Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2023/2024

MODELLI E ALGORITMI DI OTTIMIZZAZIONE

Modelli con Variabili Binarie – Esercizi 4 e 5 (E2)

Giovanni Micheli

Le variabili binarie

- Le variabili binarie vengono utilizzate per

  1. Rappresentare scelte dicotomiche
  2. Trattare funzioni discontinue (costi fissi)
  3. Gestire il soddisfacimento di vincoli alternativi
  4. Imporre l'appartenenza di variabili ad intervalli discontinui (minimi tecnici)
  5. Esprimere condizioni logiche

Le variabili binarie

- Le variabili binarie vengono utilizzate per

1. Rappresentare scelte dicotomiche
2. Trattare funzioni discontinue (costi fissi)
3. Gestire il soddisfacimento di vincoli alternativi
4. Imporre l’appartenenza di variabili ad intervalli discontinui (minimi tecnici)
5. Esprimere condizioni logiche

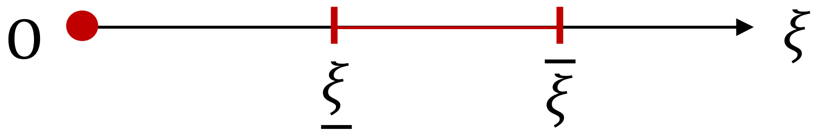
Minimo Tecnico

- Un minimo tecnico è una minima quantità da garantire solo in caso di attivazione della produzione.

Minimo Tecnico

- Un minimo tecnico è una minima quantità da garantire solo in caso di attivazione della produzione.

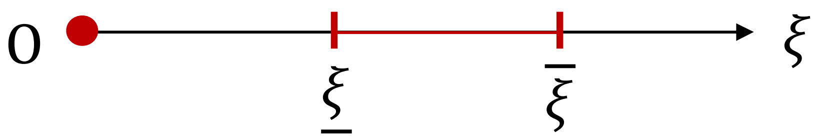
$$\xi \in \left\{0 \cup \left[\underline{\xi};\overline{\xi}\right]\right\}$$



Minimo Tecnico

- Un minimo tecnico è una minima quantità da garantire solo in caso di attivazione della produzione.

$$\xi \in \left\{0 \cup \left[\underline{\xi} ; \overline{\xi}\right]\right\}$$

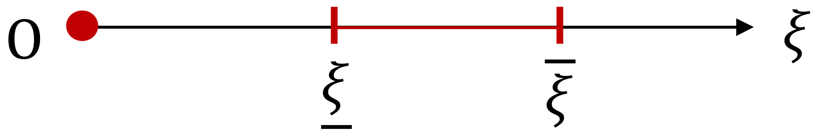


$$y \in \{0 \,;\, 1\}$$

$$\boxed{\underline{\xi} y \leq \xi \leq \overline{\xi} y}$$

- Un minimo tecnico è una minima quantità da garantire solo in caso di attivazione della produzione.

$$\xi \in \left\{0 \cup \left[\underline{\xi}; \overline{\xi}\right]\right\}$$



$$y \in \{0\,;1\}$$

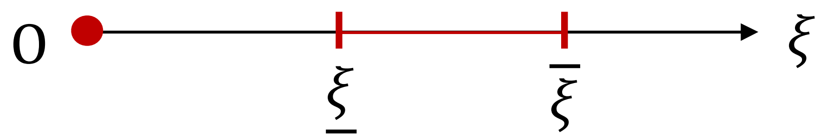
$$\boxed{\underline{\xi} y \leq \xi \leq \overline{\xi} y}$$

$y = 0$

$$\xi = 0$$

- Un minimo tecnico è una minima quantità da garantire solo in caso di attivazione della produzione.

$$\xi \in \left\{0 \cup \left[\underline{\xi};\overline{\xi}\right]\right\}$$



$$y \in \{0\,;1\}$$

$$\boxed{\underline{\xi}y \leq \xi \leq \overline{\xi}y}$$

$y = 0$: $\xi = 0$

$y = 1$: $\xi \in \left[\underline{\xi};\overline{\xi}\right]$

Esercizio 4

- Insiemi

  ✓ J : insieme dei prodotti

$$J = \{1,2,3,4\}$$

Esercizio 4

- Dati - Vettori
  - q_j Minima quantità di j da produrre (solo se la produzione è attivata)
  - P_j Prezzo di vendita del prodotto j
  - c_j Costo marginale del prodotto j
  - tl_j Tempo di lavorazione del prodotto j

