Tarea 18 - Integración numérica

Isaac Rodríguez Bribiesca

Resumen Para esta tarea se programó la cuadratura de Gauss para $n = 1, 2, ..., n$ y se compararon los resultados con las formas de integración numérica de Newton-Cotes para $n = 1, 2, 3, 4$.
Para estos métodos, se parte de un intervalo $[a, b]$ dividido en m subintervalos de ancho $h = \frac{x_m - x_0}{m}$ con $a = x_0$ y $b = x_m$. Con lo que se busca evaluar la integral $\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx$, para una función $f(x)$ real definida en $[a, b]$.

1. Cuadratura de Gauss

1.1. Metodología

En integración numérica se trata de aproximar la integral $\int_a^b f(x)dx$, mediante $I = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$ donde los puntos $x_0, x_1, ..., X_n$ están en el intervalo $[a, b]$.

Pero a diferencia de las reglas de Newton-Cotes donde los puntos $x_0, x_1, ..., X_n$ son equiespaciados y por lo tanto predefinidos, en los métodos de cuadratura de Gauss no se impone restricción sobre la ubicación de los puntos $x_0, x_1, ..., X_n$, por lo que se tendrán $2n + 2$, $n + 1$ para los puntos $x_0, x_1, ..., X_n$ y $n + 1$ para los coeficientes λ_i.

En esta tarea se considera la fórmula de Gauss-Legendre donde se estiman integrales de la forma $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$, donde $f(x)$ se aproxima mediante una polinomio de grado $2n+1$ de la forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{2n+1} x^{2n+1}$.

Los valores de los puntos x_i y λ_i que se obtienen para $n = 1, 2, 3$ y 4 son los siguientes:

1.2. n = 0

$$x_0 = 0 \tag{1}$$

$$\lambda_0 = 2 \tag{2}$$

1.3. n = 1

$$x_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}}, x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \tag{3}$$

$$\lambda_0 = \lambda_1 = 1 \tag{4}$$

1.4. n = 2

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} \tag{5}$$

$$\lambda_0 = \frac{5}{9}, \lambda_1 = \frac{8}{9}, \lambda_2 = \frac{5}{9} \tag{6}$$

1.5. n = 3

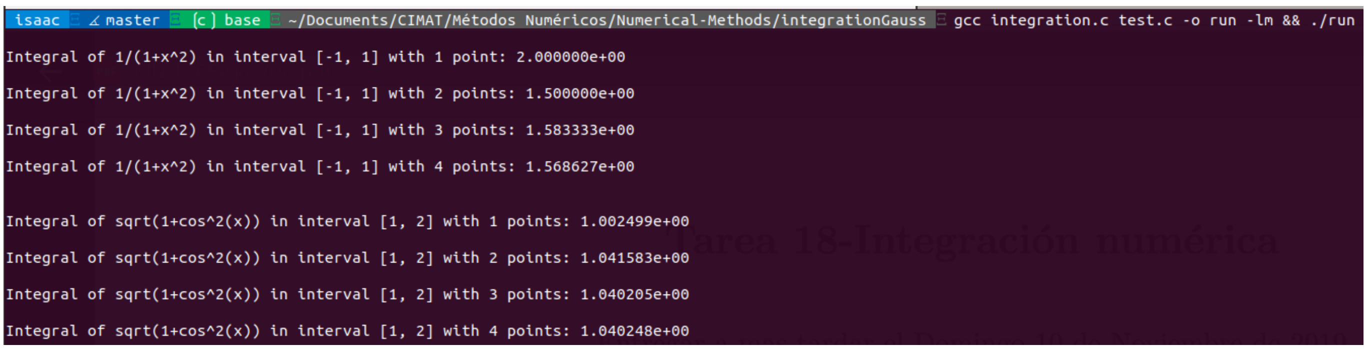
$$x_0 = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}, x_1 = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}, x_2 = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}}, x_3 = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}} \tag{7}$$

$$\lambda_0 = \frac{18+\sqrt{30}}{36}, \lambda_1 = \frac{18+\sqrt{30}}{36}, \lambda_2 = \frac{18-\sqrt{30}}{36}, \lambda_3 = \frac{18-\sqrt{30}}{36} \tag{8}$$

2. Resultados

2.1. Cuadratura de Gauss

Resultado de las integrales $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$ y $\int_{1}^{2} \sqrt{1+cos(x)^2} dx$ para n = 1, 2, 3 y 4.



