



Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Cálculo 4

por

Bruno Nunes de Souza

Uberaba - MG

2021

Sumário

1 Séries de Fourier	2
1.1 Funções Perpendiculares	2
1.2 A Série de Fourier	12
1.3 Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares	23
1.4 Periodicidade da Série de Fourier	28
1.5 Convergência da Série de Fourier	32
1.6 Anexo 1 - A Fórmula de Euler	41
2 Aplicações da Série de Fourier	45
2.1 A Equação do Calor	45
2.2 Separação de Variáveis	50
2.3 Problemas de Valores de Contorno	53
2.4 Equação do Calor	55
2.5 Equação da Corda	59
2.6 Equação de Laplace	69
2.7 Anexo 2	74
3 Integrais Especiais	80
3.1 Anexo 3 - Fator Integrante	88
4 Transformada de Fourier	91
4.1 Definição e Exemplos	91
4.2 Transformada de Fourier Seno e Transformada de Fourier Cosseno	97
4.3 Transformada de Fourier Aplicada à Problemas de Contorno .	100
4.3.1 Algumas Repostas	108
4.4 Caso especial	108
5 Números Complexos	114
5.1 O Conjunto dos Números Complexos	115
5.2 O Conjugado Complexo e Divisão	116

5.3	O Plano Complexo	118
5.4	Representação Polar de um Número Complexo	120
5.5	Raízes n-ésimas	122
5.6	Exponencial Complexa	126

Capítulo 1

Séries de Fourier

1.1 Funções Perpendiculares

Dados dois vetores u e v de um espaço vetorial real \mathbb{V} , é possível determinar vários tipos de operações entre eles. Por exemplo, se $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ e $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ são vetores de \mathbb{R}^3 , podemos definir as seguintes operações

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \in \mathbb{R}^3, \\ u \times v &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \in \mathbb{R}^3, \\ u \cdot v &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Observe que a última operação transforma um par de vetores u e v em um número real. Quando dois vetores u e v são perpendiculares, então

$$u \cdot v = 0.$$

Essa noção de perpendicularidade através de um produto que é nulo* carrega consequências incríveis.

Por exemplo, suponha que os vetores

$$u = (u_1, u_2, u_3),$$

$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

e

$$w = (w_1, w_2, w_3)$$

*Observe que esse fato é muito forte, uma vez que dois vetores não nulos podem ser operados e o resultado ser zero.

sejam linearmente independentes[†] em \mathbb{R}^3 . Isso implica que qualquer vetor $z \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear de u, v e w , ou seja, existem constantes reais α, β e γ tais que

$$z = \alpha u + \beta v + \gamma w. \quad (1.2)$$

Se $z = (z_1, z_2, z_3)$, então

$$(z_1, z_2, z_3) = \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) + \gamma(w_1, w_2, w_3),$$

ou seja, as coordenadas de z na base $\mathbb{B} = \{u, v, w\}$ são determinadas se resolvemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = z_1, \\ \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = z_2, \\ \alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3 = z_3. \end{cases} \quad (1.3)$$

Mas você, como eu, pode sentir uma pouco de preguiça em resolver esse sistema. Para isso que serve a noção de uma base ortogonal.

Definição 1.1 Um conjunto de vetores não nulos $\mathbb{B} = \{u, v, w\}$ é dito ortogonal se

$$u \cdot v = 0, \quad u \cdot w = 0 \quad e \quad v \cdot w = 0.$$

É claro que aqui, por simplicidade, optamos por definir um conjunto com três vetores. A definição geral fica como exercício. Fica como exercício também mostrar que, se $\mathbb{B} = \{u, v, w\}$ é um conjunto de vetores não nulos e ortogonais em \mathbb{R} , então \mathbb{B} é uma base de \mathbb{R}^3 .

Se $\mathbb{B} = \{u, v, w\}$ é uma base ortonormal, então as coordenadas de um vetor arbitrário z na base \mathbb{B} podem ser definidas de uma forma simples. Observe que

$$\begin{aligned} z &= \alpha u + \beta v + \gamma w \\ \implies z \cdot u &= (\alpha u + \beta v + \gamma w) \cdot u \\ &\stackrel{=0}{=} \alpha(u \cdot u) + \beta(\overbrace{v \cdot u}^{=0}) + \gamma(\overbrace{w \cdot u}^{=0}) \\ \implies \alpha &= \frac{z \cdot u}{u \cdot u}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

[†]Três vetores u, v e w são linearmente independentes se a única combinação

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

possível é quando $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Analogamente, podemos concluir as seguintes igualdades

$$\beta = \frac{z \cdot v}{v \cdot v} \text{ e } \gamma = \frac{z \cdot w}{w \cdot w}.$$

Você deve estar se perguntando se esse é um curso de Cálculo ou se é Geometria Analítica. Calma! O que foi feito acima serve como inspiração para a teoria que segue. O produto escalar utilizado acima tem propriedades que são úteis mesmo quando perdemos a noção de ortogonalidade, como por exemplo em um espaço de dimensão maior que 3. Assim, podemos usar o que foi feito acima em outros espaços. Para tal, precisamos da seguinte definição:

Definição 1.2 *Seja \mathbb{V} um espaço vetorial real. Um produto interno sobre \mathbb{V} é uma função que associa a cada par $(u, v) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ um número real*

$$\langle u, v \rangle$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle,$
- ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle,$
- iii) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle,$
- iv) $\langle u, u \rangle > 0$ se $u \neq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0,$

para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{V}$ e para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}.$

O produto escalar entre dois vetores, definido em (1.1), é um produto interno. É possível mostrar, em um curso de Geometria Analítica, que se θ é o ângulo compreendido entre dois vetores u e v de \mathbb{R}^3 , então

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}. \quad (1.5)$$

O produto escalar, visto como um produto interno, motiva-nos a buscar por propriedades similares em espaços de dimensão superior a três. Sem a noção geométrica, resta-nos o pensamento abstrato. Por exemplo, é possível calcular o produto interno entre duas funções, como mostra a definição abaixo.

Definição 1.3 : Produto Interno entre Funções

Dadas duas funções $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, o produto interno entre f e g é dado da seguinte forma

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (1.6)$$

Observe que a definição em (1.6) satisfaz as quatro propriedades da definição 1.2. De fato

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g, f \rangle,$$

satisfazendo i). Sabendo da linearidade da integral, temos que

$$\langle \alpha f, g \rangle = \int_a^b \alpha f(x)g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)g(x)dx = \alpha \langle f, g \rangle,$$

o que satisfaz ii). A terceira propriedade também é uma consequência da linearidade da integral, pois

$$\begin{aligned} \langle f + g, h \rangle &= \int_a^b [f(x) + g(x)]h(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx \\ &= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle. \end{aligned}$$

A verificação de que a operação definida em (1.6) satisfaz iv) da definição de produto interno fica como exercício.

Mesmo sem o recurso visual, é possível definir ortogonalidade entre duas funções, como mostra a definição abaixo:

Definição 1.4 Duas funções f e g são ortogonais no intervalo $[a, b]$ se

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0. \quad (1.7)$$

Exemplo 1.1 As funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ são ortogonais em qualquer intervalo do tipo $[-p, p]$. De fato

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-p}^p f(x)g(x)dx = \int_{-p}^p x^2 x^3 dx = \int_{-p}^p x^5 dx \\ &= \frac{x^6}{6} \Big|_{-p}^p = \frac{1}{6} [p^6 - (-p)^6] = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2 As funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ são ortogonais no intervalo $[-\pi, \pi]$. Antes de partirmos para o cálculo da integral em si, vale lembrar a seguinte igualdade trigonométrica

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \iff \sin x \cos x = \frac{\sin(2x)}{2}. \quad (1.8)$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}
 \langle f, g \rangle &= \langle \sin x, \cos x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2x)}{2} dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
 &= -\frac{1}{4} [\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - \underbrace{\cos(-2\pi)}_{=1}] = 0.
 \end{aligned}$$

Observação 1.1 O conceito de ortogonalidade entre duas funções é puramente algébrico. Ou seja, não é possível relacionar ortogonalidade entre duas funções e perpendicularidade. Por exemplo, as funções seno e cosseno são ortogonais no intervalo $[-\pi, \pi]$ pois, como visto no exemplo 1.2

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = 0.$$

No entanto, não é possível “enxergar” essa ortogonalidade quando colocamos os gráficos de seno e cosseno no mesmo plano, como mostra a figura 1.1.

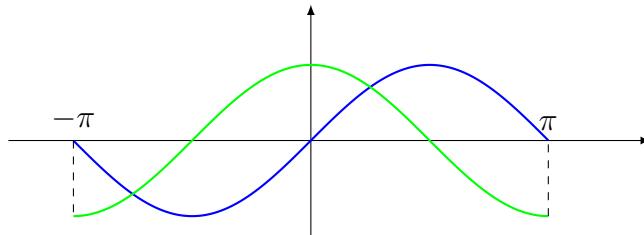


Figura 1.1: Gráficos de $\sin x$ e $\cos x$

Além disso, tanto o conceito de produto interno quanto o conceito de ortogonalidade dependem do intervalo de integração. No exemplo 1.2, temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = 0$$

e no entanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}.$$

Definição 1.5 : Conjuntos Ortogonais

Um conjunto infinito de funções

$$\{\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \dots, \phi_k(x), \dots\}$$

é dito ortogonal em um intervalo $[a, b]$ se

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0, \quad (1.9)$$

sempre que $m \neq n$.

Observação 1.2 *Antes de darmos prosseguimento à teoria das séries de Fourier, vamos relembrar alguns fatos importantes das funções trigonométricas e estabelecer algumas identidades úteis para o prosseguimento do texto.*

Os dois primeiros fatos a serem lembrados é que as funções cosseno e seno são, respectivamente, par e ímpar. Ou seja,

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad e \quad \sin(-\theta) = -\sin(\theta), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Vale lembrar também que

$$\sin(0) = 0, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \sin(2\pi) = 0, \quad \sin(3\pi) = 0, \dots$$

e assim sucessivamente. Ou seja,

$$\sin(n\pi) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.11)$$

Além disso, como o seno é uma função ímpar,

$$\sin(-n\pi) = -\sin(n\pi) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.12)$$

Por outro lado

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \cos(2\pi) = 1, \quad \cos(3\pi) = -1, \quad \cos(4\pi) = 1, \dots,$$

fato esse que pode ser sintetizado da seguinte forma

$$\cos(n\pi) = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.13)$$

Além disso, como cos é par,

$$\cos(-n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Algumas identidades trigonométricas serão essenciais para o desenvolvimento de alguns exemplos e exercícios. Essencialmente, existem três identidades trigonométricas para serem lembradas, quais sejam

$$1 = \cos^2 A + \sin^2 A, \quad (1.14)$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A, \quad (1.15)$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B, \quad (1.16)$$

para quaisquer A e B reais. As demais são consequências do fato de o cosseno ser par e o seno ser ímpar, além de algumas manipulações. Por exemplo, trocando $+$ por $-$ na equação (1.15) e usando o fato de que o seno é uma função ímpar, temos que

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A. \quad (1.17)$$

Somando a equação 1.15 com a equação 1.17, temos a seguinte identidade

$$\sin A \cos B = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2}. \quad (1.18)$$

As identidades que envolvem $\sin A \sin B$ e $\cos A \cos B$ são determinadas de forma análoga.

Exemplo 1.3 O conjunto de funções

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{\pi x}{p}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \dots, \sin\left(\frac{\pi x}{p}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \dots \right\} \quad (1.19)$$

é ortogonal no intervalo $[-p, p]$.

Antes de justificarmos a afirmação acima, vale observar que o conjunto acima pode ser reescrito da seguinte forma

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right\}, \quad m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.20)$$

Além disso, para melhorar o aspecto visual dos cálculos, a partir de agora usaremos as notações

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{p} \quad e \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{p}. \quad (1.21)$$

Portanto, o conjunto dado em (1.19) também pode ser escrito da seguinte forma

$$\{1, \cos(\alpha_m x), \sin(\alpha_n x)\}, \quad m, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.22)$$

Para mostrar a ortogonalidade do conjunto dado em (1.19), serão necessários vários cálculos:

i) $\langle 1, \cos(\alpha_n x) \rangle = 0$. De fato

$$\begin{aligned}
\langle 1, \cos(\alpha_n x) \rangle &= \int_{-p}^p 1 \cdot \cos(\alpha_n x) dx \\
&= \frac{1}{\alpha_n} \sin(\alpha_n x) \Big|_{-p}^p \\
&= \frac{p}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi p}{p}\right) - \sin\left(\frac{n\pi(-p)}{p}\right) \right] \\
&= \frac{p}{n\pi} [\overbrace{\sin(n\pi)}^{=0} - \overbrace{\sin(-n\pi)}^{=0}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

ii) $\langle 1, \sin(\alpha_n x) \rangle = 0$. O cálculo é semelhante ao anterior, com uma pequena consideração a ser feita. Ora pois

$$\begin{aligned}
\langle 1, \sin(\alpha_n x) \rangle &= \int_{-p}^p 1 \cdot \sin(\alpha_n x) dx \\
&= -\frac{1}{\alpha_n} \cos(\alpha_n x) \Big|_{-p}^p \\
&= -\frac{p}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi p}{p}\right) - \cos\left(\frac{n\pi(-p)}{p}\right) \right] \\
&= -\frac{p}{n\pi} [\cos(n\pi) - \overbrace{\cos(-n\pi)}^{par}] \\
&= -\frac{p}{n\pi} [\cos(n\pi) - \cos(n\pi)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

iii) $\langle \cos(\alpha_m x), \cos(\alpha_n x) \rangle = 0$ se $m \neq n$. Vale lembrar que, a partir da observação 1.18, a seguinte identidade trigonométrica é válida

$$\cos(\alpha_m x) \cos(\alpha_n x) = \frac{\cos((\alpha_m + \alpha_n)x) + \cos((\alpha_m - \alpha_n)x)}{2}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\langle \cos(\alpha_m x), \cos(\alpha_n x) \rangle &= \int_{-p}^p \cos(\alpha_m x) \cos(\alpha_n x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-p}^p [\cos((\alpha_m + \alpha_n)x) + \cos((\alpha_m - \alpha_n)x)] dx \\
&= \frac{1}{2(\alpha_m + \alpha_n)} [\sin((\alpha_m + \alpha_n)p) - \sin(-(\alpha_m + \alpha_n)p)] \\
&\quad \frac{1}{2(\alpha_m - \alpha_n)} [\sin((\alpha_m - \alpha_n)p) - \sin(-(\alpha_m - \alpha_n)p)].
\end{aligned}$$

Como

$$(\alpha_m + \alpha_n)p = \frac{(m+n)\pi p}{p} = (m+n)\pi$$

e

$$(\alpha_m - \alpha_n)p = \frac{(m-n)\pi p}{p} = (m-n)\pi,$$

então

$$\begin{aligned}
\sin((\alpha_m + \alpha_n)p) &= \sin((m+n)\pi) = 0, \\
\sin(-(\alpha_m + \alpha_n)p) &= \sin(-(m+n)\pi) = 0, \\
\sin((\alpha_m - \alpha_n)p) &= \sin((m-n)\pi) = 0, \\
\sin(-(\alpha_m - \alpha_n)p) &= \sin(-(m-n)\pi) = 0,
\end{aligned}$$

já que $m+n$ e $m-n$ são número inteiros. Portanto

$$\langle \cos(\alpha_m x), \cos(\alpha_n x) \rangle = 0 \text{ se } m \neq n.$$

iv) $\langle \sin(\alpha_m x), \sin(\alpha_n x) \rangle = 0$ se $m \neq n$. Para facilitar a resolução da integral, utilizaremos a seguinte identidade trigonométrica, que é consequência do que foi discutido na observação 1.18:

$$\sin(\alpha_m x) \sin(\alpha_n x) = \frac{\cos((\alpha_m - \alpha_n)x) - \cos((\alpha_m + \alpha_n)x)}{2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\langle \sin(\alpha_m x), \sin(\alpha_n x) \rangle &= \int_{-p}^p \sin(\alpha_m x) \sin(\alpha_n x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-p}^p [\cos((\alpha_m - \alpha_n)x) - \cos((\alpha_m + \alpha_n)x)] dx \\
&= \frac{1}{2(\alpha_m - \alpha_n)} [\sin((\alpha_m - \alpha_n)p) - \sin(-(\alpha_m - \alpha_n)p)] \\
&\quad - \frac{1}{2(\alpha_m + \alpha_n)} [\sin((\alpha_m + \alpha_n)p) - \sin(-(\alpha_m + \alpha_n)p)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Os detalhes dos cálculos foram omitidos por serem muito semelhantes aos do caso anterior.

- v) $\langle \cos(\alpha_m x), \sin(\alpha_n x) \rangle = 0$ se $m \neq n$. Antes de mais nada, a partir da observação 1.18, vale a seguinte identidade trigonométrica

$$\cos(\alpha_m x) \sin(\alpha_n x) = \frac{\sin((\alpha_m + \alpha_n)x) + \sin((\alpha_n - \alpha_m)x)}{2}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\langle \cos(\alpha_m x), \sin(\alpha_n x) \rangle &= \int_{-p}^p \cos(\alpha_m x) \sin(\alpha_n x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-p}^p [\sin((\alpha_m + \alpha_n)x) + \sin((\alpha_n - \alpha_m)x)] dx \\
&= -\frac{1}{2(\alpha_m + \alpha_n)} \cos((\alpha_m + \alpha_n)x) \Big|_{-p}^p - \frac{1}{2(\alpha_n - \alpha_m)\pi} \cos((\alpha_n - \alpha_m)x) \Big|_{-p}^p \\
&= -\frac{1}{2(\alpha_m + \alpha_n)\pi} [\cos((\alpha_m + \alpha_n)p) - \cos(-(\alpha_m + \alpha_n)p)] \\
&\quad - \frac{1}{2(\alpha_n - \alpha_m)\pi} [\cos((\alpha_n - \alpha_m)p) - \cos(-(\alpha_n - \alpha_m)p)] \\
&= -\frac{1}{2(\alpha_m + \alpha_n)\pi} [\cos((\alpha_m + \alpha_n)p) - \cos((\alpha_m + \alpha_n)p)] \\
&\quad - \frac{1}{2(\alpha_n - \alpha_m)\pi} [\cos((\alpha_n - \alpha_m)p) - \cos((\alpha_n - \alpha_m)p)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nas últimas linhas usamos o fato de que, como cos é uma função par, então

$$\cos(-(\alpha_m + \alpha_n)p) = \cos((\alpha_m + \alpha_n)p)$$

e

$$\cos((\alpha_n - \alpha_m)p) = \cos((\alpha_n + \alpha_m)p).$$

É importante ressaltar só foi possível fazer os cálculos acima porque $m \neq n$ já que o termo $\alpha_n - \alpha_m$ aparece no denominador. O próximo item trata o caso $m = n$.

vi) $\langle \cos(\alpha_m x), \sin(\alpha_n x) \rangle = 0$ se $m = n$.

Nesse caso, utilizaremos a igualdade trigonométrica dada na equação (1.8). Portanto

$$\begin{aligned}\langle \cos(\alpha_m x), \sin(\alpha_n x) \rangle &= \langle \cos(\alpha_n x), \sin(\alpha_n x) \rangle \\&= \int_{-p}^p \cos(\alpha_n x) \sin(\alpha_n x) dx \\&= \frac{1}{2} \int_{-p}^p \sin(2\alpha_n x) dx = -\frac{1}{4\alpha_n} \cos(2\alpha_n x) \Big|_{-p}^p \\&= -\frac{1}{4\alpha_n} [\cos(2\alpha_n p) - \underbrace{\cos(-2\alpha_n p)}_{par}] \\&= -\frac{1}{4\alpha_n} [\cos(2\alpha_n p) - \cos(2\alpha_n p)] = 0.\end{aligned}$$

Exercício 1.1 Mostre que o conjunto de funções

$$\left\{ \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

é ortogonal no intervalo $[0, p]$.

Exercício 1.2 Mostre que o conjunto de funções

$$\left\{ \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

é ortogonal no intervalo $[0, p]$. Lembre-se de considerar $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

1.2 A Série de Fourier

Para dar prosseguimento ao nosso estudo sobre séries de Fourier, precisaremos de uma definição que nos permite integrar funções que possuem descontinuidades.

Definição 1.6 Se $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ é descontínua no ponto x_0 e os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

existem e são finitos, dizemos que f tem em x_0 uma **descontinuidade de primeira espécie**. Além disso, se f possui em seu domínio uma quantidade finita de continuidades de primeira espécie, então dizemos que f é **seccionalmente contínua**.

Exemplo 1.4 Toda função $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ que é contínua é seccionalmente contínua. Assim, as funções

$$\sin x, \quad \cos x, \quad e^x \quad e \quad x^n, \quad n > 0,$$

são seccionalmente contínuas. Além disso, a soma e o produto de funções contínuas, por serem contínuas, também são seccionalmente contínuas.

Exemplo 1.5 A função

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

apesar de possuir um único ponto de descontinuidade em $x = 0$, não é seccionalmente contínua já que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty,$$

como mostra a figura 1.2.

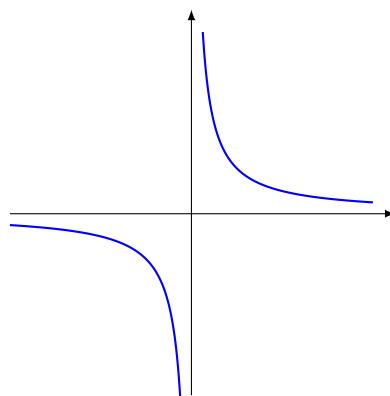


Figura 1.2: $f(x) = \frac{1}{x}$

Seja $f : (-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua. Suponha que, no intervalo $(-p, p)$, seja possível escrever a função f da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right]. \quad (1.23)$$

Ou seja, suponha que f possa ser escrita como combinação linear dos elementos do conjunto ortogonal

$$A = \left\{ 1, \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right), \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) \right\}, \quad m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Seria possível determinar os coeficientes a_0 , a_n e b_n ? Como? A forma de calcular os coeficientes é semelhante àquela desenvolvida no começo do capítulo para se determinar os coeficientes de um vetor, na equação (1.4). Mais especificamente, faremos o produto interno de f com todos os elementos do conjunto A . Como A é um conjunto ortogonal e f está escrito como combinação dos elementos de A , quando calculamos o produto interno com os elementos de A todos os termos, exceto um, se anulam.

Antes de prosseguirmos com o método propriamente dito, vamos mostrar que

$$\int_{-p}^p \cos^2\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = \int_{-p}^p \sin^2\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = p. \quad (1.24)$$

De fato, lembrando que, a partir da observação 1.2, vale a seguinte identidade trigonométrica

$$\cos^2\left(\frac{n\pi x}{p}\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2n\pi x}{p}\right) \right]$$

então

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p \cos^2\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-p}^p \left[1 + \cos\left(\frac{2n\pi x}{p}\right) \right] dx \\ &= \frac{x}{2} \Big|_{-p}^p + \frac{p}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{p}\right) \Big|_{-p}^p \\ &= \left[\frac{p}{2} - \frac{(-p)}{2} \right] + \frac{p}{2n\pi} \left[\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(-2n\pi)}_{=0} \right] \\ &= p. \end{aligned}$$

Como também vale a identidade trigonométrica

$$\sin^2\left(\frac{n\pi x}{p}\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{p}\right) \right],$$

a segunda identidade é imediata.