Esercizio 4

- Dati - Scalari
  - H Disponibilità di ore lavorative **6000**

Esercizio 4

- Variabili Decisionali
  - x_j Quantità prodotta di j
  - y_j Binaria: 1 se la produzione di j è attivata – 0 altrimenti
  - z Variabile obiettivo: profitti totali

Esercizio 4

- Funzione Obiettivo

Costi di produzione

$$\max z = \sum_j P_j \cdot x_j - \sum_j c_j \cdot x_j$$

Ricavi di vendita

Esercizio 4

- Vincoli

  ✓ Capacità

  Il tempo complessivo di lavorazione non può eccedere la capacità

Esercizio 4

- Vincoli

  ✓ Capacità

$$\sum_{j} tl_j \cdot x_j \leq H$$

Esercizio 4

- Vincoli

  ✓ Capacità

$$\sum_j tl_j \cdot x_j \leq H$$

  ✓ Minimo tecnico

  Per **ogni** prodotto, se la rispettiva produzione è attivata, è necessario produrre un quantitativo minimo

Esercizio 4

- Vincoli

  ✓ Capacità

$$\sum_j tl_j \cdot x_j \leq H$$

  ✓ Minimo tecnico

$$qy_j \leq x_j \leq My_j$$

Esercizio 4

- Vincoli sulle variabili decisionali

  - $x_j \geq 0 \quad \forall j$
  - $y_j \in \{0; 1\} \quad \forall j$

→ MIP

↓

Controllo del gap di ottimalità

- Le variabili binarie vengono utilizzate per

1. Rappresentare scelte dicotomiche
2. Trattare funzioni discontinue (costi fissi)
3. Gestire il soddisfacimento di vincoli alternativi
4. Imporre l’appartenenza di variabili ad intervalli discontinui (minimi tecnici)
5. Esprimere condizioni logiche

Condizioni logiche

- Siano α, β e γ tre condizioni logiche che possono assumere valore vero o falso
  - Rappresentate tramite variabili binarie y_α, y_β e y_γ (1: vero, 0 : falso)

- Introdurremo dei vincoli per modellare alcuni esempi di condizioni logiche
  - Intersezione
    - γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa
  - Numero di condizioni logiche vere
    - Al massimo k
    - Almeno k
    - Esattamente k

Condizioni logiche

- Intersezione
  - ✓ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa

y_α	y_β	y_γ
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	0
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Condizioni logiche

- Intersezione

  ✓ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa

y_α	y_β	y_γ	
0	0	0	**A**
1	0	0	
0	1	0	
1	1	0	
0	0	1	**NA**
1	0	1	
0	1	1	
1	1	1	

Condizioni logiche

- Intersezione

  ✓ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa

y_α	y_β	y_γ	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	
1	1	0	
0	0	1	**NA**
1	0	1	**NA**
0	1	1	
1	1	1	

Condizioni logiche

- Intersezione

  ✓ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa

y_α	y_β	y_γ	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	**A**
1	1	0	
0	0	1	**NA**
1	0	1	**NA**
0	1	1	**NA**
1	1	1	

- Intersezione
  - ✓ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa

y_α	y_β	y_γ	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	**A**
1	1	0	**NA**
0	0	1	**NA**
1	0	1	**NA**
0	1	1	**NA**
1	1	1	**A**

Condizioni logiche

- Intersezione

  - ✓ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa

y_α	y_β	y_γ	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	**A**
1	1	0	**NA**
0	0	1	**NA**
1	0	1	**NA**
0	1	1	**NA**
1	1	1	**A**

Dobbiamo ora identificare un set di vincoli che permetta di escludere tutte e sole le combinazioni non ammissibili

Condizioni logiche

- Intersezione

  ✓ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa

y_α	y_β	y_γ	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	**A**
1	1	0	**NA**
~~0~~	~~0~~	~~1~~	**NA**
1	0	1	**NA**
~~0~~	~~1~~	~~1~~	**NA**
1	1	1	**A**

$$y_\gamma \leq y_\alpha$$

Condizioni logiche

- Intersezione

  ✓ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa

y_α	y_β	y_γ	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	**A**
1	1	0	**NA**
~~0~~	~~0~~	~~1~~	**NA**
~~1~~	~~0~~	~~1~~	**NA**
~~0~~	~~1~~	~~1~~	**NA**
1	1	1	**A**

$$y_\gamma \leq y_\alpha$$

$$y_\gamma \leq y_\beta$$

Condizioni logiche

- Intersezione

  ✓ γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere, altrimenti è falsa

y_α	y_β	y_γ	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	**A**
~~1~~	~~1~~	~~0~~	**NA**
~~0~~	~~0~~	~~1~~	**NA**
~~1~~	~~0~~	~~1~~	**NA**
~~0~~	~~1~~	~~1~~	**NA**
1	1	1	**A**

$$\boxed{\begin{aligned} y_\gamma &\le y_\alpha \\ y_\gamma &\le y_\beta \\ y_\gamma &\ge y_\alpha + y_\beta - 1 \end{aligned}}$$

