

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS E EXATAS**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA**  
**Disciplina: Controle de Processos Químicos II**



# Capítulo 1

## Controladores *Feedback*

**Prof. Davi Leonardo de Souza**  
**davi.souza@uftm.edu.com**

## Conteúdo da aula

1.1 - Classificação de sistemas quanto as entradas e saídas

1.2 - Diagrama de Blocos

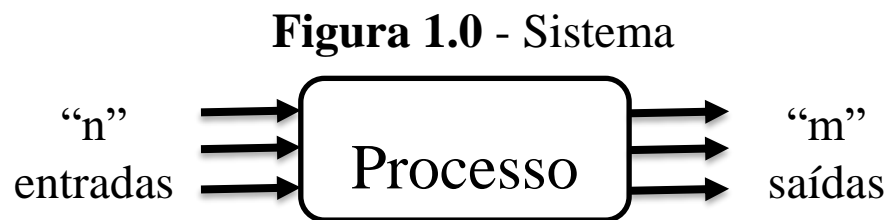
1.3 - Controladores típicos de malhas *Feedback*

1.4 - Estabilidade de sistemas de controle em malha fechada

1.5 – Exercícios

## 1.1 - Classificação de sistemas quanto as entradas e saídas

Considere o seguinte sistema:



A modelagem do processo pode ser descrita através da matriz de funções de transferência:

$$G(s) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \dots & g_{1n}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \dots & g_{2n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{m1}(s) & g_{m2} & \dots & g_{mn}(s) \end{bmatrix} & \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{matrix} \end{matrix} \quad (1)$$

com  $g_{mn}(s)$  a função de transferência (FT) referente à entrada (u) “n” e saída (y) “m”.

De acordo com as entradas e saídas, os sistemas podem ser classificados como:

**SISO** – Única entrada / Única saída:  $n=1$ ,  $m=1$ ;

**MIMO** – Múltiplas entradas / Múltiplas saídas:  $n>1$ ,  $m>1$ ;

**SIMO** – Única entrada / Múltiplas saídas:  $n=1$ ,  $m>1$ ;

**MISO** – Múltiplas entradas / Única saída:  $n>1$ ,  $m=1$ ;

Em controle de processos, também podemos classificar os sistemas quanto a malha:

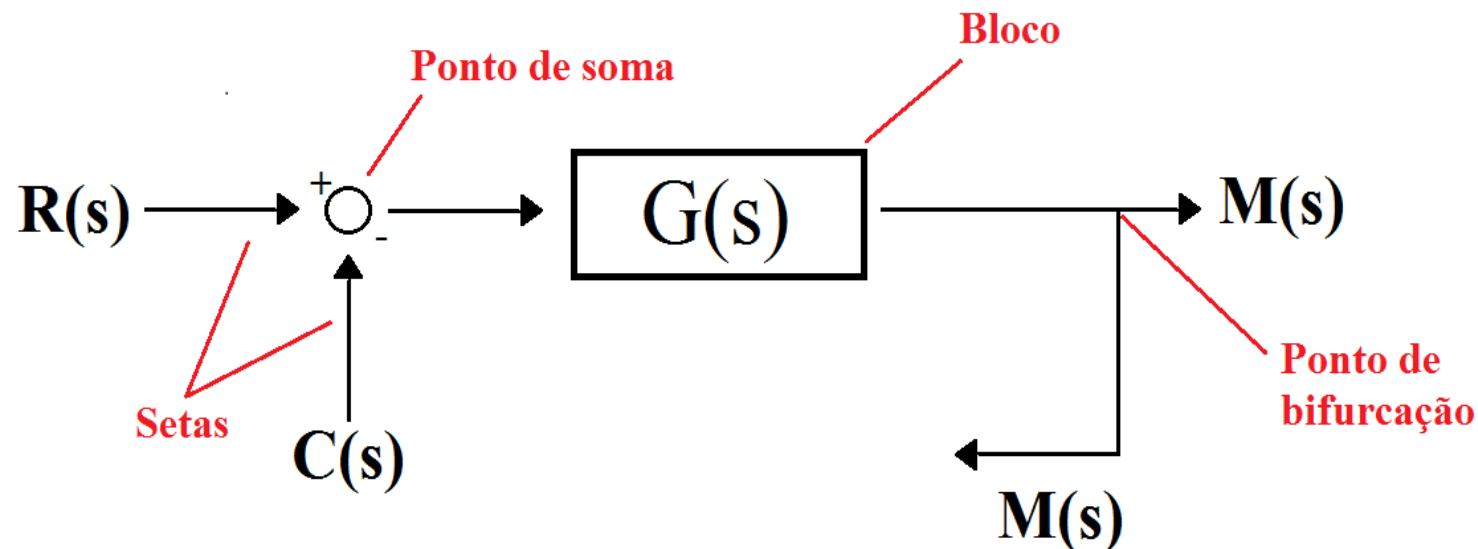
**MALHA ABERTA** – Sistema na ausência da ação do controlador.

**MALHA FECHADA** – Sistema submetido à ação de controladores.

## 1.2 - Diagrama de Blocos

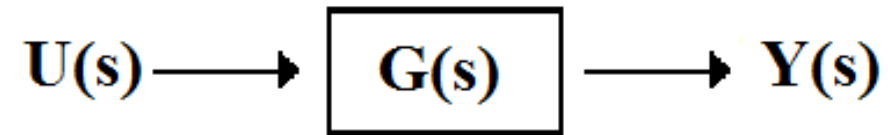
Diagrama de blocos é uma representação gráfica de funções de transferência que estão envolvidas em um dado sistema. Os diagramas de blocos são formados por uma combinação de quatro elementos básicos: setas, pontos de soma, pontos de bifurcação e blocos, como pode ser observado na figura 1.1, a seguir:

Figura 1.1 – Elementos de um diagrama de blocos



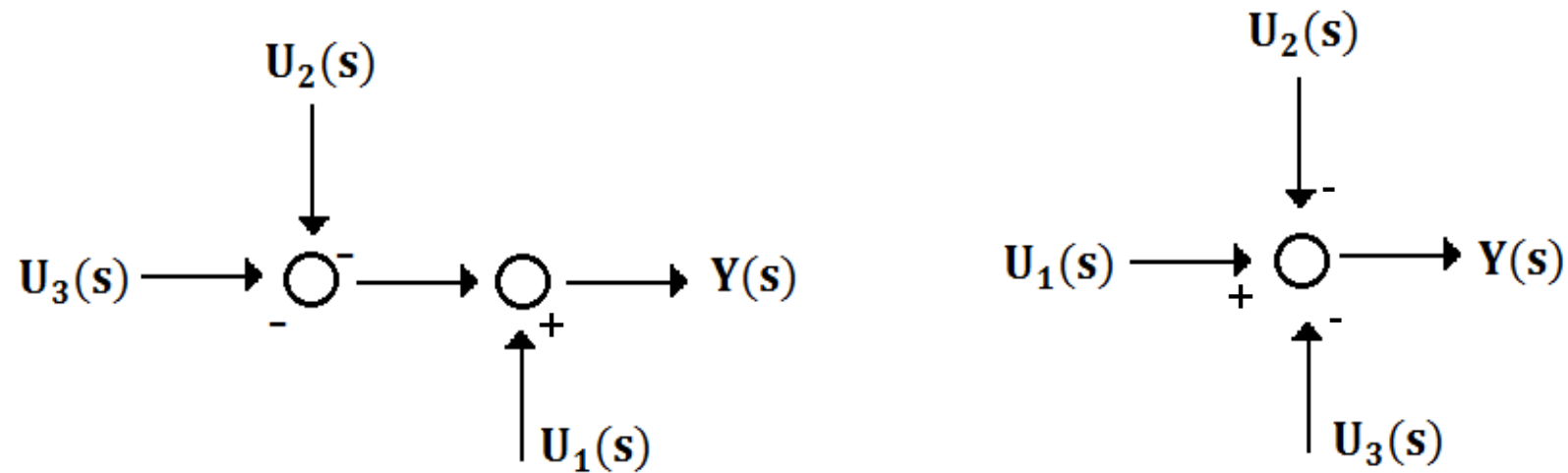
A representação de sistemas através desta ferramenta é regida através de regras para a álgebra do diagrama de blocos. Para entendermos estas regras, vamos considerar um sistema SISO:

1)- Regra Geral (**mais importante**):



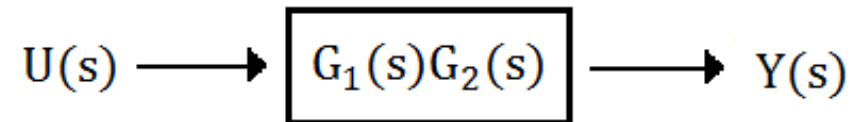
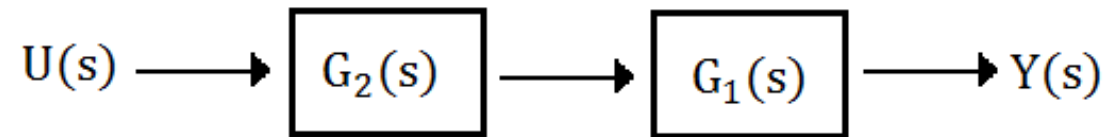
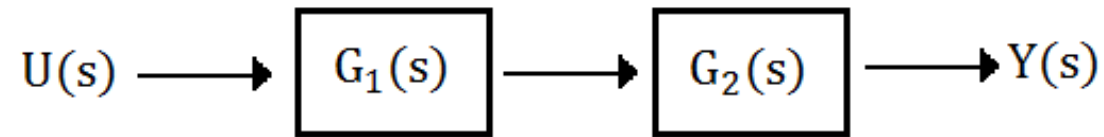
$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (2)$$

2)- Soma:



$$Y(s) = U_1(s) - U_2(s) - U_3(s) \quad (3)$$

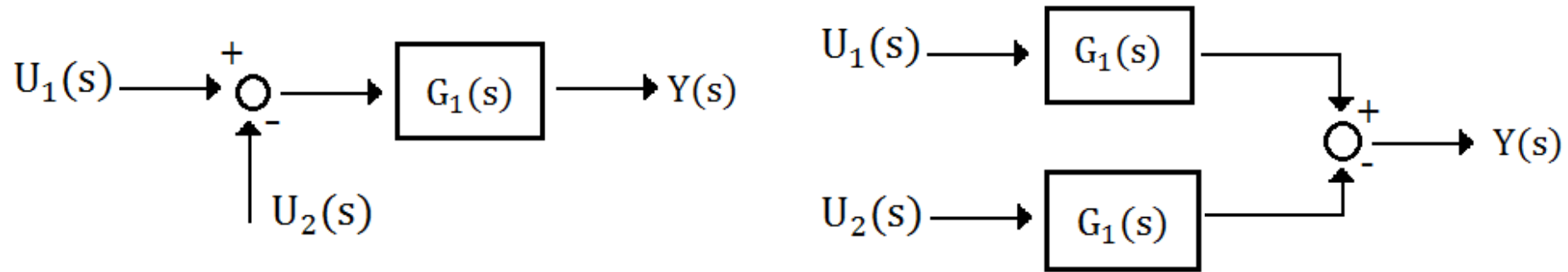
3)- Associativa e comutativa (sistema SISO):



$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)U(s) = G_2(s)G_1(s)U(s) \quad (4)$$

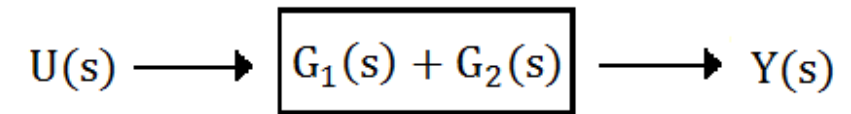
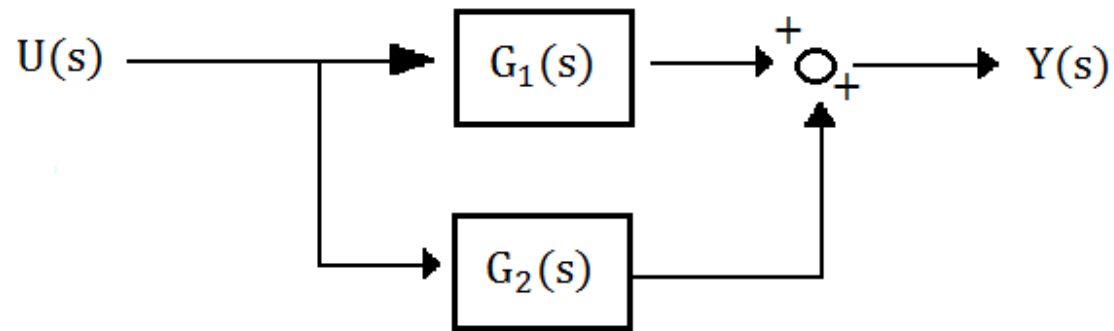


4)- Distributiva:



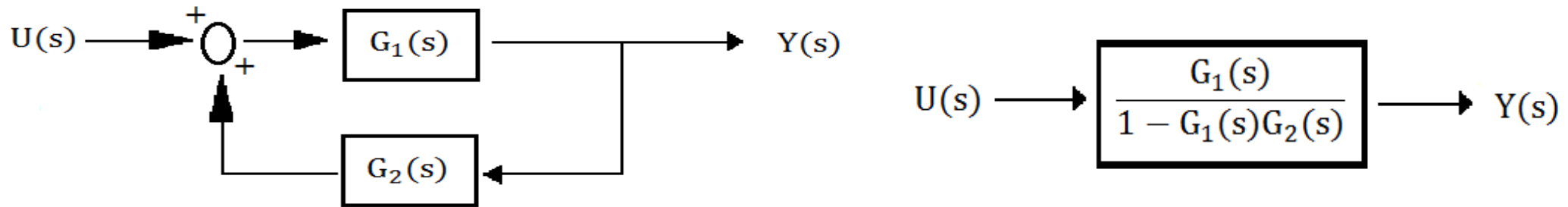
$$Y(s) = G_1(s)[U_1(s) - U_2(s)] = G_1(s)U_1(s) - G_1(s)U_2(s) \quad (5)$$

5)- Paralelo:



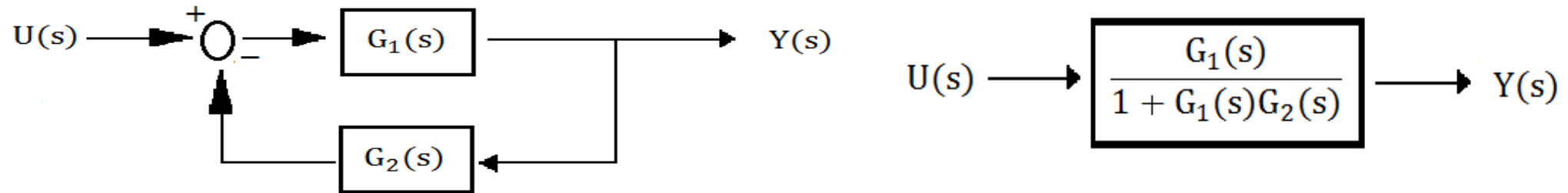
$$Y(s) = [G_1(s) + G_2(s)]U(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) \quad (6)$$

6)- Malha de realimentação positiva (feedback positivo):



$$Y(s) = G_1(s)[U(s) + G_2(s)Y(s)] = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} U(s) \quad (7)$$