Dando prosseguimento agora no cálculo dos coeficientes da série, calculando o produto interno de f com os todos os elementos do conjunto A , primeiramente

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right] \\ \langle 1, f(x) \rangle &= \left\langle 1, \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right] \right\rangle \\ \langle 1, f(x) \rangle &= \left\langle 1, \frac{a_0}{2} \right\rangle + \left\langle 1, \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right] \right\rangle \\ \langle 1, f(x) \rangle &= \left\langle 1, \frac{a_0}{2} \right\rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cancel{\left\langle 1, \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right\rangle} + b_n \cancel{\left\langle 1, \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right\rangle} \right]. \end{aligned}$$

Lembrando agora que

$$\langle 1, f(x) \rangle = \int_{-p}^p 1 \cdot f(x) dx$$

e

$$\left\langle 1, \frac{a_0}{2} \right\rangle = \int_{-p}^p 1 \cdot \frac{a_0}{2} dx = a_0 p,$$

concluímos que

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx.$$

Argumentando de forma análoga, fazendo agora o produto com o cosseno

e lembrando das propriedades de produto interno, teremos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{p} \right) \right] \\
\left\langle f(x), \cos \left(\frac{m\pi x}{p} \right) \right\rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{p} \right) \right], \cos \left(\frac{m\pi x}{p} \right) \right\rangle \\
\left\langle f(x), \cos \left(\frac{m\pi x}{p} \right) \right\rangle &= \frac{a_0}{2} \cancel{\left\langle 1, \cos \left(\frac{m\pi x}{p} \right) \right\rangle} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underbrace{\left\langle \cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right), \cos \left(\frac{m\pi x}{p} \right) \right\rangle}_{=0 \text{ se } m \neq n} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cancel{\left\langle \sin \left(\frac{n\pi x}{p} \right), \cos \left(\frac{m\pi x}{p} \right) \right\rangle} \\
\left\langle f(x), \cos \left(\frac{m\pi x}{p} \right) \right\rangle &= a_n \left\langle \cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right), \cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right) \right\rangle \\
\int_{-p}^p f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right) dx &= a_n \underbrace{\int_{-p}^p \cos^2 \left(\frac{n\pi x}{p} \right) dx}_{=p} = a_n p,
\end{aligned}$$

e portanto

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{p} \right) dx.$$

De forma análoga mostra-se que

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{p} \right) dx.$$

Com isso, temos a definição do que é uma Série de Fourier e de como se calcular os seus coeficientes. A partir de agora usaremos uma notação carregada. Além disso, nas integrais para se determinar os coeficientes, trocamos a variável x por t para evitar confusão.

Definição 1.7 A série de Fourier de uma função $f : (-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right) \quad (1.25)$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) dt, \quad (1.26)$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \cos \frac{n\pi t}{p} dt \quad e \quad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \sin \frac{n\pi t}{p} dt. \quad (1.27)$$

Observação 1.3 Obviamente não é possível calcular a soma infinita da série de Fourier. Para tal introduzimos a seguinte notação

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right). \quad (1.28)$$

É claro que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k(x) = S(x).$$

Dessa forma, quanto mais termos da soma $S_k(x)$ for possível calcular, mais próximos próximos da série $f(x)$ estará a série $S(x)$. O melhor entendimento desse fato se dará através de exemplos.

Na última seção deste capítulo, será enunciado um teorema que diz que $S(x)$ e $f(x)$ não são necessariamente iguais. Mais precisamente, se f é contínua num ponto x_0 , então $S(x) = f(x)$. Esse é um resultado muito forte.

Exemplo 1.6 Considere a função $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Primeiramente, vale observar que $p = \pi$. Assim, os coeficientes da série de Fourier são dados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-p}^p f(t) dt = \int_{-\pi}^0 (-1) dt + \int_0^\pi 1 dt \\ &= -t \Big|_{-\pi}^0 + t \Big|_0^\pi = -[0 - (-\pi)] + [\pi - 0] \\ &= 0. \end{aligned}$$

O coeficiente a_n é dado por

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-p}^p f(t) \cos \frac{n\pi t}{p} dt = \int_{-\pi}^0 (-1) \cos(nt) dt + \int_0^\pi 1 \cdot \cos(nt) dt \\ &= -\frac{\sin(nt)}{n} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\sin(nt)}{n} \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{1}{n} [\cancel{\sin(0)} - \cancel{\sin(-n\pi)}] + \frac{1}{n} [\cancel{\sin(n\pi)} - \cancel{\sin(0)}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

O coeficiente b_n , por sua vez, é dado por

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-p}^p f(t) \sin \frac{n\pi t}{p} dt = \int_{-\pi}^0 (-1) \sin(nt) dt + \int_0^\pi 1 \cdot \sin(nt) dt \\
&= \frac{\cos(nt)}{n} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{\cos(nt)}{n} \Big|_0^\pi \\
&= \frac{1}{n} [\underbrace{\cos(0)}_{=1} - \underbrace{\cos(-n\pi)}_{=(-1)^n}] - \frac{1}{n} [\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \underbrace{\cos(0)}_{=1}] \\
&= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n].
\end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier da função $f(x)$ é dada por

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} [1 - (-1)^n] \sin(nx).$$

As somas parciais de $S(x)$ são dadas por

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= \frac{4}{\pi} \sin(x), \\
S_2(x) &= \frac{4}{\pi} \sin(x), \\
S_3(x) &= \frac{4}{\pi} \left[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} \right], \\
S_4(x) &= \frac{4}{\pi} \left[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} \right], \\
S_5(x) &= \frac{4}{\pi} \left[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} \right], \\
&\vdots \\
S_9(x) &= \frac{4}{\pi} \left[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} \right] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Essas funções são aproximações da função original $f(x)$, o que é possível verificar na figura 1.3. De azul, o gráfico da função $f(x)$. De vermelho, o gráfico de $S_k(x)$. Observe que, quanto maior o valor de k , mais próxima de $f(x)$ está a soma $S_k(x)$.

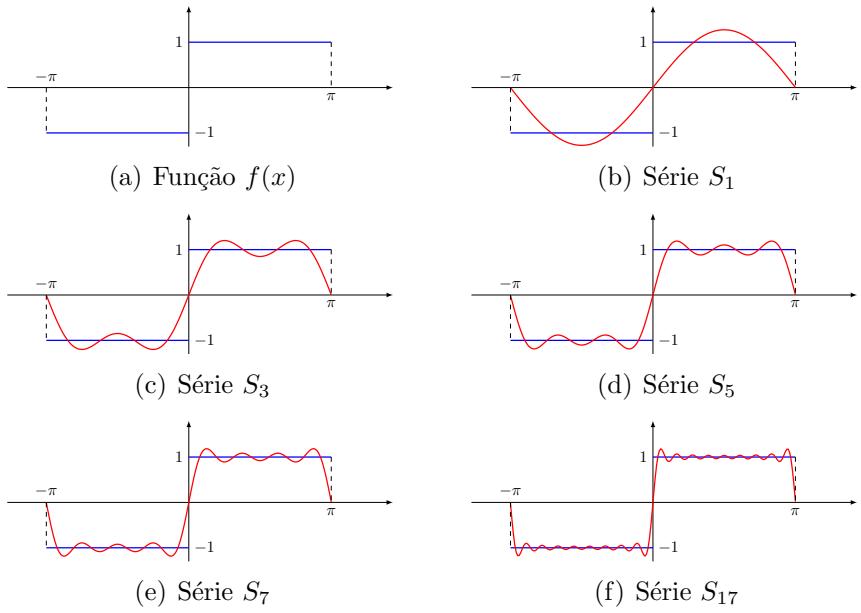


Figura 1.3: Função f e suas aproximações S_k

Exemplo 1.7 Considere agora a função $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x|.$$

Antes de mais nada, vale lembrar que

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0, \\ x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

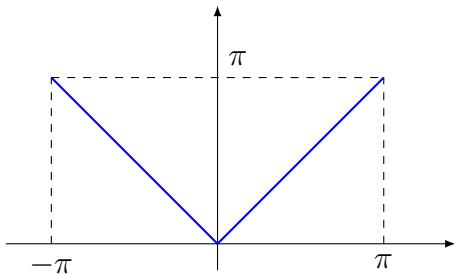


Figura 1.4: Gráfico de $f(x) = |x|$

Vamos determinar os coeficientes da série de Fourier. Primeiramente

temos que observar que o período é $p = \pi$. Assim

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-t) dt + \int_0^{\pi} t dt \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{t^2}{2} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\pi} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} \right] \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

O coeficiente a_n é dado por

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos(nt) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-t) \cos(nt) dt + \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 \underbrace{t}_u \underbrace{\cos(nt)}_{dv} dt + \int_0^{\pi} \underbrace{t}_f \underbrace{\cos(nt)}_{g'} dt \right] \\
&= -\frac{1}{\pi} \left[\underbrace{t}_u \underbrace{\frac{\sin(nt)}{n}}_v \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \underbrace{1}_{du} \underbrace{\frac{\sin(nt)}{n}}_v dt \right] \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{t}_f \underbrace{\frac{\sin(nt)}{n}}_g \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\frac{\sin(nt)}{n}}_g dt \right] \\
&= -\frac{1}{\pi n^2} \cos(nt) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi n^2} \cos(nt) \Big|_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi n^2} + \frac{1}{\pi n^2} \cos(-n\pi) + \frac{1}{\pi n^2} \cos(n\pi) - \frac{1}{\pi n^2} \\
&= \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1].
\end{aligned}$$

Como o cálculo acima ficou muito extenso, vamos tentar calcular b_n de uma forma menos ortodoxa. Primeiramente, lembramos que

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} |t| \sin(nt) dt = - \int_{-\pi}^0 t \sin(nt) dt + \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt.$$

Na primeira das integrais acima, aplicaremos a seguinte mudança de variável

$$\left. \begin{array}{l} t = -u, \\ dt = -du, \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} t = -\pi \Rightarrow u = \pi, \\ t = 0 \Rightarrow u = 0. \end{array}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} b_n &= - \int_{-\pi}^0 t \sin(nt) dt + \int_0^\pi t \sin(nt) dt \\ &= - \int_\pi^0 (-u) \underbrace{\sin(-nu)}_{ímpar} (-du) + \int_0^\pi t \sin(nt) dt \\ &= \int_\pi^0 u \sin(nu) du + \int_0^\pi t \sin(nt) dt \\ &= - \int_0^\pi u \sin(nu) du + \int_0^\pi t \sin(nt) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier da função $f(x) = |x|$ no intervalo $(-\pi, \pi)$ é dada por

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \cos(nx). \end{aligned}$$

É possível observar que, quando n é par, então $[(-1)^n - 1] = 0$. Assim, $S_{2k}(x) = S_{2k+1}(x)$. Portanto

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(x) \\ S_3(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} \right] \\ S_5(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25} \right] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tanto a função $f(x)$ quanto as somas parciais $S_1(x)$, $S_3(x)$ e $S_5(x)$ podem ser vistas na figura 1.5.

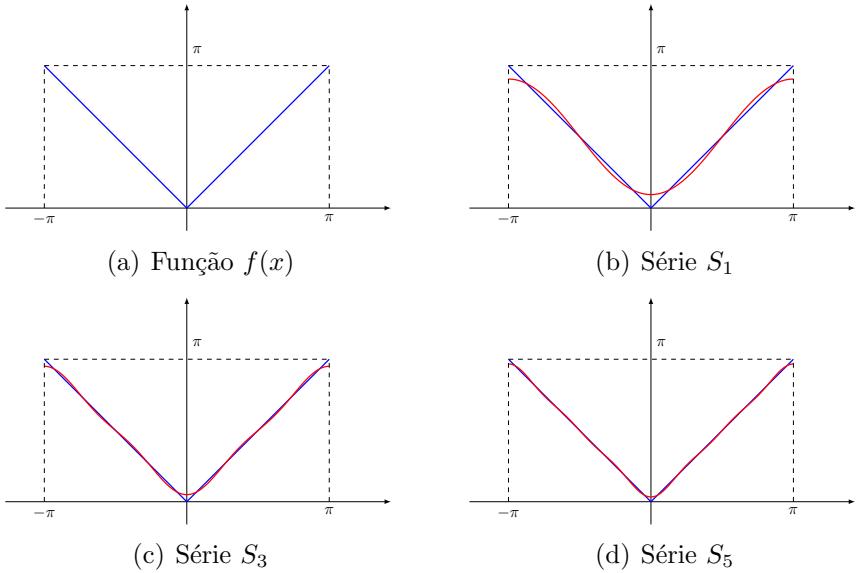


Figura 1.5: Representação de f algumas somas parciais

Exercício 1.3 Determine a série de Fourier das funções abaixo no intervalo dado.

$$a) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \pi^2, & -\pi < x < 0, \\ \pi^2 - x^2, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$e) f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi.$$

$$f) f(x) = e^x, \quad -\pi < x < \pi.$$

Exercício 1.4 Suponha que a função $f : (0, p) \rightarrow \mathbb{R}$ possa ser escrita da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p}.$$

Mostre que

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) dt \quad e \quad a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos \frac{n\pi t}{p} dt.$$

Exercício 1.5 Suponha que a função $f : (0, p) \rightarrow \mathbb{R}$ possa ser escrita da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p}.$$

Mostre que

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin \frac{n\pi t}{p} dt.$$

1.3 Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares

Nesta seção veremos a definição de funções pares e funções ímpares. Sabendo a princípio que f é par ou ímpar, é possível determinar os coeficientes da série de Fourier mais facilmente.

Definição 1.8 Seja $f : [-p, p] \rightarrow \mathbb{R}$.

- i) se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [-p, p]$, então dizemos que f é uma função **par**;
- ii) se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-p, p]$, então dizemos que f é uma função **ímpar**.

É claro que o domínio da função f deve ser simétrico, ou seja, da forma $[-p, p]$ (ou então $(-p, p)$) pois, se $x \in [-p, p]$, então $-x \in [-p, p]$. Também podemos considerar funções com domínio em \mathbb{R} , já que se $x \in \mathbb{R}$ então $-x \in \mathbb{R}$.

As denominações de funções pares e funções ímpares provavelmente se devem às funções da forma

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se n é par, é claro que

$$f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = x^n = f(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

e se n for ímpar, então

$$f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = -x^n = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como foi dito na observação 1.2, as funções cosseno e seno são, respectivamente, par e ímpar.

Propriedade 1.1 *Sejam f e g funções reais definidas em um intervalo simétrico $[-p, p]$. Valem as seguintes propriedades:*

- i) se f e g são pares, então o produto $f \cdot g$ também é par;
- ii) se f é par e g é ímpar, então o produto $f \cdot g$ é ímpar;
- iii) se f e g são ímpares, então o produto $f \cdot g$ é par;
- iv) se f é ímpar e integrável, então $\int_{-p}^p f(x)dx = 0$;
- v) se f é par e integrável, então $\int_{-p}^p f(x)dx = 2 \int_{-p}^0 f(x)dx$.

A verificação das propriedades acima é relativamente simples. Para o item i), suponhamos f e g pares, ou seja,

$$f(-x) = f(x) \text{ e } g(-x) = g(x), \quad \forall x \in [-p, p].$$

Se considerarmos $h = f \cdot g$, ou seja, $h(x) = (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, então

$$h(-x) = \underbrace{f(-x)}_{\text{par}} \underbrace{g(-x)}_{\text{par}} = f(x)g(x) = h(x), \quad \forall x \in [-p, p],$$

como gostaríamos de provar. As verificações dos itens ii) e iii) seguem o mesmo raciocínio e serão deixadas como exercício.

Suponha agora que $f : [-p, p] \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função integrável e ímpar, ou seja

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in [-p, p].$$

No que segue, usaremos a mudança de variável

$$\left. \begin{array}{l} x = -u, \\ dx = -du, \end{array} \right\} \implies \begin{array}{ll} x = -p & \Rightarrow u = p, \\ x = 0 & \Rightarrow u = 0, \end{array}$$

e as propriedades de integral

$$\int_p^0 f(u)du = - \int_0^p f(u)du$$

e

$$\int_0^p f(u)du = \int_0^p f(x)dx.$$

Assim, se f é ímpar, então

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p f(x)dx &= \int_{-p}^0 f(x)dx + \int_0^p f(x)dx \\ &= \int_p^0 \underbrace{f(-u)}_{\text{ímpar}} (-du) + \int_0^p f(x)dx \\ &= \int_p^0 (-f(u))(-du) + \int_0^p f(x)dx \\ &= \int_p^0 f(u)du + \int_0^p f(x)dx \\ &= - \int_0^p f(u)du + \int_0^p f(x)dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente, é possível mostrar que, se $f : [-p, p] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável e par, então

$$\int_{-p}^p f(x)dx = 2 \int_0^p f(x)dx. \quad (1.29)$$

Sabendo-se de antemão que $f : (-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função par, podemos simplificar o cálculo dos coeficiente da série de Fourier. De fato, pelo item v) da propriedade 1.1, temos que

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t)dt = \frac{2}{p} \int_0^p f(t)dt. \quad (1.30)$$

Além disso, como $\cos \frac{n\pi t}{p}$ é uma função par, pelo item ii) da propriedade 1.1, o produto

$$f(t) \cos \frac{n\pi t}{p}$$

também é uma função par. Assim, novamente pelo item v) da propriedade 1.1, temos que

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p \underbrace{f(t) \cos \frac{n\pi t}{p}}_{\text{par}} dt = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos \frac{n\pi t}{p} dt. \quad (1.31)$$

Tendo em mãos agora os itens ii) e iv) da propriedade 1.1, primeiro o produto

$$f(t) \sin \frac{n\pi t}{p}$$

é ímpar. Assim

$$b_n = \int_{-p}^p \underbrace{f(t) \sin \frac{n\pi t}{p}}_{\text{ímpar}} dx = 0.$$

Ou seja, se $f : (-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função par, então a série de Fourier de f é dada por

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p}, \quad (1.32)$$

em que

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) dt \quad \text{e} \quad a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos \frac{n\pi t}{p} dt. \quad (1.33)$$

Analogamente, se $f : (-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função ímpar, então a série de Fourier de f é dada por

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p}, \quad (1.34)$$

em que

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin \frac{n\pi t}{p} dt. \quad (1.35)$$

Exercício 1.6 Determine se as funções abaixo são pares ou ímpares e determine a série de Fourier:

$$a) f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x - 1, & -\pi < x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$c) f(x) = x|x|, \quad -\pi < x < \pi.$$

$$d) f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi.$$

$$e) f(x) = \sin 3x, \quad -\pi < x < \pi.$$

$$f) f(x) = |\sin x|, \quad -\pi < x < \pi.$$

$$g) f(x) = e^{-|x|}, \quad -\pi < x < \pi.$$

Exercício 1.7 Dê exemplo de uma função f que seja par no intervalo $[-p, p]$ e que satisfaça

$$\int_{-p}^p f(x)dx = 0.$$

Exercício 1.8 Mostre que, se $f : (-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função par e diferenciável, então $f'(x)$ é ímpar.

Exercício 1.9 Mostre que, se $f : (-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função ímpar e diferenciável, então $f'(x)$ é par.

Exercício 1.10 Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função integrável. Mostre que:

a) se f é par, então a função F definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

é ímpar.

b) se f é ímpar, então a função F definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

é par.

1.4 Periodicidade da Série de Fourier

Até então, desenvolvemos a série de Fourier de funções definidas em um intervalo aberto e simétrico da forma $(-p, p)$. No entanto, dada uma função $f : (-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$, qualquer termo da soma parcial da série de Fourier

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

está definido para qualquer $x \in \mathbb{R}$, ou seja, as somas parciais, bem como a série, também estão definidas fora do intervalo $(-p, p)$. Mas como seria o comportamento da série fora desse intervalo? Para responder essa pergunta, necessitamos da seguinte definição:

Definição 1.9 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita periódica de período T se

$$f(x + T) = f(x) \quad (1.36)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.8 As funções seno e cosseno são periódicas de período $T = 2\pi$. De fato

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \text{e} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.9 Existem uma infinidade de funções periódicas. Não necessariamente uma função periódica de período T é dada em termos de seno ou cosseno. Por exemplo, para cada $k \in \mathbb{Z}$, considere a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com a seguinte lei de formação

$$F(x) = x - 2k\pi, \quad (2k - 1)\pi < x \leq (2k + 1)\pi, \quad (1.37)$$

cujo gráfico é dado na figura 1.6.

A função F se repete em intervalos de comprimento 2π . Observe que, se $\pi < x \leq 3\pi$, então $3\pi < x + 2\pi \leq 5\pi$. Portanto

$$F(x + 2\pi) = (x + 2\pi) - 4\pi = x - 2\pi = F(x), \quad x \in (\pi, 3\pi).$$

De forma geral, se $(2k - 1)\pi < x \leq (2k + 1)\pi$, então $(2k + 1)\pi < x + 2\pi \leq (2k + 3)\pi$. Assim

$$F(x + 2\pi) = (x + 2\pi) - 2(k + 1)\pi = x + 2k\pi = F(x), \quad \text{se } (2k - 1)\pi < x \leq (2k + 1)\pi.$$

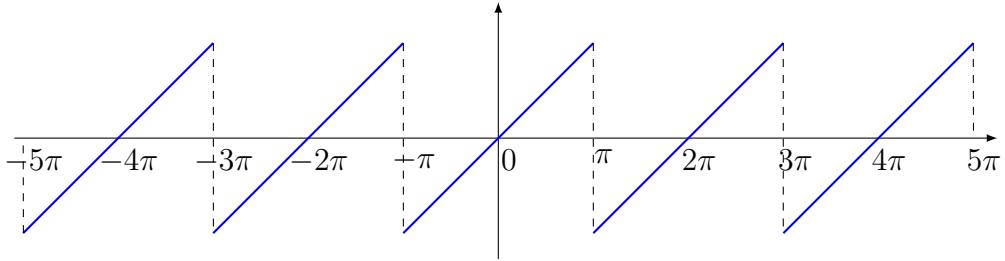


Figura 1.6: Função periódica

Exemplo 1.10 As funções

$$g(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \quad e \quad h(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

são periódicas de período $T = 2p$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para tal, devemos mostrar que

$$g(x + 2p) = g(x) \quad e \quad h(x + 2p) = h(x).$$

De fato, utilizando as fórmulas para cosseno e seno da soma, teremos

$$\begin{aligned} g(x + 2p) &= \cos\left(\frac{n\pi(x + 2p)}{p}\right) \\ &= \cos\left(\frac{n\pi x}{p} + \frac{2n\pi p}{p}\right) \\ &= \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} - \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0} \\ &= \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \\ &= g(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Analogamente

$$h(x + 2p) = \sin\left(\frac{n\pi(x + 2p)}{p}\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) = h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dadas as considerações acima, podemos destacar a seguinte propriedade:

Propriedade 1.2 Dada uma função $f : (-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente contínua, qualquer soma parcial da série de Fourier

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

tem domínio $D_{S_k} = \mathbb{R}$ e é periódica de período $T = 2p$. Ou seja,

$$S_k(x + 2p) = S_k(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

A propriedade acima é uma consequência imediata das considerações feitas no exemplo 5.14. De fato

$$\begin{aligned} S_k(x + 2p) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left(a_n \cos \frac{n\pi(x + 2p)}{p} + b_n \sin \frac{n\pi(x + 2p)}{p} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right). \end{aligned}$$

Exemplo 1.11 A série de Fourier da função

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi, \tag{1.38}$$

de acordo com o item d) do exercício 1.6, é dada por

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Na figura 1.7, temos o gráfico da soma parcial $S_{10}(x)$, que está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Observe que, como a décima soma parcial S_{10} é periódica, ela se aproxima da função

$$F(x) = x - 2k, \quad (2k - 1)\pi < x \leq (2k + 1)\pi,$$

dada na equação (1.37), como é possível ver na figura 1.6, que mostra o gráfico da função $F(x)$ é a décima soma parcial da série de Fourier da função $f(x) = x$.