Condizioni logiche

- Numero condizioni logiche

  ✓ Al massimo k tra le condizioni α, β e γ sono vere

$$y_\alpha + y_\beta + y_\gamma \leq k$$

Condizioni logiche

- Numero condizioni logiche

  ✓ Al massimo k tra le condizioni α, β e γ sono vere

  $$y_\alpha + y_\beta + y_\gamma \leq k$$

  ✓ Almeno k tra le condizioni α, β e γ sono vere

  $$y_\alpha + y_\beta + y_\gamma \geq k$$

Condizioni logiche

- Numero condizioni logiche

  ✓ Al massimo k tra le condizioni α, β e γ sono vere

  $$y_\alpha + y_\beta + y_\gamma \leq k$$

  ✓ Almeno k tra le condizioni α, β e γ sono vere

  $$y_\alpha + y_\beta + y_\gamma \geq k$$

  ✓ Esattamente k tra le condizioni α, β e γ sono vere

  $$y_\alpha + y_\beta + y_\gamma = k$$

Esercizio 5

- Insiemi

  ✓ I : insieme dei sili

$$I = \{1,2,3,\dots,6\}$$

  ✓ J : insieme delle fattorie

$$J = \{1,2,3,\dots,7\}$$

Esercizio 5

- Dati - Vettori
  - D_j Domanda giornaliera [quintali] di foraggio della fattoria j
  - Q_i Massima quantità giornaliera [quintali] di foraggio per il silo i
  - CF_i Costi fissi quadriennali [€] del silo i
  - cs_i Costo unitario giornaliero di stoccaggio [€/quintale] del silo i

Esercizio 5

- Dati - Matrici
  - $dist_{ij}$ Distanza [km] del silo i dalla fattoria j

- Dati - Scalari
  - c Costo unitario di trasporto **0.06** [€/km·quintale]

Esercizio 5

- Calcolo dei parametri di costo
  - f_i Costi fissi giornalieri [€] del silo i

$$f_i = \frac{CF_i}{4 \cdot 365 + 1}$$

  - ct_{ij} Costo di trasporto [€/quintale] dal silo i alla fattoria j

$$ct_{i,j} = 2dist_{i,j} \cdot c$$

Esercizio 5

- Variabili Decisionali
  - x_{ij} Quantità trasportata [quintali] dal silo i alla fattoria j ($x_{i,j} \geq 0$)
  - s_i Quantità stoccata [quintali] dal silo i ($s_i \geq 0$)
  - y_i Binaria: 1 se il silo i è attivato – 0 altrimenti
  - z Variabile obiettivo : costi totali [€]

Esercizio 5

- Funzione obiettivo

Costi di stoccaggio

$$\min\ z = \boxed{\sum_i f_i y_i} + \boxed{\sum_i cs_i s_i} + \boxed{\sum_i \sum_j ct_{ij}\, x_{ij}}$$

Costi fissi

Costi di trasporto

Esercizio 5

- Vincoli
  - ✓ Domanda

    La domanda di **ogni** fattoria deve essere soddisfatta

Esercizio 5

- Vincoli

  ✓ Domanda

$$\sum_{i} x_{ij} = D_j \quad \forall j$$

Esercizio 5

- Vincoli

  ✓ Domanda

$$\sum_{i} x_{ij} = D_j \quad \forall j$$

  ✓ Quantità stoccata

  Per **ogni** silo, la quantità complessivamente in uscita è pari alla quantità stoccata

Esercizio 5

- Vincoli

  ✓ Domanda

$$\sum_{i} x_{ij} = D_j \quad \forall j$$

  ✓ Quantità stoccata

$$s_i = \sum_{j} x_{ij} \quad \forall i$$

Esercizio 5

- Vincoli

  ✓ Capacità di stoccaggio

  Per **ogni** silo, la quantità complessivamente stoccata non deve eccedere la capacità massima