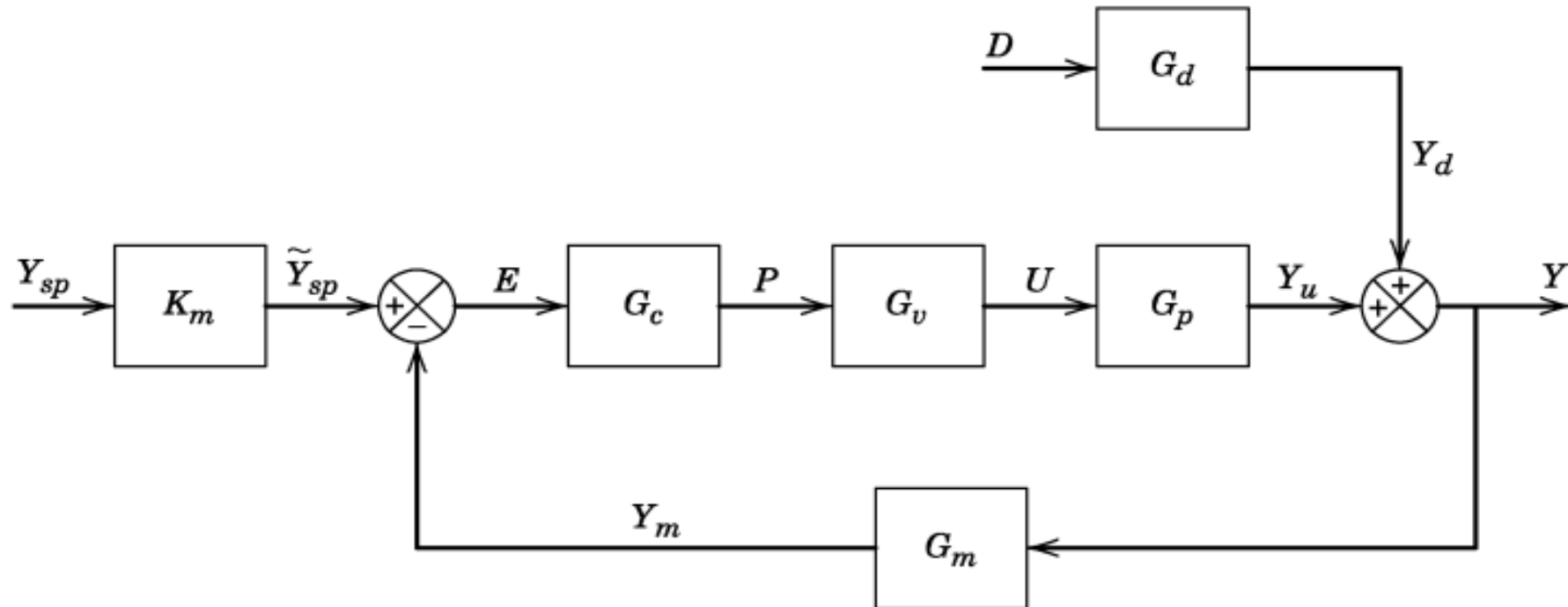
7)- Malha de realimentação negativa (feedback negativo):



$$Y(s) = G_1(s)[U(s) - G_2(s)Y(s)] = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} U(s) \quad (8)$$

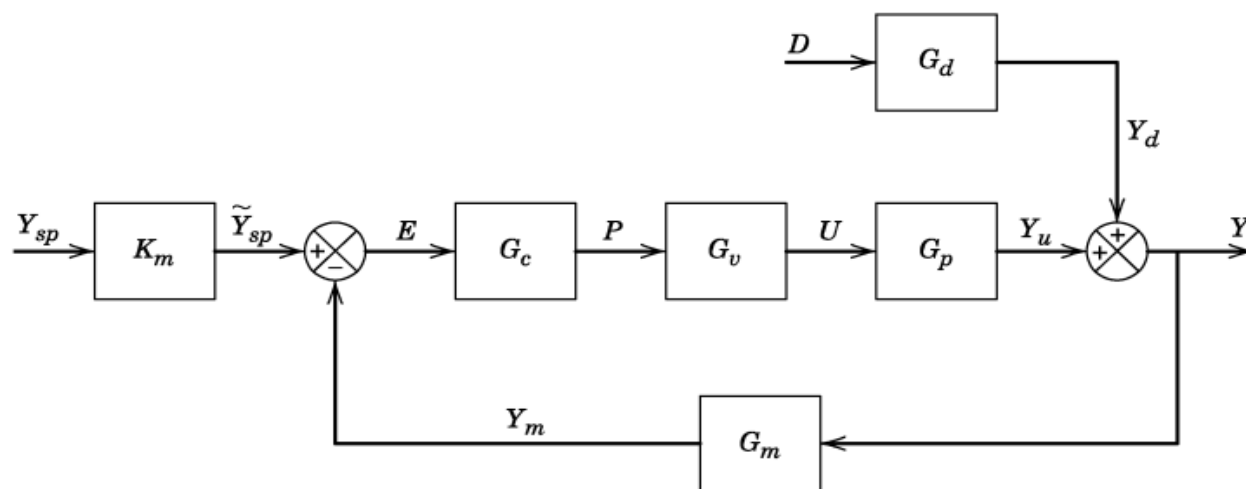
## 1.2.1 - Diagrama de Blocos para malha fechada de sistemas *Feedback*

Para projetarmos controladores *Feedback*, devemos conhecer bem a representação do mesmo em diagrama de blocos, levando em consideração todas as funções de transferência de todos os componentes da malha. Considere o sistema de controle *Feedback* SISO, representado pelo diagrama de blocos:



Com  $K_m$  o ganho do medidor,  $G_c$  a FT do controlador,  $G_v$  a FT do elemento final de controle (válvula por exemplo),  $G_p$  a FT da planta,  $G_m$  a FT do transmissor/medidor e  $G_d$  a FT da perturbação.

Observando o diagrama de blocos anterior, podemos chegar nas seguintes relações:



$$Y(s) = Y_u(s) + Y_d(s)$$

$$Y_d(s) = G_d(s)D(s)$$

$$Y_u(s) = G_p(s)U(s)$$

$$U(s) = G_v(s)P(s)$$

$$P(s) = G_c(s)E(s)$$

$$E(s) = \tilde{Y}_{sp}(s) - Y_m(s)$$

$$\tilde{Y}_{sp}(s) = K_m Y_{sp}(s)$$

$$Y_m(s) = G_m(s)Y(s)$$

Rearranjando as relações de forma a obter a saída  $Y(s)$  em função das entradas  $Y_{sp}(s)$  e  $D(s)$  encontramos:

$$Y(s) = \frac{K_m G_c G_v G_p}{1 + G_c G_v G_p G_m} Y_{sp}(s) + \frac{G_d}{1 + G_c G_v G_p G_m} D(s) \quad (9)$$

com  $1 + G_c G_v G_p G_m$ , denominada Equação Característica (EC).

➔ Para sistemas MIMO a EC é escrita como:

$$EC = I + G_c G_v G_p G_m \quad (10)$$

Assim, para sistemas MIMO podemos escrever a saída  $Y(s)$  em função das entradas  $Y_{sp}(s)$  e  $D(s)$ , como:

$$Y(s) = (EC)^{-1} K_m G_c G_v G_p Y_{sp}(s) + (EC)^{-1} G_d D(s) \quad (11)$$

→ Para malha fechada de sistemas *Feedback*, podemos ter os seguintes casos:

(1)- Mudança de *setpoint* (Problema servo) → para este caso,  $Y_{sp} \neq 0$  e  $D = 0$ , logo:

**SISO**

$$\frac{Y(s)}{Y_{sp}(s)} = \frac{K_m G_c G_v G_p}{1 + G_c G_v G_p G_m} = FT \quad (12)$$



## MIMO

$$FT = (EC)^{-1} K_m G_c G_v G_p \quad (13)$$

(2)- Mudança de carga (Problema regulador)  $\rightarrow$  para este caso,  $Y_{sp} = 0$  e  $D \neq 0$ , logo:

## SISO

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_d}{1 + G_c G_v G_p G_m} = FT \quad (14)$$

## MIMO

$$FT = (EC)^{-1} G_d \quad (15)$$

## 1.2.2 - Expressão geral para FT de laço fechado:

Em sistemas de controle *Feedback* podemos usar a expressão geral a seguir para encontrar a função de transferência entre dois sinais quaisquer em um laço de controle *Feedback*:

$$\frac{Z}{Z_i} = \frac{\Pi_f}{1 + \Pi_e} \quad (16)$$

com

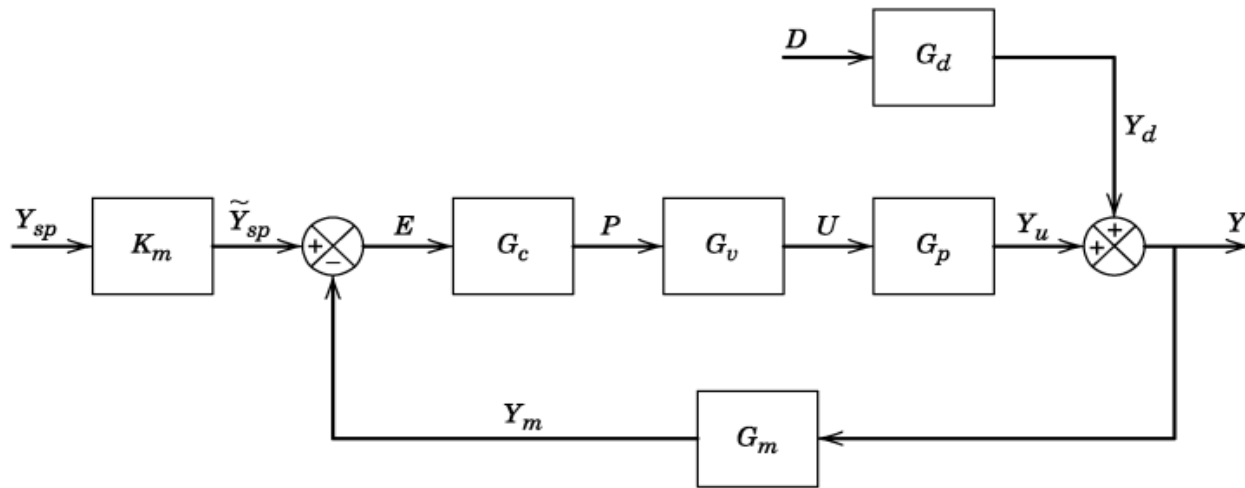
$Z \rightarrow$  é uma saída ou qualquer variável interna dentro do laço de controle;

$Z_i \rightarrow$  é uma entrada, por exemplo  $Y_{sp}$  ou  $D$ ;

$\Pi_f \rightarrow$  é o produtório de todas as FTs no caminho direto de  $Z_i$  para  $Z$ ;

$\Pi_e \rightarrow$  é o produtório de todas as FTs no laço Feedback.

Por exemplo, no caso anterior, para sistema SISO teremos:



$$\frac{Z}{Z_i} = \frac{\Pi_f}{1 + \Pi_e}$$

Problema Servo

$$\frac{Y(s)}{Y_{sp}(s)} = \frac{K_m G_c G_v G_p}{1 + G_c G_v G_p G_m} \begin{cases} Z = Y \\ Z_i = Y_{sp} \\ \Pi_f = K_m G_c G_v G_p \\ \Pi_e = G_c G_v G_p G_m \end{cases}$$

Problema Regulador

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_d}{1 + G_c G_v G_p G_m} \begin{cases} Z = Y \\ Z_i = D \\ \Pi_f = G_d \\ \Pi_e = G_c G_v G_p G_m \end{cases}$$

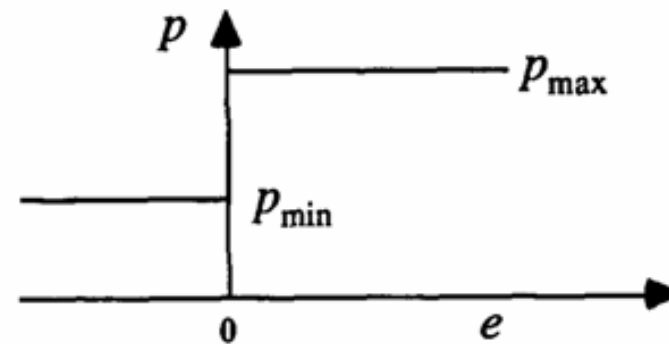
## 1.3 - Controladores típicos de malhas *Feedback*

### 1.3.1 - Controladores *On-off*

São dispositivos simples e baratos. São usados em refrigeradores e em aquecimento doméstico. Têm a utilização limitada no controle de processo devido ao comportamento oscilatório das variáveis controladas e desgaste excessivo da válvula de controle.

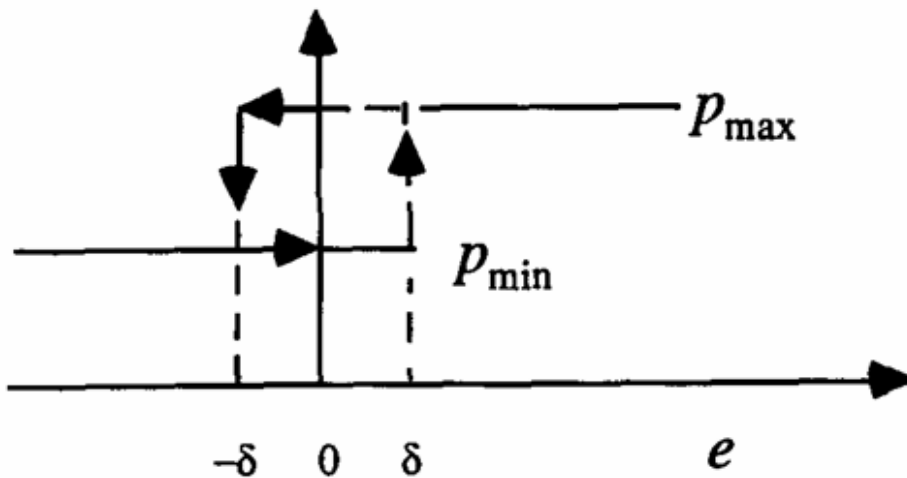
Lei de controle:

$$p(t) = \begin{cases} p_{\text{máx}} & \text{se } e(t) > 0 \\ p_{\text{min}} & \text{se } e(t) < 0 \end{cases}$$



O controlador tem somente dois valores possíveis:  $p_{\max}$  que é um valor “on” ou  $p_{\min}$  que é um valor “off”

Em casos práticos usa-se uma banda morta (“*dead band*”):



$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} & \text{se } e(t) > \delta \\ p_{\min} & \text{se } e(t) < -\delta \end{cases}$$

## 1.3.2 - Controlador de três modos: Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

### A ação Proporcional (Controle P)

Neste modo de controle o controlador toma uma ação proporcional ao desvio do *setpoint* (erro). Desta forma, quanto mais longe do valor desejado se encontra a variável controlada, mais “vigorosa” é a ação do controlador, e quanto mais próximo do valor desejado se encontra a variável controlada mais “suave” é a ação do controlador.

Definimos o erro como:  $e(t) = y_{sp}(t) - y(t)$

$$p(t) = \bar{p} + K_c e(t)$$

$$p'(t) = p(t) - \bar{p} = K_c e(t) \quad (17)$$

$p(t)$ : sinal de saída do controlador

$\bar{p}$  : sinal de saída do controlador em EE (*bias*)

$y_{sp}(t)$ : Desejado (*setpoint*)

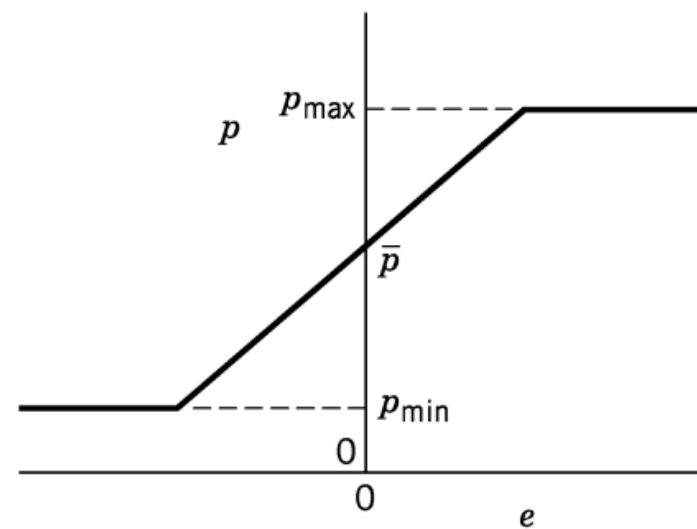
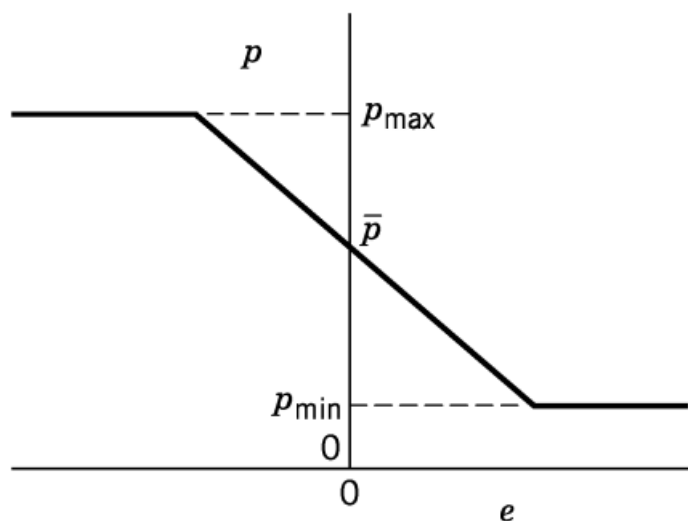
$y(t)$ : valor medido da variável controlada

$K_c$ : ganho do controlador (constante de proporcionalidade)

➤ Controlador de ação direta ( $K_c < 0$ ): O sinal de saída do controlador aumenta quando o sinal de entrada do mesmo aumenta.

