

Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2023/2024

MODELLI E ALGORITMI DI OTTIMIZZAZIONE

Introduzione alle Esercitazioni + Modelli di Pianificazione della Produzione – Esercizi 1 e 2 (E1)



Giovanni Micheli

- Introduzione
- Installazione di GAMS
- Modellazione in GAMS
 - Esercizio 1.1
 - Esercizio 1.2



- Introduzione
- Installazione di GAMS
- Modellazione in GAMS
 - Esercizio 1.1
 - Esercizio 1.2



Corso di Modelli e Algoritmi di Ottimizzazione

- Studio Teorico
 - ✓ Conoscenza di modelli di programmazione matematica per la risoluzione di problemi decisionali in vari ambiti.
 - ✓ Studio degli algoritmi di soluzione.
- Sperimentazione
 - ✓ Conoscenza del linguaggio di modellazione GAMS per la codifica e la risoluzione dei modelli di ottimizzazione.



- Esempi applicativi

- ✓ Pianificazione industriale

- Production planning
- Gestione del magazzino
- Project planning
- Supply chain management

- ✓ Assegnamento

- Allocazione di risorse ad attività
- Assegnamento di lavori a macchine

- ✓ Logistica

- Trasporto
- Vehicle routing

- ✓ Network design

- Progettazione di reti di telecomunicazione
- Urban planning
- Localizzazione di impianti

- ✓ Energia

- Capacity expansion
- Unit commitment
- Ottimizzazione della produzione di idrogeno per elettrolisi
- Demand Response



- Tutto il materiale didattico disponibile nella pagina Elearning di Modelli e Algoritmi di Ottimizzazione a.a. 2023-24
 - Lezioni
 - Slide delle lezioni teoriche
 - Testi delle esercitazioni
 - Modelli matematici
 - Codici GAMS (condivisi al termine delle esercitazioni)
 - Esami
 - Esiti
 - Tracce e soluzioni dei precedenti esami
 - Raccolte di esercizi aggiuntivi
 - Annunci relativi al corso



- Prova scritta
 - ✓ Gestionali: esercizi di modellazione GAMS (~ 1 h 45 min)
 - ✓ Informatici: esercizi algebrici e di modellazione GAMS (~ 2 h 15 min).
- Colloquio orale
 - ✓ Obbligatorio
 - ✓ Sostenuto esclusivamente dagli studenti sufficienti nello scritto
 - ✓ Strettamente collegato alla prova scritta
 - Da sostenere nella stessa sessione
 - L'esito negativo dell'orale comporta l'obbligo di ripetere la prova scritta.



Corso di Modelli e Algoritmi di Ottimizzazione

- Studio Teorico

- ✓ Conoscenza di modelli di programmazione matematica per la risoluzione di problemi decisionali in vari ambiti.
- ✓ Studio degli algoritmi di soluzione.

- Sperimentazione

- ✓ Conoscenza del linguaggio di modellazione GAMS per la codifica e la risoluzione dei modelli di ottimizzazione.



- Cos'è GAMS?
 - ✓ GAMS (General Algebraic Modeling System) è un software sviluppato per la risoluzione di problemi di programmazione matematica del seguente tipo: lineare, intero, misto-intero, non-lineare
 - ✓ Consente di modellare in forma compatta problemi di grandi dimensioni
 - ✓ La versione demo può essere scaricata gratuitamente al link www.gams.com/download/ dopo aver completato la procedura di richiesta di una licenza



- Introduzione
- **Installazione di GAMS**
- Modellazione in GAMS
 - Esercizio 1.1
 - Esercizio 1.2



- Collegarsi al link https://www.gams.com/try_gams/ per richiedere una licenza Demo
- Compilare il form con i propri dati personali e selezionare **Submit**

Request a Free Demo License

GAMS will not work without a valid license. Please use the form below to request a demo license.

First Name*	Last Name*	Email*
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Institute/Organisation*		Country
<input type="text" value="University of Bergamo"/>		<input type="text" value="Italy"/>
Captcha: Please solve $23 + 21$: <input type="text" value="46"/>		

☒ I agree that GAMS will collect and store my name, e-mail address, and affiliation for purposes of fraud prevention, and for statistical purposes.
All personal information will be deleted after 1 month.