Esercizio 5

- Vincoli

  ✓ Capacità di stoccaggio

$$s_i \leq Q_i y_i \quad \forall i$$

Esercizio 5

- Vincoli

  ✓ Capacità di stoccaggio

$$s_i \leq Q_i y_i \quad \forall i$$

$y_i = 0$

$s_i = 0$

Esercizio 5

- Vincoli

  ✓ Capacità di stoccaggio

$$s_i \leq Q_i y_i \quad \forall i$$

$$y_i = 0$$

$$s_i = 0$$

Un silo non attivo non può essere utilizzato per lo stoccaggio

Esercizio 5

- Vincoli

✓ Capacità di stoccaggio

$$s_i \leq Q_i y_i \quad \forall i$$

$y_i = 0$ $\qquad$ $y_i = 1$

$s_i = 0$ $\qquad$ $s_i \leq Q_i$

Un silo non attivo non può essere utilizzato per lo stoccaggio

Esercizio 5

- Vincoli

  ✓ Capacità di stoccaggio

$$s_i \leq Q_i y_i \quad \forall i$$

$y_i = 0$

$$s_i = 0$$

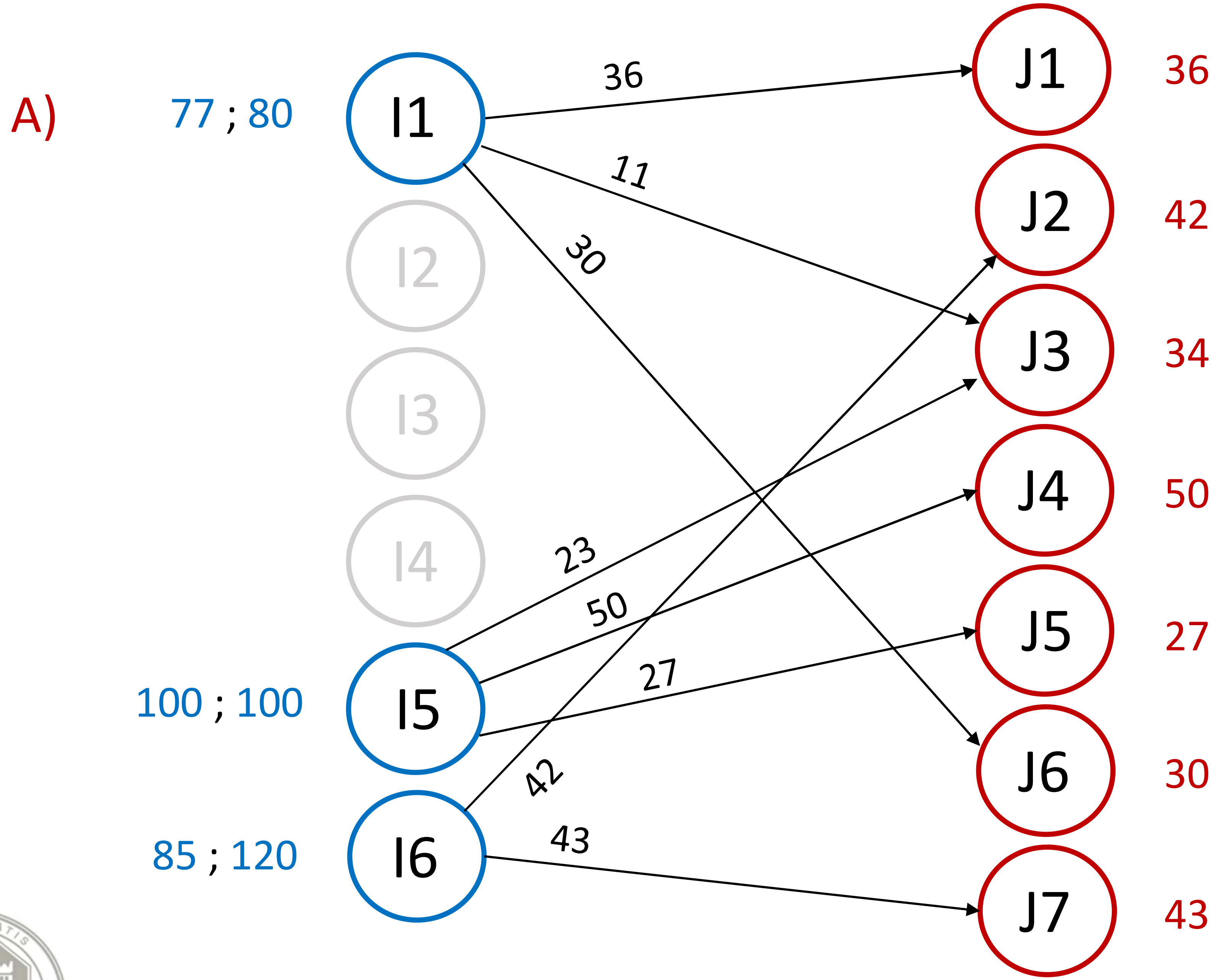
Un silo non attivo non può essere utilizzato per lo stoccaggio