➤ Controlador de ação reversa ( $K_c > 0$ ): O sinal de saída do controlador aumenta quando o sinal de entrada do mesmo diminui.

$$p(t) = \bar{p} + K_c [y_{sp}(t) - y(t)] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} K_c < 0: \text{ se } y(t) \uparrow \Rightarrow p(t) \uparrow \\ K_c > 0: \text{ se } y(t) \downarrow \Rightarrow p(t) \uparrow \end{cases}$$



➤ Função de Transferência do Controlador Proporcional (P):

$$p'(t) = K_c e(t)$$

$$L[p'(t)] = K_c L[e(t)]$$

$$P'(s) = K_c E(s)$$

$$G_c(s) = \frac{P'(s)}{E(s)} = K_c \quad (18)$$



## A ação Integral:

Uma bem conhecida desvantagem da ação de controle proporcional é sua incapacidade de eliminar *offset* (distância entre o *setpoint* e  $y(t)$ ) em um sistema de controle. Este comportamento é causado quando  $e(t)$  fica constante em um valor diferente de zero. Neste caso, a saída do controlador  $p(t)$  fica constante (ver lei de controle proporcional). Se  $p(t)$  se torna constante a variável manipulada não mais altera seu valor e, por conseguinte, o sistema de controle atingirá o EE com  $e(t) \neq 0$  (ocorrência de *offset*). Uma maneira de eliminar este inconveniente é fazer com  $p(t)$  continue a variar com o tempo mesmo que  $e(t)$  tenda a ficar constante. Isto pode ser conseguido quando o controlador toma uma ação proporcional à integral do erro:

$$p(t) = \bar{p} + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t') dt' \quad \Rightarrow \quad p'(t) = p(t) - \bar{p} = \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t') dt' \quad (19)$$

$\tau_I$ : tempo integral ou *reset time*

➤ Função de Transferência do Controlador Integral (I):

$$L[p'(t)] = \frac{1}{\tau_I} L\left[\int_0^t e(t') dt'\right] \Rightarrow P'(s) = \frac{1}{\tau_I s} E(s) \Rightarrow \boxed{G_c = \frac{P'(s)}{E(s)} = \frac{1}{\tau_I s}} \quad (20)$$

Esta ação de controle nunca é utilizada sozinha e sim sempre em conjunto com a ação proporcional. Desta forma, a lei de controle do controlador proporcional-integral (PI) é dada por:

$$p(t) = \bar{p} + K_c \left[ e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t') dt' \right] \Rightarrow \boxed{p'(t) = K_c \left[ e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t') dt' \right]} \quad (21)$$

➤ Função de Transferência do Controlador Proporcional - Integral (PI):

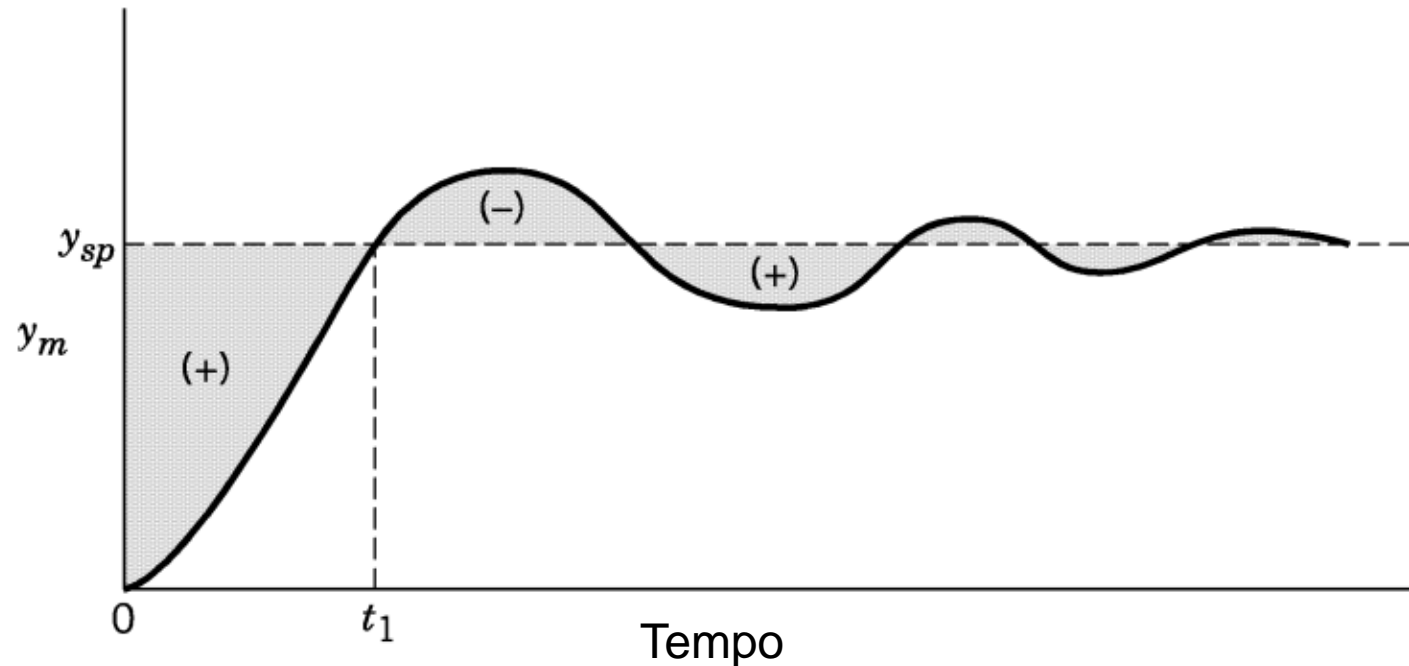
$$p'(t) = K_c \left[ e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t') dt' \right] \Rightarrow L[p'(t)] = K_c \left\{ L[e(t)] + \frac{1}{\tau_I} L\left[\int_0^t e(t') dt'\right] \right\}$$

$$P'(s) = K_c \left[ E(s) + \frac{1}{\tau_I s} E(s) \right] \Rightarrow \boxed{G_c(s) = \frac{P'(s)}{E(s)} = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right)} \quad (22)$$

Por que a ação integral elimina o erro no EE (*offset*)?

Enquanto  $\int_0^t e(t)dt \neq 0 \rightarrow p$  está mudando com o tempo, isto é  $p = p(t)$

Até que  $\int_0^t e(t)dt = 0$  quando  $p(t)$  alcança o EE e neste caso  $p \neq p(t)$



## A ação Derivativa:

Uma conhecida desvantagem da ação integral é a introdução de um comportamento oscilatório na variável controlada. Este efeito pode ser amenizado (mas não eliminado) pela introdução de uma ação derivativa. Neste caso, o controlador toma uma ação proporcional à derivada do erro no instante corrente de tempo. Esta derivada é na verdade uma tentativa de prever o comportamento futuro do erro. Assim, um valor alto desta derivada significa que o erro está sofrendo uma grande variação em curto intervalo de tempo (muitas oscilações), e neste caso, o controlador deve tomar uma ação mais “vigorosa”. Já um valor pequeno desta derivada quer dizer que o erro está variando lentamente com o passar do tempo (próximo do EE) e neste caso, o controlador deve tomar uma ação mais “suave”:

$$p(t) = \bar{p} + \tau_D \frac{de}{dt} \quad \Rightarrow \quad p'(t) = p(t) - \bar{p} = \tau_D \frac{de}{dt} \quad (23)$$

➤ Função de Transferência do Controlador Derivativo (D):

$$L[p'(t)] = \tau_D L\left[\frac{de}{dt}\right] \quad \Rightarrow \quad P'(s) = \tau_D s E(s) \quad \Rightarrow \quad G_c = \frac{P'(s)}{E(s)} = \tau_D s \quad (24)$$

Esta ação de controle também nunca é utilizada sozinha, podendo ser usada em conjunto com a ação proporcional e integral. Desta forma, a lei de controle do controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) é dada por:

$$p(t) = \bar{p} + K_c \left[ e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t') dt' + \tau_D \frac{de}{dt} \right]$$

$$p'(t) = K_c \left[ e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t') dt' + \tau_D \frac{de}{dt} \right] \quad (25)$$

➤ Função de Transferência do Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID):

$$p'(t) = K_c \left[ e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t') dt' + \tau_D \frac{de}{dt} \right] \Rightarrow L[p'(t)] = K_c \left\{ L[e(t)] + \frac{1}{\tau_I} L \left[ \int_0^t e(t') dt' \right] + \tau_D L \left[ \frac{de}{dt} \right] \right\}$$

$$P'(s) = K_c \left[ E(s) + \frac{1}{\tau_I s} E(s) + \tau_D s E(s) \right] \Rightarrow G_c(s) = \frac{P'(s)}{E(s)} = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) \quad (26)$$

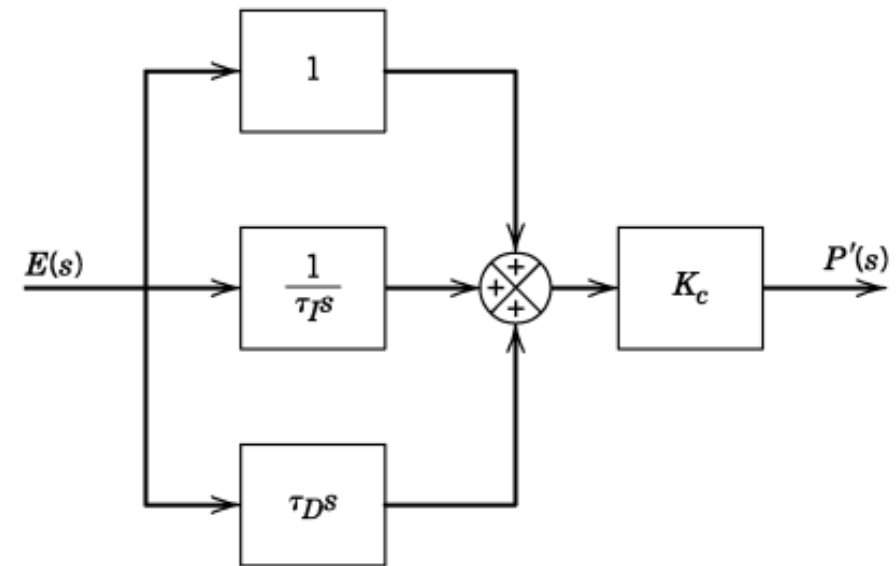
## Variação do PID:

Agora vamos analisar a possibilidade de combinar os modos de controle proporcional, integral e derivativo em um controlador PID. Muitas variações de controladores PID são utilizadas na prática. Em seguida, consideramos as três formas mais comuns.

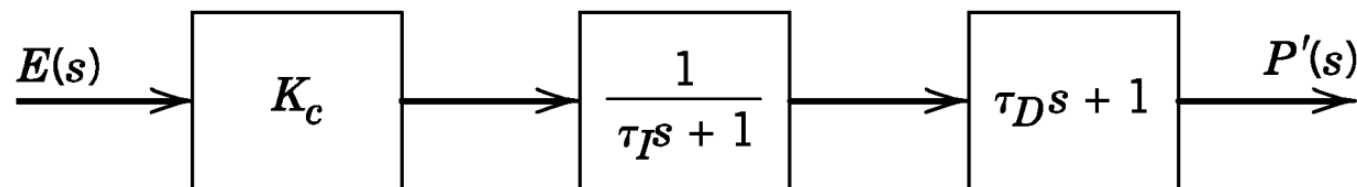
- A forma paralela do PID: A forma tradicional do algoritmo PID é chamada de forma paralela, uma vez que as ações de controle podem ser calculadas paralelamente em um algoritmo de computação numérica:

$$p(t) = \bar{p} + K_c \left[ e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t') dt' + \tau_D \frac{de}{dt} \right] \quad (27)$$

$$G_c(s) = \frac{P'(s)}{E(s)} = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) \quad (28)$$



- A forma serial do PID: Historicamente foi conveniente construir os primeiros controladores analógicos (tanto eletrônicos e pneumáticos) de modo que um elemento PI e um elemento PD operassem em série.



$$G_c(s) = \frac{P'(s)}{E(s)} = K_c \left( \frac{1}{\tau_I s + 1} \right) (\tau_D s + 1) \quad (29)$$

## ➤ A forma expandida do PID

Uma outra forma utilizada do algoritmo PID é a conhecida forma expandida:

$$p(t) = \bar{p} + K_c e(t) + K_I \int_0^t e(t') dt' + K_D \frac{de}{dt} \quad (30)$$

$$G_c(s) = \frac{P'(s)}{E(s)} = K_c + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (31)$$

## ➤ Eliminação de *Derivative and Proportional Kick*

Uma desvantagem do controlador PID é que uma súbita mudança no *setpoint* (e por consequência no erro) tornará o termo derivativo muito grande e que acarretará um fenômeno conhecido como *derivative kick* do elemento final de controle. Esta mudança é indesejável e pode ser evitada baseado-se o cálculo da derivada em relação à variável medida ( $y_m$ ) em preferência ao sinal do erro. Isto pode ser feito trocando o termo  $de(t)/dt$  pelo termo  $-dy_m(t)/dt$ :

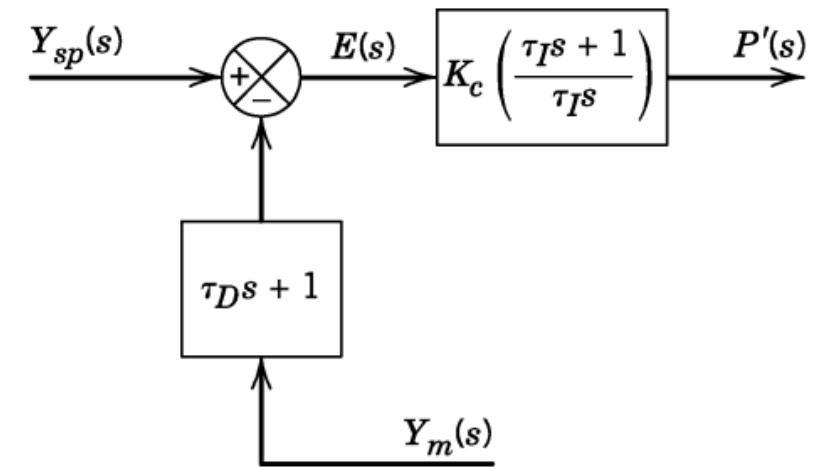


$$e(t) = y_{sp}(t) - y_m(t) \Rightarrow \frac{de(t)}{dt} = \frac{dy_{sp}(t)}{dt} - \frac{dy_m(t)}{dt}$$

Como  $y_{sp}(t)$  permanece constante quase todo o tempo (a menos do instante da mudança de *setpoint*):

$$\frac{de(t)}{dt} \approx -\frac{dy_m(t)}{dt}$$

$$p(t) = \bar{p} + K_c \left[ e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t') dt' - \tau_D \frac{dy_m}{dt} \right] \quad (32)$$



Esta maneira de eliminação do fenômeno do *derivative kick* é uma característica padrão na maioria dos controladores comerciais. Para a forma em série do PID, ela pode ser implementada muito facilmente, trocando o elemento PD de lugar no diagrama de blocos.

