Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2023/2024

MODELLI E ALGORITMI DI OTTIMIZZAZIONE

Modelli di Programmazione Lineare Mista Intera – Esercizi 1 e 2 (E3)

Giovanni Micheli

Esercizio 1

- Insiemi
  - ✓ T : insieme dei mesi

$$T = \{1,2,3,4,5\}$$

  - ✓ S : insieme dei server

$$S = \{SIP, EIP, SGI, SUN\}$$

Esercizio 1

- Dati - Vettori
  - N_s Numero massimo di impiegati supportati dal server s
  - C_s Costo di acquisto [€] del server s
  - U_t Utenze da coprire al mese t

Esercizio 1

- Dati - Scalari

  - sc_1 Sconto sui server di tipo SGI acquistati nei primi due mesi **0.10**
  - sc_2 Sconto sui server di tipo SUN acquistati nei primi due mesi **0.25**
  - B Budget [€] per i primi due mesi **9500**

Esercizio 1

- Calcolo dei costi di investimento mensili
  - $Inv_{s,t}$ Costo di investimento [€] del server s al mese t

– $Inv_{s,t} = C_s \qquad t \geq 3, s \in S$

– $Inv_{s,t} = C_s \qquad t \leq 2, s \in \{SIP, EIP\}$

– $Inv_{SGI,t} = (1 - sc_1)C_{SGI} \qquad t \leq 2$

– $Inv_{SUN,t} = (1 - sc_2)C_{SUN} \qquad t \leq 2$

Esercizio 1

- Variabili Decisionali

  - $x_{s,t}$ Numero di server della tipologia s installati al mese t $\left[x_{s,t} \in \mathbb{N}\right]$
  - $y_{s,t}$ Numero di server della tipologia s disponibili al mese t $\left[y_{s,t} \in \mathbb{N}\right]$
  - z Variabile obiettivo : costi di investimento totali [€]

Esercizio 1

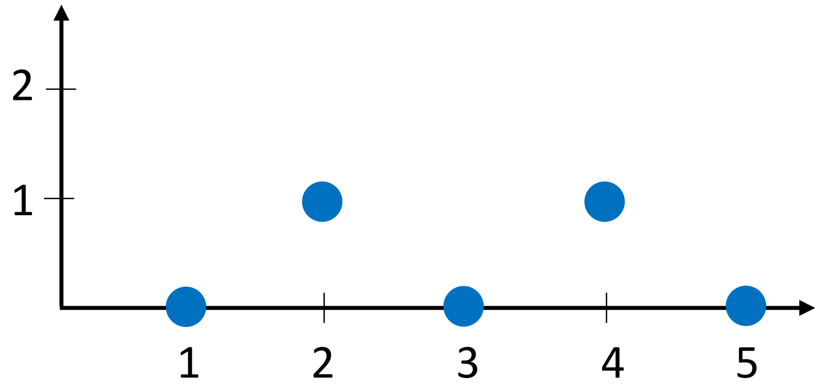
- Variabili Decisionali
  - $x_{s,t}$ Numero di server della tipologia s installati al mese t $\left[x_{s,t} \in \mathbb{N}\right]$
  - $y_{s,t}$ Numero di server della tipologia s disponibili al mese t $\left[y_{s,t} \in \mathbb{N}\right]$

1 server installato al mese 2

1 server installato al mese 4

Esercizio 1

- Variabili Decisionali
  - $x_{s,t}$ Numero di server della tipologia s installati al mese t $[x_{s,t} \in \mathbb{N}]$
  - $y_{s,t}$ Numero di server della tipologia s disponibili al mese t $[y_{s,t} \in \mathbb{N}]$



