Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2023/2024

MODELLI E ALGORITMI DI OTTIMIZZAZIONE

Modelli di Programmazione Lineare Mista Intera – Esercizi 3 e 4 (E3)

Giovanni Micheli

Esercizio 3

- Insiemi

  ✓ I : insieme dei reparti

  $$I = \{Smerigliatura, Foratura\ V, \dots, Piallatura,\}$$

  ✓ J : insieme dei prodotti

  $$J = \{P1, P2, P3, \dots, P7\}$$

  ✓ T : insieme dei mesi

  $$T = \{Gen, Feb, Mar, Apr, Mag, Giu\}$$

Esercizio 3

- Dati - Vettori
  - $Ntot_i$ Numero di macchinari nel reparto i
  - P_j Profitto unitario [€] del prodotto j

Esercizio 3

- Dati - Matrici
  - tl_{ij} Tempo unitario di lavorazione [h] nel reparto i del prodotto j
  - D_{tj} Domanda nel mese t del prodotto j
  - $Nman_{i,t}$ Numero di macchinari nel reparto i in manutenzione al mese t

Esercizio 3

- Dati - Scalari

S_{max}	Scorte massime di ciascun prodotto	**100**
S_0	Scorte iniziali di ciascun prodotto	**50**
cs	Costo unitario di stoccaggio [€/mese]	**0.5**
G	Giorni lavorativi [giorni/mese]	**24**
h	Durata dei turni [h/turno]	**8**
TU	Turni giornalieri [turni/giorno]	**2**

Esercizio 3

- Calcolo delle ore di apertura

  - h_{AP} Ore di apertura [h/mese] di ciascun reparto

$$h_{AP} = h \cdot TU \cdot G$$

Esercizio 3

- Variabili Decisionali

  - $x_{j,t}$ Produzione del prodotto j al mese t ($x_{j,t} \geq 0$)
  - $v_{j,t}$ Vendita del prodotto j al mese t ($v_{j,t} \geq 0$)
  - $s_{j,t}$ Stoccaggio del prodotto j alla fine del mese t ($s_{j,t} \geq 0$)
  - z Variabile obiettivo : profitti totali [€]

Esercizio 3

- Funzione obiettivo

Costi di stoccaggio

$$\max\ z = \boxed{\sum_j P_j \sum_t v_{j,t}} - \boxed{cs \sum_j \sum_t s_{j,t}}$$

Profitti derivanti dalle vendite

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Domanda

  In **ogni** mese, le vendite di **ciascun** prodotto non possono eccedere i valori di domanda

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Domanda

$$v_{j,t} \leq D_{t,j} \quad \forall j, \forall t$$

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Domanda

$$v_{j,t} \leq D_{t,j} \quad \forall j, \forall t$$

  ✓ Massimo stoccaggio

  In **ogni** mese, il livello di scorte di **ciascun** prodotto non può eccedere il valore massimo

Esercizio 3

- Vincoli
  - ✓ Domanda

$$v_{j,t} \leq D_{t,j} \quad \forall j, \forall t$$

  - ✓ Massimo stoccaggio

$$s_{j,t} \leq S_{max} \quad \forall j, \forall t$$

Esercizio 3

- Vincoli

✓ Domanda

$$v_{j,t} \leq D_{t,j} \quad \forall j, \forall t$$

✓ Massimo stoccaggio

$$s_{j,t} \leq S_{max} \quad \forall j, \forall t$$

✓ Stoccaggio finale

Il livello di scorte di **ciascun** prodotto alla fine dell'orizzonte di pianificazione deve essere uguale al livello iniziale

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Domanda

$$v_{j,t} \leq D_{t,j} \quad \forall j, \forall t$$

  ✓ Massimo stoccaggio

$$s_{j,t} \leq S_{max} \quad \forall j, \forall t$$

  ✓ Stoccaggio finale

$$s_{j,Giu} = S_0 \quad \forall j$$

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Bilancio

  In **ogni** mese, le disponibilità di **ciascun** prodotto devono eguagliare gli impieghi

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Bilancio

$$x_{j,t} + s_{j,t-1} + S_0|_{t=Gen} = v_{j,t} + s_{j,t} \quad \forall j, \forall t$$

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Bilancio

$$x_{j,t} + s_{j,t-1} + S_0|_{t=Gen} = v_{j,t} + s_{j,t} \quad \forall j, \forall t$$

Variabile decisionale (definita solo per $t > 1$)

