

Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2023/2024

MODELLI E ALGORITMI DI OTTIMIZZAZIONE

Modelli di Miscelazione – Esercizi 3 e 4 (E1)



Giovanni Micheli

- Insiemi

✓ I : insieme dei prodotti base

$$I = \{1, 2, 3, 4\}$$

✓ J : insieme dei composti

$$J = \{A, B, C\}$$



- Dati - Vettori

- D_i Disponibilità [l] del prodotto base i
- c_i Costo [€/l] del prodotto base i
- r_j Ricavo [€/l] del composto j



- Dati - Matrici
 - lo_{ji} Minima quantità di prodotto i nel composto j
 - up_{ji} Massima quantità di prodotto i nel composto j



- Variabili Decisionali

- x_{ij} Quantità [l] di prodotto i nel composto j
- y_j Quantità [l] di composto j prodotta
- z Variabile obiettivo : profitti totali [€]

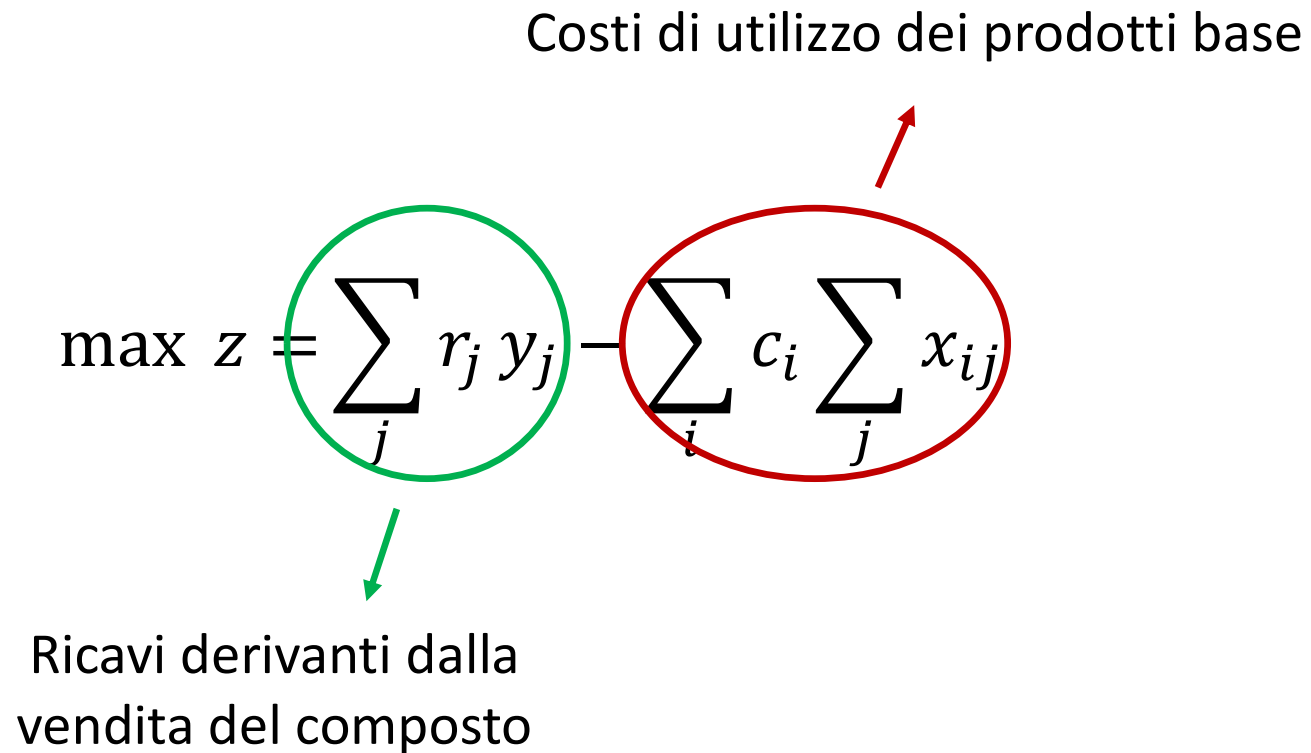


- Funzione obiettivo

Costi di utilizzo dei prodotti base

$$\max z = \sum_j r_j y_j - \sum_i c_i \sum_j x_{ij}$$

Ricavi derivanti dalla vendita del composto



- Vincoli

- ✓ Disponibilità

La quantità complessivamente utilizzata di **ogni** prodotto non deve eccedere la rispettiva disponibilità



