 \Rightarrow \boxed{h(t) = 4ft}$$

PROPOSTA DE EXERCÍCIOS (Entrega não necessária!):

1)- Refazer os exercícios do capítulo;

2)- Refazer os exercícios resolvidos do Capítulo 4 do Livro Texto (SEBORG D. E. *et al* - 2ª Edição);

3)- Fazer os exercícios 4.2, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16 do Livro Texto (SEBORG D. E. *et al* - 2ª Edição);

4)- Demais exercícios de outras bibliografias referente ao assunto do capítulo.

BOM ESTUDO!

Bibliografia

1)- SEBORG, D. E., EDGAR, T. F., MELLCHAMP, D. A. – Process Dynamics and Control, Wiley, 2011.

2)- SMITH, C. A., CORRIPIO, A. B. – Princípios e Práticas do Controle Automático de Processos, LTC, 3ª edição, 2008.

3)- OGATA, K – Engenharia de Controle Moderno, Pearson, 5ª edição, 2011.

4)- HENRIQUE, H. M. – Notas de aula. Universidade Federal de Uberlândia, 2009.

5)- LUYBEN, W. L. – Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers, 2a. Edição, McGraw Hill, 1990.

6)- BEQUETTE, B. W. – Process Control. Modeling, Design, and Simulation. Prentice Hall, 2003.

7)- SIGHIERI, L., NISHINARI, A. Controle Automático de Processos Industriais – Instrumentação, 2ª Ed, Edgard Blucher, 1997.

8)- COUGHANOWR, D.; LEBLANC, S. Process Systems Analysis and Control, McGraw Hill, ed 3, 2008.

9)- STEPHANOPOULOS, G. – Chemical Process Control. An Introduction to Theory and Practice, Prentice Hall, 1984.

Obrigado!
Bom estudo!

Prof. Davi Leonardo de Souza
davi.souza@uftm.edu.com