2.2. Newton-Cotes

Resultado de las integrales $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$ y $\int_{1}^{2} \sqrt{1+cos(x)^2} dx$ para n = 1, 2, 3 y 4.

Figura 1. Regla trapezoidal, n=1 (2 puntos)

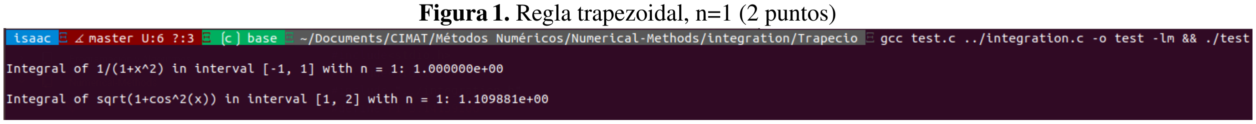


Figura 2. Regla Simpson 1/3, n=2 (3 puntos)

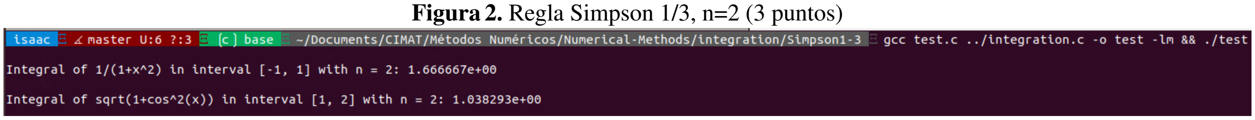


Figura 3. Regla Simpson 3/8, n=3 (4 puntos)

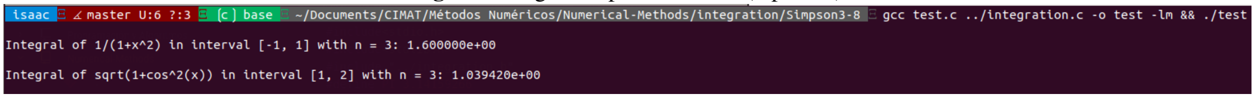
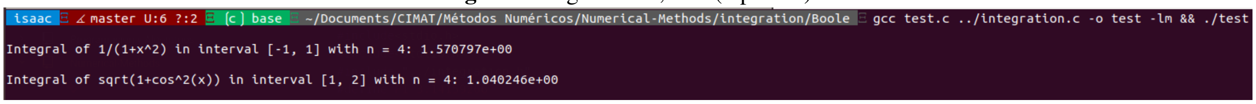


Figura 4. Regla Boole, n=4 (5 puntos)



Partiendo de que el resultado exacto para las integrales es $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ y $\int_{1}^{2} \sqrt{1+cos(x)^2}dx = 1{,}04025$, se construye la tabla de errores comparando el método de cuadraturas de Gauss con las reglas de Newton-Cotes. Donde el error es calculado como $Error = |\int f(x) - I|$ donde I es la integral que se estima por los métodos de interpolación.

Para el caso de $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx$ se tienen los siguientes resultados:

	Error Gauss	Error Newton-Cotes
n = 1	0.4292	0.57079
n = 2	0.070796	0.09587
n = 3	0.012534	0.0292
n = 4	0.002169	0.000006732

Para el caso de $\int_{1}^{2} \sqrt{1+cos(x)^2}dx$ se tienen los siguientes resultados:

	Error Gauss	Error Newton-Cotes
n = 1	0.03775	0.069631
n = 2	0.001333	0.001957
n = 3	0.000045	0.00083
n = 4	0.000002	0.00004

3. Conclusiones

De los resultados presentados en las tablas se puede observar que para la integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx$ se obtuve un mejor resultado usando el método de Gauss-Legendre con $n = 1, 2, 3$, mientras que sólo para $n = 4$ se obtuvo un mejor resultado usando la regla de Boole que es la regla de Newton-Cotes que corresponde a $n = 4$. Mientras que para la integral $\int_{1}^{2} \sqrt{1+cos(x)^2}dx$ en todos los casos se obtuvo un mejor resultado usando el método de Gauss-Legendre.

Es de esperarse que se obtengan mejores resultados a través de los métodos de cuadratura de Gauss ya que los puntos que se escogen no son necesariamente equidistantes, sino que se esogen de manera que se obtenga una mejor aproximación de la integral. Sin embargo, esta mejora en la aproximación implica un costo mayor en la obtención de los puntos x_i y los coeficientes λ_i ya que se debe resolver un sistema de ecuaciones.