$y_i = 1$

$$s_i \leq Q_i$$

Un silo attivo può essere utilizzato per lo stoccaggio nel rispetto della capacità

Esercizio 5



A)
77 ; 80
100 ; 100
85 ; 120
I1
I2
I3
I4
I5
I6
J1
J2
J3
J4
J5
J6
J7
36
42
34
50
27
30
43
36
11
30
23
50
27
42
43

Esercizio 5

- Modifiche al punto B)

  ✓ Numero di sili attivati

  È necessario attivare almeno 4 sili

Esercizio 5

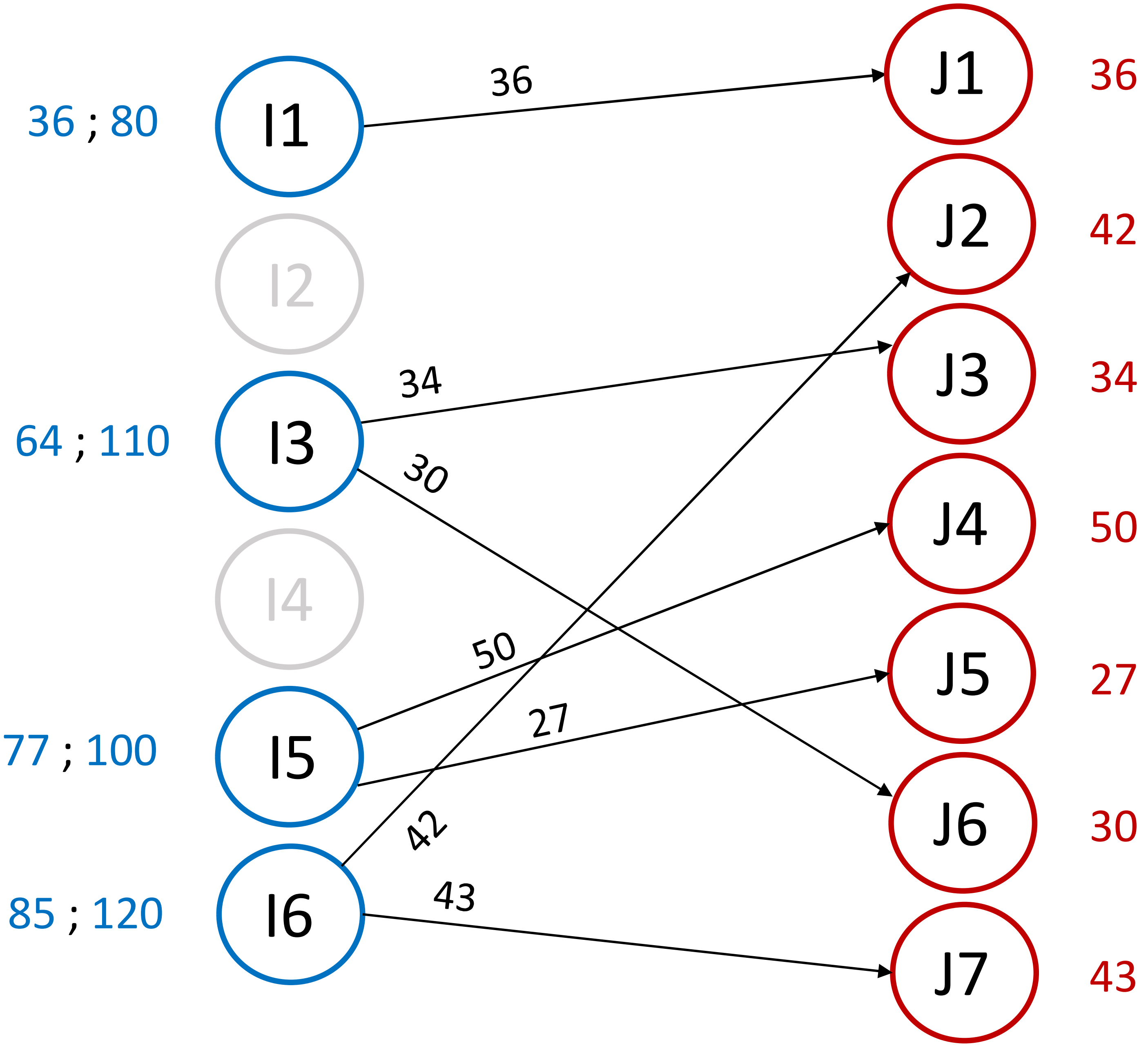
- Modifiche al punto B)