Uma forma mais flexível do PID pode ser obtido ponderando o *setpoint* no termo proporcional tanto quanto o termo derivativo. Esta modificação elimina o *proportional kick* que também ocorre no *setpoint*. Para este algoritmo modificado um erro diferente é definido para cada modo de controle:

$$p(t) = \bar{p} + K_c \left[ e_p(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t') dt' + \tau_D \frac{de_D}{dt} \right] \quad (33)$$

com

$$e_p(t) = \beta y_{sp}(t) - y_m(t) \quad e(t') = y_{sp}(t) - y_m(t) \quad e_D(t) = \gamma y_{sp}(t) - y_m(t)$$

$\beta$  e  $\gamma$  são constantes não negativas. Esta forma é conhecida como controlador PID com ponderação dos modos proporcional e derivativo ou controlador beta-gama. Esta versão modificada permite ponderações independentes do *setpoint* nos modos proporcional e derivativo. Então, para eliminar o *derivative kick*,  $\gamma$  é ajustado para zero e para eliminar o *proportional kick*,  $\beta$  é ajustado para zero. A seguir é mostrada uma tabela com as formas mais importante e conhecidas comercialmente do controlador *Feedback* de três modos.

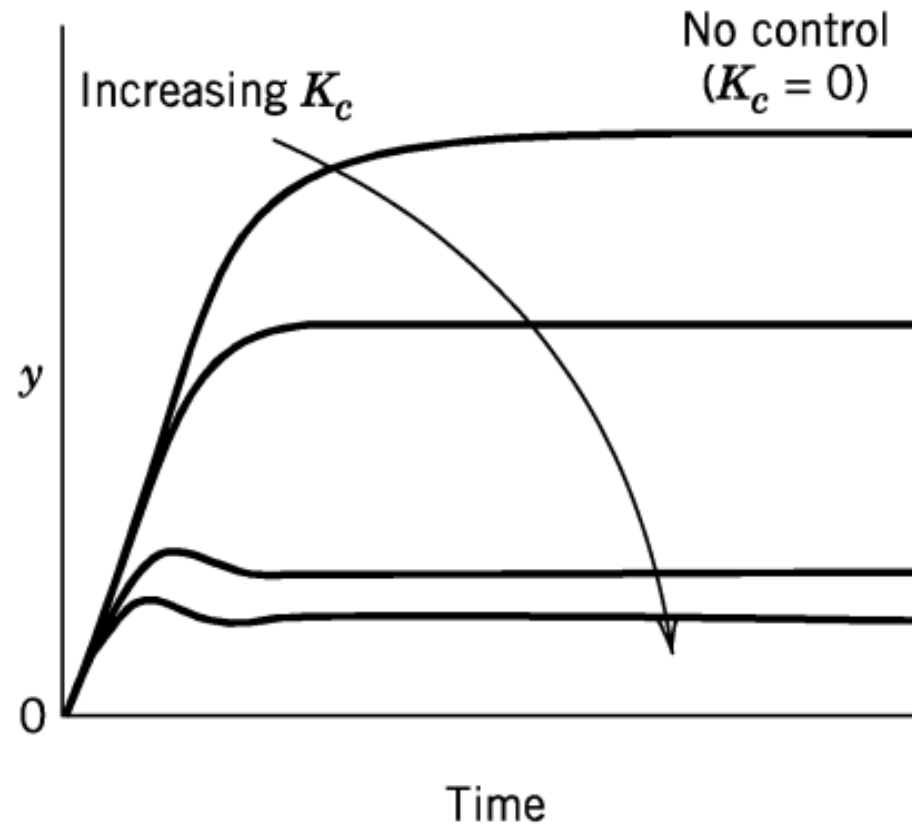
Controller Feature	Controller Parameter	Symbol	Units	Typical Range*
<b>Proportional mode</b>	<i>Controller gain</i>	$K_c$	Dimensionless [%/%, mA/mA]	0.1–100
	<i>Proportional band</i>	$PB$ $= 100\%/K_c$	%	1–1000%
<b>Integral mode</b>	<i>Integral time</i> (or <i>reset time</i> )	$\tau_I$	Time [min, s]	0.02–20 min 1–1000 s
	<i>Reset rate</i>	$1/\tau_I$	Repeats/time [min <sup>-1</sup> , s <sup>-1</sup> ]	0.001–1 repeats/s 0.06–60 repeats/min
	<i>Integral mode “gain”</i>	$K_I$	Time <sup>-1</sup> [min <sup>-1</sup> , s <sup>-1</sup> ]	0.1–100
<b>Derivative mode</b>	<i>Derivative time</i>	$\tau_D$	Time [min, s]	0.1–10 min. 5–500 s
	<i>Derivative mode “gain”</i>	$K_D$	Time [min, s]	0.1–100
	<i>Derivative filter parameter</i>	$\alpha$	Dimensionless	0.05–0.2
<b>Control interval</b> (Digital controllers)		$\Delta t$	Time [s, min]	0.1 s–10 min

\*Based on McMillan (2006).

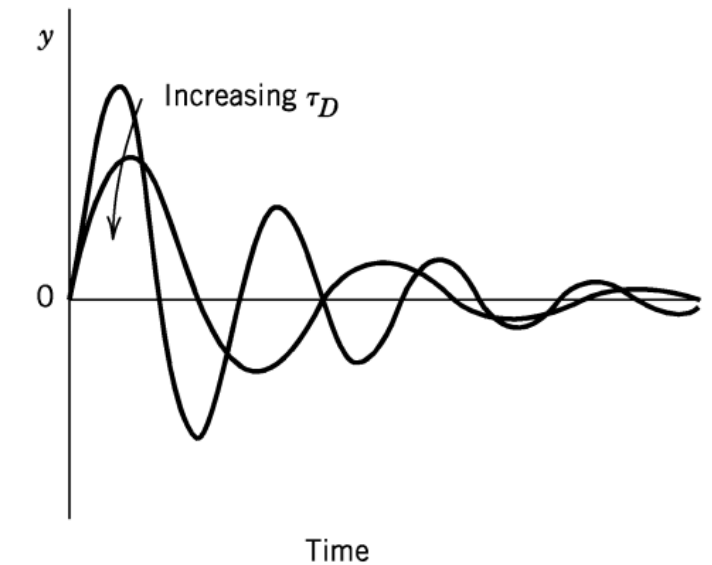
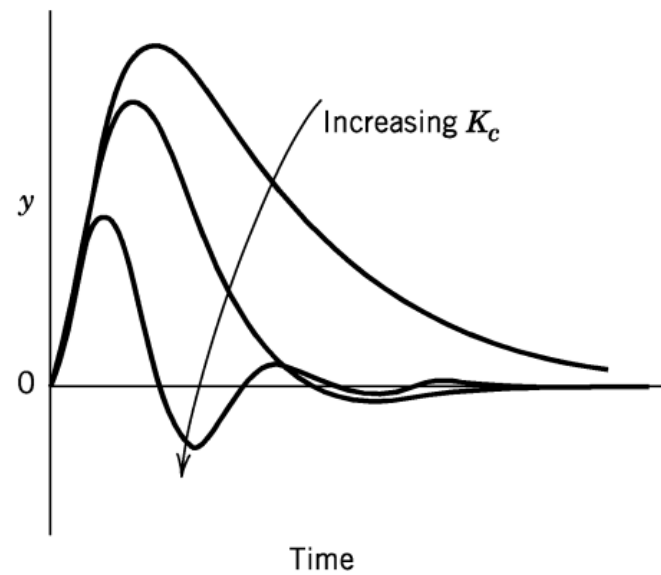
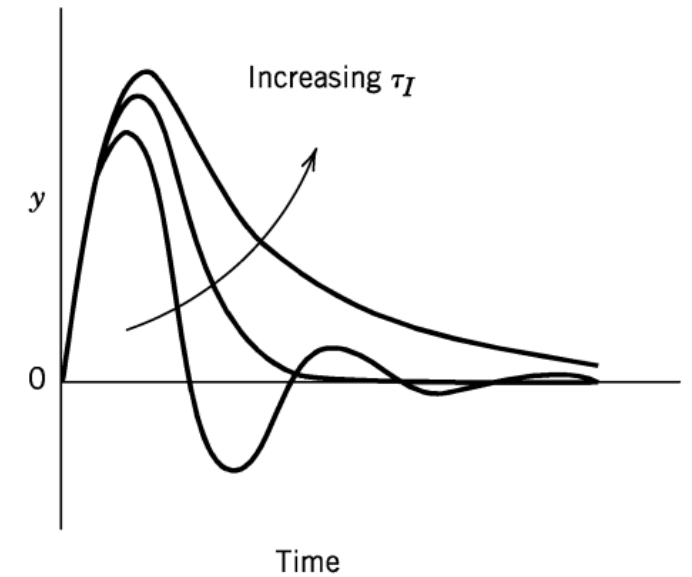
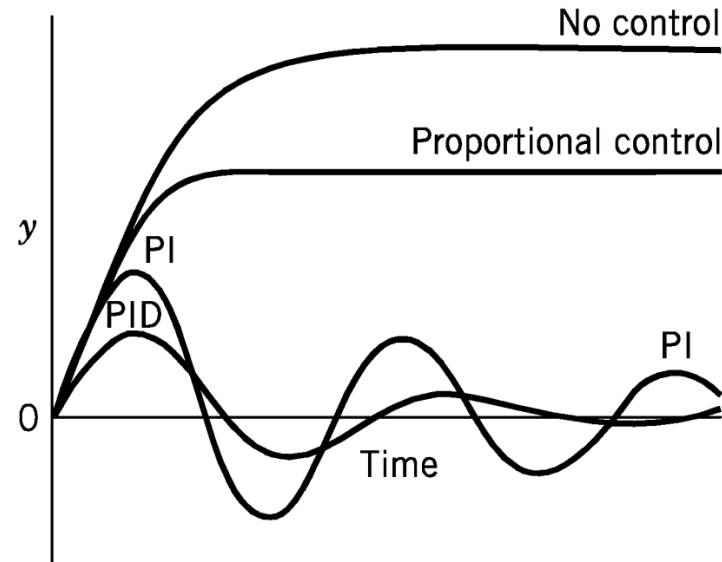
## 1.3.3 - Resposta típica de sistemas de Controle *Feedback*

Considere a resposta de um sistema controlado depois de que ocorre uma perturbação contínua (por exemplo, mudança de grau em uma variável de carga).

**Controlador P**



## Controlador PID



### 1.4 - Estabilidade de sistemas de controle em malha fechada

Uma característica inerente dos sistemas de controle *feedback* é introdução de comportamento oscilatório da malha fechada.

Quando as oscilações são pequenas e rapidamente amortecidas a performance do sistema de controle é satisfatório. Mas, quando estas oscilações são sub-amortecidas ou quando a amplitude das oscilações aumenta com tempo os limites físicos do sistema (processo e/ou instrumentação) são alcançados. Neste caso o sistema deve ser “desligado” (perda de controle) porque o sistema se torna instável.

O objetivo então, é estudar a estabilidade de sistemas de controle (linear) e deduzir um critério útil para prever esta estabilidade a partir das Funções de Transferências (FTs) do sistema.

**Exemplo 1.4.1:** Considere o sistema de controle *Feedback* com as TFs dadas a seguir. Se um controlador proporcional é usado, para que valores de  $K_c$  o sistema produzirá resposta temporal instável?

$$G_p = G_d = \frac{1}{5s+1} \quad G_m = \frac{1}{s+1} \quad G_v = \frac{1}{2s+1} \quad G_c = K_c$$

A FT da malha fechada para o problema servo é, então, dada por:

$$\frac{Y'(s)}{Y'_{sp}(s)} = \frac{\Pi_f}{1 + \Pi_e} = \frac{K_m G_c G_v G_p}{1 + G_m G_c G_v G_p} \quad \frac{Y'(s)}{Y'_{sp}(s)} = \frac{K_c \left( \frac{1}{2s+1} \right) \left( \frac{1}{5s+1} \right)}{1 + K_c \left( \frac{1}{s+1} \right) \left( \frac{1}{2s+1} \right) \left( \frac{1}{5s+1} \right)}$$

Se  $Y'_{sp}(s) = 1/s$  (perturbação degrau unitário):

$$Y'(s) = \frac{K_c (s+1)}{10s^3 + 17s^2 + 8s + 1 + K_c} \left( \frac{1}{s} \right) \quad (34)$$

Depois que  $K_c$  é especificado, as raízes do polinômio no denominador da expressão anterior são calculadas. A expressão anterior pode ser expandida em frações parciais para posteriormente se aplicar a  $L^{-1}$ . Desta forma se encontra a resposta temporal do sistema para o  $K_c$  especificado.

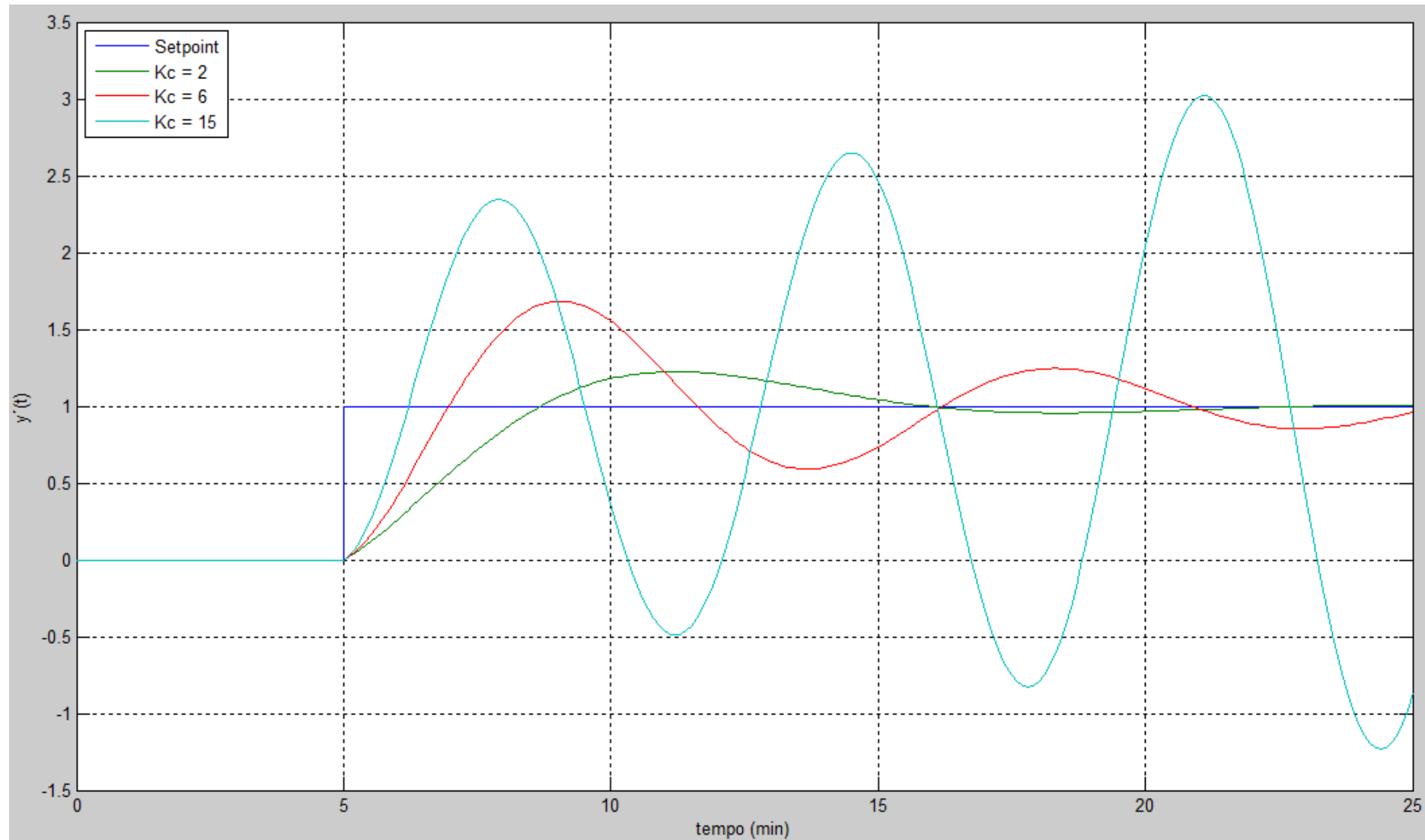
Tabela 1.4.1 – Raízes da equação característica para valores de  $K_c$

