Tarea 17 - Integración numérica

Isaac Rodríguez Bribiesca

Resumen Para esta tarea se implementaron las formas de integración numérica de Newton-Cotes para $n = 1, 2, 3, 4$ y 6.
Para estos métodos, se parte de un intervalo $[a, b]$ dividido en m subintervalos de ancho $h = \frac{x_m - x_0}{m}$ con $a = x_0$ y $b = x_m$. Con lo que se busca evaluar la integral $\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx$, para una función $f(x)$ real definida en $[a, b]$.

1. Método del trapecio

1.1. Metodología

Para la regla del trapecio con m puntos, la fórmula de integración queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + ... + \frac{h}{2}[f(x_{m-1}) + f(x_m)] \\ &= \frac{h}{2}\{f(x_0) + f(x_m) + 2[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{m-1})]\} \end{aligned} \tag{1}$$

1.2. Ejemplo de prueba

Resultado de la integral para n = 10, 100, 1000.

```
isaac@irb ~/Documents/CIMAT/Métodos Numéricos/Numerical-Methods/integration/src master ● gcc test.c integration.c -o test -lm && ./test 1
Integral of sin(x + 0.5) in interval [0, 4*pi] with 20 points: 1.188576e-08
Integral of sin(x + 0.5) in interval [0, 4*pi] with 100 points: 1.227669e-08
Integral of sin(x + 0.5) in interval [0, 4*pi] with 1000 points: 1.229271e-08
```

2. Método de Simpson 1/3

2.1. Metodología

Para la regla de Simpson 1/3 con m puntos, la fórmula de integración queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx &= \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]+\frac{h}{3}[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]+...+\frac{h}{2}[f(x_{m-1})+4f(x_{m-1})+f(x_m)] \\ &= \frac{h}{2}\{f(x_0) + f(x_m) + 2[f(x_2) + f(x_4) + ... + f(x_{m-2})] + 4[f(x_1) + f(x_3) + ... + f(x_{m-1})]\} \end{aligned} \tag{2}$$

2.2. Ejemplo de prueba

Resultado de la integral para n = 10, 100, 1000.

```
isaac@irb ~/Documents/CIMAT/Métodos Numéricos/Numerical-Methods/integration/src master ● gcc test.c integration.c -o test -lm && ./test 2
Integral of sin(x + 0.5) in interval [0, 4*pi] with 20 points: 1.230403e-08
Integral of sin(x + 0.5) in interval [0, 4*pi] with 100 points: 1.229289e-08
Integral of sin(x + 0.5) in interval [0, 4*pi] with 1000 points: 1.229287e-08
```

3. Método de Simpson 3/8

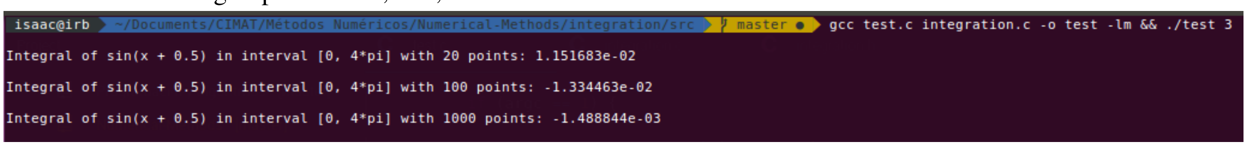
3.1. Metodología

Para la regla de Simpson 3/8 con m puntos, la fórmula de integración queda de la siguiente forma:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]+\frac{3h}{8}[f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)+f(x_6)]+...+\frac{3h}{8}[f(x_{m-3})+3f(x_{m-2})+3f(x_n$$
$$= \frac{3h}{8}\{f(x_0)+f(x_m)+3[f(x_1)+f(x_2)+f(x_4)+f(x_5)+...+f(x_{m-2})+f(x_{m-1})]+2[f(x_3)+f(x_6)+...+f(x_{m-3})]\} \tag{3}$$

3.2. Ejemplo de prueba

Resultado de la integral para n = 10, 100, 1000.