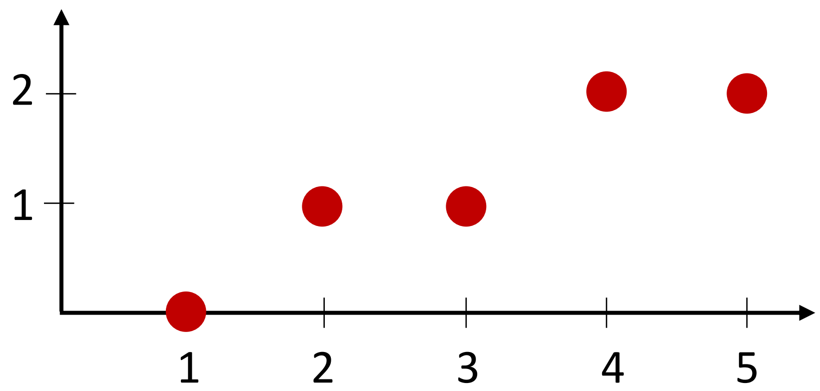
1 server installato al mese 2

1 server installato al mese 4

Esercizio 1

- Variabili Decisionali

  - $x_{s,t}$ Numero di server della tipologia s installati al mese t $[x_{s,t} \in \mathbb{N}]$
  - $y_{s,t}$ Numero di server della tipologia s disponibili al mese t $[y_{s,t} \in \mathbb{N}]$



1 server installato al mese 2

1 server installato al mese 4

Esercizio 1

- Funzione obiettivo

$$\min \; z = \sum_s \sum_t Inv_{s,t} \, x_{s,t}$$

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Copertura utenze

  In **ogni** mese, i server disponibili devono supportare il numero di utenze richiesto

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Copertura utenze

$$\sum_{s} N_s y_{s,t} \geq U_t \quad \forall t$$

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Copertura utenze

$$\sum_{s} N_s y_{s,t} \geq U_t \quad \forall t$$

  ✓ Budget

  I costi di investimento sostenuti nei primi due mesi non devono eccedere il budget

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Copertura utenze

$$\sum_{s} N_s y_{s,t} \geq U_t \quad \forall t$$

  - ✓ Budget

$$\sum_{t=1}^{2} \sum_{s} Inv_{s,t} x_{s,t} \leq B$$

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Legame tra variabili

  Creazione del legame logico tra le variabili intere → i server di **ogni** tipologia disponibili in **ogni** mese sono pari alla somma dei server installati dal primo mese fino al mese in corso

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Legame tra variabili

$$y_{s,t} = \sum_{\tau=1}^{t} x_{s,\tau} \quad \forall s, \forall t$$

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Legame tra variabili

$$y_{s,t} = \sum_{\tau=1}^{t} x_{s,\tau} \quad \forall s, \forall t$$

  ✓ Server per la Produzione

  Al mese 3 è richiesto che sia disponibile almeno uno dei due software più potenti

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Legame tra variabili

$$y_{s,t} = \sum_{\tau=1}^{t} x_{s,\tau} \quad \forall s, \forall t$$

  ✓ Server per la Produzione

$$y_{SGI,3} + y_{SUN,3} \geq 1$$

Esercizio 2

- Insiemi
  - ✓ I : insieme delle miniere

$$I = \{1,2,3,4\}$$

  - ✓ T : insieme degli anni

$$T = \{1,2,3,4,5\}$$

Esercizio 2

- Dati - Vettori
  - R_i Royalties [M$] associate all'utilizzo della miniera i
  - cu_i Costo unitario estrattivo [M$/Mton] della miniera i
  - C_i Capacità annuale [Mton] della miniera i
  - q_i Indice di qualità dei minerali estratti dalla miniera i
  - qf_t Indice di qualità richiesto all'anno t

Esercizio 2

- Dati - Scalari
  - N Numero massimo di miniere utilizzabili in ogni anno **3**
  - p Prezzo di vendita del prodotto finito [M$/Mton] **10**

Esercizio 2

- Variabili Decisionali
  - $x_{i,t}$ Quantità di minerali [Mton] estratta dalla miniera i nell'anno t ($x_{i,t} \geq 0$)
  - y_t Quantità di prodotto finito [Mton] venduta all'anno t ($y_t \geq 0$)
  - $\delta_{i,t}$ Binaria: 1 se la miniera i è utilizzata all'anno t – 0 altrimenti
  - z Variabile obiettivo : profitti totali [$]