Raízes	$K_c = 2$	$K_c = 6$	$K_c = 15$
$p_1$	-1,2525	-1,4791	-1,7615
$p_2$	- 0,2237 + 0,4353 i	-0,1105 + 0,6790 i	0,0307 + 0,9526 i
$p_3$	- 0,2237 – 0,4353 i	-0,1105 – 0,6790 i	0,0307 – 0,9526 i

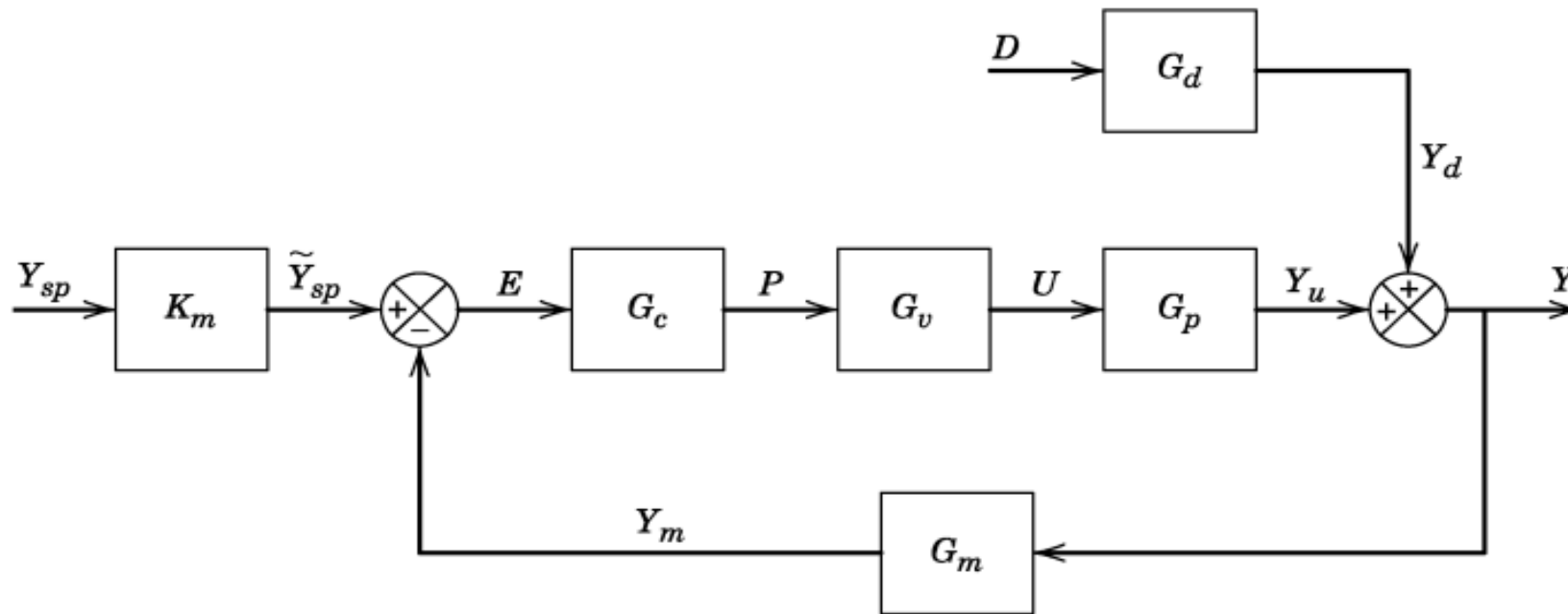
A Figura (1.4.1) a seguir mostra a resposta temporal do sistema de controle para valores de  $K_c = 2, 6$  e  $15$ .



Figura 1.4.1 – Comportamento em malha fechada.



**Critério Geral de Estabilidade:** Um sistema de controle é dito ser estável se e somente se **para todas as entradas limitadas a sua resposta temporal (saída) é também limitada**. Caso contrário, o sistema é dito ser instável. Contudo, em casos práticos, não se pode implementar uma malha fechada e esperar sua resposta para se avaliar a estabilidade da mesma. Faz-se, então, necessário que desenvolvamos uma maneira (um critério matemático) de avaliar a estabilidade do sistema de controle antes de se implementar fisicamente a malha de controle. Para isso, começemos pela análise das FTs do sistema de controle:



**Utilizaremos um sistema SISO para análise, porém, as mesmas metodologias são aplicada aos demais tipos de sistemas (MIMO, SIMO e MISO).**

Considere a expressão (Eq. 9) de malha fechada que representa o diagrama de blocos anterior:

$$Y(s) = \frac{K_M G_C G_V G_P}{1 + G_C G_V G_P G_M} Y_{sp}(s) + \frac{G_D}{1 + G_C G_V G_P G_M} D(s)$$

Chamando  $G_{OL}$  de função de transferência da malha aberta, então:

$$Y(s) = \frac{K_M G_C G_V G_P}{1 + G_{OL}} Y_{sp}(s) + \frac{G_D}{1 + G_{OL}} D(s) \quad (35)$$

Considere, neste momento, o problema servo ( $D(s) = 0$ ):

$$\frac{Y(s)}{Y_{sp}(s)} = \frac{K_M G_C G_V G_P}{1 + G_{OL}} \quad (36)$$

Como as FTs são funções racionais em “s”, elas podem ser fatoradas em zeros ( $z_i$ ) e pólos ( $p_i$ ):

$$\frac{Y(s)}{Y_{sp}(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (37)$$

Se não existirem polos repetidos, então a expansão em frações parciais toma a forma, assumindo que  $Y_{sp}(s) = 1/s$ :

$$Y(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{(s - p_1)} + \frac{A_2}{(s - p_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(s - p_n)} \quad (38)$$

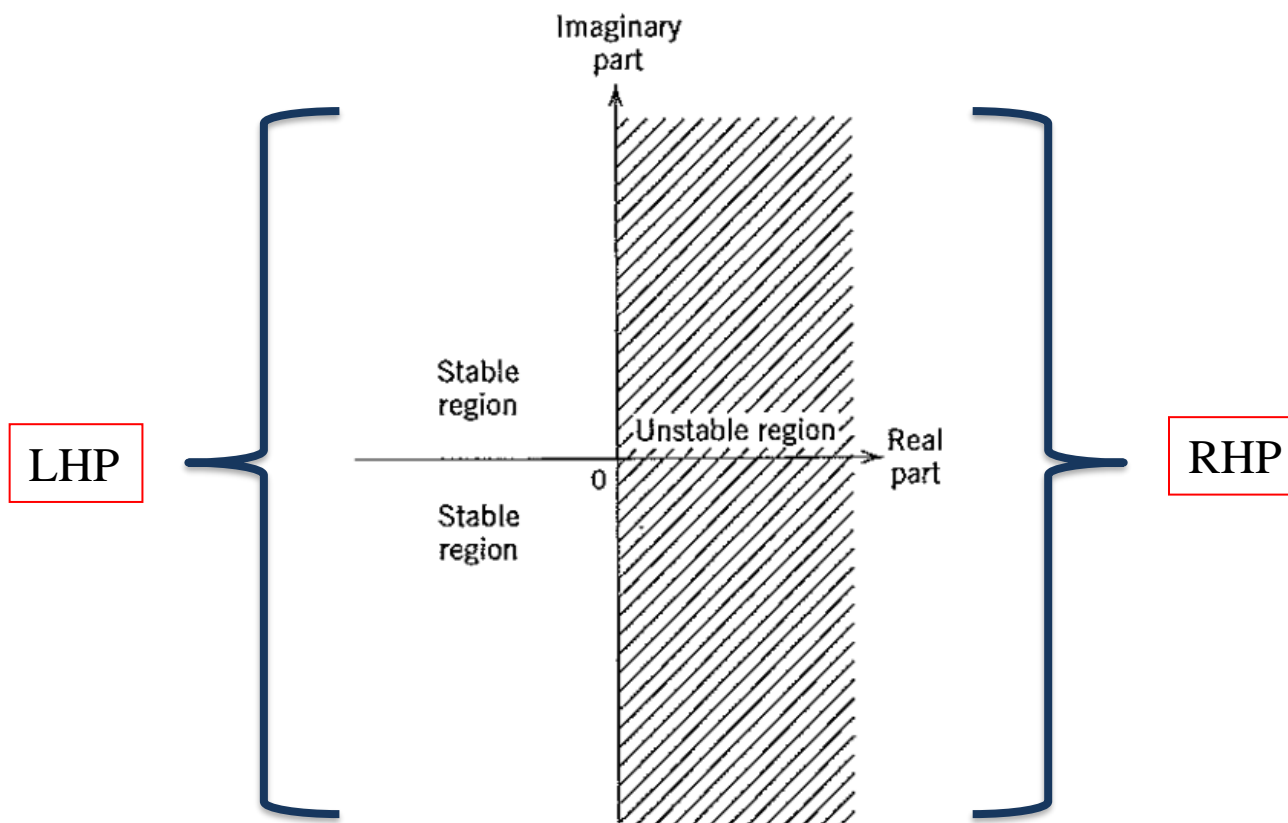
$$\text{Tomando a } L^{-1}: y(t) = A_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots + A_n e^{p_n t} \quad (39)$$

Se existe algum  $p_k$  que é real e maior que zero, isto é,  $p_k > 0$ , então quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $y(t \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ , ou seja, o sistema é instável. Se  $p_k$  é um número complexo,  $p_k = a_k + b_k i$ , com  $a_k > 0$  o sistema é também instável.

De uma maneira geral:

Termo em $G(s)$	Termo na resposta temporal	Pólos
$1/s$	$\rightarrow$ termo constante	$s_1 = 0$
$1/(s-p_2)$	$\rightarrow e^{p_2 t}$	$s_2 = p_2$
$1/(s-p_3)^2$	$\begin{cases} e^{p_3 t} \\ te^{p_3 t} \end{cases}$	$s_3 = p_3$ $s_4 = p_3$
$1/(s-p_5) \text{ e } 1/(s-p_6)$ $p_5 = a_5 + b_5 i$ $p_6 = a_5 - b_5 i$	$\begin{cases} e^{a_5 t} \text{sen}(b_5 t) \\ e^{a_5 t} \text{cos}(b_5 t) \end{cases}$	$s_5 = a_5 + b_5 i$ $s_6 = a_5 - b_5 i$
+ termos devido à entrada		

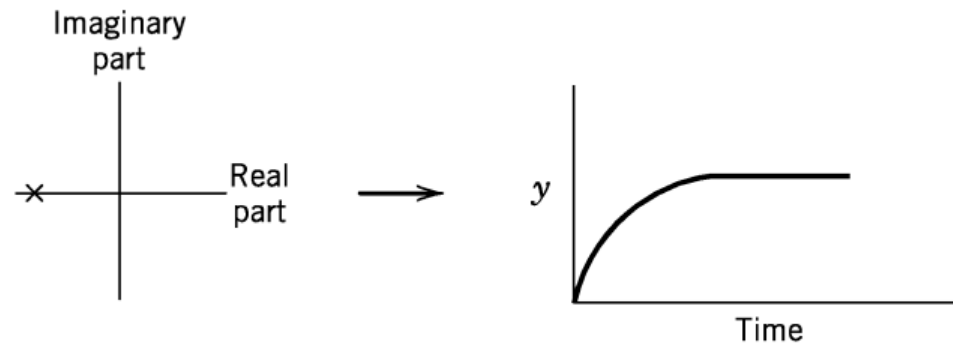
**Critério Geral de Estabilidade:** Um sistema de controle *Feedback* linear é dito ser estável se e somente se **TODOS** os polos da função de transferência do laço fechado (raízes da equação característica,  $1+G_{OL}(s) = 0$ ) são negativas ou têm partes reais negativas. Do contrário, o sistema é instável.



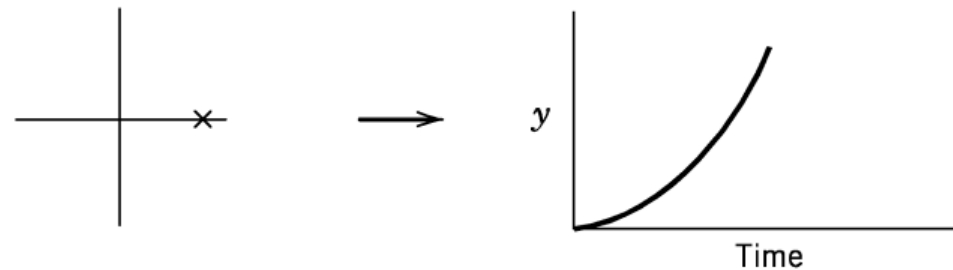
Além disso, as raízes da equação característica também determinam o tipo de resposta do sistema de controle:

**Raízes complexas** → resposta oscilatória (modos dinâmicos seno e cosseno)

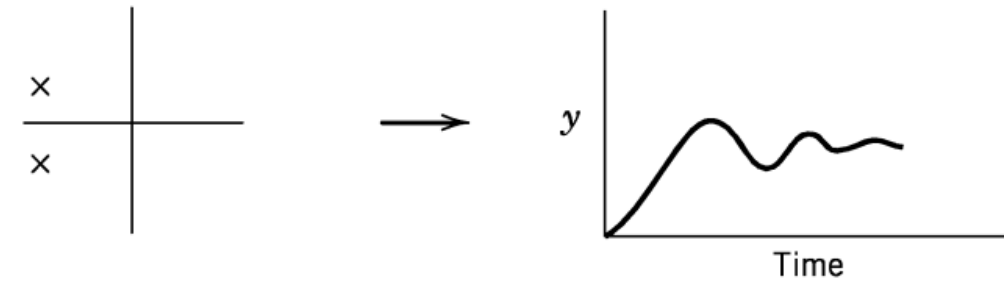
**Todas as raízes reais** → sem oscilações (modos dinâmicos exponenciais)



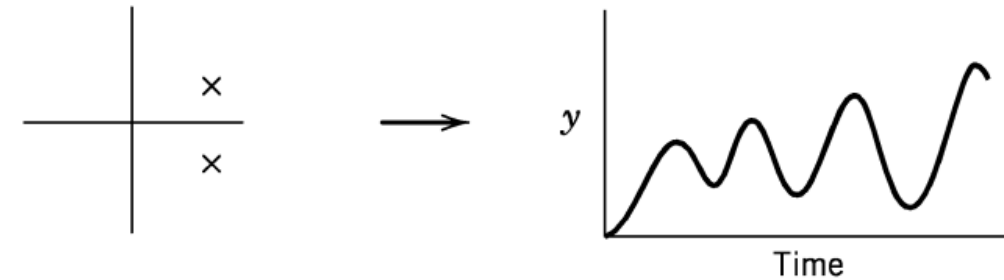
(a) Negative real root



(b) Positive real root



(c) Complex roots (negative real parts)



(d) Complex roots (positive real parts)

Como o problema regulador tem a mesma equação característica,  $1+G_{OL}(s) = 0$ , tudo que se aprendeu para o problema servo é válido para o problema regulador.