Observação 1.4 A função

$$F(x) = x - 2k, \quad (2k - 1)\pi < x \leq (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

é chamada de **prolongamento periódico** da função

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi.$$

Exercício 1.11 Mostre que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período T , então

$$f(x - T) = f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

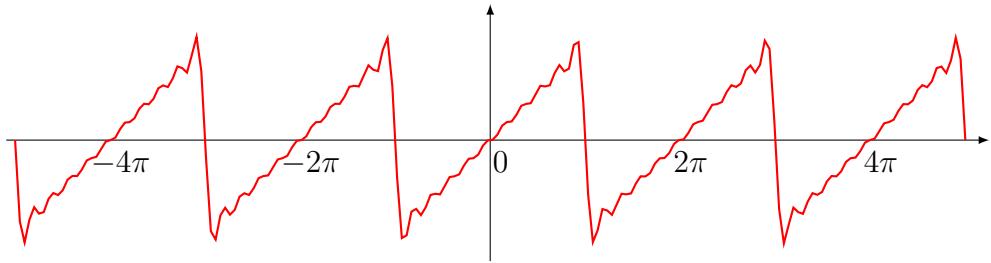


Figura 1.7: A soma parcial $S_{10}(x)$ da função $f(x) = x$

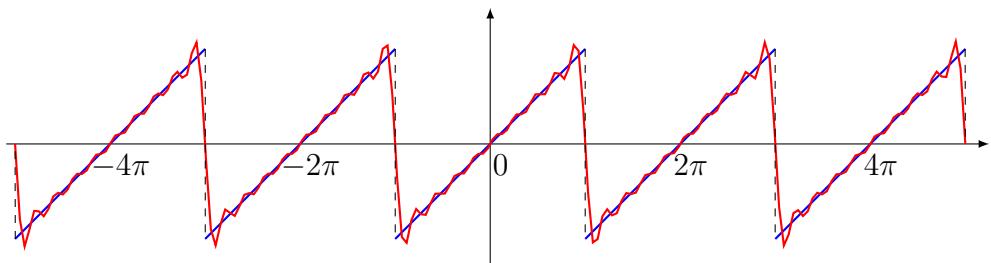


Figura 1.8: Função periódica

Exercício 1.12 Se f e g são periódicas de período T , mostre que $f + g$ e fg também são periódicas de período T .

Exercício 1.13 Mostre que, se f é uma função diferenciável e periódica de período T , então f' também será periódica de período T .

Exercício 1.14 Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função periódica de período T e integrável em qualquer intervalo limitado de \mathbb{R} . Mostre que

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Solução: o Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que a função

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(x)dx$$

é derivável e sua derivada é dada por

$$F'(t) = f(t).$$

Assim, se definirmos

$$H(t) = \int_t^{t+T} f(x)dx,$$

como valem as seguintes regras de integral

$$\begin{aligned}\int_t^{t+T} f(x)dx &= \int_t^{t_0} f(x)dx + \int_{t_0}^{t+T} f(x)dx \\ &= -\underbrace{\int_{t_0}^t f(x)dx}_{F(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t+T} f(x)dx}_{F(t+T)}\end{aligned}$$

então

$$H'(t) = -F'(t) + F'(t+T) = f(t+T) - f(t).$$

Como f é periódica de período T , então $f(t+T) = f(t)$. Portanto

$$H'(t) = 0 \implies H(t) = \text{constante}.$$

Isso implica que

$$H(0) = \int_0^T f(x)dx \quad e \quad H(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx$$

são iguais.

Exercício 1.15 Dê exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período T_1 e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período T_2 tais que a soma $f+g$ não é periódica.

Exercício 1.16 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período T e suponha que

$$\int_0^T f(x)dx = 0.$$

Mostre que a função definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

também é periódica de período T .

1.5 Convergência da Série de Fourier

Nesta seção estudaremos a relação que existe entre uma função $f : (-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$ e a sua série de Fourier $S(x)$. Por exemplo, na letra b) do exercício 1.3, é dado que a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi < x < 0, \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

é dada por

$$S(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3} [(-1)^n - 1] \right) \sin nx \right] \quad (1.39)$$

Deveríamos, dessa forma, imaginar que

$$f(x) = S(x), \quad \forall x \in (-p, p). \quad (1.40)$$

Primeiramente, é claro que não é possível somar todos os termos da série $S(x)$. Sendo assim, devemos considerar as somas parciais da série de Fourier

$$S_k(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^k \left[\frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3} [(-1)^n - 1] \right) \sin nx \right].$$

Portanto, é de se esperar que, se $x_0 \in (-p, p)$, então

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k(x_0) = f(x_0).$$

Ou seja, se $x_0 \in (-p, p)$, a série numérica infinita

$$\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^k \left[\frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nx_0) + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3} [(-1)^n - 1] \right) \sin(nx_0) \right]$$

tem o mesmo valor que $f(x_0)$. Por exemplo, se $x_0 = 0$, então $\cos n0 = 1$ e $\sin n0 = 0$. Portanto, a série numérica

$$S(0) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2}$$

converge para $f(0) = 0$. Ou seja

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \\ \implies \frac{\pi^2}{6} &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \\ \implies \frac{\pi^2}{6} &= -2 \left(-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \dots \right) \\ \implies \frac{\pi^2}{12} &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots . \end{aligned}$$

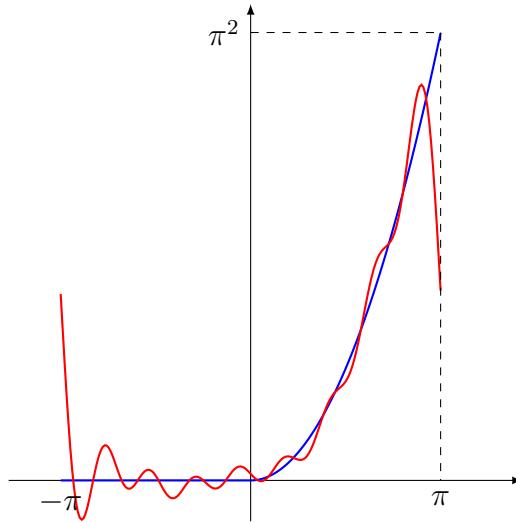


Figura 1.9: A função $f(x)$ e a soma parcial $S_8(x)$

Na figura 1.9 temos representados o gráfico da função $f(x)$, de azul, e a soma parcial $S_8(x)$, de vermelho. Observe que, próximo de zero, as duas funções se aproximam.

Esse resultado só é válido porque a função f é contínua no ponto $x_0 = 0$. Para esses casos (de continuidade), vale o seguinte Teorema:

Teorema 1.1 *Se f e f' são funções seccionalmente contínuas, de acordo com a definição 1.6, e f é contínua em $x_0 \in D_f$, então a série de Fourier*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

de f é tal que

$$S(x_0) = f(x_0).$$

Mas o que acontece se a função f não for contínua no ponto x_0 ? Para responder a essa pergunta, vamos recordar o exemplo 1.6, em que a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

é dada por

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] \sin(nx). \quad (1.41)$$

Observe que f é descontínua no ponto $x_0 = 0$. Antes de darmos a resposta para essa pergunta, vamos dar uma olhada na figura 1.10, na qual consta o gráfico da função $f(x)$, de azul, e o gráfico da soma parcial $S_{17}(x)$, de vermelho.

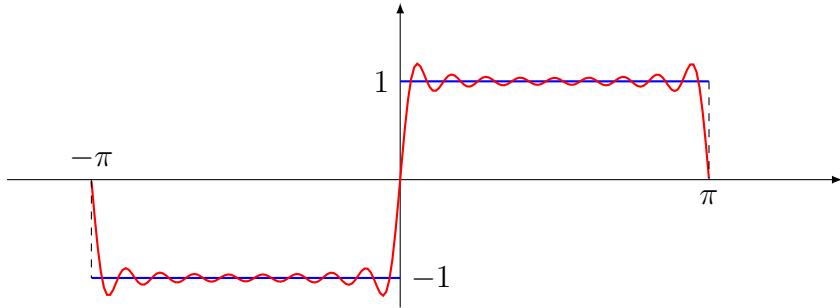


Figura 1.10: $f(x)$ e $S_{17}(x)$

Parece que $S_{17}(0) = 0$, certo? Dê uma olhada na figura 1.10. No ponto de descontinuidade, a série $S(x)$ assume exatamente o termo médio dos limites laterais. Mais precisamente, vale a versão geral do Teorema 1.1:

Teorema 1.2 *Se f e f' são funções seccionalmente contínuas, de acordo com a definição 1.6, e $x_0 \in D_f$, então a série de Fourier*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

de f é tal que

$$S(x_0) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)}{2}.$$

Observação 1.5 *O Teorema 1.2 se sobrepõe ao Teorema 1.1 pois, se f é contínua no ponto x_0 , então*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

e, consequentemente,

$$S(x_0) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)}{2} = \frac{f(x_0) + f(x_0)}{2} = f(x_0).$$

Exemplo 1.12 Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi < x < 0, \\ \pi - x, & \text{se } 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

cujo gráfico está representado na figura 1.11. Fica como exercício mostrar que a série de Fourier de f é dada por

$$S(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi} \cos nx + \frac{1}{n} \sin nx \right).$$

Como f é descontínua no ponto $x_0 = 0$ e

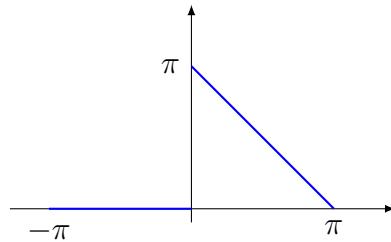


Figura 1.11: Gráfico de $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \pi,$$

pelo Teorema 1.2,

$$S(0) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}{2} = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Substituindo x por zero na série, tem-se que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}.$$

Dada uma função $f(-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$, foi visto que a série de Fourier $S(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Qual o valor da série quando $x = -p$ ou $x = p$? Antes de prosseguir com a leitura, dê uma olhada nos gráficos das figuras 1.3, 1.5, 1.8, 1.9 e 1.10. Percebeu? Bom, para falar sobre esses casos, necessitamos de mais uma definição.

Definição 1.10 Dada uma função $f : (-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$, o prolongamento periódico de f é uma função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica de período $T = 2p$, ou seja

$$F(x + 2p) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

que satisfaç

$$F(x) = f(x), \quad \forall x \in (-p, p).$$

Em termos gráficos, é como se fosse possível “recortar” e “colar” a função f , do intervalo $(-p, p)$, nos intervalos $(p, 3p)$, $(3p, 5p)$, \dots (à direita) e nos intervalos $(-3p, -p)$, $(-5p, -3p)$, \dots à esquerda.

Exemplo 1.13 A função

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi,$$

cujo gráfico está representado na figura 1.12, tem como prolongamento periódico a função

$$F(x) = x - 2k\pi, \quad (2k - 1)\pi < x \leq (2k + 1)\pi,$$

cujo gráfico é dado na figura 1.13.

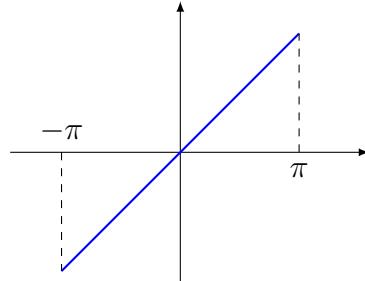


Figura 1.12: Gráfico de $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$

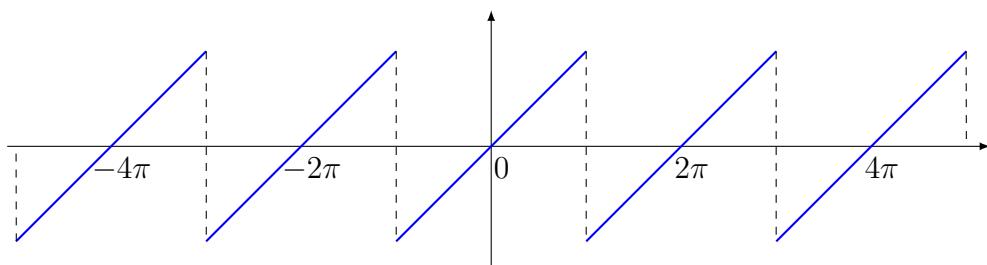


Figura 1.13: Prolongamento Periódico de f

Exemplo 1.14 Para os nossos objetivos, não será necessariamente obrigatório determinar a expressão do prolongamento periódico de uma função f . Por exemplo, considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi < x < 0, \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

cujo o gráfico encontra-se na figura 1.14. Não exibiremos aqui a expressão da função F , que é o prolongamento periódico de f . No entanto, na figura 1.15 encontra-se o gráfico de F , que é uma função periódica de período 2π . Nesse caso, pelo gráfico, é possível concluir que

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = \pi^2 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} F(x) = 0. \quad (1.42)$$

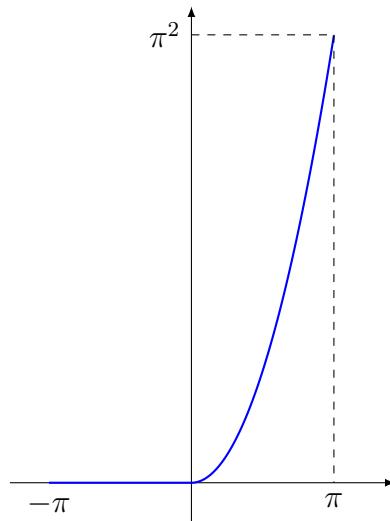


Figura 1.14: A função $f(x)$

Teorema 1.3 Sejam $f : (-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o prolongamento periódico de f . Se

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

é a série de Fourier de f , então

$$S(p) = \frac{\lim_{x \rightarrow p^-} F(x) + \lim_{x \rightarrow p^+} F(x)}{2}.$$

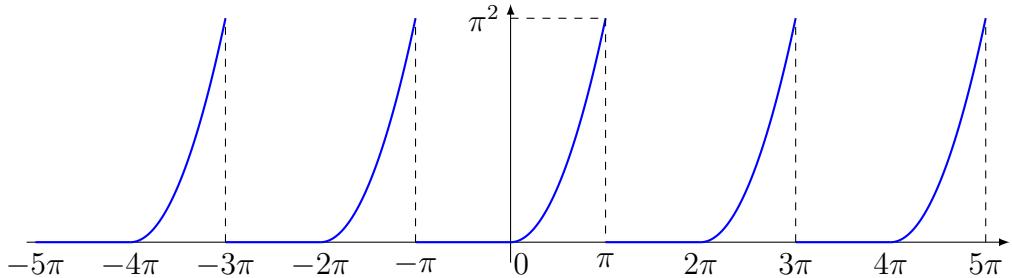


Figura 1.15: A função $F(x)$

Analogamente

$$S(-p) = \frac{\lim_{x \rightarrow -p^-} F(x) + \lim_{x \rightarrow -p^+} F(x)}{2}.$$

Observação 1.6 No Teorema 1.3, é possível fazer as seguintes simplificações

$$\frac{\lim_{x \rightarrow p^-} F(x) + \lim_{x \rightarrow p^+} F(x)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\pi + b_n \sin n\pi).$$

$$e \quad \frac{\lim_{x \rightarrow -p^-} F(x) + \lim_{x \rightarrow -p^+} F(x)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\pi - b_n \sin n\pi).$$

Exemplo 1.15 A série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi < x < 0, \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

é dada por

$$S(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \underbrace{\left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3} [(-1)^n - 1] \right)}_{b_n} \sin nx \right].$$

Dessa forma, pelo Teorema 1.3, a observação 1.6 e a equação (1.42), temos

que

$$\begin{aligned}
& \frac{\lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) + \lim_{x \rightarrow \pi^+} F(x)}{2} = S(\pi) \\
\implies & \frac{\pi^2 + 0}{2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\underbrace{\frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi)}_{=(-1)^n} + b_n \underbrace{\sin n\pi}_{=0} \right] \\
\implies & \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
\implies & \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots
\end{aligned}$$

Legal né!?

Exercício 1.17 Utilize o item b) do exercício 1.3 para mostrar que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Exercício 1.18 Utilize o item c) do exercício 1.3 para mostrar que

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 1} - \frac{1}{5 \cdot 3} + \frac{1}{7 \cdot 5} - \frac{1}{9 \cdot 7} + \dots$$

Exercício 1.19 Utilize o item e) do exercício 1.3 para mostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Exercício 1.20 Dado que a unidade imaginária é definida por $i = \sqrt{-1}$, considere a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

dada no Anexo 1. Como consequências, é fato que

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad e \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Mostre que a série de Fourier de uma função $f : (-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$ pode também ser dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/p},$$

em que

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{in\pi t/p} dt.$$

1.6 Anexo 1 - A Fórmula de Euler

A equação de segundo grau

$$x^2 + 1 = 0$$

não tem solução real já que não existe nenhum $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$. No entanto, se definirmos a entidade

$$i = \sqrt{-1}$$

que é tal que $i^2 = -1$, então i satisfaz a equação do segundo grau $x^2 + 1 = 0$.

O número i é chamado de unidade imaginária e está presente em outras equações de segundo grau. O único aspecto do número i que nos interessa é que $i = \sqrt{-1}$ que implica em $i^2 = -1$. Assim, podemos ir um pouco além:

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 i = -i \\ i^4 &= i^2 i^2 = 1 \\ i^5 &= i^4 i = i \\ i^6 &= i^4 i^2 = -1 \end{aligned} \tag{1.43}$$

e assim sucessivamente.

Podemos considerar i em outras equações do segundo grau. Por exemplo, as raízes da equação do segundo grau

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

são dadas pela fórmula

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{-16}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{-16}}{2}.$$

Se $i = -1$, então

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{(-1)16}}{2} = \frac{2 + \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i,$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{(-1)16}}{2} = \frac{2 - \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i.$$

Embora os números $x_1 = 1 + 2i$ e $x_2 = 1 - 2i$ pareçam estranhos, se olharmos para i como uma entidade algébrica, a qual é possível operar soma e divisão e usando só o fato de que $i^2 = -1$, então

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1 + 5 &= (1 + 2i)^2 - 2(1 + 2i) + 5 \\ &= 1^2 + 4i + (2i)^2 - 2(1 + 2i) + 5 \\ &= 1 + 4i + 4\underbrace{i^2}_{=-1} - 2 - 4i + 5 \\ &= 1 + 4i - 4 - 2 - 4i + 5 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente, conseguimos mostrar que $x_2^2 - 2x_2 + 5 = 0$.

Observe que as raízes de $x^2 - 2x + 5 = 0$ são compostas por duas partes, uma parte real (no caso o número 1) e uma parte que acompanha o número i (no caso os números 2 e -2). Todos esses números compõem o conjunto dos números complexos, representando abaixo

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}.$$

Representaremos um número arbitrário de \mathbb{C} pela letra z . Dessa forma, se $z \in \mathbb{C}$, então

$$z = a + bi,$$

em que $a \in \mathbb{R}$ é chamado de **parte real** e $b \in \mathbb{R}$ é chamado de **parte imaginária**.

Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $b^2 - 4ac < 0$, então $-(b^2 - 4ac) = 4ac - b^2 > 0$ e consequentemente

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(-1)(4ac - b^2)} = \sqrt{-1} \underbrace{\sqrt{4ac - b^2}}_{\in \mathbb{R}} = i\sqrt{4ac - b^2}.$$

Logo, se $ax^2 + bx + c = 0$ é uma equação do segundo grau tal que $b^2 - 4ac < 0$, então as raízes complexas são

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}. \quad (1.44)$$

Como esse não é um curso de Variáveis Complexas, não nos aprofundaremos nessa teoria, nosso objetivo aqui é responder a seguinte pergunta: dado um número $z = y + ix \in \mathbb{C}$, é possível determinar $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$e^z = a + bi ?$$

Primeiramente, temos que recordar algo que talvez ainda não tenha sido dito. A série de MacLaurin (que adaptou o trabalho do coleguinha Taylor) de uma função f é dada pela fórmula

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!},$$

em que $f^{(n)}(0)$ representa a derivada n -ésima de f no ponto zero.

A série de MacLaurin da função e^x é

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (1.45)$$

a série de MacLaurin da função cosseno é

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (1.46)$$

enquanto a série de MacLaurin da função seno é

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \quad (1.47)$$

Se nos valermos das considerações feitas em (5.4) trocando x por ix na equação (1.45), vale o seguinte desenvolvimento

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{0!} + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \frac{i^5 x^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Isso mesmo,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1.48)$$

mais conhecida como fórmula de Euler.

Dessa forma, podemos fazer algumas considerações:

- i) $e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi \Rightarrow e^{\pi i} = -1;$
- ii) $e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x;$
- iii) $e^{ix_1} e^{ix_2} = e^{i(x_1+x_2)} = \cos(x_1 + x_2) + i \sin(x_1 + x_2);$
- iv) $z = y + ix \Rightarrow e^z = e^y e^{ix} = e^y (\cos x + i \sin x).$

No item ii) usamos o fato de que o cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar, ou seja

$$\cos(-\theta) = \cos \theta \quad \text{e} \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Outras duas igualdades importantes para o nosso contexto se dá quando somamos e subtraímos as igualdades

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

para obtermos

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (1.49)$$

Capítulo 2

Aplicações da Série de Fourier

2.1 A Equação do Calor

Na disciplina de Cálculo 3 fomos apresentados à lei de resfriamento de Newton. Essa lei nos diz que a variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. Ou seja, quanto maior a diferença, maior será a variação da temperatura.

Por exemplo, ao preparamos um saboroso café, sabemos que esse deve ser feito com água quente, próxima de 100°C. Se estivermos em um ambiente a 30°C, intuitivamente sabemos que a nossa xícara de café irá resfriar até a temperatura ambiente. A questão é que não sabemos precisar, depois de 10 minutos por exemplo, qual será a temperatura do café. No entanto, intuitivamente, nos primeiros segundos, como a diferença da temperatura entre o café e o ambiente é grande, ocorre um resfriamento maior do café, isto é, a taxa de variação é grande*.



Figura 2.1: Café

*Na verdade a taxa de variação é negativa, mas em módulo é grande.

Se designarmos por $T(t)$ a temperatura de um corpo no instante de tempo $t > 0$, pela lei de resfriamento de Newton existe uma constante k (constante de proporcionalidade) tal que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a), \quad (2.1)$$

em que T_a é a temperatura ambiente. Assim, determinamos não a função $T(t)$, mas sim uma relação entre a função T e a sua derivada T' . A constante de proporcionalidade k depende do de uma série de fatores: material, condutividade, densidade, etc.

Trataremos nesta seção um problema um pouco mais complexo, que também envolve calor. Considere uma haste delgada[†] de comprimento L , posicionada no eixo x , como mostra a figura 2.2. Como a haste é delgada, o fluxo de calor só ocorre horizontalmente. Isso significa que em uma seção transversal da haste a temperatura é constante. A Temperatura em um ponto x no instante t será dada pela função real

$$u = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0.$$

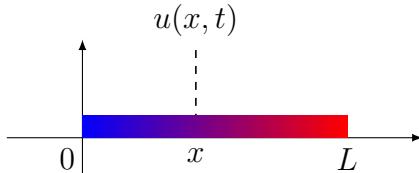


Figura 2.2: Calor em uma haste delgada

Por exemplo, considere uma haste de comprimento $L = 4$. Suponhamos que, no instante inicial $t = 0$, a distribuição da temperatura na haste se dê da seguinte maneira

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2$$

e

$$u(x, 0) = 100, \quad 2 < x \leq 4,$$

como mostra a figura 2.3

Se supormos que a distribuição de calor dentro da haste só se verifica na direção x , que nenhum calor escapa da haste e nenhum calor é gerado dentro da haste, podemos supor intuitivamente que, com o passar do tempo,

[†]Isso significa que a haste é muito fina.