Parametro in input (da includere nell'equazione solo per $t = 1$)

Esercizio 3

- Vincoli

✓ Bilancio

$$x_{j,t} + s_{j,t-1} + S_0|_{t=Gen} = v_{j,t} + s_{j,t} \quad \forall j, \forall t$$

✓ Lavorazioni

In **ogni** reparto e in **ogni** mese, il tempo totale di lavorazione non deve eccedere il tempo disponibile

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Bilancio

$$x_{j,t} + s_{j,t-1} + S_0|_{t=Gen} = v_{j,t} + s_{j,t} \quad \forall j, \forall t$$

  ✓ Lavorazioni

$$\sum_j tl_{i,j} x_{j,t} \leq h_{AP} \left(Ntot_i - Nman_{i,t} \right) \quad \forall i, \forall t$$

Esercizio 3

- Vincoli

  ✓ Bilancio

  $$x_{j,t} + s_{j,t-1} + S_0|_{t=Gen} = v_{j,t} + s_{j,t} \quad \forall j, \forall t$$

  ✓ Lavorazioni

  $$\boxed{\sum_j tl_{i,j} x_{j,t}} \leq \boxed{h_{AP} \left(Ntot_i - Nman_{i,t} \right)} \quad \forall i, \forall t$$

Tempo totale di lavorazione nel reparto i al mese t

Ore di lavorazione disponibili nel reparto i al mese t

Esercizio 3

- Modifiche al punto B)

  ✓ Sostituzione del parametro $Nman_{i,t}$ con la variabile decisionale $Nm_{i,t}$

  - $Nm_{i,t}$ Numero di macchinari nel reparto i in manutenzione al mese t ($Nm_{i,t} \in \mathbb{N}$)

Esercizio 3

- Modifiche al punto B)

  ✓ Lavorazioni

$$\sum_j tl_{i,j} x_{j,t} \le h_{AP} \left(Ntot_i - Nm_{i,t} \right) \quad \forall i, \forall t$$

Esercizio 3

- Modifiche al punto B)

  ✓ Numero massimo di interventi

  In **ogni** mese, non possono essere realizzati più di 3 interventi manutentivi

Esercizio 3

- Modifiche al punto B)
  - ✓ Numero massimo di interventi

$$\sum_i Nm_{i,t} \leq 3 \quad \forall t$$

Esercizio 3

- Modifiche al punto B)

  ✓ Numero massimo di interventi

$$\sum_i Nm_{i,t} \leq 3 \quad \forall t$$

  ✓ Macchinari in manutenzione

  Ogni macchinario, ad eccezione di 2 smerigliatrici, deve essere soggetto ad un intervento manutentivo nell’orizzonte di pianificazione

- Modifiche al punto B)

  ✓ Numero massimo di interventi

$$\sum_{i} Nm_{i,t} \leq 3 \quad \forall t$$

  ✓ Macchinari in manutenzione

$$\sum_{t} Nm_{i,t} = Ntot_i \quad i \neq Smerigliatura$$

$$\sum_{t} Nm_{i,t} = 2 \quad i = Smerigliatura$$

Esercizio 4

- Insiemi
  - ✓ I : insieme degli stabilimenti

    $$I = \{Milano, Cremona\}$$

  - ✓ J : insieme dei depositi

    $$J = \{Bergamo, Pavia, Piacenza, Mantova\}$$

  - ✓ C : insieme dei clienti

    $$C = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6\}$$

Esercizio 4

- Dati - Vettori
  - CP_i Capacità produttiva [ton] dello stabilimento i
  - CS_j Capacità di stoccaggio [ton] del deposito j
  - D_c Domanda [ton] del cliente c

Esercizio 4

- Dati - Matrici
  - $ct_{i,j}^{1}$ Costi di trasporto [€/ton] dallo stabilimento i al deposito j
  - $ct_{i,c}^{2}$ Costi di trasporto [€/ton] dallo stabilimento i al cliente c
  - $ct_{j,c}^{3}$ Costi di trasporto [€/ton] dal deposito j al cliente c

Esercizio 4

- Variabili Decisionali
  - $x_{i,j}$ Quantità trasportata [ton] dallo stabilimento i al deposito j
  - $y_{i,c}$ Quantità trasportata [ton] dallo stabilimento i al cliente c
  - $k_{j,c}$ Quantità trasportata [ton] dal deposito j al cliente c
  - z Variabile obiettivo : costi di trasporto totali [€]