Esercizio 2

- Funzione obiettivo

Costi estrattivi

$$\max\ z = \boxed{p \sum_t y_t} - \boxed{\sum_i cu_i \sum_t x_{i,t}} - \boxed{\sum_i \sum_t R_i \delta_{i,t}}$$

Ricavi derivanti dalla vendita del prodotto finito

Royalties

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Quantità prodotto finito

  In **ogni** anno, la quantità di prodotto finito ottenuta è pari alla somma delle quantità estratte dalle miniere

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Quantità prodotto finito

$$y_t = \sum_i x_{i,t} \quad \forall t$$

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Quantità prodotto finito

$$y_t = \sum_i x_{i,t} \quad \forall t$$

  ✓ Capacità della miniera

  In **ogni** anno, l'estrazione da **ciascuna** miniera è

  – Nulla se la miniera non è utilizzata

  – Limitata dalla capacità se la miniera è utilizzata

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Quantità prodotto finito

$$y_t = \sum_i x_{i,t} \quad \forall t$$

  ✓ Capacità della miniera

$$x_{i,t} \leq C_i \delta_{i,t} \quad \forall i, \forall t$$

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Limiti di utilizzo

  Ogni anno, non possono essere utilizzate più di N miniere

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Limiti di utilizzo

$$\sum_i \delta_{i,t} \leq N \quad \forall t$$

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Limiti di utilizzo

$$\sum_i \delta_{i,t} \leq N \quad \forall t$$

  ✓ Qualità

  Ogni anno l'indice di qualità del prodotto finito deve essere rispettato

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Limiti di utilizzo

$$\sum_i \delta_{i,t} \leq N \quad \forall t$$

  ✓ Qualità

$$\sum_i q_i x_{i,t} = qf_t y_t \quad \forall t$$

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ 3 deve essere utilizzata in caso di utilizzo di 1 o 2

$\delta_{1,t}$	$\delta_{2,t}$	$\delta_{3,t}$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	0
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ 3 deve essere utilizzata in caso di utilizzo di 1 o 2

$\delta_{1,t}$	$\delta_{2,t}$	$\delta_{3,t}$	
0	0	0	**A**
1	0	0	**NA**
0	1	0	**NA**
1	1	0	**NA**
0	0	1	**A**
1	0	1	**A**
0	1	1	**A**
1	1	1	**A**

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ 3 deve essere utilizzata in caso di utilizzo di 1 o 2

$\delta_{1,t}$	$\delta_{2,t}$	$\delta_{3,t}$	
0	0	0	**A**
~~1~~	~~0~~	~~0~~	**NA**
0	1	0	**NA**
~~1~~	~~1~~	~~0~~	**NA**
0	0	1	**A**
1	0	1	**A**
0	1	1	**A**
1	1	1	**A**