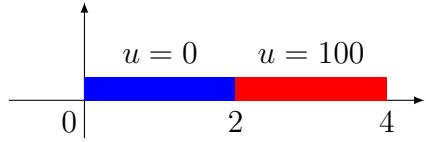


Figura 2.3: Calor inicial

a temperatura tende a entrar em equilíbrio, ou seja, o calor se distribuirá de forma uniforme na barra.

Além disso, depois de um tempo grande, acreditamos que a temperatura na haste será constante. Você consegue responder qual será essa temperatura? 50? Provavelmente sim.

Uma questão que talvez não seja tão intuitiva é saber qual a velocidade que o calor flui na haste. Isso vai depender da densidade ρ , do calor específico γ e da condutividade térmica K da haste.

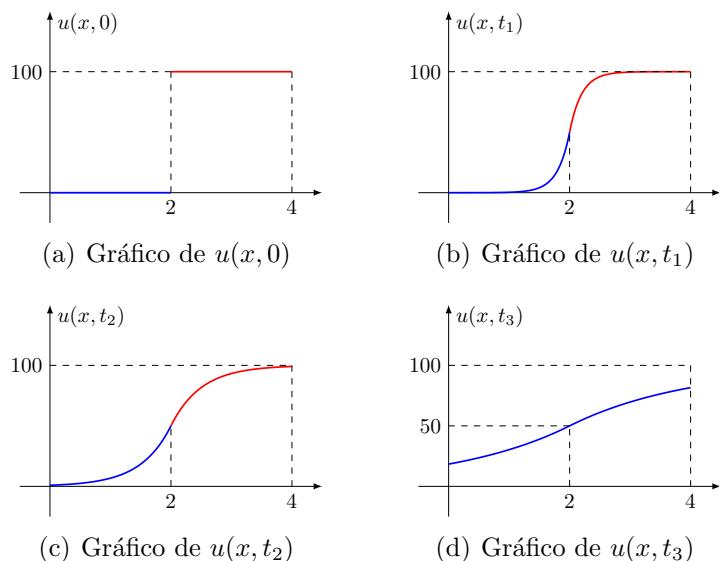


Figura 2.4: Temperatura $u(x, t)$

Na figura 2.4 é possível entender o comportamento da função $u(x, t)$ a medida que o tempo passa. Para cada $t \geq 0$, a expressão $u(x, t)$ representa uma função real na variável x . Como estamos supondo $u(x, 0) = 0$ se $0 \leq x \leq 2$ e $u(x, 0) = 100$ se $2 < x \leq 4$, podemos escrever

$$u(x, 0) = f(x)$$

em que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 2, \\ 100, & \text{se } 2 < x \leq 4, \end{cases}$$

que é chamada condição de contorno. Observe que, se considerarmos tempos

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3,$$

podemos observar a variação dos gráficos de $u(x, t)$.

Você deve estar se perguntando: “tá bom, entendi, mas onde você quer chegar? você não está enrolando demais? qual a expressão da função u ?” Antes de mais nada, para parar de enrolar e responder à pergunta, diferentemente da função $T(t)$ que satisfaz a equação 2.1, a função que mede a temperatura na haste depende de duas variáveis, a posição x e o tempo t .

Nosso objetivo nesta seção é determinar, pelo menos de forma implícita, a lei de formação de $u(x, t)$. Para tal, vamos nos guiar pela figura 2.5.

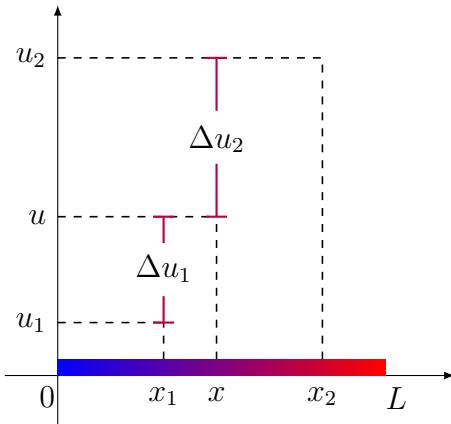


Figura 2.5: Temperatura em uma haste

Considere três pontos no intervalo $(0, L)$

$$0 < x_1 < x < x_2 < L.$$

Sejam u , u_1 e u_2 as respectivas temperaturas nos pontos x , x_1 e x_2 em um instante qualquer de tempo $t > 0$.

Conforme a lei de resfriamento de Newton, a variação da temperatura u no tempo é proporcional à diferença da média $\frac{u_1 + u_2}{2}$ e u , ou seja

$$\frac{du}{dt} = \alpha \left(\frac{u_1 + u_2}{2} - u \right). \quad (2.2)$$

Rearranjando os termos acima e denotando

$$\Delta u_1 = u - u_1 \quad \text{e} \quad \Delta u_2 = u_2 - u$$

então, a equação (2.2) terá o seguinte aspecto

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \alpha \left(\frac{u_1 + u_2}{2} - u \right) \\ &= \frac{\alpha}{2} \left(\underbrace{(u_2 - u)}_{\Delta u_2} - \underbrace{(u - u_1)}_{\Delta u_1} \right) \\ &= \frac{\alpha}{2} (\Delta u_2 - \Delta u_1)\end{aligned}$$

o que nos daria algo do tipo

$$\frac{du}{dt} = \frac{\alpha}{2} \Delta \Delta u.$$

Mas o que é $\Delta \Delta u$? Em termos de diferença, se olharmos para essa expressão como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Delta \Delta u$$

e

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

pois u agora depende de x e t , teremos a seguinte equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.3}$$

O símbolo em (2.3) deve ser usado para deixar claro que a temperatura envolve duas ou mais variáveis, e especifica com relação à qual variável está sendo feito a derivada.

A equação (2.3) é chamada de equação de derivadas parciais. Mais precisamente, temos a seguinte definição mais geral:

Definição 2.1 *Uma Equação de Derivadas Parciais de Segunda Ordem Linear em duas variáveis livres x e y é dada por*

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \tag{2.4}$$

em que A, B, \dots, G são funções de duas variáveis. Se $G = 0$ dizemos que a equação é **homogênea**.

À equação (2.4) podemos nos referir simplesmente como Equação Diferencial Parcial (EDP).

2.2 Separação de Variáveis

Utilizaremos um único método para solucionar equações parciais, chamado de Método da Separação das variáveis. Esse método consiste em supor que uma solução da equação (2.4) pode ser escrita da forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y),$$

ou seja, u é o produto de duas funções de uma variável real. Sendo assim

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = XY'$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''.$$

Observação 2.1 De agora em diante, subentende-se que X' representa a derivada de X com relação à variável x , bem como Y' representa a derivada de Y com relação à variável y , já que X e Y são definidas como funções de uma variável, respectivamente x e y .

Por exemplo, consideremos o problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial u}{\partial y},$$

em que

$$a \leq x \leq b \quad e \quad c \leq y \leq d,$$

domínio de u , que é um conjunto de \mathbb{R}^2 mostrado na figura 2.6.

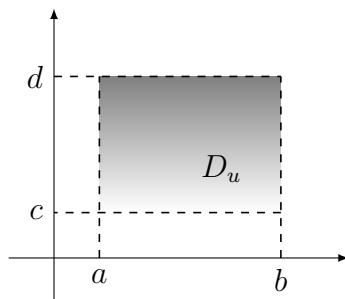


Figura 2.6: Domínio de $u(x, y)$

Suponhamos que a solução do problema acima seja $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Nessas condições

$$X''Y = 4XY' \Rightarrow \frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y}, \quad (2.5)$$

para todo par $(x, y) \in D_u$.

Como o lado direito da última igualdade só depende da variável x e o lado esquerdo só depende da variável y , concluímos que os quocientes devem ser constantes. Vamos supor que esta constante é igual à λ^2 , $-\lambda^2$ ou zero. Vale ressaltar que escrevemos o termo ao quadrado para diferenciar se a constante é negativa ou positiva.

Para relembrar a forma em que são resolvidas as Equações Diferenciais Ordinárias, vale dar uma conferida no Anexo deste capítulo.

Primeiro caso: constante igual a $\lambda^2 > 0$.

Nesse caso, da igualdade (2.5), segue que

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = \lambda^2,$$

onde temos as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$X'' - 4\lambda^2 X = 0 \quad \text{e} \quad Y' - \lambda^2 Y = 0.$$

Ao supormos que $X(x) = e^{rx}$ é solução da primeira equação, então teremos que

$$r^2 e^{rt} - 4\lambda^2 e^{rt} = 0 \Rightarrow r = \pm 2\lambda.$$

Portanto, nesse caso, a solução geral será da forma

$$X = c_1 e^{2\lambda x} + c_2 e^{-2\lambda x}.$$

De modo análogo, teremos $Y = c_3 e^{\lambda^2 y}$. Portanto, como estamos supondo $u(x, y) = X(x)Y(y)$, então

$$u(x, y) = (c_1 e^{2\lambda x} + c_2 e^{-2\lambda x})(c_3 e^{\lambda^2 y}).$$

Segundo caso: constante igual a $-\lambda^2 < 0$.

Analogamente ao que foi feito acima, teremos as seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$X'' + 4\lambda^2 X = 0 \quad \text{e} \quad Y' + \lambda^2 Y = 0.$$

Ao supormos que $X = e^{rx}$ é solução da primeira equação, então teremos que

$$r^2 e^{rt} + 4\lambda^2 e^{rt} = 0 \Rightarrow r = 0 \pm 2\lambda i.$$

Portanto, nesse caso, a solução geral será da forma

$$X = c_4 e^0 \cos 2\lambda x + c_5 e^0 \sin 2\lambda x = c_4 \cos 2\lambda x + c_5 \sin 2\lambda x$$

e

$$Y = c_6 e^{-\lambda^2 y}.$$

Assim, a solução se dará como o produto

$$u(x, y) = (c_4 \cos 2\lambda x + c_5 \sin 2\lambda x)(c_6 e^{-\lambda^2 y}).$$

Terceiro caso: $\lambda^2 = 0$.

Neste caso, $X'' = 0$ e $Y' = 0$, donde segue por integração direta que

$$X = c_7 x + c_8 \quad \text{e} \quad Y = c_9$$

em que a solução geral fica da forma

$$u(x, y) = A_1 x + A_2$$

em que c_1, \dots, c_9, A_1 e A_2 são constantes.

Observação 2.2 O método de separação de variáveis não soluciona todos os problema de equações de derivadas parciais. Por exemplo, no problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

não é possível determinar solução usando separação de variável.

No caso de várias soluções, vale o seguinte teorema:

Teorema 2.1 Príncípio de Superposição: Se u_1, u_2, \dots, u_k são soluções de uma equação de derivadas parciais linear homogênea, então a combinação linear

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_k u_k,$$

em que os c_i 's são constantes, também é solução.

Se tivermos um conjunto infinito

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

de soluções de uma equação linear homogênea, poderemos obter uma outra solução formada pela soma infinita

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i,$$

desde que a soma convirja.

2.3 Problemas de Valores de Contorno

No primeiro exemplo do capítulo, temos o problema de resolver

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

sujeito à seguinte condição de contorno

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 2, \\ 100, & \text{se } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

Geralmente, precisamos de algumas informações sobre o comportamento da função $u(x, t)$ num determinado ponto (ou conjunto) específico. Considere, por exemplo, o problema

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

sujeito às seguintes condições:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L.$$

Ou então, resolver o problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a.\end{aligned}$$

Esses problemas são chamados de problemas de valores de contorno.

Observação 2.3 *O símbolo*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}$$

indica que, primeiramente deve-se calcular a derivada parcial de u com relação à x e em seguida aplicar $x = 0$. Por exemplo, para a função

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right).$$

Consequentemente

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi 0}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) = -\frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right).$$

Além disso, observa-se que $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}$ é uma função que depende só de y .

Exercício 2.1 *Considere o problema*

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

sujeito às seguintes condições de contorno

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

Mostre que, na técnica de separação de variáveis, a escolha das constantes de separação $c = 0$ ou $c = \lambda^2 > 0$ gera soluções nulas.

Exercício 2.2 *Considere o problema*

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

sujeito às seguintes de contorno

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0. \tag{2.7}$$

Mostre que, na técnica de separação de variáveis, a escolha das constantes de separação $c = 0$ ou $c = \lambda^2 > 0$ gera soluções nulas.

Exercício 2.3 Mostre que, no problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$$

sujeito às seguintes de contorno

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b,$$

e

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L,$$

o método da separação de variáveis conduz a

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = constante.$$

Verifique que a escolha da constante $c = -\lambda^2 < 0$ produz uma solução nula.

2.4 Equação do Calor

Consideremos o fluxo de calor transferido por condução em uma haste ou fio delgado, como mostra a figura 2.7.

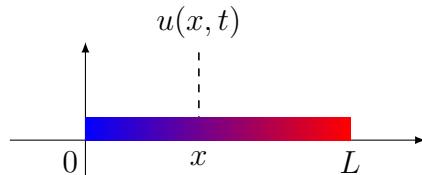


Figura 2.7: Calor em uma haste delgada

A função $u(x, t)$ mede a temperatura da haste na posição x e no instante t , em que $0 < x < L$ e $t > 0$. Faremos as seguintes considerações sobre a haste:

- o fluxo de calor só se verifica na direção x ;
- a haste é isolada, ou seja, nenhum calor escapa da superfície e nenhum calor é gerado na haste;
- a haste é homogênea, isto é, sua densidade ρ é constante;

- o calor específico γ e a condutividade térmica K são constantes.

Nessas condições, a temperatura $u(x, t)$ na haste é determinada como solução da seguinte equação:

$$\frac{K}{\gamma\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Fica como exercício mostrar com detalhes como é possível determinar essa equação.

Por simplicidade, vamos escrever a equação acima da seguinte maneira:

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

sob as seguintes condições iniciais

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.8)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L. \quad (2.9)$$

Vamos supor $u(x, t) = X(x)T(t)$ é solução não nula do problema. Substituindo na equação acima, teremos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda^2.$$

A escolha pela constante $-\lambda^2$ se dá por saber-se que a escolha da constante λ^2 ou zero nos dá uma solução nula para o problema, como é mostrado no exercício 2.1.

Assim, a equação acima se reduz em duas equações diferenciais ordinárias:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{e} \quad T' + k\lambda T = 0,$$

cujas soluções são, respectivamente,

$$X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \quad \text{e} \quad T = c_3 e^{-k\lambda t}. \quad (2.10)$$

Vamos agora usar as condições iniciais dadas na equação (2.8). Assim

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0$$

e

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0.$$

Como $T(t) \neq 0$, para todo $t > 0$, devemos ter $X(0) = X(L) = 0$. Da primeira igualdade, concluímos que $c_1 = 0$. Logo

$$X = c_2 \sin \lambda x.$$

A segunda condição implica que

$$X(L) = c_2 \sin \lambda L = 0.$$

Vamos considerar somente o caso em que $c_2 \neq 0$, pois caso contrário, teríamos $u = 0$. Pois bem, se $c_2 \neq 0$, então $\sin \lambda L = 0$. Isso implica que $\lambda = n\pi/L$, em que $n \in \mathbb{Z}$. Mas vamos considerar somente os casos em que $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, pois os inteiros negativos produziriam soluções equivalentes. De fato, se $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, então $-n \in \mathbb{Z}$ e portanto, como o seno é uma função ímpar,

$$X = \underbrace{c_2}_{constante} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

e

$$X = c_2 \sin \left(\frac{-n\pi x}{L} \right) = \underbrace{-c_2}_{constante} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$

Assim, as soluções correspondentes são

$$X = c_2 \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

Substituindo o valor de λ em (2.10), temos que

$$T = c_3 e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}.$$

Portanto, para cada n fixado, teremos uma solução do tipo

$$u_n = X(x)T(t) = A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

em que trocamos $c_2 c_3$ por A_n . É fácil ver que este tipo de solução satisfaz (2.8).

Mas observem que, da condição (2.9), deveríamos ter

$$f(x) = u_n(x, 0) = A_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, o que, na maioria das vezes, não ocorre.

Sabemos do princípio de superposição, que a função

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.11)$$

é solução da equação do calor e satisfaz as condições de contorno. Além disso, a função acima deve satisfazer as condições iniciais (2.8) e (2.9). Fazendo $t = 0$ na expressão de $u(x, t)$, teremos

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Essa última soma, nada mais é do que o desenvolvimento de meio-intervalo de f em séries de senos, como foi pedido no exercício 1.5. Assim, decorre desse fato que

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Portanto, substituindo na equação (2.11), a solução do problema de contorno descrito acima é dada pela série

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Exercício 2.4 Determine a solução geral do problema do calor dadas as condições iniciais $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$, $u(x, 0) = 100$, $L = \pi$ e $k = 1$. A resposta deve ser

$$u(x, t) = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right) e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Sabendo que

$$\int_0^\pi u(x, 0) dx = 100\pi,$$

mostre que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Exercício 2.5 Resolva o problema

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

sob as seguintes condições iniciais

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

em que:

$$a) \ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq L/2, \\ 0, & \text{se } L/2 < x \leq L. \end{cases}$$

$$b) \ f(x) = x(L - x).$$

Exercício 2.6 Resolva o problema

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

sob as seguintes condições iniciais

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

2.5 Equação da Corda

Considere uma corda de comprimento L , como uma corda de violão por exemplo, mantida fixada em dois pontos no eixo x , em $x = 0$ e $x = L$. Suponhamos que, após ser tocada, a corda se movimente no plano xy perpendicularmente ao eixo x . Vamos denotar por $u(x, t)$ o deslocamento vertical de um ponto arbitrário da corda. Suponhamos que:

- a corda é flexível;
- a corda é homogênea, ou seja, tem densidade ρ constante;
- os deslocamentos $u(x, t)$ são pequenos;
- a inclinação também é pequena;
- a tensão \mathbf{T} atua tangencialmente à corda e seu módulo $T = |\mathbf{T}|$ é constante em todos os pontos;
- a tensão é grande comparada a força da gravidade;
- não existem forças externas à corda.

Dessa forma, usando as leis que regem este fenômeno físico, a função u deve satisfazer a seguinte equação de derivadas parciais:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

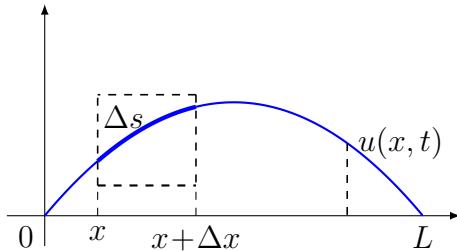


Figura 2.8: Temperatura em uma haste

Vale observar que, em alguns momentos (vai saber quando), podemos escrever a equação acima da forma $u_{xx} = (\rho/T)u_{tt}$.

A equação acima pode ser demonstrada se fizermos algumas considerações. Se \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 são os vetores tensores nas extremidades de um elemento Δs , e esses vetores tem módulos constantes $T = |\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2|$, a diferença de tensão é dada por

$$T \sin \theta_2 - T \sin \theta_1,$$

em que θ_1 e θ_2 são os ângulos mostrados na figura 2.9.

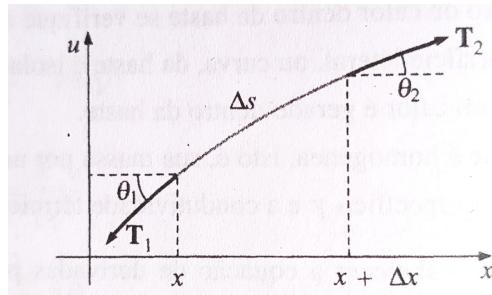


Figura 2.9: Lupa

Como estamos supondo que os deslocamentos verticais são pequenos, ou seja $\theta \approx 0$, podemos considerar

$$\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1 \quad \text{e} \quad \sin \theta_2 \approx \tan \theta_2.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} T \sin \theta_2 - T \sin \theta_1 &\approx T \tan \theta_2 - T \tan \theta_1 \\ &= T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] \end{aligned}$$

em que

$$\tan \theta_2 = u_x(x + \Delta x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x+\Delta x}$$

por definição. Além disso, como estamos considerando pequenos deslocamentos verticais, consideraremos

$$\Delta s \approx \Delta x.$$

Também por definição, a densidade ρ de um objeto delgado, é o quociente entre a massa e o comprimento desse objeto, ou seja

$$\rho = \frac{m}{\Delta s} \approx \frac{m}{\Delta x} \implies m \approx \rho \Delta x$$

Além disso, força é massa vezes aceleração. Como a força exercida na corda é dada pela diferença T , temos que

$$F = m \cdot a \implies T[u_x(x + \Delta x, t) + u_x(x, t)] = \rho \Delta x u_{tt}$$

em que a derivada segunda u_{tt} é exatamente a aceleração. Dessa forma

$$\frac{u_x(x + \Delta x, t) + u_x(x, t)}{\Delta x} = \frac{\rho}{T} u_{tt}. \quad (2.12)$$

Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$ na equação 2.12, chegamos à tão esperada equação da corda

$$\frac{\partial^u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.13)$$

Por simplicidade, vamos escrever a equação da corda da seguinte maneira:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (2.14)$$

sujeito às seguintes condições:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.15)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L. \quad (2.16)$$

A função $f(x)$ descreve a posição inicial da corda e a função $g(x)$ a velocidade inicial da corda. Por exemplo, se a corda parte do repouso, então $g(x) = 0$.

Suponhamos, mais uma vez, que uma solução do problema acima seja dada por $u(x, t) = X(x)T(t)$. Pelos método da separação de variáveis, temos que a equação (2.14) se reduz à

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda^2,$$

em que estamos já considerando a constante $-\lambda^2$ pelo mesmo motivo do que foi considerado no problema do calor. A última exprime duas equações diferenciais ordinárias, a saber

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{e} \quad T'' + \lambda^2 a^2 T = 0,$$

cujas soluções são, respectivamente,

$$X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \quad \text{e} \quad T = c_3 \cos(\lambda at) + c_4 \sin(\lambda at).$$

Portanto, uma solução do problema seria do tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t) = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)(c_3 \cos(\lambda at) + c_4 \sin(\lambda at)).$$

Analogamente ao que foi feito anteriormente, concluímos que

$$c_1 = 0 \quad \text{e} \quad c_2 \sin(\lambda L) = 0,$$

onde concluímos que $\lambda = n\pi/L$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. Portanto, as funções que satisfazem a equação (2.14) são

$$u_n = \left(c_n \cos \left(\frac{n\pi at}{L} \right) + d_n \sin \left(\frac{n\pi at}{L} \right) \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$

Argumentando como anteriormente, devemos ter uma solução do tipo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos \left(\frac{n\pi at}{L} \right) + d_n \sin \left(\frac{n\pi at}{L} \right) \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2.17)$$

Usando a condição inicial (2.16), temos que

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

que nada mais é do que o desenvolvimento de meio-intervalo (extensão ímpar) de f em série de fourier. Assim, usando a teoria dada para a segunda prova, concluímos que

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Vamos agora determinar o coeficiente d_n . Novamente usando a condição inicial (2.16), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos \left(\frac{n\pi at}{L} \right) + d_n \sin \left(\frac{n\pi at}{L} \right) \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(c_n \cos \left(\frac{n\pi at}{L} \right) + d_n \sin \left(\frac{n\pi at}{L} \right) \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-c_n \frac{n\pi a}{L} \sin \left(\frac{n\pi at}{L} \right) + d_n \frac{n\pi a}{L} \cos \left(\frac{n\pi at}{L} \right) \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \end{aligned}$$

Aplicando em $t = 0$, segue que

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(d_n \frac{n\pi a}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$

Observem agora que, se escrevermos $b_n = d_n \frac{n\pi a}{L}$, então, do desenvolvimento de séries fourier em meio intervalo (extensão ímpar), temos

$$d_n \frac{n\pi a}{L} = b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx,$$

e portanto

$$d_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

A solução se dá de maneira natural, substituindo-se c_n e d_n na equação (2.17).