  ✓ Numero di sili attivati

$$\sum_i y_i \geq 4$$

Esercizio 5

B)



Esercizio 5

- Modifiche al punto C)

  ✓ Fornitura minima

  Ogni silo, se attivato, deve stoccare una quantità minima

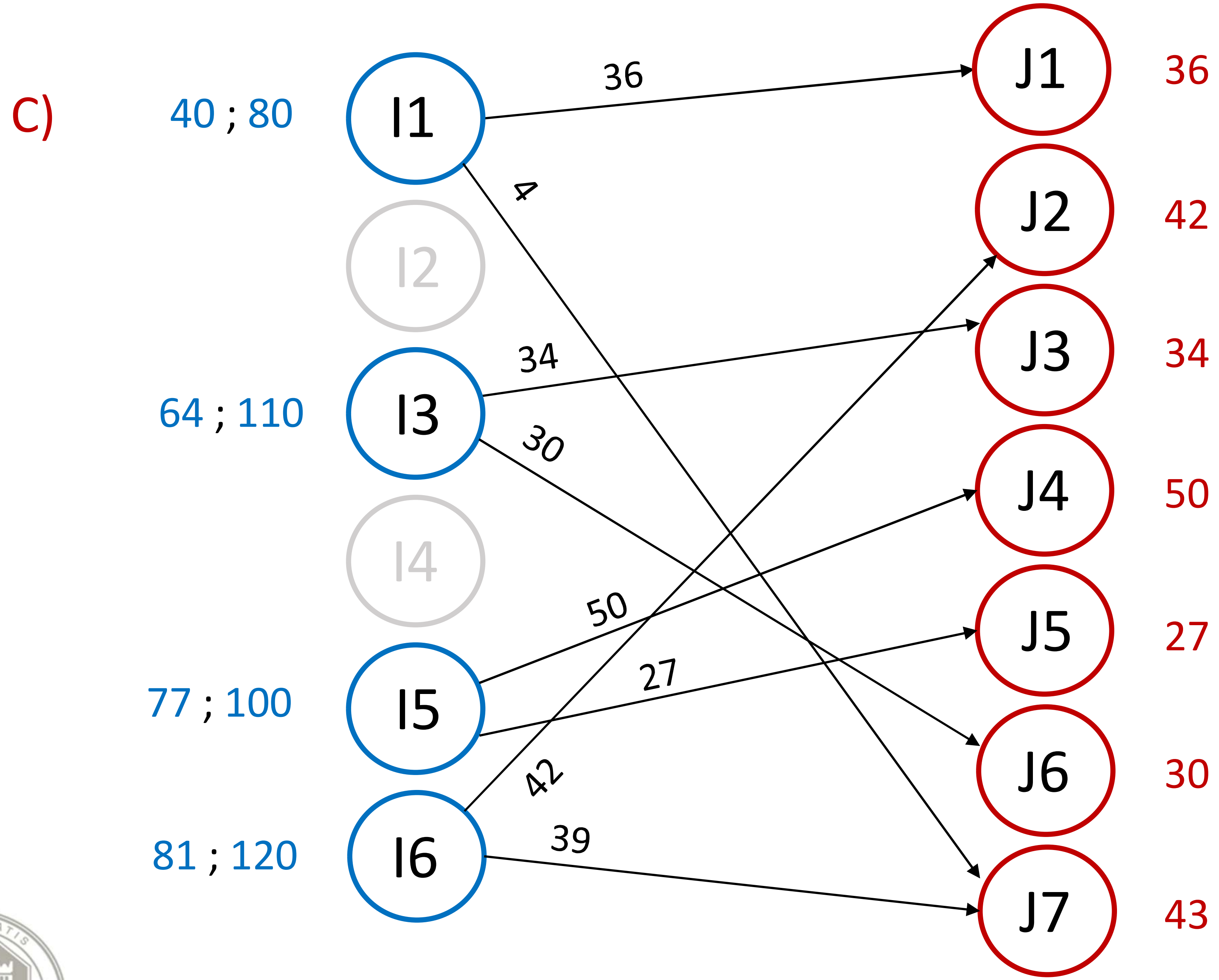
Esercizio 5

- Modifiche al punto C)