Esercizio 4

- Funzione obiettivo

$$\min\ z = \sum_{i} \sum_{j} ct^{1}_{i,j}\, x_{i,j} + \sum_{i} \sum_{c} ct^{2}_{i,c}\, y_{i,c} + \sum_{j} \sum_{c} ct^{3}_{j,c}\, k_{j,c}$$

- Vincoli

  ✓ Capacità produttiva

  Per **ogni** stabilimento, la produzione totale non deve eccedere la capacità produttiva

Esercizio 4

- Vincoli

  ✓ Capacità produttiva

$$\sum_{j} x_{i,j} + \sum_{c} y_{i,c} \leq CP_i \quad \forall i$$

Esercizio 4

- Vincoli

  ✓ Capacità produttiva

$$\sum_j x_{i,j} + \sum_c y_{i,c} \leq CP_i \quad \forall i$$

  ✓ Capacità di stoccaggio

  Per **ogni** deposito, la quantità complessivamente stoccata non deve eccedere la capacità di stoccaggio

Esercizio 4

- Vincoli

  ✓ Capacità produttiva

$$\sum_j x_{i,j} + \sum_c y_{i,c} \le CP_i \quad \forall i$$

  ✓ Capacità di stoccaggio

$$\sum_i x_{i,j} \le CS_j \quad \forall j$$

Esercizio 4

- Vincoli

  ✓ Bilancio ai depositi

  Per **ogni** deposito, la quantità complessivamente in ingresso dagli stabilimenti deve essere uguale alla quantità totale in uscita verso i clienti

Esercizio 4

- Vincoli

  ✓ Bilancio ai depositi

$$\sum_{i} x_{i,j} = \sum_{c} k_{j,c} \quad \forall j$$

Esercizio 4

- Vincoli

  ✓ Bilancio ai depositi

$$\sum_i x_{i,j} = \sum_c k_{j,c} \quad \forall j$$

  ✓ Domanda

  La domanda di **ogni** cliente deve essere soddisfatta dagli stabilimenti o dai depositi

Esercizio 4

- Vincoli

  ✓ Bilancio ai depositi

$$\sum_i x_{i,j} = \sum_c k_{j,c} \quad \forall j$$

  ✓ Domanda

$$\sum_i y_{i,c} + \sum_j k_{j,c} = D_c \quad \forall c$$

- Vincoli

  ✓ Tratte inammissibili

$$x_{i,j} = 0, \qquad \forall i,j : ct^1_{i,j} = 0$$

$$y_{i,c} = 0, \qquad \forall i,c : ct^2_{i,c} = 0$$

$$k_{j,c} = 0, \qquad \forall j,c : ct^3_{j,c} = 0$$

Esercizio 4

- Modifiche al punto B)

  ✓ Aggiunta del vettore

  - R_j Risparmio mensile [€] derivante dalla chiusura del deposito j

Esercizio 4

- Modifiche al punto B)
  - ✓ Aggiunta della variabile decisionale
    - θ_j Binaria: 1 se il deposito j è chiuso – 0 altrimenti

Esercizio 4

- Modifiche al punto B)

  ✓ Nuova funzione obiettivo

$$\min\ z = \sum_i \sum_j ct^1_{i,j}\, x_{i,j} + \sum_i \sum_c ct^2_{i,c}\, y_{i,c}$$

$$+ \sum_j \sum_c ct^3_{j,c}\, k_{j,c} - \sum_j R_j \theta_j$$

Esercizio 4

- Modifiche al punto B)

  ✓ Vincolo di coerenza

  Creazione della corrispondenza logica tra variabili binarie e continue → la chiusura dei depositi comporta l'impossibilità di stoccaggio

Esercizio 4

- Modifiche al punto B)

  ✓ Vincolo di coerenza

$$\sum_i x_{i,j} \leq (1 - \theta_j) CS_j \quad \forall j$$

Esercizio 4

- Modifiche al punto B)

  ✓ Vincolo di coerenza

$$\sum_i x_{i,j} \leq (1-\theta_j)CS_j \quad \forall j$$

Se $\theta_j = 1$

$$x_{i,j} = 0 \quad \forall i$$

- Modifiche al punto B)

  ✓ Vincolo di coerenza

$$\sum_i x_{i,j} \leq (1-\theta_j)CS_j \quad \forall j$$

Se $\theta_j = 1$

$$x_{i,j} = 0 \quad \forall i$$

Se $\theta_j = 0$

$$\sum_i x_{i,j} \leq CS_j$$