Exercício 2.7 Resolva a equação da corda

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

sujeita às seguintes condições:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{4}x(L - x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L.$$

Exercício 2.8 Resolva a equação da corda

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

sujeita às seguintes condições:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2hx}{L}, & 0 < x < \frac{L}{2}, \\ 2h \left(1 - \frac{x}{L} \right), & \frac{L}{2} \leq x < L, \end{cases}$$

em que h é um número positivo próximo de zero. Esboce o gráfico da função $u(x, 0)$.

Exercício 2.9 Uma corda é distendida e fixada ao eixo x em $x = 0$ e $x = \pi$ para $t > 0$. Se as vibrações transversais ocorrem em um meio que oferece uma resistência proporcional à velocidade instantânea, então a equação da onda toma a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < \beta < 1, \quad t > 0.$$

Ache o deslocamento $u(x, t)$ se a corda parte do repouso com deslocamento $f(x)$.

Solução do exercício 2.9 Antes de mais nada, é importante deixar claro que, matematicamente, dizer que a corda está fixada ao eixo x em $x = 0$ e $x = \pi$ é o mesmo que

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u(\pi, t) = 0$$

para todo $t > 0$, e dizer que a corda parte do repouso de um deslocamento $f(x)$ é o mesmo que

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{e} \quad u(x, 0) = f(x).$$

Ou seja, a velocidade inicial de deslocamento é zero e a disposição inicial da corda é o gráfico de uma função $f(x)$. Resumidamente, temos o seguinte problema:

Resolva

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < \beta < 1, \quad t > 0. \quad (2.18)$$

sujeito às condições de contorno

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.19)$$

e

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{e} \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \pi. \quad (2.20)$$

O método para a resolução do problema é o mesmo de sempre, consiste em supor que a função $u(x, t)$, solução do problema, pode ser separada da forma

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XT'' \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = XT'.$$

Substituindo na equação (2.18), teremos

$$X''T = XT'' + 2\beta XT' \implies \frac{X''}{X} = \frac{T'' + 2\beta T'}{T} = \text{constante}. \quad (2.21)$$

Para tal, consideraremos três possibilidades.

1º Caso: constante = 0. Nesse caso, a equação (2.21) é tal que

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'' + 2\beta T'}{T} = 0 \implies X'' = 0 \text{ e } T'' + 2\beta T' = 0$$

cujas soluções são, respectivamente

$$X = c_1x + c_2 \text{ e } T = c_3 + c_4e^{-2\beta t}.$$

Os detalhes para a solução acima estão no anexo 2. Substituindo as soluções acima nas condições de contorno (2.19), obtemos

$$0 = u(0, t) = X(0)T \implies c_2T = 0 \implies c_2 = 0$$

e

$$0 = u(\pi, t) = X(\pi)T \implies c_1\pi T = 0 \implies c_1 = 0,$$

o que produz uma solução nula, que não nos interessa. Partiremos então para o segundo caso:

2º Caso: constante = $\lambda^2 > 0$. Para esse caso, a equação (2.21) é tal que

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} = \frac{T'' + 2\beta T'}{T} = \lambda^2 &\implies X'' - \lambda^2 X = 0 \\ &\text{e } T'' + 2\beta T' - \lambda^2 T = 0, \end{aligned}$$

cujas soluções são, respectivamente

$$X = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x \quad (2.22)$$

e

$$T = c_3 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 + \lambda^2})t} + c_4 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 + \lambda^2})t}. \quad (2.23)$$

Os detalhes ficam como exercício. Substituindo em (2.19), obtemos

$$\begin{aligned} 0 = u(0, t) = X(0)T &\implies (c_1 \underbrace{\cosh \lambda 0}_{=1} + c_2 \underbrace{\sinh \lambda 0}_{=0})T = 0 \\ &\implies c_1 T = 0 \implies c_1 = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 = u(\pi, t) = X(\pi)T &\implies (c_2 \underbrace{\sinh \lambda \pi}_{\neq 0})T = 0 \\ &\implies c_2 = 0 \text{ ou } T = 0, \end{aligned}$$

que mais uma vez gera uma solução nula. Partiremos então para nossa última tentativa, rezando para que essa não gere outra solução nula.

3º Caso: constante $= -\lambda^2 < 0$. Nesse caso, a equação (2.21) produz

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'' + 2\beta T'}{T} = -\lambda^2 \implies X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (2.24)$$

$$\text{e} \quad T'' + 2\beta T' + \lambda^2 T = 0. \quad (2.25)$$

A solução da equação (2.24) é

$$X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x. \quad (2.26)$$

A solução da equação (??) será especificada posteriormente. Portanto, uma solução do problema seria do tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t) = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)T(t).$$

Substituindo mais uma vez em (2.19), obtemos

$$\begin{aligned} 0 = u(0, t) = X(0)T &\implies (c_1 \underbrace{\cos \lambda 0}_{=1} + c_2 \underbrace{\sin \lambda 0}_{=0})T(t) = 0 \\ &\implies c_1 T(t) = 0 \implies c_1 = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 = u(\pi, t) = X(\pi)T(t) &\implies (\underbrace{c_2 \sin \lambda \pi}_{\neq 0}) \underbrace{T(t)}_{=0} = 0 \\ &\implies \sin \lambda \pi = 0 \\ &\implies \lambda = n, \end{aligned}$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$.

Vamos supor agora que uma solução da equação diferencial (??) seja da forma

$$T(t) = e^{rt}.$$

Assim, lembrando que a partir de agora $\lambda = n$,

$$\begin{aligned} T'' + 2\beta T' + \lambda^2 T = 0 &\implies r^2 e^{rt} + 2\beta r e^{rt} + \lambda^2 e^{rt} = 0 \\ &\implies \underbrace{e^{rt}}_{\neq 0} (r^2 + 2\beta r + n^2) = 0 \\ &\implies r = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4n^2}}{2} \\ &\implies r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - n^2}. \end{aligned}$$

Como por hipótese $0 < \beta < 1$ e $n \geq 1$, então $\beta^2 - n^2 < 0$. Ou seja, a equação acima produz duas raízes complexas, a saber

$$r_1 = -\beta + i\sqrt{n^2 - \beta^2} \quad \text{e} \quad r_2 = -\beta - i\sqrt{n^2 - \beta^2}.$$

Portanto, a solução geral da equação (??) é da forma

$$\begin{aligned} T(t) &= c_3 e^{-\beta t} \cos(t\sqrt{n^2 - \beta^2}) + c_4 e^{-\beta t} \sin(t\sqrt{n^2 - \beta^2}) \\ &= e^{-\beta t} (c_3 \cos(t\sqrt{n^2 - \beta^2}) + c_4 \sin(t\sqrt{n^2 - \beta^2})) \\ &= e^{-\beta t} (c_3 \cos(Q_n t) + c_4 \sin(Q_n t)), \end{aligned}$$

em que $Q_n = \sqrt{n^2 - \beta^2}$. Como

$$\begin{aligned} T'(t) &= -\beta e^{-\beta t} (c_3 \cos(Q_n t) + c_4 \sin(Q_n t)) \\ &\quad + e^{-\beta t} (-c_3 Q_n \sin(Q_n t) + c_4 Q_n \cos(Q_n t)), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} T'(0) &= -\beta e^{-\beta 0} (c_3 \cos(Q_n 0) + c_4 \sin(Q_n 0)) \\ &\quad + e^{-\beta 0} (-c_3 Q_n \sin(Q_n 0) + c_4 Q_n \cos(Q_n 0)) \\ &= -\beta c_3 + c_4 Q_n. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo a função acima na condição (2.20), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = X(x)T'(0) \\ &\implies X(x)(-\beta c_3 + c_4 Q_n) = 0 \\ &\implies c_4 = \frac{\beta}{Q_n} c_3. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} u(x, t) = X(x)T(t) &= c_2 \sin(nx) e^{-\beta t} (c_3 \cos(Q_n t) + c_4 \sin(Q_n t)) \\ &= c_2 \sin(nx) e^{-\beta t} \left(c_3 \cos(Q_n t) + \frac{\beta}{Q_n} c_3 \sin(Q_n t) \right) \\ &= c_5 e^{-\beta t} \left(\cos(Q_n t) + \frac{\beta}{Q_n} \sin(Q_n t) \right) \sin(nx), \end{aligned}$$

em que $c_5 = c_2c_3$. Como para cada $n \in \mathbb{N}^*$ existirá uma única solução, trocando c_5 por B_n , escrevemos cada uma dessas soluções da forma

$$u_n(x, t) = B_n e^{-\beta t} \left(\cos(Q_n t) + \frac{\beta}{Q_n} \sin(Q_n t) \right) \sin(nx). \quad (2.27)$$

Pelo Princípio da Superposição, a soma de todas as soluções mencionadas acima também é uma solução do problema, que designaremos por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n e^{-\beta t} \left(\cos(Q_n t) + \frac{\beta}{Q_n} \sin(Q_n t) \right) \sin(nx). \quad (2.28)$$

Substituindo essa última solução da condição $u(x, 0) = f(x)$, teremos

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(nx).$$

Pelo exercício 1.4,

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx,$$

o que resolve o problema.

Exercício 2.10 *Resolva o problema*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u$$

sujeito às condições

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi. \end{cases}$$

Explique todos os passos necessários para mostrar que a solução é

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \sin((2k-1)x) \cos \left(t \sqrt{(2k-1)^2 + 1} \right) \right].$$

2.6 Equação de Laplace

Por último, e não menos importante, iremos estudar a famosa equação de Laplace. Considere uma placa retangular de dimensões $a \times b$. Fixadando a placa em um sistema de coordenadas, como mostra a figura 2.10, a temperatura em estado estacionário em um ponto (x, y) será designada por

$$u = u(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Essa temperatura estacionária é dada implicitamente como solução da equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b. \quad (2.29)$$

Em um primeiro momento, consideraremos as seguintes condições de contorno

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b, \quad (2.30)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a. \quad (2.31)$$

As igualdades

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b,$$

indicam que as extremidades laterais da chapa estão isoladas, ou seja, não existe variação de temperatura.

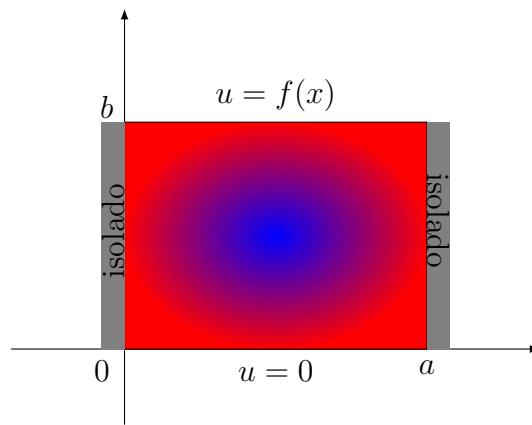


Figura 2.10: Calor em uma haste delgada

O primeiro passo, é resolver a equação diferencial parcial (2.29) pelo método da separação de variáveis. Assim, se supormos que

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

é solução de (2.29), então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''.$$

Além disso, as condições de contorno dadas na equação (2.30) podem ser descritas como

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = X'(0)Y(y) \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = X'(a)Y(y).$$

Substituindo na equação (2.29), temos que

$$X''Y + XY'' = 0 \iff -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y}$$

para todo $x \in [0, a]$ e todo $y \in [0, b]$, o que só ocorre se

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \text{constante} \quad (2.32)$$

Pelo exercício 2.3, a escolha de uma constante $c < 0$ acarreta em uma solução nula. Dessa forma, consideraremos somente as constantes $c = 0$ e $c = \lambda^2 > 0$.

Primeiramente, se $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, então

$$\begin{aligned} -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = 0 &\implies X'' = 0 \quad \text{e} \quad Y'' = 0 \\ &\implies X = c_1x + c_2 \quad \text{e} \quad Y = c_3y + c_4, \end{aligned}$$

em que c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes. Substituindo na condição dada em (2.30) e observando que $X'(0) = c_1$, tem-se que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 &\implies X'(0)Y(y) = 0 \\ &\implies c_1 \underbrace{Y(y)}_{\neq 0} = 0 \\ &\implies c_1 = 0 \end{aligned}$$

uma vez que $Y(y) = 0$ acarretaria uma solução nula. Logo, para a constante de separação $c = 0$ temos a seguinte solução

$$u(x, y) = X(x)Y(y) = c_2(c_3y + c_4) = c_5y + c_6,$$

em que $c_5 = c_2c_3$ e $c_6 = c_2c_4$ são constantes.

Aplicando essa última solução na condição dada em (2.31), teremos

$$u(x, 0) = 0 \implies 0 = u(x, 0) = c_50 + c_6 \implies c_6 = 0 \implies u(x, y) = c_6y.$$

Trocando c_6 por A_0 , para a constante de separação $c = 0$, temos uma solução que será escrita da forma

$$u_0(x, y) = A_0y. \quad (2.33)$$

Guarde essa solução.

Consideremos agora a constante de separação $c = \lambda^2 > 0$. Substituindo em (2.32), então

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda^2$$

o que implica em

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{e} \quad Y'' - \lambda^2 Y = 0.$$

A solução da primeira equação é dada por

$$X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

e a solução da segunda equação será um pouco diferente do que foi feito anteriormente, ficando da forma

$$Y = c_3 \cosh \lambda y + c_4 \sinh \lambda y.$$

Essa última solução faz sentido para quem fizer o exercício 2.15.

Como $X'(x) = -c_1\lambda \sin \lambda x + c_2\lambda \cos \lambda x$, então $X'(0) = c_2\lambda$ e $X'(a) = -c_1\lambda \sin \lambda a + c_2\lambda \cos \lambda a$, substituindo na condição (2.30), tem-se que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 &\implies X'(0) \underbrace{Y(y)}_{\neq 0} = 0 \\ &\implies c_2 \underbrace{\lambda}_{\neq 0} \\ &\implies c_2 = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 &\implies X'(a) \underbrace{Y(y)}_{\neq 0} = 0 \\
&\implies -c_1 \lambda \sin \lambda a + \underbrace{c_2}_{=0} \lambda \cos \lambda a = 0 \\
&\implies -\underbrace{c_1 \lambda}_{\neq 0} \sin \lambda a = 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\sin \lambda a = 0$. Analogamente ao que foi amplamente discutido anteriormente, devemos ter

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Como também vale a condição $u(x, 0) = 0$, então

$$X(x)Y(0) = 0 \implies \underbrace{X(x)}_{\neq 0} (\underbrace{c_3 \cosh \lambda 0}_{=1} + \underbrace{c_4 \sinh \lambda 0}_{=0}) = 0 \quad (2.34)$$

$$\implies c_3 = 0. \quad (2.35)$$

Portanto, como $\lambda = n\pi/a$, para constante de separação λ^2 a solução é da forma

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= X(x)Y(y) = (c_1 \cos \lambda x)(c_4 \sinh \lambda y) \\
&= c_5 \cos \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a},
\end{aligned}$$

em que $c_5 = c_1 c_4$. Como para cada $n \in \mathbb{N}^*$ temos uma solução diferente, faremos $c_5 = A_n$ e dessa forma as funções

$$u_n(x, y) = A_n \cos \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a} \quad (2.36)$$

também são soluções do problema de contorno, para cada $n \in \mathbb{N}^*$.

Como foi feito anteriormente, pelo princípio da superposição, a soma de todas as soluções ainda é uma solução. Lembrando de somar a solução $u_0 = A_0 y$, temos a seguinte solução

$$u(x, y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}. \quad (2.37)$$

Substituindo essa solução na última condição de contorno, $u(x, b) = f(x)$, obtemos

$$f(x) = A_0 b + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(A_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \right)}_{a_n} \cos \frac{n\pi x}{a}. \quad (2.38)$$

De acordo com o exercício 1.4, temos que

$$2A_0 b = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) dx$$

e

$$A_n \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx$$

e portanto

$$A_0 = \frac{1}{ab} \int_0^a f(x) dx \quad \text{e} \quad A_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx. \quad (2.39)$$

A solução se dá ao substituirmos as constantes acima na equação (2.37).

Exercício 2.11 Resolva a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

sujeita às seguintes condições

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a.$$

Exercício 2.12 Resolva a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

sujeita às seguintes condições

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 < x < a.$$

Exercício 2.13 Resolva a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

sujeita às seguintes condições

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad 0 < x < a.$$

$$u(0, y) = F(y), \quad u(a, y) = G(y), \quad 0 < y < b,$$

Exercício 2.14 Sejam $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$, respectivamente, as soluções dos exercícios 2.12 e 2.13. Mostre que

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$$

é solução da equação a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

sujeita às seguintes condições

$$u(0, y) = F(y), \quad u(a, y) = G(y), \quad 0 < y < b,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 < x < a.$$

2.7 Anexo 2

Nesta seção consideraremos equações diferenciais homogêneas da forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2.40}$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$. É claro que $a \neq 0$.

Por exemplo, considere a equação

$$y'' - y' - 2y = 0. \tag{2.41}$$

Como existe uma combinação linear entre a derivada segunda de uma função, a derivada primeira e a própria função, e esse resultado é zero, é natural de se imaginar que as funções y , y' e y'' são parecidas. Mais precisamente, são múltiplas uma da outra. Uma função que satisfaz esse tipo de relação é a função exponencial. Se considerarmos

$$y = e^{rx}, \quad r \in \mathbb{R},$$

como solução, podemos encontrar algo interessante. De fato, sendo

$$y' = re^{rx} \quad \text{e} \quad y'' = r^2 e^{rx},$$

substituindo na equação (2.41), teremos

$$\begin{aligned} y'' - y' - 2y = 0 &\Rightarrow r^2 e^{rx} - re^{rx} + 2e^{rx} = 0 \\ &\Rightarrow \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} (r^2 - r - 2) = 0 \\ &\Rightarrow r^2 - r - 2 = 0 \end{aligned}$$

e portanto nosso problema se resume em encontrar a solução de uma equação do segundo grau. As raízes reais da equação $r^2 - r - 2$ são

$$r_1 = 2 \quad \text{e} \quad r_2 = -1.$$

Dessa forma, como supomos que as soluções são da forma $y = e^{rx}$, então

$$y_1 = e^{2x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{-x}$$

são soluções da equação (2.41). Já foi mostrado em Cálculo 3 que y_1 e y_2 são linearmente independentes. Logo, y_1 e y_2 formam o conjunto fundamental de soluções. Sendo assim, a solução geral da equação (2.41) é da forma

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

Nos casos gerais, de equações de segundo grau homogêneas com coeficientes constantes da forma

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

sempre vamos supor que a solução é da forma

$$y = e^{rx}.$$

Dessa forma, como $y' = re^{rx}$ e $y'' = r^2 e^{rx}$, teremos

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &\Rightarrow ar^2 e^{rx} + be^{rx} + ce^{rx} = 0 \\ &\Rightarrow \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} (ar^2 + br + c) = 0 \\ &\Rightarrow ar^2 + br + c = 0. \end{aligned}$$

A equação do segundo grau

$$ar^2 + br + c = 0$$

é chamada de equação auxiliar. Consideraremos uma dentre as três possibilidades de soluções para essa equação.

Primeiro Caso: $b^2 - 4ac > 0$.

Nesse caso, a equação do segundo grau $ar^2 + br + c = 0$ tem duas soluções reais distintas

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Portanto as soluções da equação (2.40) são

$$y_1 = e^{r_1 x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{r_2 x}.$$

Como se sabe, y_1 e y_2 são linearmente independentes, portanto formam o conjunto fundamental de soluções. Sendo assim, a solução geral da equação é da forma

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

Exercício 2.15 As funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico são dadas, respectivamente, por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Considere a equação homogênea

$$y'' - \lambda^2 y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Foi visto em sala que a solução geral da equação homogênea é dada por

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}.$$

a) Mostre que a solução geral também pode ser escrita como

$$y = \alpha \cosh(\lambda x) + \beta \sinh(\lambda x).$$

b) Resolva o problema de valor inicial

$$y'' - \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1$$

utilizando os dois tipos de solução geral dados acima. Compare os resultados.

Segundo Caso: $b^2 - 4ac = 0$

Se $b^2 - 4ac = 0$, a equação auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ tem uma única solução

$$r = -\frac{b}{2a}.$$

Então, por enquanto podemos garantir que $y_1 = e^{rx}$ é uma solução da equação (2.40). Usaremos o método de redução de ordem para determinar uma segunda solução para a equação (2.40).

Primeiramente, precisamos fazer uma pequena alteração na equação (2.40), pois para usar o métodos, o coeficiente de y'' dever ser um. Para tal, basta observar que

$$ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow y'' + \underbrace{\frac{b}{a}y'}_{P(x)} + \underbrace{\frac{c}{a}y}_{Q(x)} = 0.$$

Lembrando que $r = -\frac{b}{2a}$, a segunda solução é

$$\begin{aligned} y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx &= e^{rx} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}dx}}{\left(e^{-\frac{b}{2a}x}\right)^2} dx \\ &= e^{rx} \int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{-\frac{b}{a}x}} dx \\ &= xe^{rx}, \end{aligned}$$

já considerando as constantes adequadas.

As funções $y_1 = e^{rx}$ e $y_2 = xe^{rx}$ são linearmente independentes para todo $r \in \mathbb{R}$, logo y_1 e y_2 forma um conjunto fundamental de soluções de (2.40), cuja solução geral é

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}.$$

Exemplo 2.1 A equação diferencial

$$y'' - 10y' - 25y = 0$$

tem como equação auxiliar a equação do segundo grau

$$r^2 - 10r - 25 = 0$$

cuja única raiz é $r = 5$. Logo, a solução geral da equação diferencial do segundo grau é

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}.$$

Terceiro Caso: $b^2 - 4ac < 0$

O terceiro caso é de longe o mais delicado. Você deve primeiramente ler o anexo 1 do primeiro capítulo. Como é mostrado lá, nesse caso, as raízes da equação do segundo grau $ar^2 + br + c = 0$ são da forma

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Se considerarmos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ da forma

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a},$$

as raízes r_1 e r_2 tem o seguinte aspecto

$$r_1 = \alpha + \beta i \quad \text{e} \quad r_2 = \alpha - \beta i.$$

Portanto, as raízes da equação diferencial de segunda ordem $ay'' + by' + cy = 0$ são escritas como

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$$y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

As funções y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial, no entanto elas tem uma parte imaginária. Para determinar uma função real, vale lembrar que qualquer combinação entre y_1 e y_2 também é solução da equação $ay'' + by' + cy = 0$. A função

$$y_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

portanto, é uma solução que não envolve parte imaginária.