$$\delta_{3,t} \geq \delta_{1,t} \ \forall t$$

- Vincoli

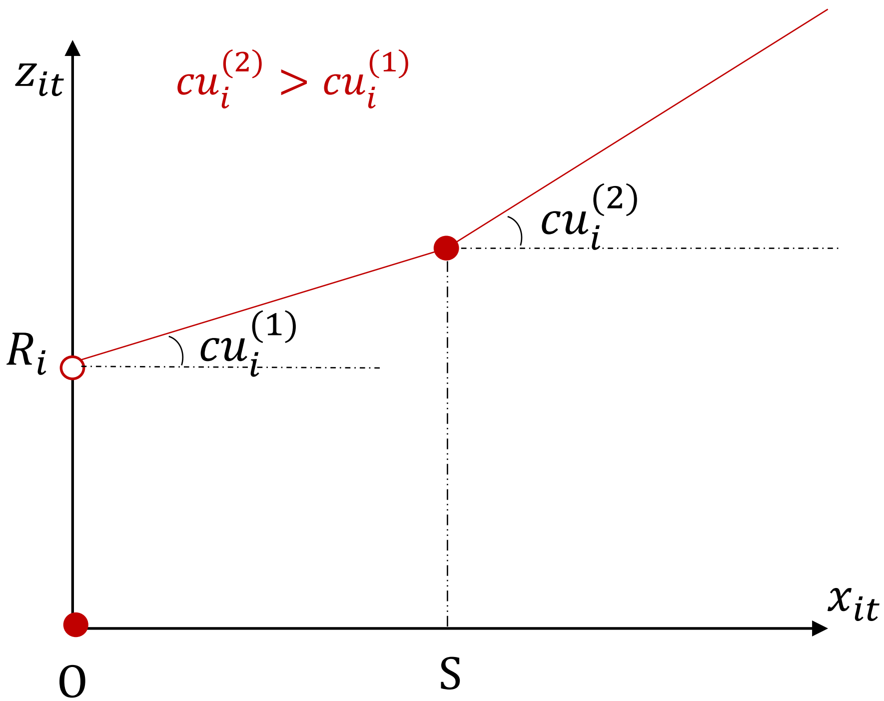
  ✓ 3 deve essere utilizzata in caso di utilizzo di 1 o 2

$\delta_{1,t}$	$\delta_{2,t}$	$\delta_{3,t}$	
0	0	0	**A**
~~1~~	~~0~~	~~0~~	**NA**
~~0~~	~~1~~	~~0~~	**NA**
~~1~~	~~1~~	~~0~~	**NA**
0	0	1	**A**
1	0	1	**A**
0	1	1	**A**
1	1	1	**A**

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta_{3,t} \geq \delta_{1,t} \; \forall t \\ \delta_{3,t} \geq \delta_{2,t} \; \forall t \end{array}}$$

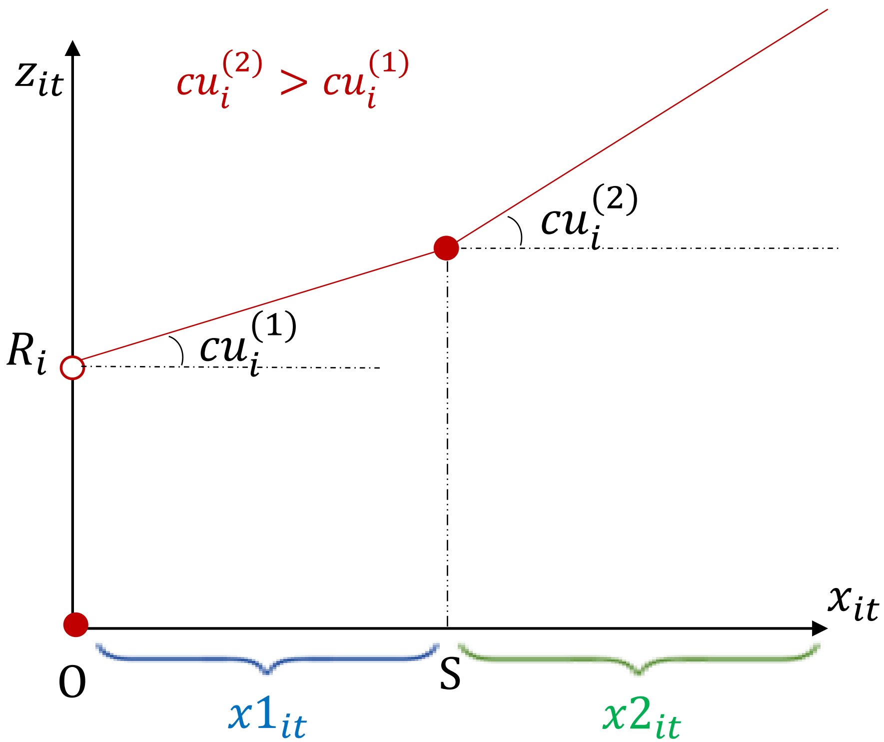
Esercizio 2

B. Funzione di costo lineare a tratti convessa



- Esistenza di una soglia oltre la quale i costi unitari variano
- I costi unitari crescono al crescere delle quantità prodotte