**Exemplo 1.4.2:** Considere o sistema de controle *Feedback* com as FTs dadas a seguir. Se um controlador proporcional é usado, para que valores de  $K_c$  o sistema produzirá resposta temporal estável?

$$G_p = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \quad G_m = 1 \quad G_v = K_v \quad G_c = K_c$$

Solução:

$$1 + G_{OL}(s) = 0 \rightarrow 1 + \frac{K_c K_v K_p}{\tau_p s + 1} = 0$$

$$\tau_p s + 1 + K_c K_v K_p = 0$$

$$s = -\frac{(1 + K_c K_v K_p)}{\tau_p}$$

Como  $\tau_p > 0 \rightarrow K_c K_v K_p > -1$



**Exemplo 1.4.3:** Refaça o exemplo anterior com as TFs dadas a seguir:

$$G_p = \frac{1}{5s+1} \quad G_m = 1 \quad G_v = \frac{1}{2s+1} \quad G_c = K_c$$

Solução:

$$1 + G_{OL}(s) = 0 \rightarrow 1 + \frac{K_c}{(2s+1)(5s+1)} = 0$$

$$10s^2 + 7s + (1 + K_c) = 0$$

$$s = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40(K_c + 1)}}{20}$$

Para ser estável a parte real de ambas as equações deve ser negativa, logo:

$$\sqrt{49 - 40(K_c + 1)} < 7 \rightarrow \boxed{K_c > -1}$$

### 1.4.1 – Critério de estabilidade de Routh:

Seja a equação característica:  $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$

Sempre com  $a_n > 0$ . De acordo com o critério de Routh, se algum dos coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  são negativos ou zero, então pelo menos uma raiz da equação característica reside no RHP e, assim, o sistema é instável. Por outro lado, se todos os coeficientes são positivos, então se deve construir a matriz Routh mostrado abaixo:

Row				
1	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$
2	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$
3	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$
4	$c_1$	$c_2$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$			
$n + 1$	$z_1$			

**Vetor de Routh**

Para estabilidade, todos os elementos da primeira coluna devem ser positivos. As duas primeiras linhas da matriz de Routh são compostas pelos coeficientes da equação característica. Os elementos das linhas restantes são calculados a partir dos coeficientes, utilizando o fórmulas:

Row				
1	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$
2	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$
3	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$
4	$c_1$	$c_2$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$			
$n + 1$	$z_1$			

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

$$\vdots$$

***$n+1$  linhas devem ser construídas onde  $n$  é o grau da Equação característica.***

**Exemplo 1.4.3:** Considere o sistema de controle *Feedback* com as FTs dadas a seguir. Se um controlador proporcional é usado, para que valores de  $K_C$  o sistema produzirá resposta temporal estável? Utilize o Critério de estabilidade de Routh para a análise.

$$G_P = G_D = \frac{8}{(s+2)^3} \quad G_V = G_M = 1 \quad G_C = K_C$$

Solução:

$$1 + G_{OL}(s) = 0 \rightarrow 1 + \frac{8K_C}{(s+2)^3} = 0 \rightarrow (s+2)^3 + 8K_C = 0 \rightarrow s^3 + 6s^2 + 12s + 8 + 8K_C = 0$$

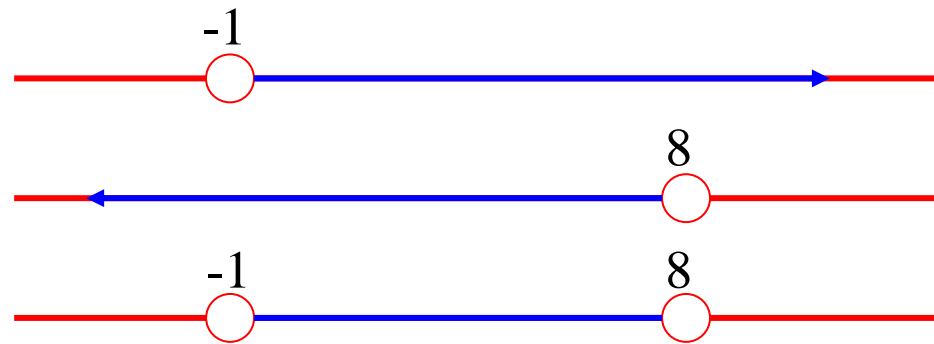
Queremos saber que valor de  $K_C$  causa instabilidade, ou seja, que valor de  $K_C$  produz pelo menos uma raiz positiva da equação acima. Usando a matriz de Routh:

1	1	12
2	6	$8 + 8K_C$
3	$\frac{6(12) - (1)(8 + 8K_C)}{6}$	0
4	$8 + 8K_C$	0

Para o sistema ser estável:

$$72 - (8 + 8K_C) > 0 \rightarrow K_C < 8$$

$$8 + 8K_C > 0 \rightarrow K_C > -1$$



$$-1 < K_C < 8$$

### 1.4.2 – Método da substituição direta

O eixo imaginário divide o plano complexo nas regiões estável e instável. Sobre o eixo imaginário a parte real é nula. Este eixo representa então o limite entre a estabilidade e a instabilidade de um sistema. Sobre este eixo um polo pode ser escrito como  $s = j\omega$ . Substituindo este valor na equação característica pode-se encontrar o valor que  $K_c$  que leva a parte real ser nula, ou seja, o valor de  $K_c$  máximo.

**Exemplo 1.4.4:** Refaça o exemplo anterior usando o método da substituição direta.

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 + 8K_c = 0 \xrightarrow{s=j\omega} (j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 12(j\omega) + 8 + 8K_c = 0$$

$$-\omega^3 j - 6\omega^2 + 12\omega j + 8 + 8K_c = 0 \rightarrow (-6\omega^2 + 8 + 8K_c) + j(12\omega - \omega^3) = 0$$

Portanto:  $-6\omega^2 + 8 + 8K_c = 0 \Rightarrow K_c|_{\text{máx}} = 8$

$12\omega - \omega^3 = 0 \Rightarrow \omega = 2\sqrt{3} \text{ rad/min}$

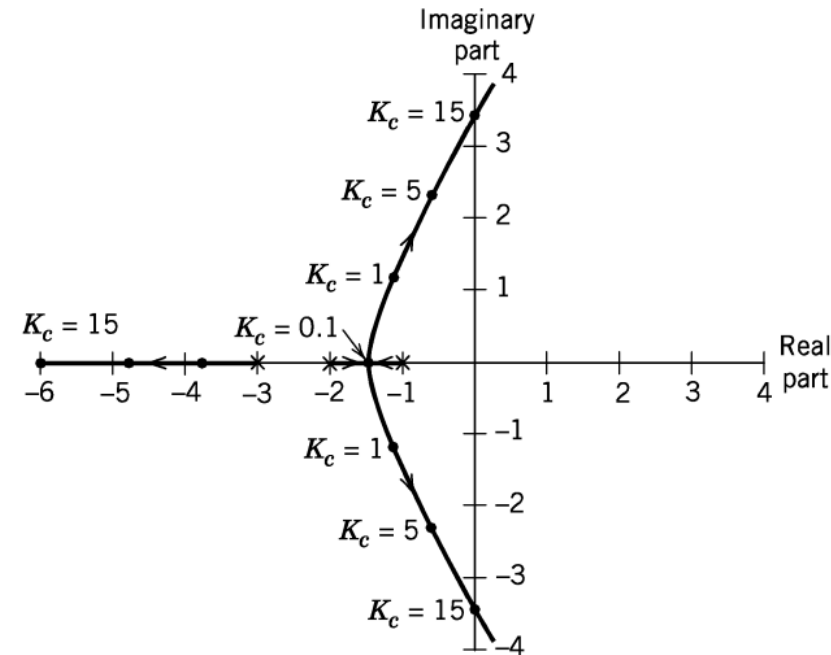
## 1.4.3 – Diagrama do lugar das raízes

Anteriormente, vimos a regra e algumas técnicas numéricas para a análise de estabilidade de sistemas em malha fechada. A mesma análise pode ser feita através do diagrama do lugar das raízes, que de forma gráfica, podemos visualizar o local exato de cada zero e polo.

**Exemplo 1.4.5:** Considere a FT de malha aberta:

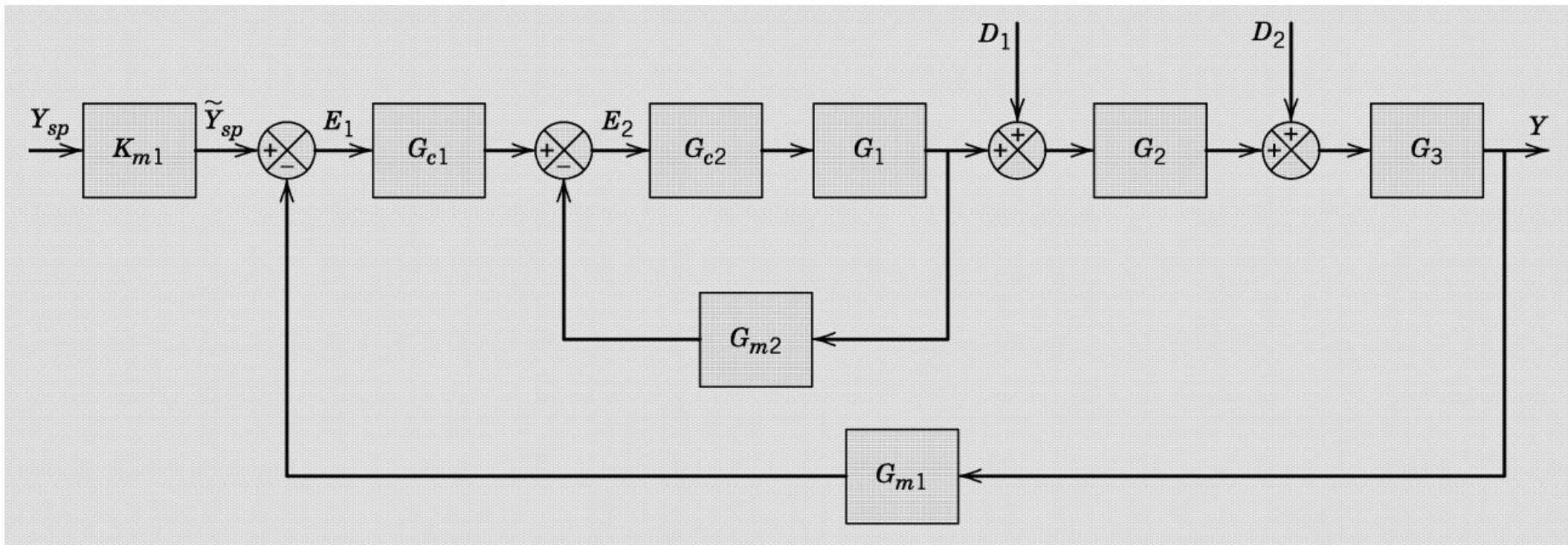
$$G_{OL}(s) = \frac{4K_C}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Para  $0 \leq K_C \leq 20$



## 1.5 – Exercícios

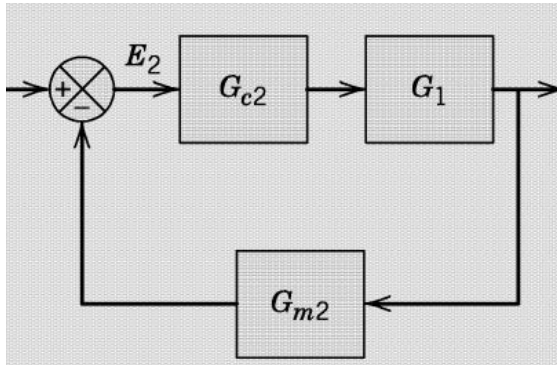
1.5.1)- Encontre a função de transferência  $Y/Y_{sp}$  para o sistema de controle *Feedback* a seguir. Esta configuração aparece quando o controle cascata é usado.





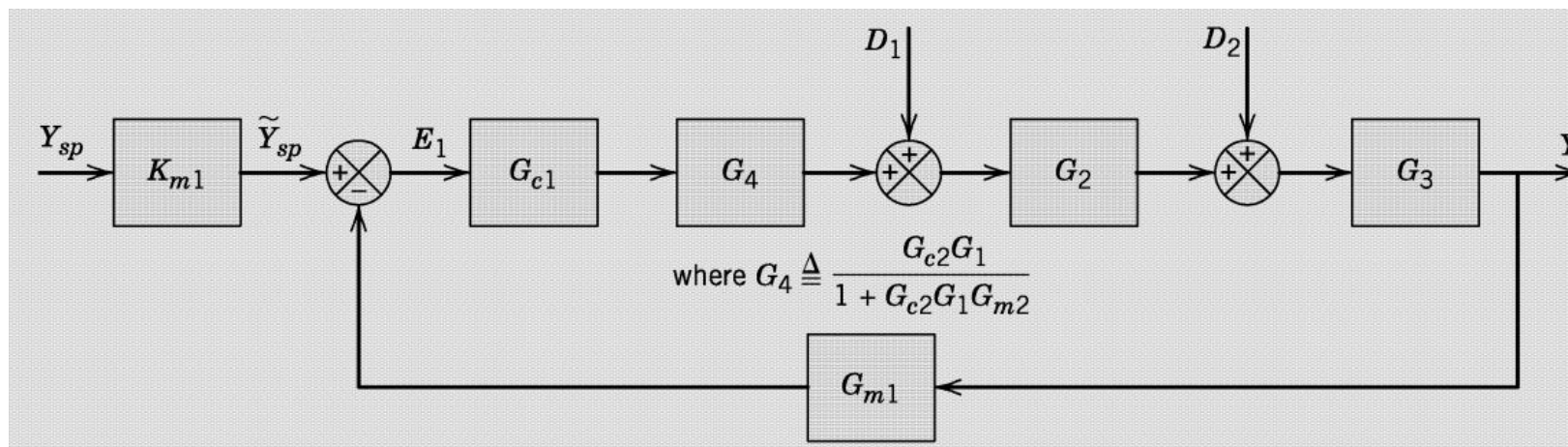
Solução:

Primeiro vamos reduzir o laço de controle interno a um bloco simples. Isto é conseguido aplicando-se a regra anterior:



$$\frac{Z}{Z_i} = \frac{\Pi_f}{1 + \Pi_e} = G_4 = \frac{G_{c2}G_1}{1 + G_{c2}G_1G_{m2}}$$

Logo:

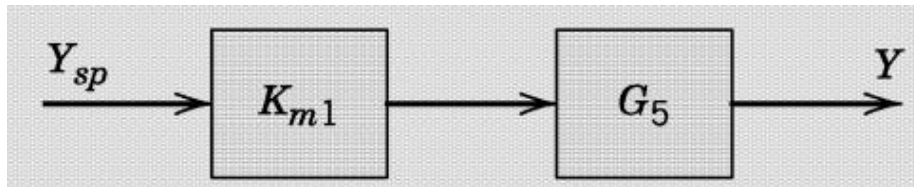


Aplicando-se novamente a regra ao laço *feedback* resultante, obtém-se:

$$\frac{Z}{Z_i} = \frac{\Pi_f}{1 + \Pi_e}$$

$$\frac{Y}{Y_{sp}} = G_5 = \frac{K_{m1} G_{c1} G_4 G_2 G_3}{1 + G_{c1} G_4 G_2 G_3 G_{m1}}$$

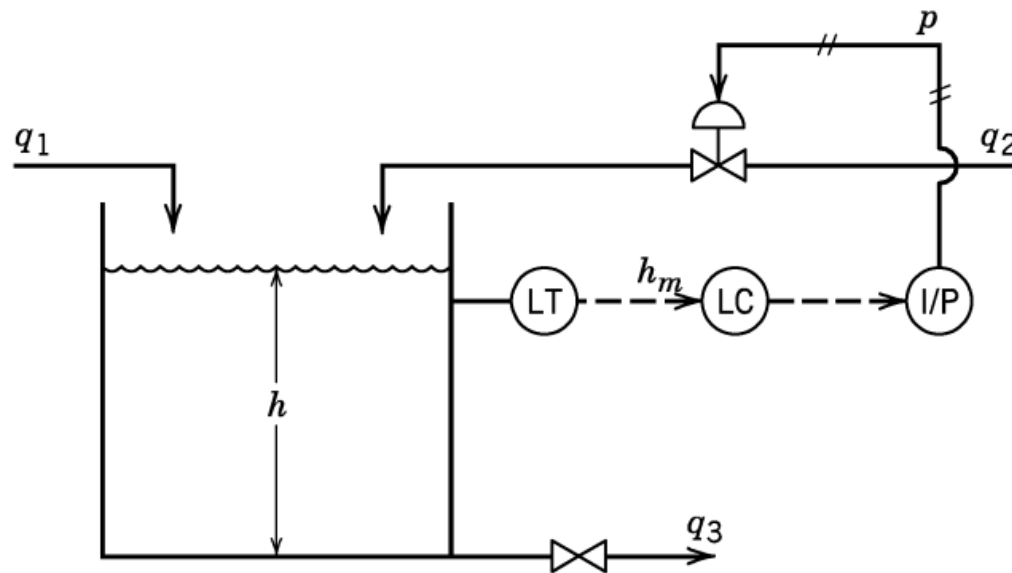
Finalmente,



$$G_5 = \frac{K_{m1} G_{c1} G_4 G_2 G_3}{1 + G_{c1} G_4 G_2 G_3 G_{m1}}$$

1.5.2)- Considere o sistema de controle de nível de líquido a seguir. O nível é medido por um sensor/transmissor (LT) e enviado a um controlador que ajusta a vazão volumétrica  $q_2$ . A vazão  $q_1$  é sujeita a perturbações. Admita que:

- $\rho$  e  $A$  são constantes e que  $q_3 = h/R$ ;
- O LT, I/P e a válvula têm dinâmicas desprezíveis em relação à dinâmica do tanque;
- O controlador é eletrônico (entrada e saída são sinais elétricos – mA).