Partiremos agora para determinar uma segunda solução real a partir de y_3 . Adaptando a fórmula dada para se determinar a segunda solução de uma

equação e lembrando que $\alpha = -b/2a$, teremos

$$\begin{aligned}
y_4 &= y_3 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_3^2} dx \\
&= e^{\alpha x} \cos \beta x \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a} dx}}{(e^{\frac{-b}{2a}x})^2 \cos^2 \beta x} dx \\
&= e^{\alpha x} \cos \beta x \int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{-\frac{b}{a}x} \cos^2 \beta x} dx \\
&= e^{\alpha x} \cos \beta x \int \sec^2 \beta x dx \\
&= e^{\alpha x} \cos \beta x \frac{\tan \beta x}{\beta} \\
&= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x \frac{\sin \beta x}{\cos \beta x} \\
&= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x.
\end{aligned}$$

Fica como exercícios mostrar que as soluções y_3 e y_4 são linearmente independentes. Assim, essas soluções formam um conjunto de soluções fundamentais para a equação linear e portanto a solução geral é

$$y = c_1 y_3 + c_4 y_4.$$

Na verdade, se trocarmos c_4 por βc_2 , podemos então resumir a solução geral em

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (2.42)$$

Exemplo 2.2 A equação diferencial

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

tem como equação auxiliar a equação do segundo grau

$$r^2 - 4r + 13 = 0,$$

cujas soluções são $r_1 = 2 + 3i$ e $r_2 = 2 - 3i$. Dessa forma, $\alpha = 2$, $\beta = 3$ e consequentemente a solução geral é dada por

$$y = c_1 e^{2x} \cos 3x + c_2 e^{2x} \sin 3x.$$

Capítulo 3

Integrais Especiais

Este capítulo será dedicado à resolução de algumas integrais não elementares, por técnicas não convencionais. Nenhuma das funções dadas nos exemplos tem primitiva. Exceto a primeira.

Exemplo 3.1 *A integral*

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin kt \, dt, \quad s > 0 \quad e \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Na disciplina de Cálculo 3, vimos que a transformada de Laplace de uma função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é, por definição,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

cujo o resultado, caso a integral converja, é uma função $F(s)$. Dessa forma, a integral apresentada em (3.1) nada mais é do que a transformada de Laplace da função $\sin kt$. Nesse exemplo usaremos integral por partes duas vezes. Por

definição

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin kt\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin kt \, dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \underbrace{e^{-st}}_{f'} \underbrace{\sin kt}_{g} \, dt \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{-\frac{e^{-st}}{s} \sin kt}_{f} \Big|_0^b - \int_0^b \underbrace{\left(-\frac{e^{-st}}{s} \right)}_{f} (\underbrace{k \cos kt}_{g'}) \, dt \right] \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{0 - e^{-bt} \sin kb}{s} + \frac{k}{s} \int_0^b e^{-st} \cos kt \, dt \right] \\
&= -\frac{1}{s} \underbrace{\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-sb} \sin kb}_{=0 \text{ se } s > 0} + \frac{k}{s} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \underbrace{e^{-st}}_{u'} \underbrace{\cos kt}_{v} \, dt \\
&= \frac{k}{s} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{-\frac{e^{-st}}{s} \cos kt}_{u} \Big|_0^b - \int_0^b \underbrace{\left(-\frac{e^{-st}}{s} \right)}_{u} (-k \sin kt) \, dt \right] \\
&= \frac{k}{s^2} \left[1 - \underbrace{\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-sb} \cos kb}_{=0 \text{ se } s > 0} \right] - \frac{k^2}{s^2} \underbrace{\int_0^b e^{-st} \sin kt \, dt}_{\mathcal{L}\{\sin kt\}}
\end{aligned}$$

pausa para respirar. Ou seja

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin kt\} &= \frac{k}{s^2} - \frac{k^2}{s^2} \mathcal{L}\{\sin kt\} \\
\Rightarrow \quad &\left(1 + \frac{k^2}{s^2} \right) \mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2} \\
\Rightarrow \quad &\left(\frac{s^2 + k^2}{s^2} \right) \mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2} \\
\Rightarrow \quad &\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}.
\end{aligned}$$

Fica como exercício mostrar que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-sb} \sin kb \quad e \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-sb} \cos kb = 0, \quad \text{se } s > 0.$$

Portanto

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin kt \, dt = \frac{k}{s^2 + k^2}, \quad s > 0 \quad e \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Exemplo 3.2 A integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Antes de mais nada, vale observar que a função

$$\frac{\sin t}{t}$$

não está definida para $t = 0$. No entanto, como vale o limite fundamental

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

vamos supor que no zero, a função vale um.

Usaremos o exemplo anterior para resolver essa integral. De fato, foi visto que

$$F(s) = \mathcal{L}\{\sin kt\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin kt dt = \frac{k}{s^2 + k^2},$$

para $s > 0$ e $k \in \mathbb{R}$. Ora, se $k = 1$, então

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Integrando ambos os lados de 0 a $+\infty$ com relação à variável s , tem-se que

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt \right) ds = \int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2 + 1} ds. \quad (3.3)$$

Por um lado, pelo Teorema de Fubini, vale o seguinte

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt \right) ds &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt ds \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t ds dt \\ &= \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(\int_0^{+\infty} e^{-st} ds \right)}_{=\frac{1}{t}} \sin t dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt, \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-st} ds &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-st} ds = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{e^{-st}}{t} \Big|_0^b \\
&= -\frac{1}{t} \lim_{b \rightarrow +\infty} [e^{-sb} - 1] = -\frac{1}{t} \underbrace{\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-sb}}_{=0 \text{ se } s>0} + \frac{1}{t} \\
&= \frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, na integral da direita da igualdade em (3.3),

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2 + 1} ds &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{s^2 + 1} ds = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan(s) \Big|_0^b \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan(b) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{4}. \quad (3.4)$$

Exemplo 3.3 A integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha, \quad \text{em que } x > 0. \quad (3.5)$$

No exemplo anterior, vimos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{4}. \quad (3.6)$$

Fazendo a mudança de variável

$$t = \alpha x \implies dt = x d\alpha,$$

temos que

$$t = 0 \implies \alpha = 0 \quad \text{e} \quad t \rightarrow +\infty \implies \alpha \rightarrow +\infty.$$

Dessa forma

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} x d\alpha,$$

ou seja

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \text{para todo } x > 0. \quad (3.7)$$

Exemplo 3.4 A integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \quad (3.8)$$

Antes de mais nada, vale ressaltar que a função e^{-x^2} não tem primitiva. Para resolver essa integral, é necessário conhecimento de Cálculo 2, de várias variáveis. Para tal, defina

$$R = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

O valor de R será determinado de uma forma inesperada. Primeiramente, observe que

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy. \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \end{aligned}$$

como $x \geq 0$ e $y \geq 0$, de acordo com a figura 3.4, é possível perceber que

$$r \geq 0 \quad e \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Lembrando também que o determinante do Jacobiano é dado por

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r,$$

pelo teorema da mudança de variáveis para integral dupla

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| e^{-r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr d\theta. \end{aligned}$$

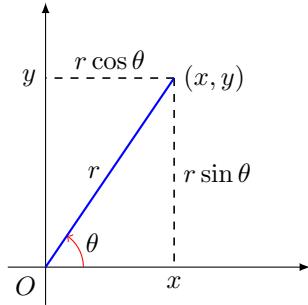


Figura 3.1: Mudança de Variável

Como

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t re^{-r^2} dr = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_0^t \\ &= - \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-t^2}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} R^2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

ou seja,

$$R = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exemplo 3.5 A integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{kt}}.$$

Fazendo a mudança de variável

$$x^2 = k\alpha^2 t \implies x = \sqrt{kt}\alpha \implies dx = \sqrt{kt}d\alpha$$

em que os limites de integração são tais que

$$x = 0 \implies \alpha = 0 \quad e \quad x \rightarrow +\infty \implies \alpha \rightarrow +\infty,$$

teremos, de acordo com o exercício anterior, que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \sqrt{k} e^{-k\alpha^2 t} d\alpha$$

o que implica em

$$\int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{kt}}.$$

Exemplo 3.6 A integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha x \, d\alpha, \quad (3.9)$$

com $k, t \neq 0$.

Observe, antes de mais nada, que a integral acima tem um x , que a princípio é livre. Ou seja, na resolução da integral com relação à variável α , o resultado dependerá de x . Dessa forma, definimos

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha x \, d\alpha.$$

Vamos supor, sem maiores detalhes, que é possível derivar F com relação à x e que a derivada com relação à x permuta com a integral com relação à α . Portanto, derivando F com relação a x e integrando por partes, temos que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha x \, d\alpha \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} [e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha x] \, d\alpha \\ &= \int_0^{+\infty} \underbrace{(-\alpha e^{-k\alpha^2 t})}_{v'} \underbrace{\sin \alpha x}_{u} \, d\alpha \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{e^{-kb^2 t}}{2kt} \sin \alpha x}_{v} \Big|_0^b - \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-k\alpha^2 t}}{2kt} \right) (x \cos \alpha x) \, d\alpha \\ &= \underbrace{\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{e^{-kb^2 t}}{2kt} \sin bx}_{=0} - \frac{x}{2kt} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha x \, d\alpha}_{F(x)} \\ &= -\frac{x}{2kt} F(x), \end{aligned}$$

ou seja

$$F'(x) = -\frac{x}{2kt} F(x) \iff F'(x) + \frac{x}{2kt} F(x) = 0. \quad (3.10)$$

Fica como exercício mostrar que

$$v'(\alpha) = -\alpha e^{-k\alpha^2 t} \implies v = \frac{e^{-k\alpha^2 t}}{2kt}$$

e

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{e^{-k\alpha^2 t}}{2kt} \sin \alpha x \right|_0^b = 0.$$

A equação em (3.10) é uma E.D.O. que tem solução via fator integrante, dada por

$$u(x) = e^{\int \frac{x}{2kt} dx} = e^{\frac{x^2}{4kt}}.$$

A explicação do fator integrante para solução de E.D.O.'s encontra-se no Anexo 3, deste capítulo. Assim

$$\frac{d}{dx} \left[F(x) e^{\frac{x^2}{4kt}} \right] = 0 \implies F(x) e^{\frac{x^2}{4kt}} = C \implies F(x) = C e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Como

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha x \, d\alpha$$

e lembrando do exercício 3.6 que

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha 0 \, d\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \, d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{kt}},$$

podemos, dessa forma, concluir que

$$C = F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \, d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{kt}}. \quad (3.11)$$

Portanto

$$F(x) = C e^{-\frac{x^2}{4kt}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}},$$

ou seja,

$$\int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha x \, d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}. \quad (3.12)$$

Exercício 3.1 Mostre que, se

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} \, d\alpha,$$

então

$$F'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Exercício 3.2 Mostre que

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin b\alpha}{\alpha} \, d\alpha = \frac{1}{a} \arctan \frac{b}{a}.$$

3.1 Anexo 3 - Fator Integrante

Nessa seção voltaremos nossos esforços para resolver equações diferenciais da forma

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t) \quad (3.13)$$

em que P e Q são funções definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Se Q e P não são funções nulas, a equação (3.13) não é separável. No entanto, com o uso de um artifício muito inteligente, conseguiremos transformar a equação acima em uma equação que pode ser integrada facilmente.

Primeiramente, multiplicaremos a equação (3.13) por uma função $\mu = \mu(t)$, chamada de fator integrante. Essa função μ será determinada posteriormente, mas antes de mais nada vamos exigir que ela nos ajude significativamente.

$$\underbrace{\mu(t) \frac{dy}{dt}}_{(1)} + P(t)\mu(t)y = Q(t)\mu(t). \quad (3.14)$$

Em seguida, faremos uma observação perspicaz para alterar a forma com que o termo em (1) está escrita acima. Pela regra da derivada do produto

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t) \frac{dy}{dt} + y \frac{d\mu}{dt} \Rightarrow \underbrace{\mu(t) \frac{dy}{dt}}_{(1)} = \frac{d}{dt}[\mu(t)y] - y \frac{d\mu}{dt}. \quad (3.15)$$

Substituindo a igualdade em (1) na equação (3.14), fica assim

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] - y \frac{d\mu}{dt} + P(t)\mu(t)y = Q(t)\mu(t). \quad (3.16)$$

Parece que ficou pior né? Mas se conseguirmos zerar o termo que apareceu

em (2), as coisas tendem a melhorar. Sendo assim, façamos isso:

$$\begin{aligned}
& -y \frac{d\mu}{dt} + P(t)\mu(t)y = 0 \\
\Rightarrow & \quad y \frac{d\mu}{dt} = P(t)\mu(t)y \quad (\text{corta } y) \\
\Rightarrow & \quad \frac{d\mu}{dt} = P(t)\mu(t) \quad (\text{usa separação de variáveis}) \\
\Rightarrow & \quad \frac{d\mu}{\mu} = P(t) dt \quad (\text{integrar}) \\
\Rightarrow & \quad \int \frac{d\mu}{\mu} = \int P(t) dt \Rightarrow \ln |\mu(t)| + c_1 = \int P(t) dt \\
\Rightarrow & \quad \ln |\mu(t)| = \int P(t) dt - c_1 \Rightarrow e^{\ln |\mu(t)|} = e^{\int P(t) dt} e^{-c_1} \\
\Rightarrow & \quad |\mu(t)| = e^{-c_1} e^{\int P(t) dt} \Rightarrow \mu(t) = \underbrace{\pm e^{-c_1}}_C e^{\int P(t) dt} \\
\Rightarrow & \quad \mu(t) = C e^{\int P(t) dt}
\end{aligned}$$

em que C pode ser qualquer constante real diferente de zero. Ou seja, para qualquer valor de $C \neq 0$, o termo em (2) vai zerar. Ora, sendo assim, vamos escolher o mais fácil, que é $C = 1$. Assim,

$$\mu(t) = e^{\int P(t) dt} \Rightarrow -y \frac{d\mu}{dt} + P(t)\mu(t)y = 0. \quad (3.17)$$

Logo, para essa escolha de μ , tem-se que a equação (3.16) fica da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = Q(t)\mu(t) \quad (3.18)$$

que é só ser integrada, pois o lado direito envolve uma derivada, sendo assim

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = Q(t)\mu(t) & \Rightarrow \int \frac{d}{dt}[\mu(t)y] dt = \int Q(t)\mu(t) dt \\
& \Rightarrow \mu y = \int Q(t)\mu(t) dt + C \\
& \Rightarrow y = \frac{\int Q(t)\mu(t) dt + C}{\mu}
\end{aligned}$$

e lembrando que o fator integrante é $\mu = e^{\int P(t) dt}$, a solução da equação (3.13) é

$$y = \frac{\int P(t)e^{\int P(t) dt} dt + C}{e^{\int P(t) dt}}. \quad (3.19)$$

Observação 3.1 Observe que, usando a regra da cadeia, a derivada do fator integrante é

$$\mu(t) = e^{\int P(t)dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}\mu(t) = \frac{d}{dt}e^{\int P(t)dt} = \left(\frac{d}{dt} \int P(t)dt \right) e^{\int P(t)dt} = P(t)e^{\int P(t)dt}$$

ou seja

$$\frac{d\mu}{dt} = P(t)\mu(t).$$

Assim, é mais fácil ver que, de fato

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\frac{dy}{dt} + y\frac{d\mu}{dt} = \mu\frac{dy}{dt} + P(t)\mu y,$$

o que justifica a equivalência entre as equações (3.14) e (3.18).

Capítulo 4

Transformada de Fourier

4.1 Definição e Exemplos

Este capítulo apresentará a ferramenta mais fantástica na resolução de uma classe de problemas, a Transformada de Fourier. A matemática apresentada neste capítulo, embora seja de fácil compreensão, é considerada, pelo autor, uma das invenções mais inteligentes da história da humanidade.

Como foi visto no exercício 1.20, a série de Fourier de uma função

$$f : (-p, p) \rightarrow \mathbb{R}$$

pode ser escrita da forma complexa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx/p},$$

em que

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{int/p} dt.$$

Se fizermos

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{p} \text{ e consequentemente } \Delta\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\pi}{p},$$

então $\frac{1}{p} = \frac{\Delta\alpha}{\pi}$ e, dessa forma,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{-in\pi t/p} dt \right] e^{-in\pi x/p} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-p}^p f(t) e^{i\alpha_n t} dt \right] e^{-i\alpha_n x} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p f(t) e^{i\alpha_n t} dt \right]}_{G(\alpha_n)} e^{-i\alpha_n x} \Delta\alpha
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Dessa forma, observe que a expressão resultante

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(\alpha_n) \Delta\alpha$$

nada mais é do uma soma de Riemann da função $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ considerado-se a partição

$$P = \left\{ \dots, -\frac{3\pi}{p}, -\frac{2\pi}{p}, -\frac{\pi}{p}, 0, \frac{\pi}{p}, \frac{2\pi}{p}, \dots, \frac{n\pi}{p}, \dots \right\}.$$

Logo, se

$$p \rightarrow +\infty \text{ então } \Delta\alpha \rightarrow 0$$

e portanto a somatória passa a ser uma integral, ou seja

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(\alpha_n) \Delta\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\alpha) d\alpha.$$

Assim, aplicando o limite na expressão (4.1)

$$\begin{aligned}
\lim_{p \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p f(t) e^{i\alpha_n t} dt \right] e^{-i\alpha_n x} \Delta\alpha \\
\implies f(x) &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p f(t) e^{i\alpha_n t} dt \right] e^{-i\alpha_n x} \Delta\alpha \\
\implies f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \\
\implies f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt \right] e^{-i\alpha x} d\alpha.
\end{aligned}$$

Sendo assim, temos a seguinte definição:

Definição 4.1 A Transformada de Fourier de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes é dada por

$$F(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \quad (4.2)$$

e a Transformada de Fourier Inversa é dada por

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (4.3)$$

Exemplo 4.1 A transformada de Fourier da função $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

Antes de mais nada, vale lembrar que

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

Portanto

$$e^{-|x|} = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Logo, pela definição estabelecida em (4.2), temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{e^{-|x|}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{i\alpha x} dx \\
&= \int_{-\infty}^0 e^x e^{i\alpha x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{i\alpha x} dx \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{(i\alpha+1)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{(i\alpha-1)x} dx \\
&= \lim_{b \rightarrow -\infty} \frac{e^{(i\alpha+1)x}}{i\alpha+1} \Big|_b^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{e^{(i\alpha-1)x}}{i\alpha-1} \Big|_0^b \\
&= \frac{1}{i\alpha+1} - \frac{1}{i\alpha+1} \underbrace{\lim_{b \rightarrow -\infty} e^{(i\alpha+1)b}}_{=0} + \underbrace{\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{(i\alpha-1)b}}_{=0} - \frac{1}{i\alpha-1} \\
&= \frac{1}{i\alpha+1} - \frac{1}{i\alpha-1} = \frac{i\alpha-1-i\alpha-1}{(i\alpha)^2-1} \\
&= \frac{-2}{-\alpha^2-1} = \frac{2}{\alpha^2+1},
\end{aligned}$$

em que usamos o fato de que $i^2 = -1$.

Vamos mostrar agora o porquê dos limites acima se anularem. Primeiramente, pela fórmula de Euler dada no Anexo 1 do primeiro capítulo, temos que

$$e^{(i\alpha-1)b} = e^{-b}(\cos \alpha b + i \sin \alpha b).$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{(i\alpha-1)b} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-b}(\cos \alpha b + i \sin \alpha b) \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \underbrace{e^{-b}}_{\rightarrow 0 \text{ limitada}} \underbrace{\cos \alpha b}_{\text{limitada}} + i \lim_{b \rightarrow +\infty} \underbrace{e^{-b}}_{\rightarrow 0 \text{ limitada}} \underbrace{\sin \alpha b}_{\text{limitada}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} e^{(i\alpha+1)b} = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{F}\{e^{-|x|}\} = \frac{2}{\alpha^2+1}. \quad (4.4)$$

Exercício 4.1 Defina a função

$$u_b(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq b, \\ 0, & |x| > b. \end{cases}$$

Calcule $\mathcal{F}\{u_b(x)\}$.

Exercício 4.2 Determine uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{\sin \alpha b}{\alpha}$.

Exercício 4.3 Calcule $\mathcal{F}\{e^{-a|x|}\}$, em que $a > 0$.

Exercício 4.4 Calcule $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{a}{a^2 + \alpha^2}\right\}$.

Exercício 4.5 Mostre que $\mathcal{F}\{F(x)\} = 2\pi f(-\alpha)$.

Exercício 4.6 Calcule $\mathcal{F}\left\{\frac{a}{a^2 + x^2}\right\}$.

Exercício 4.7 Dado $\varepsilon > 0$, considere a seguinte função

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

a) Faça um esboço do gráfico de δ_ε para diferentes valores de $\varepsilon > 0$.

b) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = 1,$$

para todo $\varepsilon > 0$.

c) Use as identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta,$$

para mostrar que

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

d) Com o auxílio do item anterior, mostre que

$$\mathcal{F}\{\delta_\varepsilon(x)\} = \frac{\sin \alpha \varepsilon}{\alpha \varepsilon}.$$

e) Mostre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}\{\delta_\varepsilon(x)\} = 1. \quad (4.5)$$

Observação 4.1 Esboçando o gráfico de δ_ε para valores de ε cada vez mais próximos de zero, podemos definir

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0, \end{cases}$$

em que, recorrendo às igualdades obtidas no exercício anterior, no dá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad e \quad \mathcal{F}\{\delta(x)\} = 1. \quad (4.6)$$

Exercício 4.8 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Defina a convolução de f com g por

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau)d\tau.$$

Observe que a função acima ainda é uma função da variável x .

a) Mostre que $f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$.

b) Mostre que

$$u_b(x) * \left(\frac{a}{x^2 + a^2} \right) = a \int_{-b}^b \frac{1}{a^2 + (\tau - x)^2} d\tau.$$

Calcule a integral acima.

c) Se $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha)$ e $\mathcal{F}\{g(x)\} = G(\alpha)$, então o teorema da convolução nos diz que

$$\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = F(\alpha)G(\alpha).$$

Você seria capaz de explicar a igualdade acima? Calcule $\mathcal{F}\{u_b(x) * \left(\frac{a}{x^2 + a^2} \right)\}$.

Exercício 4.9 Use os resultados acima para mostrar que

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\alpha} \frac{\sin b\alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{1}{a} \arctan \frac{b}{a}.$$

Exercício 4.10 Mostre que, se $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha)$, então valem as seguintes propriedades:

- a) $\mathcal{F}\{f(-x)\} = F(-\alpha);$
- b) $\mathcal{F}\{f(x/a)\} = aF(a\alpha);$
- c) $\mathcal{F}\{f(x - b)\} = e^{i\alpha b}F(\alpha);$
- d) $\mathcal{F}\{f(x)e^{icx}\} = F(\alpha + c).$

Exercício 4.11 Mostre que, se $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha)$, então

$$\mathcal{F}\{f(x) \cos \lambda x\} = \frac{1}{2} (F(\alpha + \lambda) + F(\alpha - \lambda))$$

e

$$\mathcal{F}\{f(x) \sin \lambda x\} = \frac{1}{2i} (F(\alpha + \lambda) - F(\alpha - \lambda)).$$

Exercício 4.12 Calcule as transformadas de Fourier das funções

$$f(x) = e^{-a|x|} \cos \lambda x \quad e \quad g(x) = e^{-ax^2} \sin \lambda x.$$

Exercício 4.13 Calcule

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} \cos(bx) dx, \quad a > 0.$$

Exercício 4.14 Mostre que se $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha)$ e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0,$$

então valem as seguintes igualdades

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = -i\alpha F(\alpha) \quad e \quad \mathcal{F}\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha).$$

4.2 Transformada de Fourier Seno e Transformada de Fourier Cosseno

Foram vistos nos exercícios 1.4 e 1.5 do primeiro capítulo que, se $f : (0, p) \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser escrita da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p},$$

então

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) dt \quad e \quad a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos \frac{n\pi t}{p} dt,$$

e se $f : (0, p) \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser escrita da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p},$$

então

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin \frac{n\pi t}{p} dt.$$

Se nos valermos de um raciocínio análogo ao do que foi usado no início do capítulo, podemos mostrar que

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(t) \sin(\alpha t) dt \right] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (4.7)$$

e

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(t) \cos(\alpha t) dt \right] \cos(\alpha x) d\alpha. \quad (4.8)$$

Dessa forma, podemos definir:

Definição 4.2 As Transformadas de Fourier Seno e Cosseno de são dadas, respectivamente, por

$$F_s(\alpha) = \mathcal{F}_s\{f(x)\} = \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx \quad (4.9)$$

e

$$F_c(\alpha) = \mathcal{F}_c\{f(x)\} = \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx. \quad (4.10)$$

As Transformadas Inversas Seno e Cosseno são

$$\mathcal{F}_s^{-1}\{F_s(\alpha)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_s(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha \quad (4.11)$$

e

$$\mathcal{F}_c^{-1}\{F_c(\alpha)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_c(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha. \quad (4.12)$$

Exemplo 4.2 As Transformadas de Fourier Seno e Cosseno da função e^{-x} .