B. Funzione di costo lineare a tratti convessa



- Scomposizione di x_{it} in due variabili non negative:

$$x_{it} = x1_{it} + x2_{it}$$

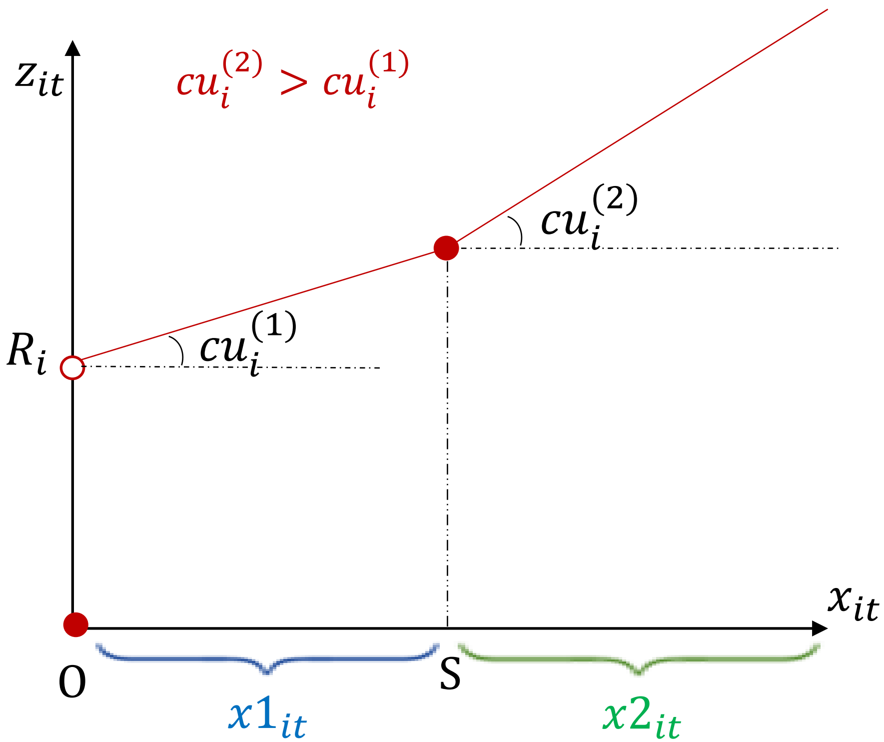
- Imposizione della soglia

$$x1_{it} \leq S$$

- Nuova funzione di costo

$$z_{it} = R_i\delta_{it} + cu_i^{(1)} x1_{it} + cu_i^{(2)} x2_{it}$$

B. Funzione di costo lineare a tratti convessa

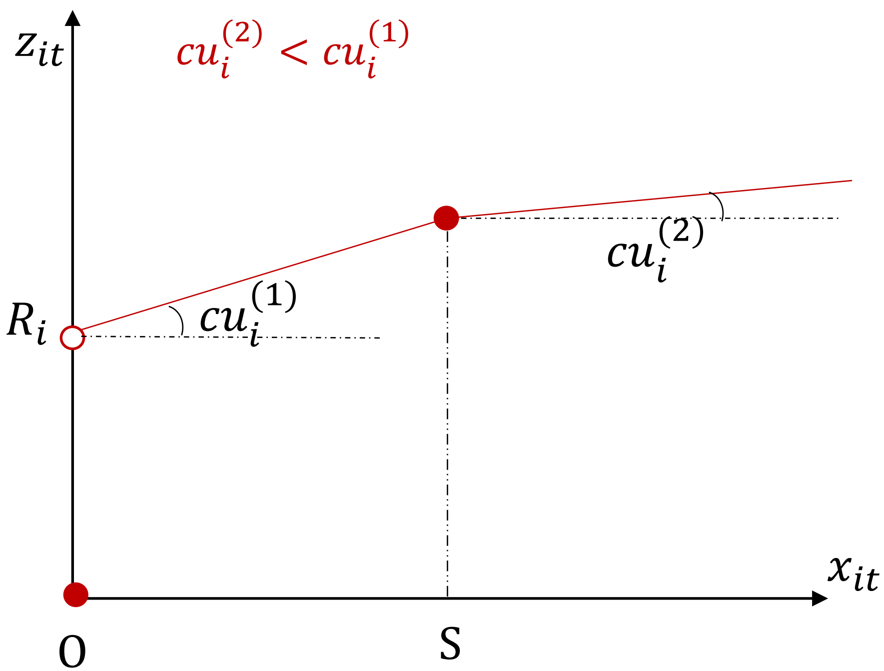