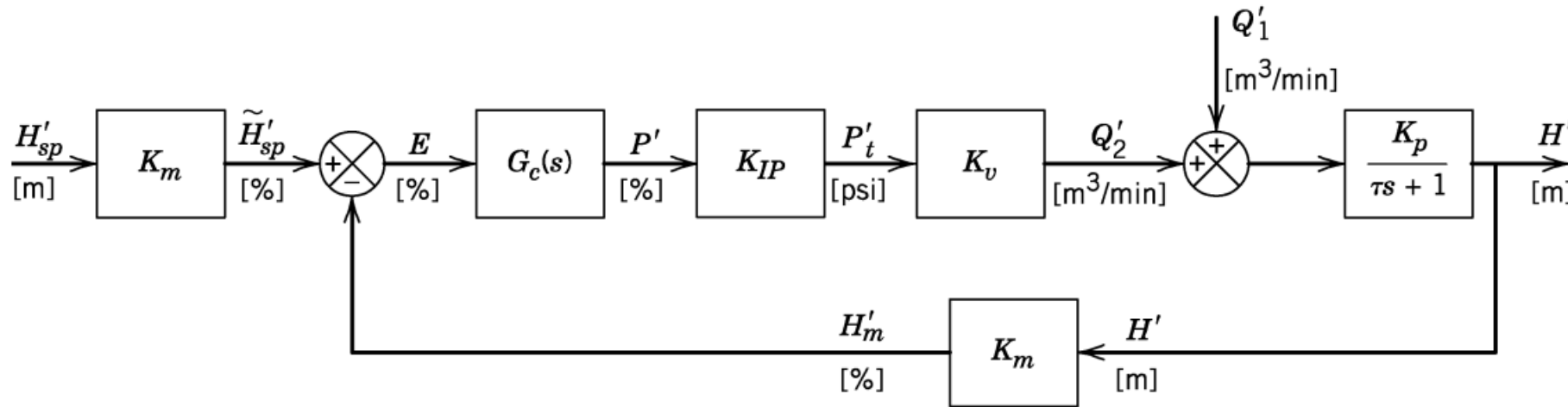
$$\rho A \frac{dh}{dt} = \rho q_1 + \rho q_2 - \rho q_3$$

$$A \frac{dh'}{dt} = q'_1 + q'_2 - \frac{h'}{R}$$

$$\frac{H'(s)}{Q'_2(s)} = G_p = \frac{K_p}{\tau s + 1}$$

$$\frac{H'(s)}{Q'_1(s)} = G_d = \frac{K_p}{\tau s + 1}$$

onde  $K_p = R$  e  $\tau = RA$ . Como o transmissor, transdutor e válvula têm dinâmica desprezível, então  $G_m(s) = K_m$ ,  $G_{I/P}(s) = K_{IP}$  e  $G_v(s) = K_v$ . Logo,



## Caso 1: Controlador Proporcional e Mudança de *Setpoint* (servo)

$$\frac{H'(s)}{H'_{sp}(s)} = \frac{\Pi_f}{1 + \Pi_e} = \frac{K_m K_c K_{I/P} K_v K_p / (\tau s + 1)}{1 + K_c K_{I/P} K_v K_p K_m / (\tau s + 1)} \Rightarrow \frac{H'(s)}{H'_{sp}(s)} = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1}$$

$$\text{Com } K_1 = \frac{K_{OL}}{1 + K_{OL}}, \quad \tau_1 = \frac{\tau}{1 + K_{OL}}, \quad K_{OL} = K_c K_{I/P} K_v K_p K_m$$

Então, para uma mudança degrau de amplitude  $M$  no *setpoint*, a resposta do laço fechado é dada por:

$$h'(t) = L^{-1}[H'(s)] \quad \Rightarrow \quad h'(t) = K_1 M (1 - e^{-t/\tau_1})$$

Note que  $K_{OL} > 0$  e  $\tau_1 < \tau$ . O controlador *Feedback* permite que o processo controlado responda mais rápido que o processo não controlado. Pode-se ainda avaliar o tamanho do *offset*:

$$\overset{\Delta}{\text{offset}} = h'_{sp}(\infty) - h'(\infty) \quad \Rightarrow \quad \text{offset} = M - K_1 M \quad \Rightarrow \quad \text{offset} = \frac{M}{1 + K_{OL}}$$

## Caso 2: Controlador Proporcional e Mudança de Carga (regulador)

$$\frac{H'(s)}{Q'_1(s)} = \frac{\Pi_f}{1 + \Pi_e} = \frac{K_p / (\tau s + 1)}{1 + \underbrace{K_c K_{I/P} K_v K_p K_m}_{K_{OL}} / (\tau s + 1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{H'(s)}{Q'_1(s)} = \frac{K_2}{\tau_1 s + 1}$$

$$\text{com } K_2 = \frac{K_p}{1 + K_{OL}}$$

Então, para uma mudança degrau de amplitude  $M$  na carga  $q_1(t)$ , a resposta do laço fechado é dada por:

$$h'(t) = L^{-1}[H'(s)] \Rightarrow h'(t) = K_2 M (1 - e^{-t/\tau_1})$$

Pode-se ainda avaliar o tamanho do *offset*:

$$\overset{\Delta}{\text{offset}} = h'_{sp}(\infty) - h'(\infty) \Rightarrow \text{offset} = 0 - K_2 M \Rightarrow \text{offset} = -\frac{K_p M}{1 + K_{OL}}$$

## Caso 3: Controlador PI e Mudança de Carga

$$\frac{H'(s)}{Q'_1(s)} = \frac{\Pi_f}{1 + \Pi_e} = \frac{K_p / (\tau s + 1)}{1 + \underbrace{K_{I/P} K_v K_p K_m K_c}_{K_{OL}} (1 + 1/\tau_I s) / (\tau s + 1)}$$

$$\frac{H'(s)}{Q'_1(s)} = \frac{K_p \tau_I s}{\tau_I s (\tau s + 1) + K_{OL} (\tau_I s + 1)}$$

Após um rearranjo:

$$\frac{H'(s)}{Q'_1(s)} = \frac{K_3 s}{\tau_3^2 s^2 + 2\zeta_3 \tau_3 s + 1}$$

onde

$$K_3 = \frac{\tau_I}{K_c K_{I/P} K_v K_m} \quad \zeta_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + K_{OL}}{\sqrt{K_{OL}}} \right) \sqrt{\frac{\tau_I}{\tau}} \quad \tau_3 = \sqrt{\frac{\tau_I \tau}{K_{OL}}}$$

Para uma mudança degrau unitário na carga  $q_1(t)$ , a resposta do laço fechado é dada por:

$$h'(t) = L^{-1}[H'(s)] \quad \Rightarrow \quad h'(t) = L^{-1} \left[ \frac{K_3 s}{s(\tau_3^2 s^2 + 2\zeta_3 \tau_3 s + 1)} \right]$$

$$h'(t) = L^{-1} \left[ \frac{K_3}{\tau_3^2 s^2 + 2\zeta_3 \tau_3 s + 1} \right] \quad \Rightarrow \quad h'(t) = \frac{K_3}{\tau_3 \sqrt{1 - \zeta_3^2}} e^{-\zeta_3 t / \tau_3} \operatorname{sen} \left[ \left( \sqrt{1 - \zeta_3^2} \right) \frac{t}{\tau_3} \right]$$

Pode-se ainda avaliar o tamanho do *offset*:

$$\overset{\Delta}{\text{offset}} = h'_{sp}(\infty) - h'(\infty) \Rightarrow \text{offset} = 0 - 0 \Rightarrow \boxed{\text{offset} = 0}$$

### Caso 4: Controlador PI e Mudança de *Setpoint*

$$\frac{H'(s)}{H'_{sp}(s)} = \frac{\Pi_f}{1 + \Pi_e} = \frac{K_m K_c (1 + 1/\tau_I s) K_{I/P} K_v K_p / (\tau s + 1)}{1 + K_c (1 + 1/\tau_I s) K_{I/P} K_v K_p K_m / (\tau s + 1)}$$

$$\frac{H'(s)}{H'_{sp}(s)} = \frac{K_c K_{I/P} K_v K_p K_m (1 + 1/\tau_I s) / (\tau s + 1)}{1 + \underbrace{K_c K_{I/P} K_v K_p K_m}_{K_{OL}} (1 + 1/\tau_I s) / (\tau s + 1)}$$

$$\frac{H'(s)}{H'_{sp}(s)} = \frac{K_{OL} (\tau_I s + 1)}{\tau_I s (\tau s + 1) + K_{OL} (\tau_I s + 1)}$$



Após um rearranjo:

$$\frac{H'(s)}{H'_{sp}(s)} = \frac{\tau_I s}{\tau_3^2 s^2 + 2\zeta_3 \tau_3 s + 1} + \frac{1}{\tau_3^2 s^2 + 2\zeta_3 \tau_3 s + 1}$$

com

$$\zeta_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + K_{OL}}{\sqrt{K_{OL}}} \right) \sqrt{\frac{\tau_I}{\tau}} \quad \tau_3 = \sqrt{\frac{\tau_I \tau}{K_{OL}}}$$

Para uma mudança degrau unitário no *setpoint*  $h_{sp}(t)$ , a resposta do laço fechado é dada por:

$$h'(t) = L^{-1}[H'(s)] \Rightarrow h'(t) = L^{-1} \left[ \frac{\tau_I}{\tau_3^2 s^2 + 2\zeta_3 \tau_3 s + 1} + \frac{1}{s(\tau_3^2 s^2 + 2\zeta_3 \tau_3 s + 1)} \right]$$

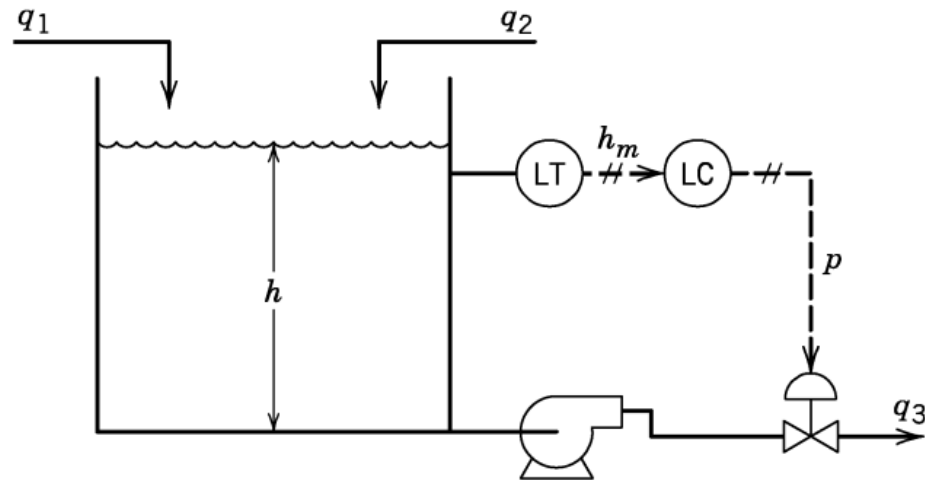
$$h'(t) = \frac{\tau_I}{\tau_3 \sqrt{1 - \zeta_3^2}} e^{-\zeta_3 t / \tau_3} \operatorname{sen} \left[ \left( \sqrt{1 - \zeta_3^2} \right) \frac{t}{\tau_3} \right] + \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta_3^2}} e^{-\zeta_3 t / \tau_3} \operatorname{sen} \left[ \left( \sqrt{1 - \zeta_3^2} \right) \frac{t}{\tau_3} + \varphi \right] \right\}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \zeta_3^2}}{\zeta_3} \right)$$

*Offset:*  $\Delta \text{offset} = h'_{sp}(\infty) - h'(\infty) \Rightarrow \text{offset} = 1 - 1 \Rightarrow \boxed{\text{offset} = 0}$

1.5.3)- Controle PI de um processo integrante: O exemplo a seguir difere do anterior em dois pontos:

- Existe uma bomba na linha de saída;
- A variável manipulada é a vazão de saída e não a vazão de entrada.



Processo:  $\frac{H'(s)}{Q'_3(s)} = G_p(s) = -\frac{1}{As}$

$$\frac{H'(s)}{Q'_1(s)} = G_d(s) = \frac{1}{As}$$

Considerando a válvula e o transmissor com dinâmica desprezível:

$$G_m(s) = K_m$$

$$G_v(s) = K_v$$

Para o problema regulador a FT do laço fechado é dada por:

$$\frac{H'(s)}{Q'_1(s)} = \frac{\Pi_f}{1 + \Pi_e} = \frac{G_d}{1 + G_c G_v G_p G_m} \quad \Rightarrow \quad \frac{H'(s)}{Q'_1(s)} = \frac{1/A_s}{1 + K_c (1 + 1/\tau_{Is}) K_v (-1/A_s) K_m}$$

Rearranjando:

$$\frac{H'(s)}{Q'_1(s)} = \frac{K_4 s}{\tau_4^2 s^2 + 2\zeta_4 \tau_4 s + 1}$$

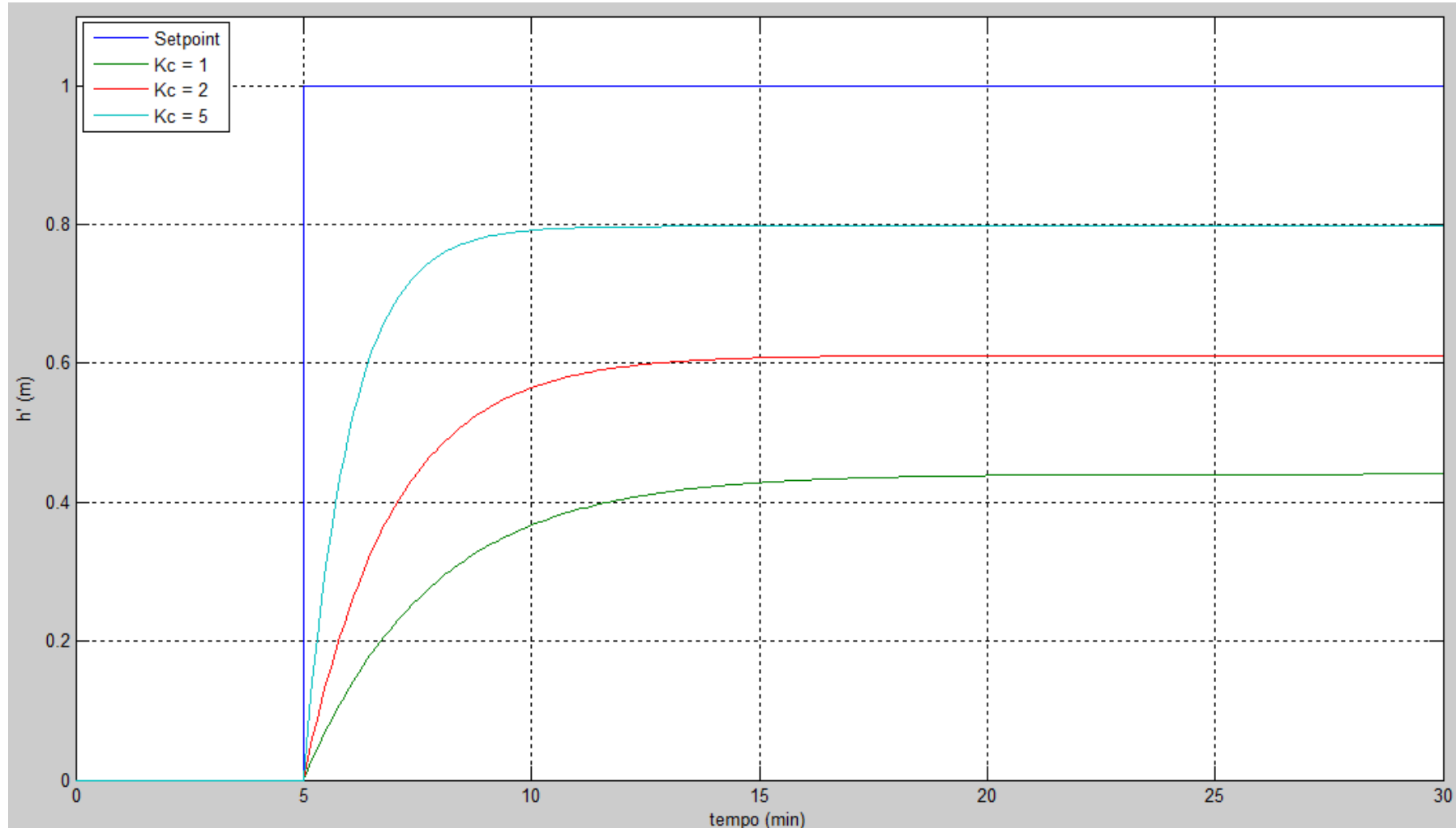
com

$$K_{OL} = K_c K_v K_p K_m \quad K_p = -1/A \quad \tau_4 = \sqrt{\tau_I / K_{OL}} \quad \zeta_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\tau_I K_{OL}}$$