Pela definição estabelecida em (4.10), a Transformada de Fourier Seno é

$$F_s(\alpha) = \mathcal{F}_s\{e^{-x}\} = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(\alpha x) dx$$

e a Transformada de Fourier Cosseno é

$$F_c(\alpha) = \mathcal{F}_c\{e^{-x}\} = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(\alpha x) dx.$$

Pelo exemplo 3.1 do capítulo anterior, temos que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin kt dt = \frac{k}{s^2 + k^2}, \quad s > 0 \quad e \quad k \in \mathbb{R}.$$

Fazendo as mudanças

$$t = x, \quad s = 1 \quad e \quad k = \alpha,$$

obtemos

$$F_s(\alpha) = \mathcal{F}_s\{e^{-x}\} = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(\alpha x) dx = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}.$$

O cálculo de $\mathcal{F}_c\{e^{-x}\}$ será feito utilizando integral por partes.

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(\alpha x) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \underbrace{e^{-x}}_u \underbrace{\cos(\alpha x)}_{dv} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{e^{-x}}_u \underbrace{\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}}_v \Big|_0^b - \int_0^b \underbrace{(-e^{-x})}_{du} \underbrace{\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}}_v dx \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \underbrace{\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-b} \sin(\alpha b)}_{=0} + \frac{1}{\alpha} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(\alpha x) dx}_{=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathcal{F}_s\{e^{-x}\} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \quad e \quad \mathcal{F}_c\{e^{-x}\} = \frac{1}{1 + \alpha^2}. \quad (4.13)$$

Exercício 4.15 Calcule

$$\mathcal{F}_s\{xe^{-x}\} \quad e \quad \mathcal{F}_c\{xe^{-x}\}.$$

Exercício 4.16 Mostre que, se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0,$$

então

$$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -\alpha^2 F_s(\alpha) + \alpha f(0) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -\alpha^2 F_c(\alpha) - f'(0). \quad (4.14)$$

Exercício 4.17 Dê exemplo de uma função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável que satisfaz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

e no entanto é tal que o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

é diferente de zero.

4.3 Transformada de Fourier Aplicada à Problemas de Contorno

Antes de dar início ao estudo de problemas de contorno utilizando a Transformada de Fourier, precisamos estabelecer algumas identidades fundamentais. Suponhamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0.$$

Nosso intuito aqui é estabelecer uma relação entre a transformada de Fourier de f'' , f' e f . Se $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha)$, então, utilizando integração por partes,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f'(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{i\alpha x} dx \\ &= f(x) e^{i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) i\alpha e^{i\alpha x} dx \\ &= \underbrace{\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) e^{i\alpha s}}_{(1)} - \underbrace{\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) e^{i\alpha t}}_{(2)} \\ &\quad - i\alpha \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx}_{\mathcal{F}\{f(x)\}}. \end{aligned}$$

As integrais em (1) e (2) são nulas. De fato, lembrando da fórmula de Euler que

$$e^{i\alpha s} = \cos \alpha s + i \sin \alpha s,$$

temos que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +\infty} f(s)e^{i\alpha s} &= \lim_{s \rightarrow +\infty} f(s)(\cos \alpha s + i \sin \alpha s) \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \underbrace{f(s)}_{\rightarrow 0 \text{ limitada}} \underbrace{\cos \alpha s}_{+i} + i \lim_{s \rightarrow +\infty} \underbrace{f(s)}_{\rightarrow 0 \text{ limitada}} \underbrace{\sin \alpha s}_{0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = -i\alpha \mathcal{F}\{f(x)\}. \quad (4.15)$$

A forma de se determinar $\mathcal{F}\{f''(x)\}$ é imediata tendo-se em mãos a equação acima. De fato, trocando f por f' na igualdade acima, teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f''(x)\} &= -i\alpha \mathcal{F}\{f'(x)\} \\ &= -i\alpha(-i\alpha \mathcal{F}\{f(x)\}) \\ &= -\alpha^2 \mathcal{F}\{f(x)\}. \end{aligned}$$

Ou seja, valem as seguintes igualdades

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = -i\alpha F(\alpha) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha). \quad (4.16)$$

Exemplo 4.3 Consideremos então, por exemplo, resolver a equação

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t > 0, \quad (4.17)$$

sujeita à seguinte condição de contorno

$$u(x, 0) = f(x). \quad (4.18)$$

Essa é a equação do calor, considerando-se um fio delgado muito grande. Aqui, vamos supor que

$$u(x, t)$$

é a solução do problema. Definiremos então

$$\mathcal{F}\{u(x, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\alpha x} dx = U(\alpha, t). \quad (4.19)$$

A ideia dessa técnica é a mesma utilizada na aplicação da Transformada de Laplace para soluções de Equações Diferenciais. Para tal, precisamos antes

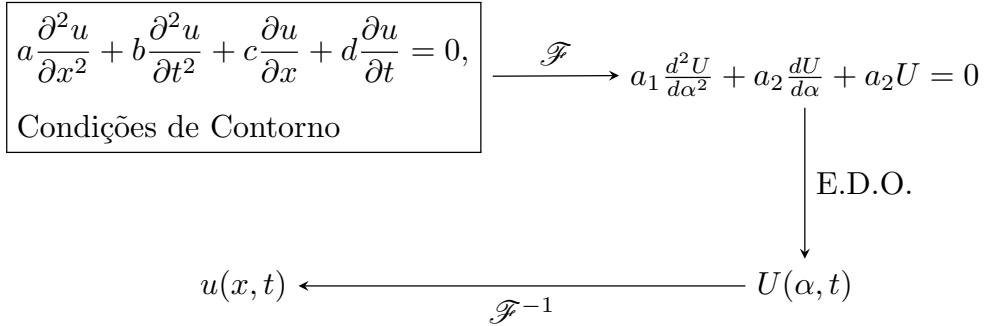


Figura 4.1: A Transformada de Fourier

estabelecer duas igualdades. Primeiramente, de acordo a segunda igualdade de (4.16), temos que

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = -\alpha^2 U(\alpha, t). \quad (4.20)$$

Além disso, vale também a seguinte igualdade

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{i\alpha x} dx = \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\alpha x} dx}_{U(\alpha, t)} = \frac{dU}{dt}.$$

Ou seja, a derivada com relação à variável t comuta com a integral com respeito à variável x . Você pode integrar na variável x e depois derivar com relação à t , ou pode fazer o contrário, derivar com relação à t e depois integrar em x que o resultado é o mesmo.

Feitas tais considerações, aplicaremos a transformada de Fourier em ambos os lados da equação diferencial parcial dada em (4.3).

$$\begin{aligned} k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} &\implies \mathcal{F} \left\{ k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} \\ &\implies k \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} \\ &\implies -k\alpha^2 U(\alpha, t) = \frac{dU}{dt}. \end{aligned}$$

Ou seja, a transformada de Fourier transforma a equação diferencial parcial (4.3) na equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{dU}{dt} + k\alpha^2 U = 0,$$

cuja solução é

$$U(\alpha, t) = Ce^{-k\alpha^2 t}, \quad (4.21)$$

em que C é uma constante.

Faremos $t = 0$ na igualdade abaixo

$$\mathcal{F}\{u(x, t)\} = U(\alpha, t) \implies \mathcal{F}\{u(x, 0)\} = U(\alpha, 0).$$

Por um lado, lembrando que $u(x, 0) = f(x)$,

$$U(\alpha, t) = \mathcal{F}\{u(x, 0)\} = \mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha).$$

Por outro lado, da equação (4.21), tem-se que

$$U(\alpha, 0) = Ce^{-k\alpha^2 0} = C.$$

Logo,

$$C = F(\alpha)$$

e consequentemente

$$U(\alpha, t) = F(\alpha)e^{-k\alpha^2 t}.$$

Essa não é a resposta final. Vale lembrar que $U(\alpha, t) = \mathcal{F}\{u(x, t)\}$. A resposta final será dada aplicando-se a transformada inversa em ambos os lados, ou seja

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\{u(x, t)\}.$$

Dessa forma

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\{u(x, t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (4.22)$$

Exemplo 4.4 Usaremos o desenvolvimento do exemplo anterior pra resolver a equação

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

sujeita à condição de contorno

$$u(x, 0) = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vimos que a solução do problema acima é

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\{u(x, t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

em que

$$F(\alpha) = \mathcal{F}\{u(x, 0)\} = \mathcal{F}\{e^{-|x|}\}.$$

No entanto, foi visto no exemplo 4.1 que

$$\mathcal{F}\{e^{-|x|}\} = \frac{2}{\alpha^2 + 1}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\alpha^2 + 1} e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x} d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k\alpha^2 t}}{\alpha^2 + 1} e^{-i\alpha x} d\alpha. \end{aligned}$$

A integral acima tem solução numérica.

Exemplo 4.5 Vamos resolver agora a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, \quad 0 < y < \pi, \quad (4.23)$$

sujeita às condições iniciais

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = e^{-x}, \quad (4.24)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad 0 < y < \pi. \quad (4.25)$$

Suponhamos que a solução do problema acima é dada pela função

$$u(x, y), \quad x > 0, \quad 0 < y < \pi.$$

Como $x > 0$, usaremos a Transformada de Fourier cosseno. Assim, definimos

$$\mathcal{F}_c\{u(x, y)\} = \int_0^{+\infty} u(x, y) \cos \alpha x \, dx = U_c(\alpha, y) \quad (4.26)$$

e consequentemente

$$u(x, y) = \mathcal{F}_c^{-1}\{U_c(\alpha, y)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} U_c(\alpha, y) \cos \alpha x d\alpha. \quad (4.27)$$

Uma igualdade importante para nosso exemplo é a equação (4.14) do exercício 4.16, dada por

$$\mathcal{F}_c\{f(x)\} = F_c(\alpha) \implies \mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -\alpha^2 F_c(\alpha) - f'(0). \quad (4.28)$$

Adequando a última igualdade acima ao nosso problema, teremos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} &= -\alpha^2 U_c(\alpha, y) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} \\ &= -\alpha^2 U_c(\alpha, y),\end{aligned}\tag{4.29}$$

em que o cancelamento ocorre devido à condição (4.25).

Além disso, assim como foi feito no exemplo anterior

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos \alpha x \, dx = \frac{d^2}{dy^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} u(x, y) \cos \alpha x \, dx}_{U_c(\alpha, y)} \\ \implies \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} &= \frac{d^2 U_c}{dy^2}.\end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Fourier Cosseno em ambos os lados da equação 4.23, teremos

$$\mathcal{F}_c \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} = \mathcal{F}_c \{0\} \implies \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \right\} + \mathcal{F}_c \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} \tag{4.30}$$

$$\implies -\alpha^2 U_c(\alpha, y) + \frac{d^2 U_c}{dy^2} = 0 \implies \frac{d^2 U_c}{dy^2} - \alpha^2 U_c(\alpha, y) = 0. \tag{4.31}$$

A última equação diferencial tem como solução

$$U_c(\alpha, y) = C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y. \tag{4.32}$$

Para determinar as constantes C_1 e C_2 , utilizaremos as condições de contorno dadas em (4.24). Primeiramente, como $U_c(\alpha, y) = \mathcal{F}_c \{u(x, y)\}$ e $u(x, 0) = 0$, então, por um lado

$$U_c(\alpha, 0) = \mathcal{F}_c \{u(0, y)\} = \mathcal{F}_c \{0\} = 0$$

e, por outro lado, usando a identidade obtida em (4.32),

$$U_c(\alpha, 0) = C_1 \cosh \alpha 0 + C_2 \sinh \alpha 0 = C_1.$$

Das últimas duas igualdades, concluímos que $C_1 = 0$.

Para determinar C_2 , usaremos a igualdade

$$\mathcal{F}_c \{e^{-x}\} = \frac{1}{1 + \alpha^2}$$

estabelecida na equação (4.13) do exercício 4.2. Como, por um lado

$$U_c(\alpha, \pi) = C_2 \sinh \alpha \pi$$

e, por outro lado,

$$U_c(\alpha, \pi) = \mathcal{F}_c \{u(x, \pi)\} = \mathcal{F}_c \{e^{-x}\} = \frac{1}{1 + \alpha^2},$$

concluímos que

$$C_2 \sinh \alpha \pi = \frac{1}{1 + \alpha^2} \implies C_2 = \frac{1}{(1 + \alpha^2) \sinh \alpha \pi}.$$

Dessa forma,

$$U_c(\alpha, y) = \frac{\sinh \alpha y}{(1 + \alpha^2) \sinh \alpha \pi}.$$

Essa ainda não é a solução. Vale lembrar que

$$u(x, y) = \mathcal{F}_c^{-1} \{U_c(\alpha, y)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} U_c(\alpha, y) \cos \alpha x d\alpha. \quad (4.33)$$

Portanto,

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sinh \alpha y}{(1 + \alpha^2) \sinh \alpha \pi} \cos \alpha x d\alpha. \quad (4.34)$$

Exercício 4.18 Resolva

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

sujeito à

$$u(x, 0) = e^{-x^2}.$$

Exercício 4.19 a) Calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha, \quad \text{em que } x > 0.$$

b) Resolva

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

sujeito à

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0 \quad \text{e} \quad u(0, t) = u_0, \quad t > 0.$$

c) Utilize o item anterior para mostrar que a solução do problema acima pode ser reescrita sob a forma

$$u(x, t) = u_0 - \frac{2u_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} d\alpha.$$

Exercício 4.20 Resolva

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad y > 0,$$

sujeito às condições iniciais

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = e^{-y},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

Exercício 4.21 Determine a temperatura $u(x, t)$ em uma haste semi-infinita se $u(0, t) = u_0$ e $u(x, 0) = 0$, $x > 0$.

Exercício 4.22 Determine a temperatura $u(x, t)$ em uma haste semi-infinita se $u(0, t) = 1$, $t > 0$ e $u(x, 0) = e^{-x}$, $x > 0$.

Exercício 4.23 Determine o deslocamento $u(x, t)$ de uma corda semi-infinita se

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = xe^{-x}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

Exercício 4.24 Resolva

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y > 0,$$

sujeito às seguintes condições

$$u(0, y) = f(y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

Exercício 4.25 Resolva o exercício ?? se as condições de contorno em $x = 0$ e $x = \pi$ são invertidas: $u(0, y) = e^{-y}$ e $u(\pi, y) = 0$.

4.3.1 Algumas Repostas

Exercício ???. $u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(\alpha x)}{(1 + \alpha^2) \sinh(\alpha a)} \cos(\alpha y) d\alpha$

Exercício 4.21. $u(x, y) = u_0 - \frac{2u_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} d\alpha$

Exercício 4.25. $u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(\alpha(\pi - x))}{(1 + \alpha^2) \sinh(\alpha\pi)} \cos(\alpha y) d\alpha$

4.4 Caso especial

Dado $\varepsilon > 0$, considere a seguinte função

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

dada no exercício ???. Coube ao leitor, no exercício em questão, fazer um esboço do gráfico de δ_ε para diferentes valores de $\varepsilon > 0$, como na figura 4.2. Vale lembrar também que $|x| \leq \varepsilon$ é o mesmo que $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$. Observe que

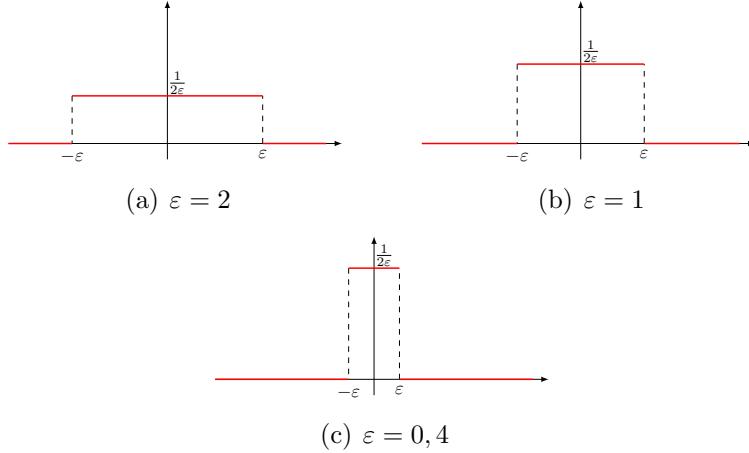


Figura 4.2: Função δ_ε para diferentes valores de ε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dx = \frac{x}{2\varepsilon} \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 1 \quad (4.35)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Ou seja, esta função tem “energia” ou “calor total” igual a um independentemente do valor de ε . Além disso, a transformada de Fourier da função δ_ε é

$$\mathcal{F}\{\delta_\varepsilon(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) e^{i\alpha x} dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} e^{i\alpha x} dx = \frac{e^{i\alpha x}}{2i\alpha\varepsilon} \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{e^{i\alpha\varepsilon} - e^{-i\alpha\varepsilon}}{2i\alpha\varepsilon}. \quad (4.36)$$

Devido a Euler, no anexo do capítulo um, valem as seguintes identidades

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta,$$

que somadas e subtraídas nos fornecem duas outras identidades importantíssimas, quais sejam:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \end{aligned}$$

Usando a última identidade descrita acima, voltando na igualdade em (4.36), temos que

$$\mathcal{F}\{\delta_\varepsilon(x)\} = \frac{e^{i\alpha\varepsilon} - e^{-i\alpha\varepsilon}}{2i\alpha\varepsilon} = \frac{1}{\alpha\varepsilon} \cdot \frac{e^{i\alpha\varepsilon} - e^{-i\alpha\varepsilon}}{2i} = \frac{\sin \alpha\varepsilon}{\alpha\varepsilon}.$$

Observe agora que, para todo $\alpha \neq 0$, usando o primeiro limite fundamental do cálculo, teremos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}\{\delta_\varepsilon(x)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\sin \alpha\varepsilon}{\alpha\varepsilon} = 1. \quad (4.37)$$

De acordo com a figura 4.2, para valores de ε cada vez mais próximos de zero, podemos definir

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0. \end{cases}$$

De acordo com as igualdades em (??) e (??), temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \text{e} \quad \mathcal{F}\{\delta(x)\} = 1. \quad (4.38)$$

Dadas as observações acima, podemos considerar um caso muito interessante que será descrito abaixo.

Problema do calor com um condição especial

Considere o problema

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (4.39)$$

sujeito à seguinte condição:

$$u(x, 0) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.40)$$

Definiremos $u = u(x, t)$ como sendo a solução do problema dado e sua transformada de Fourier por

$$\mathcal{F}\{u(x, t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{i\alpha x} dx = U(\alpha, t).$$

Assim vale lembrar, da seção anterior, que

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = -\alpha^2 U(\alpha, t) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Aplicado a transformada de Fourier na equação (2.14), lembrando que \mathcal{F} é linear e utilizando as relações mencionadas acima, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} \implies k \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} \\ &\implies -k\alpha^2 U(\alpha, t) = \frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned}$$

A última igualdade, que pode ser escrita como

$$\frac{\partial U}{\partial t} + k\alpha^2 U(\alpha, t) = 0$$

é uma equação diferencial ordinária de ordem um e separável. A solução, cujos detalhes serão omitidos, é dada por

$$U(\alpha, t) = C e^{-k\alpha^2 t}, \quad (4.41)$$

em que C é uma constante determinada a posteriori.

Usando o fato de que $u(x, 0) = \delta(x)$ e de que $\mathcal{F}\{u(x, t)\} = U(\alpha, t)$, por um lado, pela equação (4.41), temos que

$$U(\alpha, 0) = \mathcal{F}\{u(x, 0)\} = C e^{-k\alpha^2 0} = C.$$

Por outro lado, pela igualdade (4.44), temos também

$$U(\alpha, 0) = \mathcal{F}\{u(x, 0)\} = \mathcal{F}\{\delta(x)\} = 1,$$

e assim concluímos que $C = 1$. Logo, substituindo em (4.41), concluímos que

$$U(\alpha, t) = e^{-k\alpha^2 t}.$$

A solução do problema inicial se dá aplicando-se a Transformada Inversa em ambos os lados da última igualdade

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(\alpha, t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-k\alpha^2 t}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Concentraremos nossos esforços agora para resolver a última integral acima. Observe inicialmente que, mais uma vez utilizando a identidade de Euler,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x} d\alpha &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} (\cos \alpha x - i \sin \alpha x) d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha x d\alpha - i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \sin \alpha x d\alpha \end{aligned}$$

Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-k\alpha^2 t}}_{\text{par}} \underbrace{\cos \alpha x}_{\text{par}} d\alpha = 2 \int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha x d\alpha$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-k\alpha^2 t}}_{\text{par}} \underbrace{\sin \alpha x}_{\text{ímpar}} d\alpha = 0,$$

uma vez que os intervalos são simétricos, temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x} d\alpha = 2 \int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha x d\alpha. \quad (4.42)$$

Observação: o raciocínio acima não pode ser usado de maneira leviana. Isso só foi possível uma vez que a integral em ambos os casos converge em qualquer subconjunto de \mathbb{R} . Os detalhes serão omitidos já que não fazem parte

dos objetivos do curso. Observe que o mesmo raciocínio não se pode aplicar por exemplo à integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos t \, dt.$$

Já vimos, no exemplo 3.6 do capítulo anterior, que vale a seguinte igualdade

$$\int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha x \, d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}. \quad (4.43)$$

Portanto

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x} d\alpha = \frac{2}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha x \, d\alpha = \frac{1}{2\sqrt{kt}\pi} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Ou seja, chegamos à nossa tão desejada solução

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{kt}\pi} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Fazendo agora as substituições $t = \sigma^2$ e $k = \frac{1}{2}$ e trocando $x \mapsto x - \mu$ obtemos exatamente uma distribuição Gaussiana

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{x - \mu}{\sigma}\right]^2\right).$$

Exercício 4.26 Dados $\varepsilon, \mu_p > 0$, considere a seguinte função

$$\mu_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\mu_p}{2\varepsilon}, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Defina

$$\mu(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mu_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0. \end{cases}$$

a) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x) dx = \mu_p \quad e \quad \mathcal{F}\{\mu(x)\} = \mu_p. \quad (4.44)$$

b) Mostre que o problema

$$E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - U \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (4.45)$$

sujeito à seguinte condição:

$$c(x, 0) = \mu(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.46)$$

tem como solução a função

$$c(x, t) = \frac{\mu_p}{2\sqrt{Et\pi}} e^{-\frac{(x-Ut)^2}{4Et}}.$$

Capítulo 5

Números Complexos

Considere a seguinte equação do segundo grau

$$x^2 - 6x + 13 = 0. \quad (5.1)$$

Usando a fórmula de Bhaskara*, temos que

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{-16}}{2}.$$

Se considerarmos que $\sqrt{-16} = \sqrt{16(-1)} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4\sqrt{-1}$, então as raízes da equação (5.1) são da forma

$$x_1 = 3 + 2\sqrt{-1} \text{ e } x_2 = 3 - 2\sqrt{-1}.$$

Mas o que é $\sqrt{-1}$? Nossa objetivo aqui não é responder essa última pergunta, vamos simplesmente tratar $\sqrt{-1}$ como um número, que será denotado por

$$i = \sqrt{-1} \quad (5.2)$$

e, consequentemente

$$i^2 = -1. \quad (5.3)$$

Dadas tais definições, é possível afirmar que

$$x_1 = 3 + 2i \text{ e } x_2 = 3 - 2i$$

são as raízes da equação

$$x^2 - 6x + 13 = 0.$$

*Algumas pessoas dizem que essa fórmula não foi desenvolvida por Bhaskara. Como ele não está presente pra dizer que sim ou que não, e como essa denominação é a mais conhecida, usaremos o nome dele.