- La convessità della funzione di costo non richiede l'introduzione di vincoli di precedenza.

↓

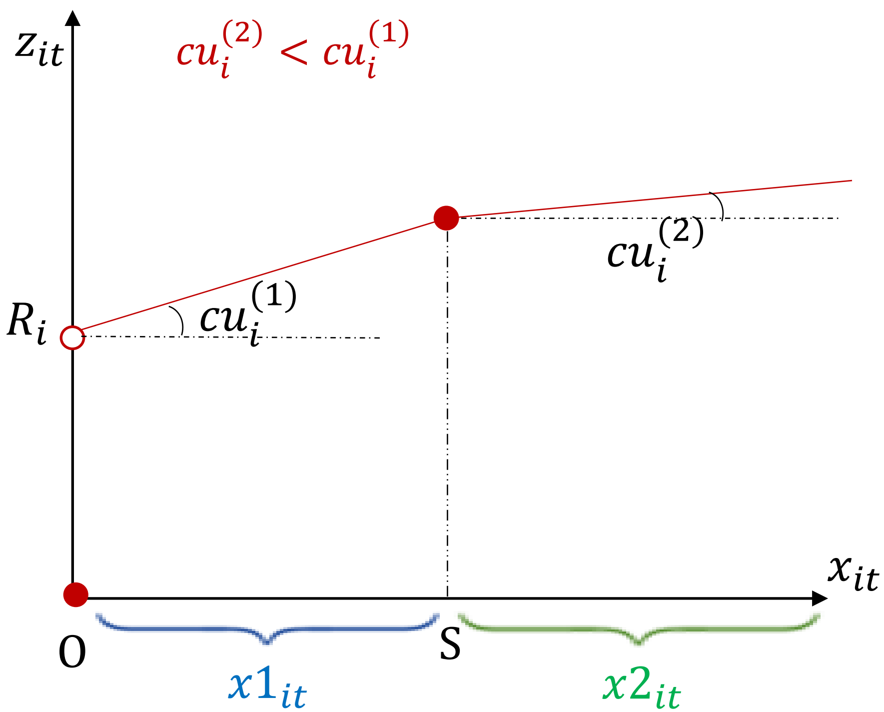
- $x2_{it}$ assumerà valore positivo solo quando $x1_{it}$ sarà satura.

C. Funzione di costo lineare a tratti concava



- Esistenza di una soglia oltre la quale i costi unitari variano
- I costi unitari decrescono al crescere delle quantità prodotte