  ✓ Fornitura minima

$$0.5Q_i y_i \leq s_i \leq Q_i y_i \quad \forall i$$

Esercizio 5



C)
40 ; 80
64 ; 110
77 ; 100
81 ; 120
I1
I2
I3
I4
I5
I6
J1
J2
J3
J4
J5
J6
J7
36
42
34
50
27
30
43
36
4
34
30
50
27
42
39

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)

  ✓ 3 può essere attivato solo se almeno uno tra 1 e 2 è attivato

y_1	y_2	y_3
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	0
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)

  ✓ 3 può essere attivato solo se almeno uno tra 1 e 2 è attivato

y_1	y_2	y_3	
0	0	0	**A**
1	0	0	
0	1	0	
1	1	0	
0	0	1	**NA**
1	0	1	
0	1	1	
1	1	1	

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)

  ✓ 3 può essere attivato solo se almeno uno tra 1 e 2 è attivato

y_1	y_2	y_3	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	
1	1	0	
0	0	1	**NA**
1	0	1	**A**
0	1	1	
1	1	1	

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)

  ✓ 3 può essere attivato solo se almeno uno tra 1 e 2 è attivato

y_1	y_2	y_3	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	**A**
1	1	0	
0	0	1	**NA**
1	0	1	**A**
0	1	1	**A**
1	1	1	

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)

  ✓ 3 può essere attivato solo se almeno uno tra 1 e 2 è attivato

y_1	y_2	y_3	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	**A**
1	1	0	**A**
0	0	1	**NA**
1	0	1	**A**
0	1	1	**A**
1	1	1	**A**

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)

  ✓ 3 può essere attivato solo se almeno uno tra 1 e 2 è attivato

y_1	y_2	y_3	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	**A**
1	1	0	**A**
~~0~~	~~0~~	~~1~~	**NA**
1	0	1	**A**
0	1	1	**A**
1	1	1	**A**

$$\boxed{y_3 \leq y_1 + y_2}$$

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)

  ✓ 6 può essere attivato solo attivando entrambi 4 e 5

y_4	y_5	y_6
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	0
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)

  ✓ 6 può essere attivato solo attivando entrambi 4 e 5

y_4	y_5	y_6	
0	0	0	**A**
1	0	0	
0	1	0	
1	1	0	
0	0	1	**NA**
1	0	1	
0	1	1	
1	1	1	

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)

  ✓ 6 può essere attivato solo attivando entrambi 4 e 5

y_4	y_5	y_6	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	
1	1	0	
0	0	1	**NA**
1	0	1	**NA**
0	1	1	
1	1	1	

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)

  ✓ 6 può essere attivato solo attivando entrambi 4 e 5

y_4	y_5	y_6	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	**A**
1	1	0	
0	0	1	**NA**
1	0	1	**NA**
0	1	1	**NA**
1	1	1	

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)
  - ✓ 6 può essere attivato solo attivando entrambi 4 e 5

y_4	y_5	y_6	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	**A**
1	1	0	**A**
0	0	1	**NA**
1	0	1	**NA**
0	1	1	**NA**
1	1	1	**A**

Esercizio 5

- Modifiche al punto D)

  ✓ 6 può essere attivato solo attivando entrambi 4 e 5

y_4	y_5	y_6	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	**A**
1	1	0	**A**
~~0~~	~~0~~	~~1~~	**NA**
1	0	1	**NA**
~~0~~	~~1~~	~~1~~	**NA**
1	1	1	**A**