De fato, fazendo essa única consideração, de que $i^2 = -1$, e respeitando as demais regras algébricas, tratando i como uma constante que de fato é, teremos

$$\begin{aligned}x_1^2 - 6x_1 + 13 &= (3 + 2i)^2 - 6(3 + 2i) + 13 \\&= 9 + 12i + (2i)^2 - 18 - 12i + 13 \\&= 9 + 2^2 \underbrace{i^2}_{-1} - 5 \\&= 9 - 4 - 5 \\&= 0.\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que

$$x_2^2 - 6x_2 + 13 = 0.$$

Além disso, considerando apenas que $i^2 = -1$ e respeitando algumas propriedades algébricas básicas, podemos ir um pouco além:

$$\begin{aligned}i &= \sqrt{-1} \\i^2 &= -1 \\i^3 &= i^2i = -i \\i^4 &= i^2i^2 = 1 \\i^5 &= i^4i = i \\i^6 &= i^4i^2 = -1\end{aligned}\tag{5.4}$$

e assim sucessivamente.

5.1 O Conjunto dos Números Complexos

Dadas as considerações acima, podemos definir um novo conjunto de números, “maior” do que os números reais, que engloba as raízes da equação $x^2 - 6x + 13 = 0$. Esse conjunto é chamado de Conjunto dos Números Complexos, e será denotado por

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i = \sqrt{-1}\}.$$

Os números complexos serão designados na maioria das vezes pela letra z . Dessa forma, se $z \in \mathbb{C}$, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$z = a + bi.$$

O número a , que é real, é chamado de **parte real** de z ou, em símbolo,

$$a = \operatorname{Re}(z).$$

O número b , que também é real, é chamado de **parte imaginária** de z ou, em símbolo,

$$b = \operatorname{Im}(z).$$

Valem as seguintes propriedades dos números complexos:

Propriedade 5.1 *Se a, b, c e d são números reais, então*

- a) $0i = i0 = 0;$
- b) $ai = ia;$
- c) $a + bi = c + di \iff a = c \text{ e } b = d;$
- d) $a + bi = 0 \iff a = 0 \text{ e } b = 0;$
- e) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$
- f) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i;$
- g) $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$

Os dois últimos itens não devem ser decorados. São consequência da propriedade distributiva e do fato de que $i^2 = -1$.

5.2 O Conjugado Complexo e Divisão

Dado um número complexo

$$z = a + bi,$$

o seu **conjugado complexo**, denotado por \bar{z} , é o número

$$\bar{z} = a - bi.$$

Ou seja, \bar{z} é obtido trocando-se o sinal da parte imaginária de z . Naturalmente

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Um aspecto interessante do conjugado complexo é que, se $z = a + bi$, então

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2,$$

ou seja, para todo $z \in \mathbb{C}$, tem-se que $z\bar{z} \in \mathbb{R}$.

Feitas essas considerações, podemos agora definir a divisão entre dois números complexos. Por exemplo, se $z = c + di$, quais seriam a parte real e a parte imaginária do número

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{c + di}?$$

É claro que, se $d \neq 0$, então

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \neq \frac{1}{c} \text{ e } \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \neq \frac{1}{d}.$$

O processo a seguir, que consiste em multiplicar numerador e denominador por \bar{z} , pode ser chamado de racionalização. Assim

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{c - di}{c^2 + d^2} = \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{di}{c^2 + d^2},$$

ou seja,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{c + di}\right) = \frac{c}{c^2 + d^2} \text{ e } \operatorname{Im}\left(\frac{1}{c + di}\right) = -\frac{d}{c^2 + d^2}.$$

Analogamente, se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e $z_2 \neq 0$, então

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}.$$

Não será necessário neste momento desenvolver os termos para determinar parte real e parte imaginária do quociente. O mais importante aqui é entender o processo.

Valem as seguintes propriedades envolvendo o conjugado de números complexos:

Propriedade 5.2 Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e $z_2 \neq 0$, então:

a) $\overline{z_2 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2};$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2};$

c) se $w = \frac{1}{z_2}$, então $\overline{w} = \frac{1}{\overline{z}_2};$

$$d) \text{ se } w = \frac{z_1}{z_2}, \text{ então } \bar{w} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Por exemplo, para o item b), se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, por um lado $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \implies \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (ac - bd) - (ad + bc)i$.

Por outro lado

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i.$$

A prova das demais igualdades ficam como exercício.

5.3 O Plano Complexo

Embora você possa pensar que essa seção trata de um plano muito complicado de construção de uma malha rodoviária em que não há engarrafamentos, o que trataremos é um bocado mais fácil. O Plano Complexo nada mais é do que uma forma de representar os números complexos em um plano cartesiano, em que a parte real será representada no eixo das abscissas e a parte imaginária será representada no eixo das ordenadas.

Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$ arbitrário. Demarcando o número real a no eixo das abscissas e b no eixo das ordenadas, considere as retas r e s , a reta r passa pelo ponto a e é paralela ao eixo das ordenadas e a reta s passa pelo ponto b e é paralela ao eixo das abscissas. O ponto z será representado exatamente na interseção entre as retas r e s , como mostra a figura 5.3

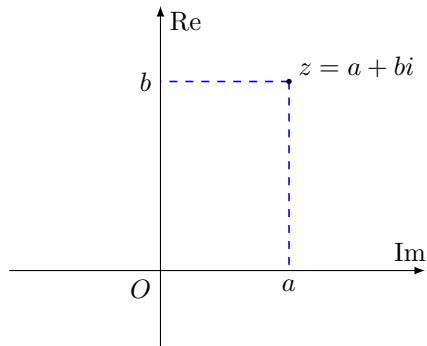


Figura 5.1: O Plano Complexo

Ainda no plano complexo, considere o segmento que liga a origem O ao ponto z , como mostra a figura 5.3. O comprimento desse segmento será denotado por $|z|$. Pelo Teorema de Pitágoras, $|z|^2 = a^2 + b^2$ e, consequentemente

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

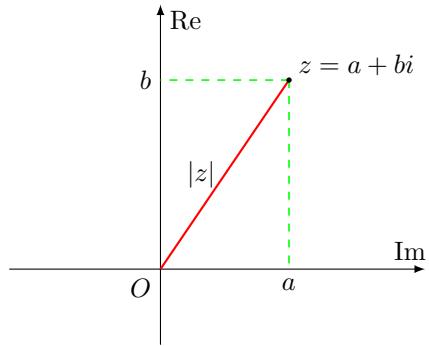


Figura 5.2: Módulo

Considere por exemplo os números

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 + 2i, \\ z_2 &= 3 - i, \\ z_3 &= 2 + 3i. \end{aligned}$$

Esses são tais que

$$\begin{aligned} r_1 = |z_1| &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \\ r_2 = |z_2| &= \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}, \\ r_3 = |z_3| &= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Os números z_1 , z_2 e z_3 estão representados na figura 5.3.

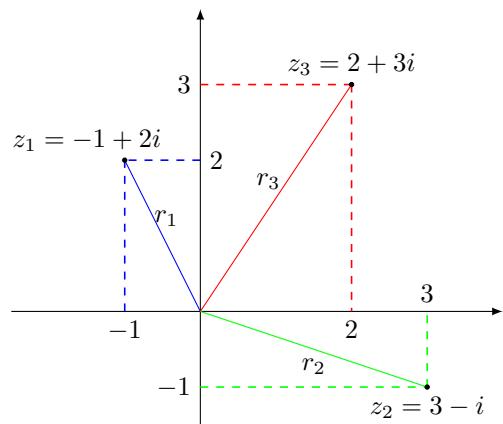


Figura 5.3: Exemplos

5.4 Representação Polar de um Número Complexo

Dado um número complexo $z = a + bi$, vimos que existe uma forma de representar esse número em um plano complexo, considerando-se a parte real e a parte imaginária. No entanto, podemos determinar uma outra forma (única) de representar esse número se $z \neq 0$. Se considerarmos $r = |z|$ e θ o ângulo compreendido entre o eixo real e o segmento que une a origem ao ponto z no sentido anti-horário, com $0 \leq \theta < 2\pi$, pela figura 5.4 é possível ver que

$$a = r \cos \theta \quad \text{e} \quad b = r \sin \theta.$$

Como $z = a + bi$, então

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \tag{5.5}$$

é a representação polar do número z .

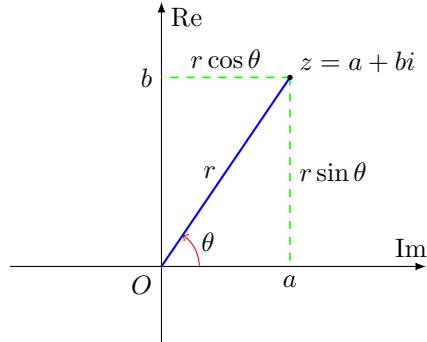


Figura 5.4: Representação Polar

Por exemplo, considere o número complexo

$$z = 1 + \sqrt{3}i,$$

como mostra a figura 5.4.

Primeiramente

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Além disso

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{6}.$$

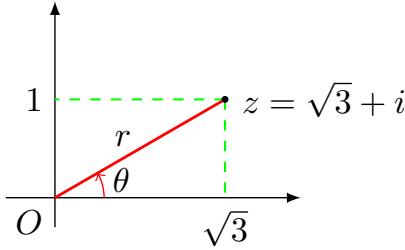


Figura 5.5: Representação Polar de $z = 1 + \sqrt{3}i$

Portanto

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Dados dois números complexos z_1 e z_2 , consideremos suas respectivas representações polares

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 &= r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2). \end{aligned}$$

O produto entre esses dois números é dado por

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2))], \end{aligned}$$

em que usamos as identidades trigonométricas do cosseno e seno da soma. Portanto, o produto entre dois números é obtido multiplicando-se os módulos e somando-se os argumentos. Fica como exercício mostrar que, se $z_2 \neq 0$, então o quociente é tal que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (5.6)$$

Como consequência da multiplicação, se z pode ser escrito como

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

então

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta).$$

Consequentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale a seguinte regra

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (5.7)$$

Fica como exercício mostrar que, se $n \in \mathbb{N}$, então

$$z^{-n} = r^{-n}[\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)], \quad (5.8)$$

ou seja, a identidade obtida na equação (5.7) vale para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Por exemplo, considere o número complexo

$$z = 1 + i.$$

Vamos calcular z^8 . Para tal, antes de mais nada, devemos determinar a forma polar de z . É fácil ver, olhando a figura 5.4, que

$$r = \sqrt{2} \text{ e } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Dessa forma

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Pela expressão determinada na equação (5.7), tem-se que

$$z^8 = (\sqrt{2})^8 \left(\cos 8 \frac{\pi}{4} + i \sin 8 \frac{\pi}{4} \right) = 16(\cos 2\pi + i \sin 2\pi),$$

ou seja

$$(1 + i)^8 = 16.$$

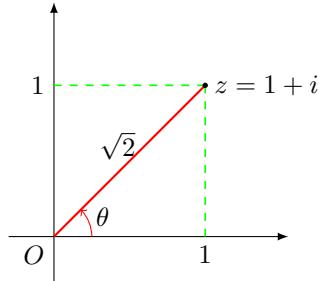


Figura 5.6: Representação Polar de $z = 1 + i$

5.5 Raízes n-ésimas

Esta seção consiste em, dados $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, determinar todos os valores de z que satisfazem a equação

$$z^n = w. \quad (5.9)$$

Esse cálculo será feito utilizando-se as representações polares de w e z , as quais serão denotadas respectivamente por

$$w = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (5.10)$$

e

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (5.11)$$

Vale lembrar que w é dado. Portanto, sabemos os valores de r e θ e buscamos determinar os valores de ρ e φ .

Se $z^n = w$, pela equação (5.7), temos que

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \implies z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Igualando as representações polares na equação $z^n = w$, temos que

$$\rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (5.12)$$

o que implica em

$$\rho^n = r \implies \rho = \sqrt[n]{r}.$$

Esse último passo se justifica pois $r > 0$. Além disso, igualando parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária na equação (5.12), temos que

$$\cos n\varphi = \cos \theta \quad \text{e} \quad \sin n\varphi = \sin \theta$$

o que consequentemente nos leva a concluir que

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

que pode ser reescrito da seguinte forma

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Observe que, por enquanto, φ assume infinitos valores. Vamos definir

$$\varphi_n = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad \mathbb{Z}.$$

A equação $z^n = w$ não possui infinitas soluções. Portanto, vamos determinar a quantidade mínima de valores de φ_n . Para tal, começando do zero, observe

que

$$\begin{aligned}
 \varphi_0 &= \frac{\theta}{n} \\
 \varphi_1 &= \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \\
 \varphi_2 &= \frac{\theta}{n} + 2 \times \frac{2\pi}{n} \\
 &\vdots = \vdots \\
 \varphi_{n-1} &= \frac{\theta}{n} + (n-1) \times \frac{2\pi}{n} \\
 \varphi_n &= \frac{\theta}{n} + n \times \frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi \\
 &\vdots = \vdots
 \end{aligned}$$

No entanto, valem as seguintes igualdades

$$\cos \varphi_n = \cos \left(\frac{\theta}{n} + 2\pi \right) = \cos \left(\frac{\theta}{n} \right) = \cos \varphi_0$$

e

$$\sin \varphi_n = \sin \left(\frac{\theta}{n} + 2\pi \right) = \sin \left(\frac{\theta}{n} \right) = \sin \varphi_0.$$

Ou seja, a partir de φ_n as raízes começam a se repetir. O mesmo raciocínio vale para $n < 0$. Dessa forma, consideraremos apenas

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Portanto, a equação $z^n = w$ tem exatamente n raízes complexas, dadas por

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right], \quad (5.13)$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Observação 5.1 A partir da primeira raiz z_0 , as demais raízes são obtidas em uma circunferência de raio $\sqrt[n]{r}$, andando no sentido anti-horário, de $\frac{2\pi}{n}$ em $\frac{2\pi}{n}$ graus. Ou seja, as raízes da equação $z^n = w$ formam um polígono regular de n lados, inscrito em um circunferência de raio $\sqrt[n]{r}$. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 5.1 Vamos determinar as três raízes da equação

$$z^3 = -8i. \quad (5.14)$$

Primeiramente devemos escrever o número $-8i$ em sua representação polar. Sem mais delongas, se $-8i = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, então

$$r = 8 \quad e \quad \theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Dessa forma, de acordo com a equação (5.13), as três raízes da equação são

$$z_k = \sqrt[3]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right],$$

com $k = 0, 1, 2$. Assim

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{8} \left[\cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6} \right] = 2i, \\ z_1 &= \sqrt[3]{8} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = -\sqrt{3} - i, \\ z_2 &= \sqrt[3]{8} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = \sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Os cálculos acima devem ser feitos com carinho.

Uma forma alternativa, mais prática e muito inteligente de se determinar as raízes da equação $z^3 = -8i$ será feita a seguir.

Primeiramente, observamos que o módulo do número $w = -8i$ é $r = |w| = 8$ e o argumento de w é $\frac{3\pi}{2}$, como mostra a figura abaixo.

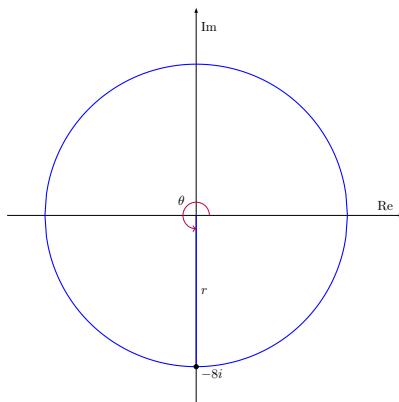


Figura 5.7: Representação Polar de $-8i$

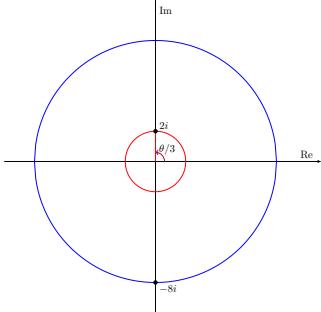


Figura 5.8: Representação Polar de $2i$

Em seguida, consideremos o círculo de raio $\rho = \sqrt[3]{8} = 2$ e dividimos o argumento inicial, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, por $n = 3$. Dessa forma, obtemos a primeira raiz, $z_0 = 2i$, como mostra a figura acima.

O último passo consiste em determinar as demais raízes. Sabemos que são mais duas raízes. As três raízes formam dividem o círculo em três partes iguais. Logo, partindo da raiz z_0 , andamos $\frac{2\pi}{3}$ graus no sentido anti-horário para se determinar a segunda raiz, z_1 , e novamente mais $\frac{2\pi}{3}$ para se determinar a terceira raiz z_2 , como mostra a figura abaixo.

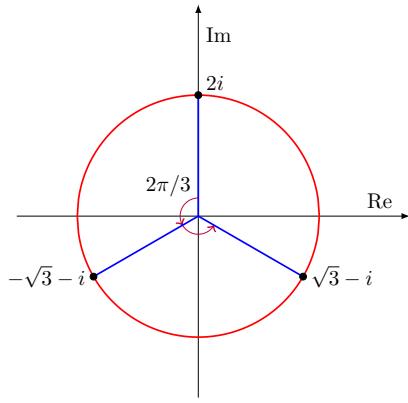


Figura 5.9: Raízes da equação $z^n = w$

5.6 Exponencial Complexa

O objetivo dessa seção é responder a seguinte pergunta: dado um número $z = y + ix \in \mathbb{C}$, é possível determinar $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$e^z = a + bi ?$$

Primeiramente, temos que recordar algo que talvez ainda não tenha sido dito. A série de MacLaurin (que adaptou o trabalho do coleguinha Taylor) de uma função f é dada pela fórmula

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!},$$

em que $f^{(n)}(0)$ representa a derivada n -ésima de f no ponto zero.

A série de MacLaurin da função e^x é

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (5.15)$$

a série de MacLaurin da função cosseno é

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (5.16)$$

enquanto a série de MacLaurin da função seno é

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \quad (5.17)$$

Se nos valermos das considerações feitas em (5.4) trocando x por ix na equação (5.15), vale o seguinte desenvolvimento

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{0!} + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \frac{i^5 x^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Isso mesmo,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (5.18)$$

expressão que é mais conhecida como fórmula de Euler.

Dessa forma, podemos fazer algumas considerações:

- i) $e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi \Rightarrow e^{\pi i} = -1;$
- ii) $e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x;$
- iii) $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y);$
- iv) $z = y + ix \Rightarrow e^z = e^y e^{ix} = e^y (\cos x + i \sin x).$

No item ii) usamos o fato de que o cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar, ou seja

$$\cos(-\theta) = \cos \theta \quad \text{e} \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Outras duas igualdades importantes para o nosso contexto se dá quando somamos e subtraímos as igualdades

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

para obtermos

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (5.19)$$

Exercício 5.1 Escreva as expressões abaixo na forma $a + bi$:

- | | |
|--|---|
| a) $\sqrt{2} - i - i(1 - i\sqrt{2});$ | e) $\frac{(\overline{2+i})^2}{3-4i};$ |
| b) $(2-3i)(-2+i);$ | f) $\frac{3-i}{4+5i};$ |
| c) $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)};$ | g) $\frac{(2-i)^2}{(3+i)^2};$ |
| d) $\frac{1+2i}{3+4i} + \frac{2-i}{5i};$ | h) $(\overline{4-i})(\overline{1-4i});$ |

Exercício 5.2 Escreva na forma $a + bi$ os números:

$$a) i^{20};$$

$$e) \sum_{k=0}^{2016} i^k;$$

$$b) i^{72};$$

$$f) 18i^5 + 7i^{10} - (2i)^4;$$

$$c) (1+i)^{12};$$

$$g) (2-3i)^5;$$

$$d) \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10};$$

$$h) (1+2i)^7;$$

Exercício 5.3 Determine a real para que $\frac{a+i}{1+ai}$ seja real.

Exercício 5.4 Determine a real para que $\frac{2+ai}{1-i}$ seja imaginário puro.

Exercício 5.5 Represente no plano complexo os seguintes números:

$$a) z_1 = 3 + 2i;$$

$$b) z_2 = 4 - 1i;$$

$$c) z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i;$$

$$d) z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

$$e) z_5 = 3 - 2i;$$

f) Represente os números $z_1 + z_2$ e $z_1 + z_5$.

Exercício 5.6 Prove que:

$$a) \bar{\bar{z}} = z;$$

$$b) \text{ se } z \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}};$$

$$c) |zw| = |z||w|;$$

$$d) \text{ se } z \neq 0, \quad \left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|};$$

$$d) \text{ se } |z| = 1 \text{ então } \frac{1}{z} = \bar{z};$$

Exercício 5.7 Determine as raízes complexas das equações:

- a) $x^2 + 9 = 0$;
- b) $x^2 + 2x + 6 = 0$;
- c) $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}$;

Exercício 5.8 Prove que para todo número complexo z ,

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad e \quad Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Exercício 5.9 Prove que se z é uma raiz da equação

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

em que a_n, \dots, a_0 são coeficientes reais, então \bar{z} também é raiz desta equação.

Exercício 5.10 Determine todos os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que:

- a) $z^3 = -i$;
- b) $z^4 = 9$;
- c) $z^6 = -64$;
- d) $z^2 - (1+i)z + 5i = 0$;
- e) $z^4 - (1-i)z^2 - i = 0$;

Exercício 5.11 Mostre que, se $n \in \mathbb{N}$ e $z^n = 1$, com $z \neq 1$, então

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$$

e consequentemente

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots + nz^{n-1} = \frac{n}{z-1}.$$

Exercício 5.12 Sejam $n \in \mathbb{N}$ ímpar, $n \geq 5$ e $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ as n raízes distintas da equação

$$z^n = w.$$

Calcule o produto

$$z_0 z_1 z_2 z_3 \cdots z_{n-1}.$$

Exercício 5.13 Determine z de forma que o triângulo de vértices i , z e iz seja equilátero.

Exercício 5.14 Mostre que, se $z, w \in \mathbb{C}$, então

$$|z - w|$$

é a distância entre os pontos z e w .

Exercício 5.15 Calcule a medida do lado de um polígono regular inscrito em uma circunferência de raio um.

Exercício 5.16 Escreva os seguintes números na forma $z = re^{i\theta}$:

$$a) z = 1 + i;$$

$$c) z = \frac{i}{1+i};$$

$$b) z = 1 + i\sqrt{3};$$

$$d) z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$$

Exercício 5.17 Mostre que

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad e \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exercício 5.18 Defina

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad e \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Calcule $\cos^2 z + \sin^2 z$.