- Attendere la mail con mittente noreply@gams.com contenente il link per la verifica dell'indirizzo di posta fornito (~15 min)



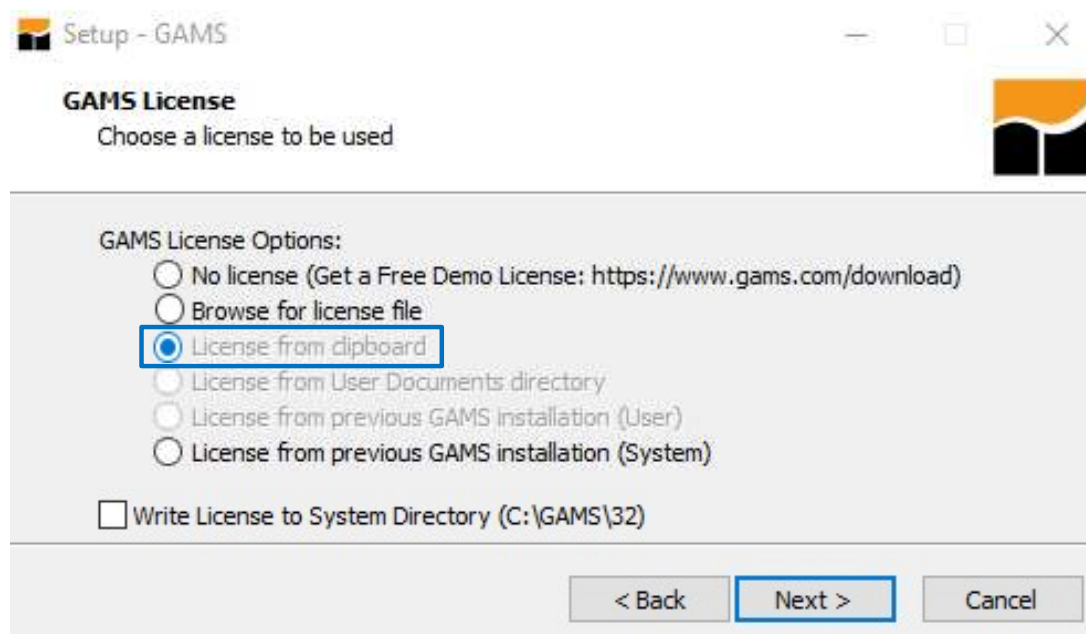
- Dopo aver verificato l'indirizzo di posta, attendere una nuova mail con mittente noreply@gams.com contenente il testo della licenza (~1 min)

```
GAMS_Demo_license_for_Giovanni_Micheli_____G201003|0002CO-GEN  
University_of_Bergamo,_Italy_____  
1268433000_**GAMS_Demo_license_restricted_to_non-commercial_use**  
194229140C_____  
DL018875_____C_DEMO_____  
giovanni.micheli@unibg.it,_Giovanni_Micheli_____
```

- Al link www.gams.com/download/ scaricare la versione di GAMS compatibile con il sistema operativo del proprio PC.
- Aprire il file [.exe](#) ed avviare la procedura di installazione.



- Nella procedura di installazione prediligere l'utilizzo di GAMS IDE rispetto a GAMS Studio, se tale scelta è applicabile.
- Copiare il testo della licenza dall'email ricevuta.
- Durante l'installazione, al momento di selezionare una licenza: selezionare la voce *License from clipboard* terminare l'installazione.



- Introduzione
- Installazione di GAMS
- **Modellazione in GAMS**
 - Esercizio 1.1
 - Esercizio 1.2



- Fornire la risoluzione ad un problema decisionale implica lo svolgimento di due attività sequenziali:
 1. Modellazione (i.e., trasformazione del problema decisionale in un modello matematico)
 - Insiemi
 - Dati (scalari vs vettori vs matrici)
 - Variabili decisionali
 - Equazioni (funzioni obiettivo e vincoli)
 2. Implementazione GAMS (i.e., traduzione del modello matematico in una sequenza di istruzioni eseguibili da GAMS)