4. Método de Boole

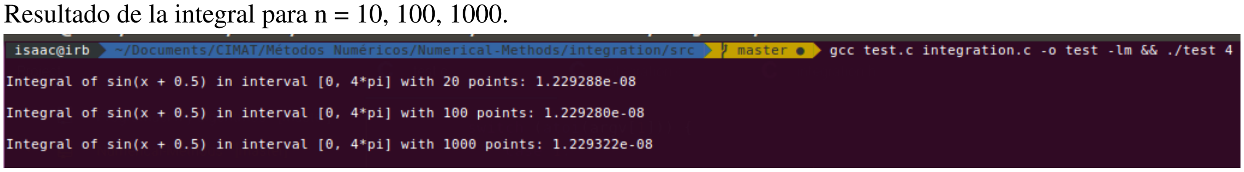
4.1. Metodología

Para la regla de Boole con m puntos, la fórmula de integración queda de la siguiente forma:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]+\frac{2h}{45}[7f(x_4)+32f(x_5)+12f(x_6)+32f(x_7)+7f(x_8)]+...$$
$$+\frac{2h}{45}[7f(x_{m-4})+32f(x_{m-3})+12f(x_{m-2})+32f(x_{m-1})+7f(x_m)]$$
$$= \frac{2h}{45}\{f(x_0)+f(x_m)+3[f(x_1)+f(x_2)+f(x_4)+f(x_5)+...+f(x_{m-2})+f(x_{m-1})]+2[f(x_3)+f(x_6)+...+f(x_{m-3})]\} \tag{4}$$

4.2. Ejemplo de prueba

Resultado de la integral para n = 10, 100, 1000.



5. Método de Weddle

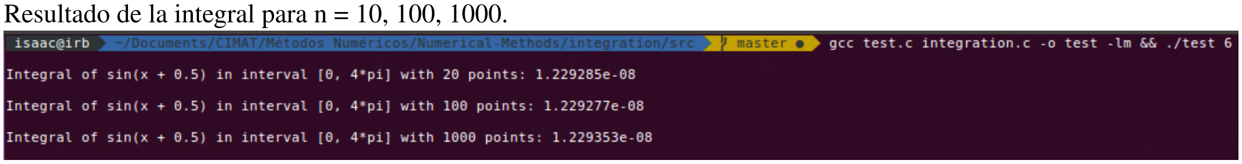
5.1. Metodología

Para la regla de Weddle con m puntos, la fórmula de integración queda de la siguiente forma:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \frac{h}{140}[41f(x_0)+216f(x_1)+27f(x_2)+272f(x_3)+27f(x_4)+216f(x_5)+41f(x_6)]+\frac{h}{140}[41f(x_6)+216f(x_7)+ 27f(x_8)+272f(x_9)+27f(x_{10})+216f(x_{11})+41f(x_{12})]+... + \frac{h}{140}[41f(x_{m-6})+216f(x_{m-5})+27f(x_{m-4})+272f(x_{m-3})+27f(x_{m-2})+216f(x_{m-1})+41f(x_m)] \tag{5}$$

5.2. Ejemplo de prueba

Resultado de la integral para n = 10, 100, 1000.



```
isaac@irb  ~/Documents/CIMAT/Métodos Numéricos/Numerical-Methods/integration/src  master ●  gcc test.c integration.c -o test -lm && ./test 6
Integral of sin(x + 0.5) in interval [0, 4*pi] with 20 points: 1.229285e-08
Integral of sin(x + 0.5) in interval [0, 4*pi] with 100 points: 1.229277e-08
Integral of sin(x + 0.5) in interval [0, 4*pi] with 1000 points: 1.229353e-08
```

6. Resultados y conclusiones

Se probaron los diferentes métodos mencionados estimando la integral: $\int_0^{4*\pi} sen(x+0{,}5)$ para $n = 20, 100, 1000$. Debido a que el resultado exacto de la integral es 0, el error del método que se muestra es directamente el valor absoluto del resultado calculado por el método. Obteniendo los siguientes resultados:

Método	Núm. puntos	Error
Trapecio	20	1.188576e-08
Trapecio	100	1.227669e-08
Trapecio	1000	1.229271e-08
Simpson 1/3	20	1.230403e-08
Simpson 1/3	100	1.229289e-08
Simpson 1/3	1000	1.229287e-08
Simpson 3/8	20	1.151683e-02
Simpson 3/8	100	1.334463e-02
Simpson 3/8	1000	1.488844e-03
Boole	20	1.229288e-08
Boole	100	1.229280e-08
Boole	1000	1.229322e-08
Weddle	20	1.229285e-08
Weddle	100	1.229277e-08
Weddle	1000	1.229353e-08

De manera general, se puede observar que conforme aumenta el tamaño de puntos usados para calcular la integral, no necesariamente hay una disminución en el error. En algunos casos, pasa lo contrario y el error sube ligeramente. Como en el caso del método del trapecio donde tanto para $n = 100$ como para $n = 1000$ el error empezó a aumentar.

Este comportamiento es de esperarse ya que al usar más puntos, se asume que se tiene un polinomio de interpolación de mayor orden causando que este tenga más oscilaciones y por lo tanto el método sea más inestable.

Esto permite verificar que el usar más puntos no necesariamente nos garantiza un mejor desempeño, sino que al contrario podría resultar contraproducente.

Finalmente se pudo observar que para esta función la mayoría de los métodos tienen un error bastante similar y del mismo orden, a excepción del método de Simpson 3/8, el cual tuvo un error considerablemente grande.