$$y_6 \leq y_4$$

Esercizio 5

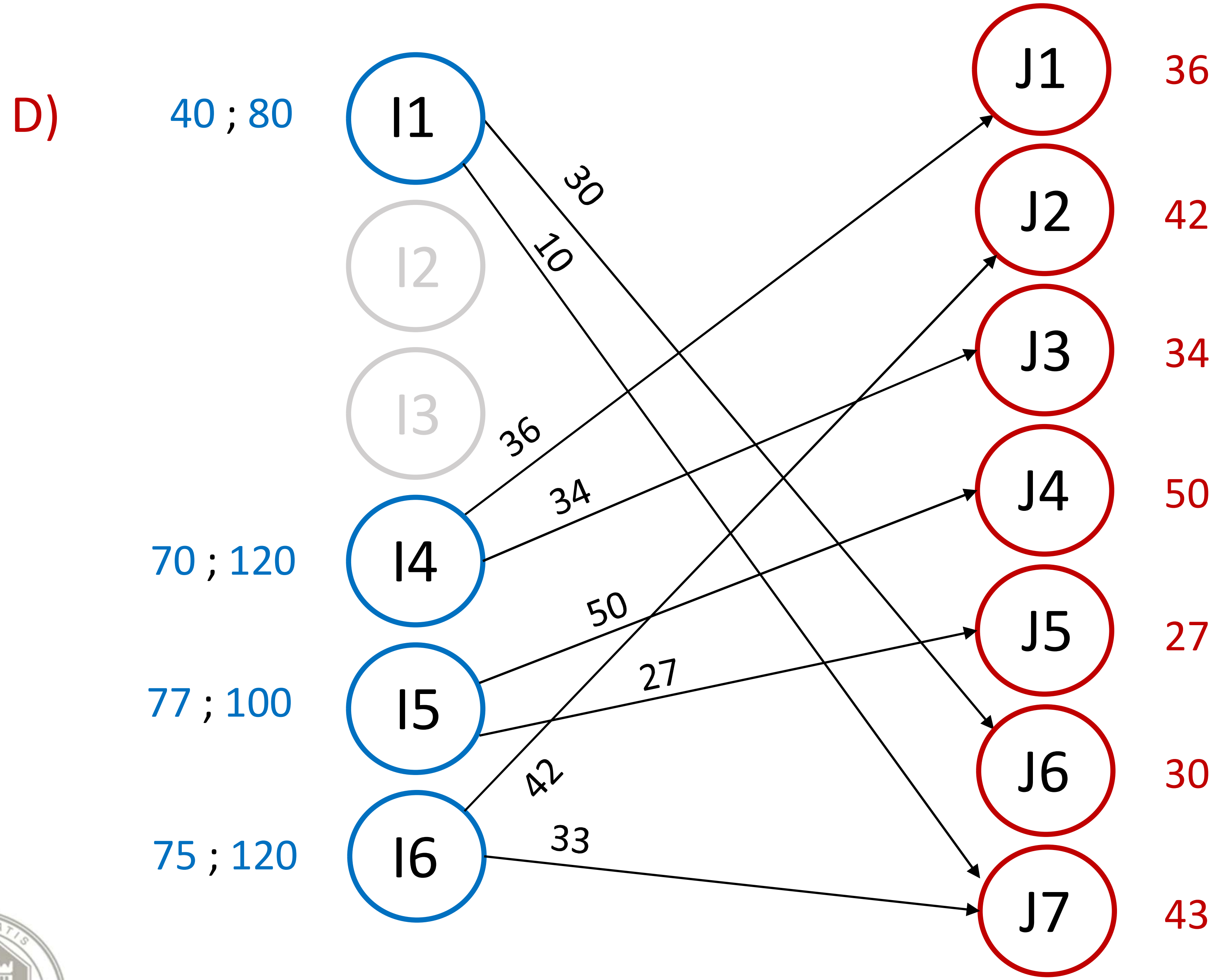
- Modifiche al punto D)

  ✓ 6 può essere attivato solo attivando entrambi 4 e 5

y_4	y_5	y_6	
0	0	0	**A**
1	0	0	**A**
0	1	0	**A**
1	1	0	**A**
~~0~~	~~0~~	~~1~~	**NA**
~~1~~	~~0~~	~~1~~	**NA**
~~0~~	~~1~~	~~1~~	**NA**
1	1	1	**A**

$$\boxed{\begin{array}{l} y_6 \le y_4 \\ y_6 \le y_5 \end{array}}$$

Esercizio 5



D)
40 ; 80
70 ; 120
77 ; 100
75 ; 120
I1
I2
I3
I4
I5
I6
J1
J2
J3
J4
J5
J6
J7
36
42
34
50
27
30
43
30
10
36
34
50
27
42
33

Takeaway

1. Utilizzo delle variabili binarie

2. Regole di modellazione

Takeaway

1. Utilizzo delle variabili binarie per determinate finalità (lista completa)

- Modellare decisioni dicotomiche
- Risolvere le discontinuità legate alla presenza di costi fissi
- Imporre vincoli alternativi
- Modellare minimi tecnici
- Esprimere condizioni logiche

Takeaway

2. Regole di modellazione

- In presenza di minimi tecnici, il vincolo di coerenza è duplice:
  - $m_j y_j \leq x_j \leq M_j y_j$

- Lo strumento da utilizzare per esprimere condizioni logiche è la tabella di verità
  - Costruzione tabella
  - Classificazione delle combinazioni in ammissibili (A) e non-ammissibili (NA)
  - Imposizione di vincoli **lineari** che escludano solamente le combinazioni NA, mantenendo le combinazioni A all'interno della regione ammissibile.