- Vincoli

✓ Disponibilità

$$\sum_j x_{ij} \leq D_i \quad \forall i$$

- Vincoli

- ✓ Disponibilità

$$\sum_j x_{ij} \leq D_i \quad \forall i$$

- ✓ Produzione

La quantità prodotta di **ciascun** composto è pari alla somma delle quantità dei prodotti base utilizzati

- Vincoli

✓ Disponibilità

$$\sum_j x_{ij} \leq D_i \quad \forall i$$

✓ Produzione

$$y_j = \sum_i x_{ij} \quad \forall j$$



- Vincoli

- ✓ Miscela

Il contenuto di **ogni** prodotto base in **ciascun** composto deve essere compreso tra i valori minimi e massimi



- Vincoli

- ✓ Miscela

$$lo_{ji} \leq \frac{x_{ij}}{y_j} \leq up_{ji} \quad \forall i, j$$



- Vincoli

✓ Miscela

$$lo_{ji} \leq \frac{x_{ij}}{y_j} \leq up_{ji} \quad \forall i, j$$

Non linearità

- Vincoli

✓ Miscela

Non linearità

$$lo_{ji} \leq \frac{x_{ij}}{y_j} \leq up_{ji} \quad \forall i, j$$

$$lo_{ji} y_j \leq x_{ij} \leq up_{ji} y_j \quad \forall i, j$$



- Vincoli sulle variabili decisionali

- $x_{ij} \geq 0 \quad \forall ij$

→ LP

- $y_j \geq 0 \quad \forall j$



- Insiemi

✓ I : insieme degli elementi

$$I = \{Sn, Zn, Pb\}$$

✓ J : insieme dei rottami

$$J = \{1,2,3,4,5\}$$



- Dati - Scalari

- P Produzione richiesta [kg] **300**
- Q Disponibilità [kg] di ciascun rottame **150**



- Dati - Vettori

- C_j Costo di utilizzo [\$/kg] del rottame j
- L_i Percentuale nella lega dell'elemento i

- Dati - Matrici

- f_{ij} Frazione dell'elemento i contenuta nel rottame j



- Variabili Decisionali
 - x_j Quantità [kg] utilizzata di rottame j
 - z Variabile obiettivo : costi totali [\$]

- Funzione obiettivo

$$\min z = \sum_j c_j x_j$$



- Vincoli

- ✓ Produzione

E' necessario produrre una quantità precisa di lega



- Vincoli

✓ Produzione

$$\sum_j x_j = P$$

- Vincoli

- ✓ Produzione

$$\sum_j x_j = P$$

- ✓ Disponibilità

La quantità utilizzata di **ciascun** rottame non può eccedere la sua disponibilità

- Vincoli

- ✓ Produzione

$$\sum_j x_j = P$$

- ✓ Disponibilità

$$x_j \leq Q \quad \forall j$$



- Vincoli
 - ✓ Composizione
 - Ciascun** elemento deve essere presente nella lega in percentuali precise



- Vincoli

- ✓ Composizione

$$\sum_j f_{ij} x_j = L_i \sum_j x_j \quad \forall j$$



- Vincoli

- ✓ Composizione

$$\sum_j f_{ij} x_j = L_i \sum_j x_j \quad \forall j$$

- ✓ Variabili decisionali

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \quad \longrightarrow \quad \text{LP}$$



1. Miscelazione
2. Regole di modellazione



1. Miscelazione

- Introdurre una variabile decisionale che descriva la quantità totale di miscela prodotta può semplificare la modellazione.
- In tal caso vanno però necessariamente imposti dei vincoli che definiscano la relazione tra quantità totale di miscela e l'utilizzo dei singoli composti (e.g., vincolo Produzione nell'esercizio 3).
- I vincoli di composizione, apparentemente non-lineari, vanno espressi in forma lineare.

2. Regole di modellazione

- Nel definire le variabili decisionali bisogna saper distinguere tra:
 - Ciò che deve determinare il decisore (e.g., la quantità di prodotti base da utilizzare in ogni composto nell'esercizio 3)
 - Ciò che è assegnato (e.g., la composizione dei rottami nell'esercizio 4)
- Tutte le variabili decisionali introdotte devono essere opportunamente collegate tra di loro.
- Tutti i modelli formulati devono essere lineari.