C. Funzione di costo lineare a tratti concava



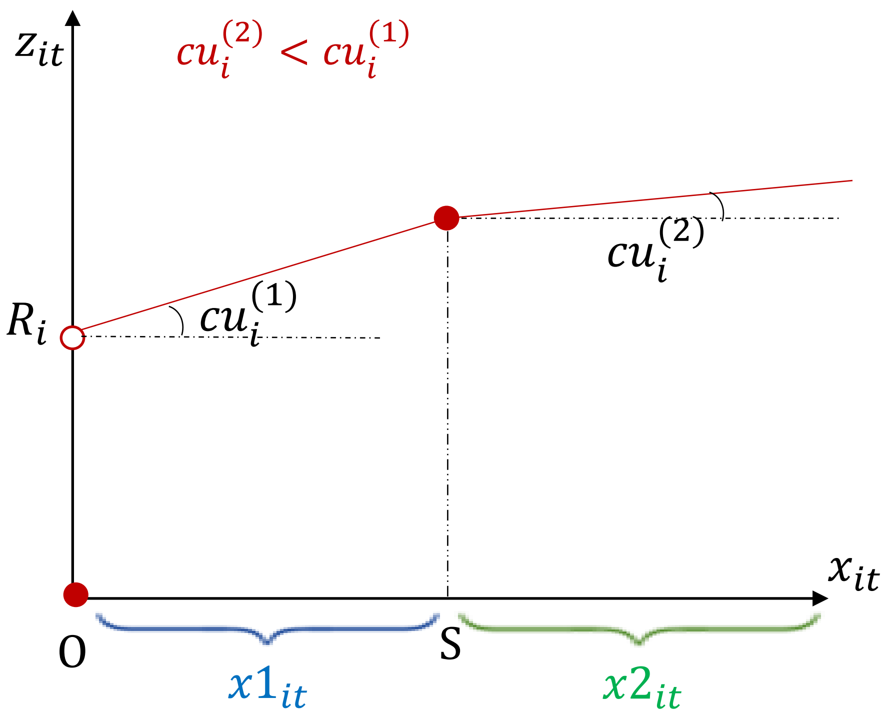
- Scomposizione di x_i in due variabili non negative:

  $$x_{it} = x1_{it} + x2_{it}$$

- La concavità della funzione di costo porterebbe ad assegnare valori positivi a $x2_{it}$ prima di $x1_{it}$.

Esercizio 2

C. Funzione di costo lineare a tratti concava



- Duplicazione delle variabili binarie $\delta 1_{it}$ e $\delta 2_{it}$ per controllare i due intervalli

$$\delta 1_{it} = \begin{cases} 1 & \text{se } x1_{it} > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

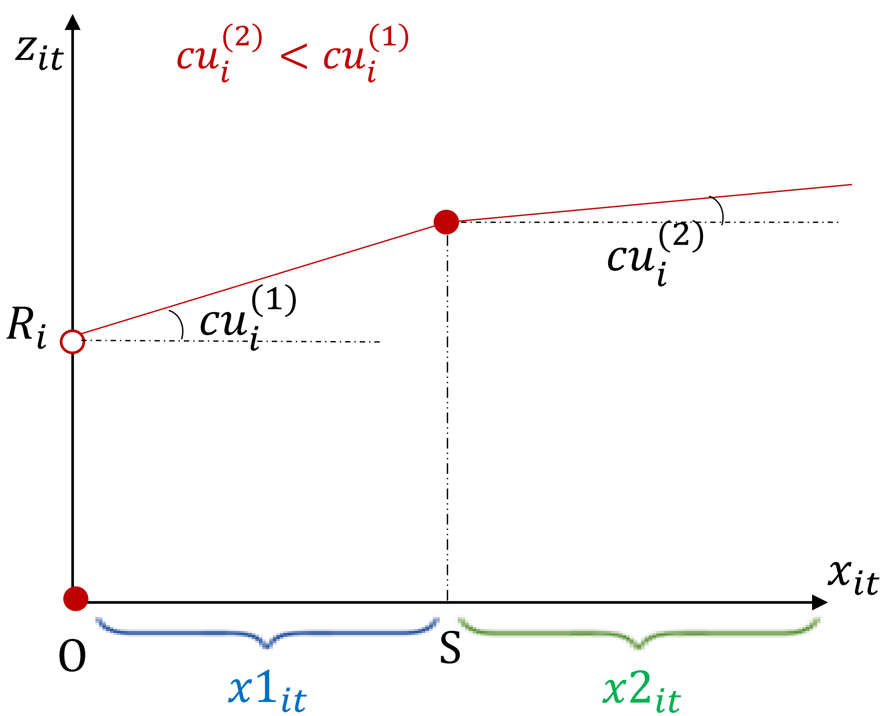
$$\delta 2_{it} = \begin{cases} 1 & \text{se } x2_{it} > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Nuova funzione di costo