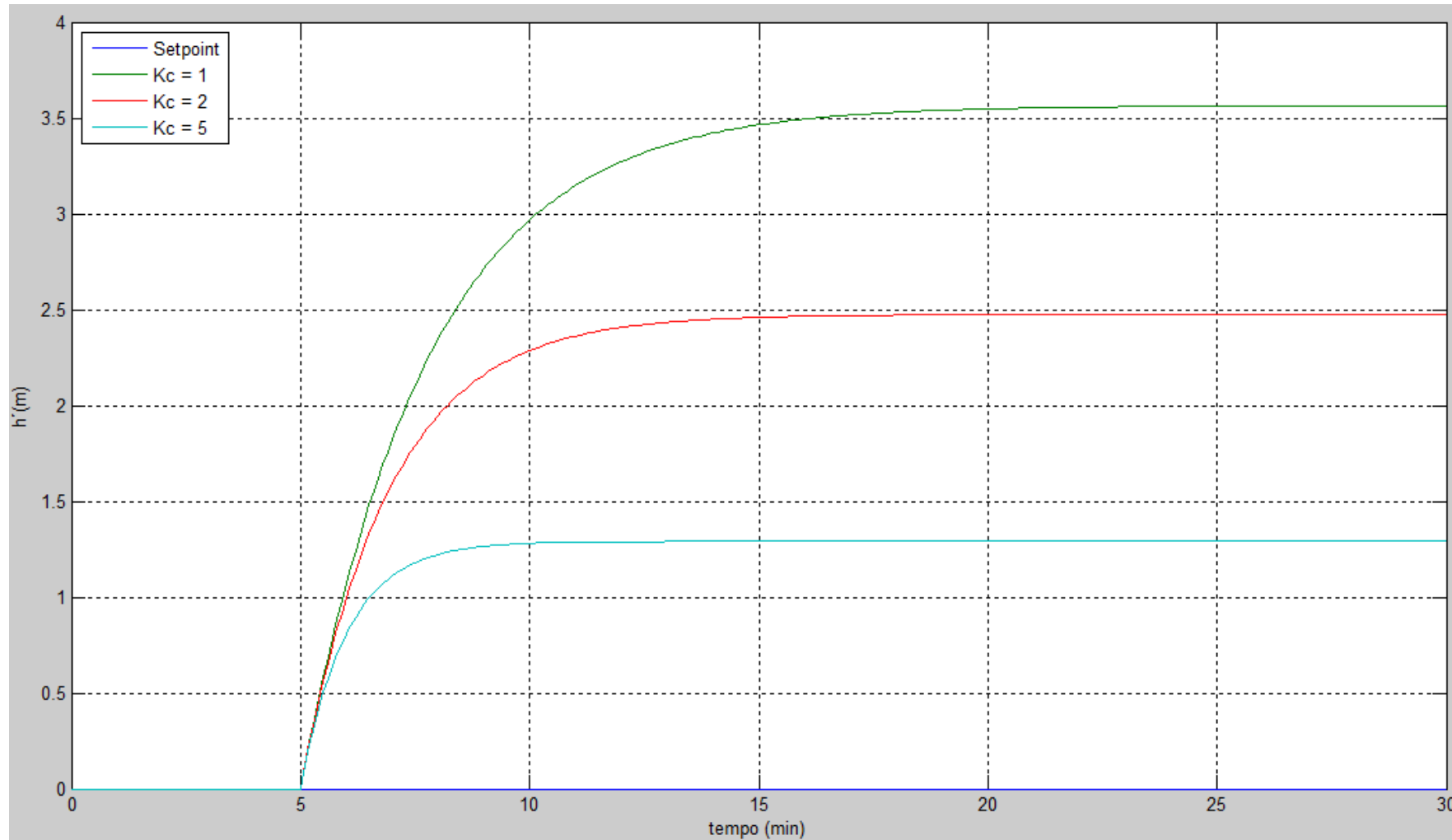
**OBSERVAÇÃO:** A comparação das FTs em malha aberta e fechada nos mostra que a introdução do controle *Feedback* alterou significativamente a relação entre  $h'(t)$  e  $q'_1(t)$ . O comportamento em laço fechado será oscilatório para valores de  $0 < \zeta_4 < 1$ . O grau de oscilação pode ser reduzido pelo aumento de  $K_c$  ou  $\tau_I$ . O efeito de  $\tau_I$  é familiar, mas o do  $K_c$  é o contrário do que se verifica normalmente. Este comportamento anômalo é devido à natureza integrante do sistema.

1.5.4)- Respostas típicas de sistemas controlados: Seja um sistema de controle qualquer:

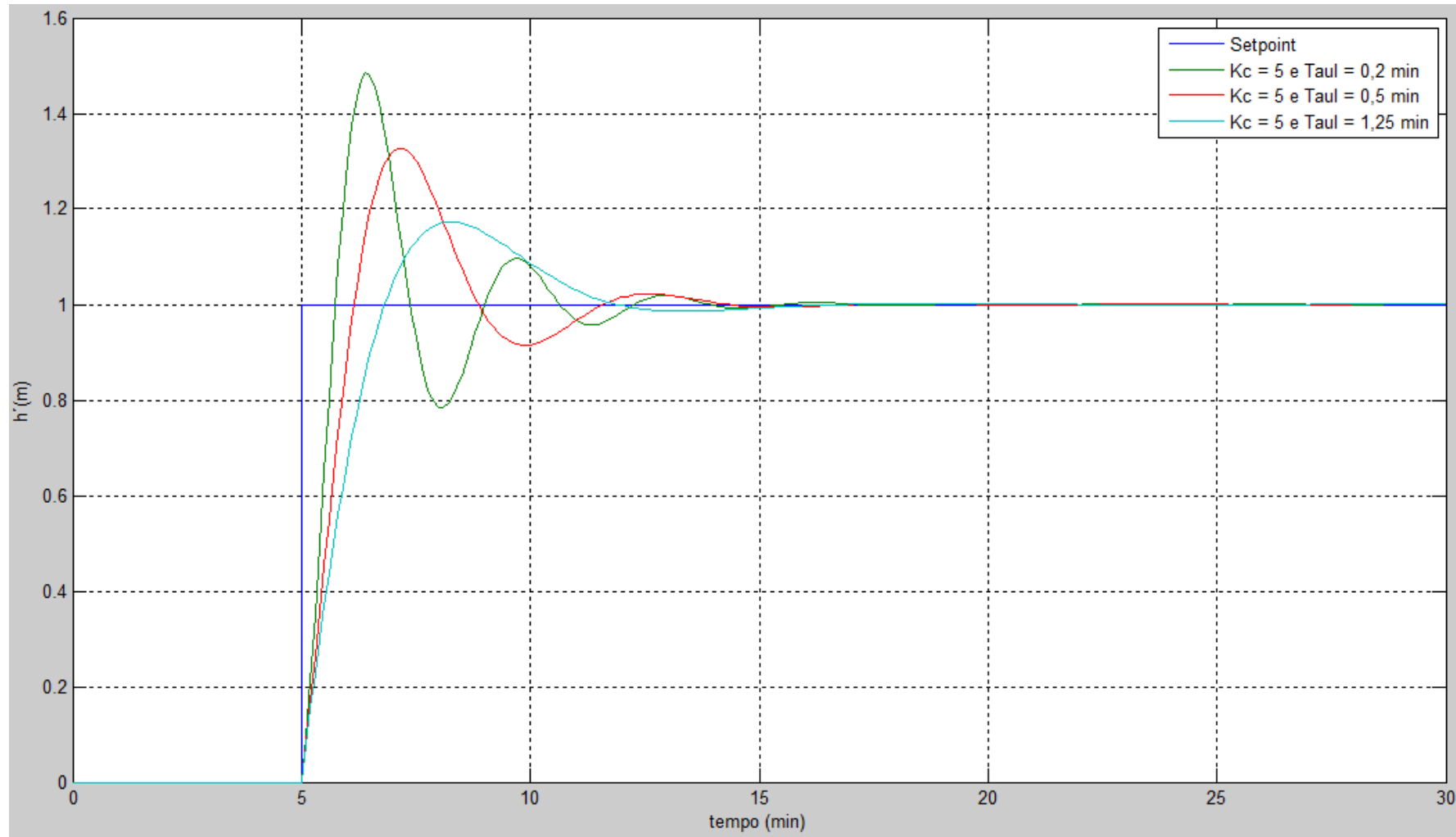
**Servo: Controle Proporcional somente:**



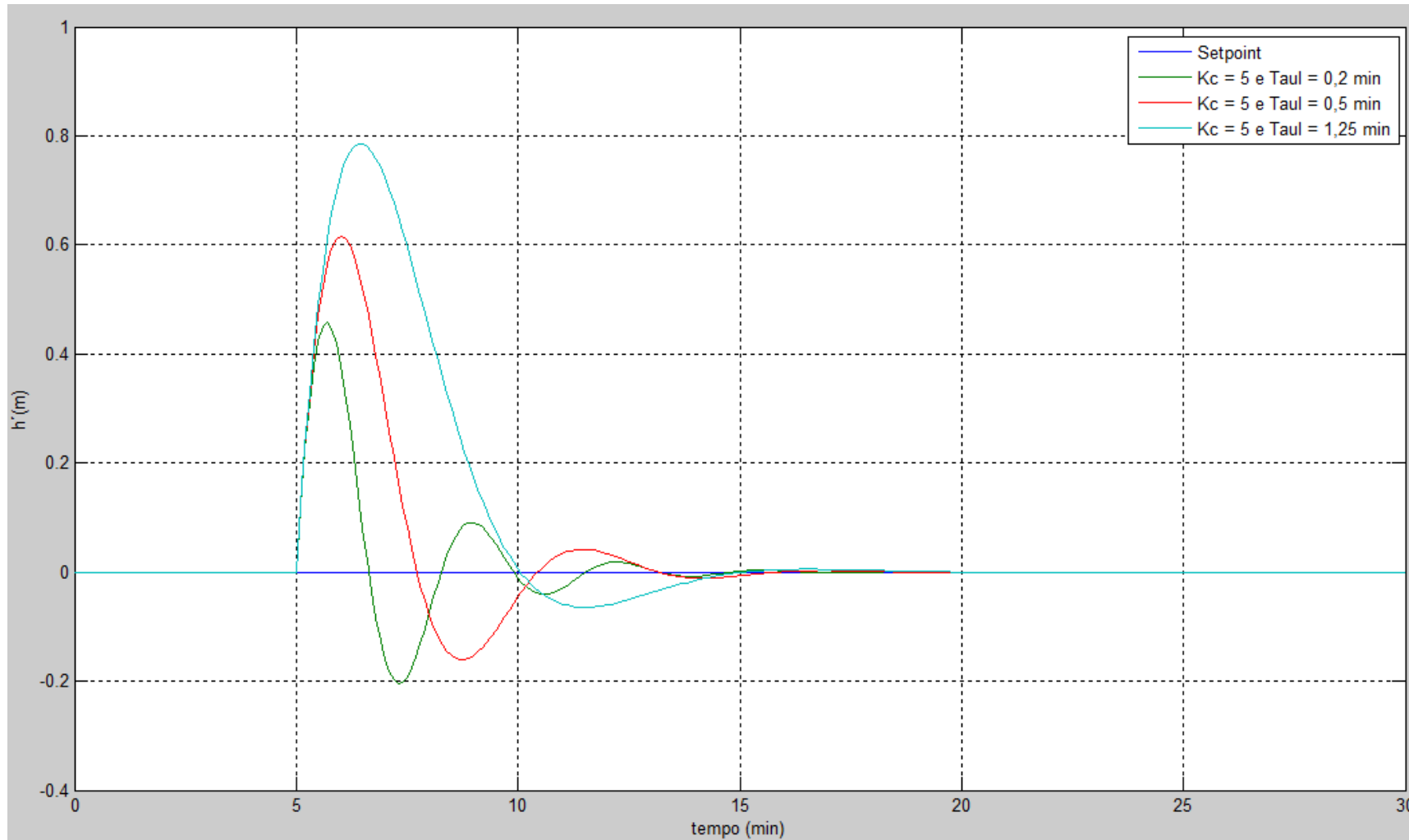
## Regulador: Controle Proporcional somente:



## Servo: Controle PI:



## Regulador: Controle PI:



### **PROPOSTA DE EXERCÍCIOS (Entrega não necessária!):**

- 1)- Refazer a álgebra do diagrama de blocos do slide 13, demonstrando a Eq. (9), utilizando a Regra Geral da Eq. (2)
- 2)- Refazer os exercícios resolvidos dos Capítulos 8 e 10 do Livro Texto (SEBORG D. E. *et al* - 2ª Edição);
- 3)- Exercícios 8.1 ao 8.11 do Capítulo 8 do Livro Texto (SEBORG D. E. *et al* - 2ª Edição);
- 4)- Exercícios 11.1 ao 11.21 do Capítulo 11 do Livro Texto (SEBORG D. E. *et al* - 2ª Edição);
- 5)- Demais exercícios de outras bibliografias referente ao assunto do capítulo.

**Fique a vontade para praticar!**



## Bibliografia

- 1)- SEBORG, D. E., EDGAR, T. F., MELLCHAMP, D. A. – Process Dynamics and Control, Wiley, 2011.
- 2)- SMITH, C. A., CORRIPIO, A. B. – Princípios e Práticas do Controle Automático de Processos, LTC, 3ª edição, 2008.
- 3)- OGATA, K – Engenharia de Controle Moderno, Pearson, 5ª edição, 2011.
- 4)- HENRIQUE, H. M. – Notas de aula. Universidade Federal de Uberlândia, 2009.
- 5)- LUYBEN, W. L. – Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers, 2a. Edição, McGraw Hill, 1990.
- 6)- BEQUETTE, B. W. – Process Control. Modeling, Design, and Simulation. Prentice Hall, 2003.
- 7)- SIGHIERI, L., NISHINARI, A. Controle Automático de Processos Industriais – Instrumentação, 2ª Ed, Edgard Blucher, 1997.
- 8)- COUGHANOWR, D.; LEBLANC, S. Process Systems Analysis and Control, McGraw Hill, ed 3, 2008.
- 9)- STEPHANOPOULOS, G. – Chemical Process Control. An Introduction to Theory and Practice, Prentice Hall, 1984.



**Obrigado!**  
**Bom estudo!**

**Prof. Davi Leonardo de Souza**  
**davi.souza@uftm.edu.com**