$$z_{it} = R_i \delta 1_{it} + cu_i^{(1)} x1_{it} + cu_i^{(2)} x2_{it}$$

Esercizio 2

C. Funzione di costo lineare a tratti concava



- Vincolo di coerenza per ciascuna coppia di variabili

$$x1_{it} \leq S\ \delta1_{it}$$

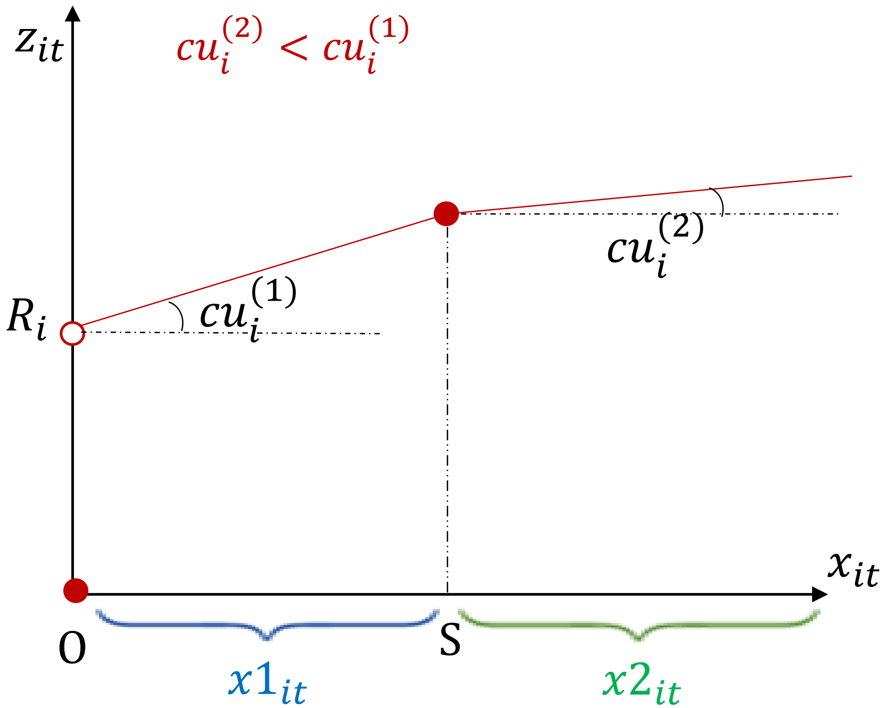
$$x2_{it} \leq C\ \delta2_{it}$$

- Vincolo di precedenza

$$\delta2_{it} \leq \frac{x1_{it}}{S}$$

Esercizio 2

C. Funzione di costo lineare a tratti concava



- Vincolo di coerenza per ciascuna coppia di variabili

$$x1_{it} \leq S\ \delta 1_{it}$$

$$\boxed{x2_{it} \leq C\ \delta 2_{it}}$$

- Vincolo di precedenza

$$\boxed{\delta 2_{it} \leq \frac{x1_{it}}{S}}$$

$x2_{it}$ è forzata ad essere nulla fino alla saturazione di $x1_{it}$

Takeaway

1. Investimenti multiperiodali

2. Regole di modellazione

Takeaway

1. Investimenti multiperiodali

- Richiedono l'introduzione di un duplice set di variabili decisionali, da collegare tramite la scrittura di vincoli intertemporali.

Takeaway

2. Regole di modellazione

- Modellare funzioni di costo lineari a tratti
  - Se convesse, richiedono la sola scomposizione delle variabili continue nei sottointervalli
  - Se concave, richiedono l’introduzione di variabili binarie in ciascun sottointervallo e la scrittura di vincoli di precedenza.