- Struttura della soluzione di un problema decisionale
 - ✓ Insiemi e indici
 - ✓ Dati (scalari, vettori e matrici)
 - ✓ Variabili
 - ✓ Vincoli
 - ✓ Modello
 - ✓ Risoluzione del modello
 - ✓ Visualizzazione/analisi dei risultati



- Insiemi

✓ J : insieme dei prodotti

$$J = \{P1, P2, P3, P4\}$$

✓ I : insieme dei reparti

$$I = \{A, B, C, D\}$$



- Dati - Vettori
 - Pr_j Profitto unitario [\$] del prodotto j
 - Pen_j Penalità unitaria [\$] del prodotto j
 - D_j Domanda del prodotto j



- Dati - Matrici

- tl_{ij} Tempo di lavorazione [h] del prodotto j nel reparto i

- Dati - Scalari

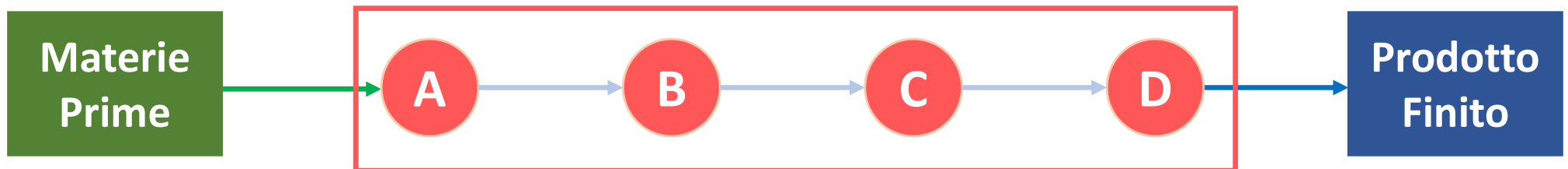
- C Capacità [h] di ciascun reparto **1000**



Esercizio 1

- La **configurazione** dei processi produttivi determina la tipologia di variabili decisionali da introdurre.

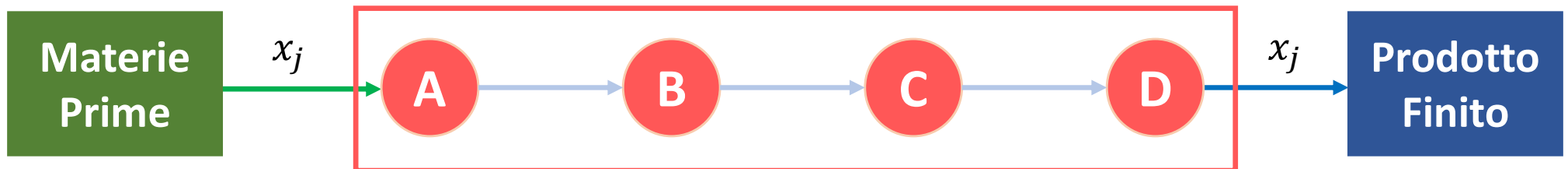
Reparti in serie



Esercizio 1

- La **configurazione** dei processi produttivi determina la tipologia di variabili decisionali da introdurre.

Reparti in serie



- Variabili Decisionali (Serie)
 - x_j Quantità del prodotto j realizzata
 - s_j Quantità di domanda del prodotto j
non soddisfatta
 - z Variabile obiettivo : profitti totali [\$]



- Funzione obiettivo (Serie)

Penalità per il non soddisfacimento
della domanda

$$\max z = \sum_j Pr_j x_j - \sum_j Pen_j s_j$$

Ricavi derivanti dal soddisfacimento
della domanda

- Vincoli (Serie)

- ✓ Capacità

Il tempo di lavorazione di **ogni** reparto non deve eccedere la rispettiva capacità produttiva

- Vincoli (Serie)

✓ Capacità

$$\sum_j tl_{ij}x_j \leq C \quad \forall i$$



- Vincoli (Serie)

- ✓ Capacità

$$\sum_j tl_{ij}x_j \leq C \quad \forall i$$

- ✓ Domanda

La domanda di **ciascun** prodotto è pari alla quota soddisfatta più la quota non soddisfatta

- Vincoli (Serie)

✓ Capacità

$$\sum_j tl_{ij}x_j \leq C \quad \forall i$$

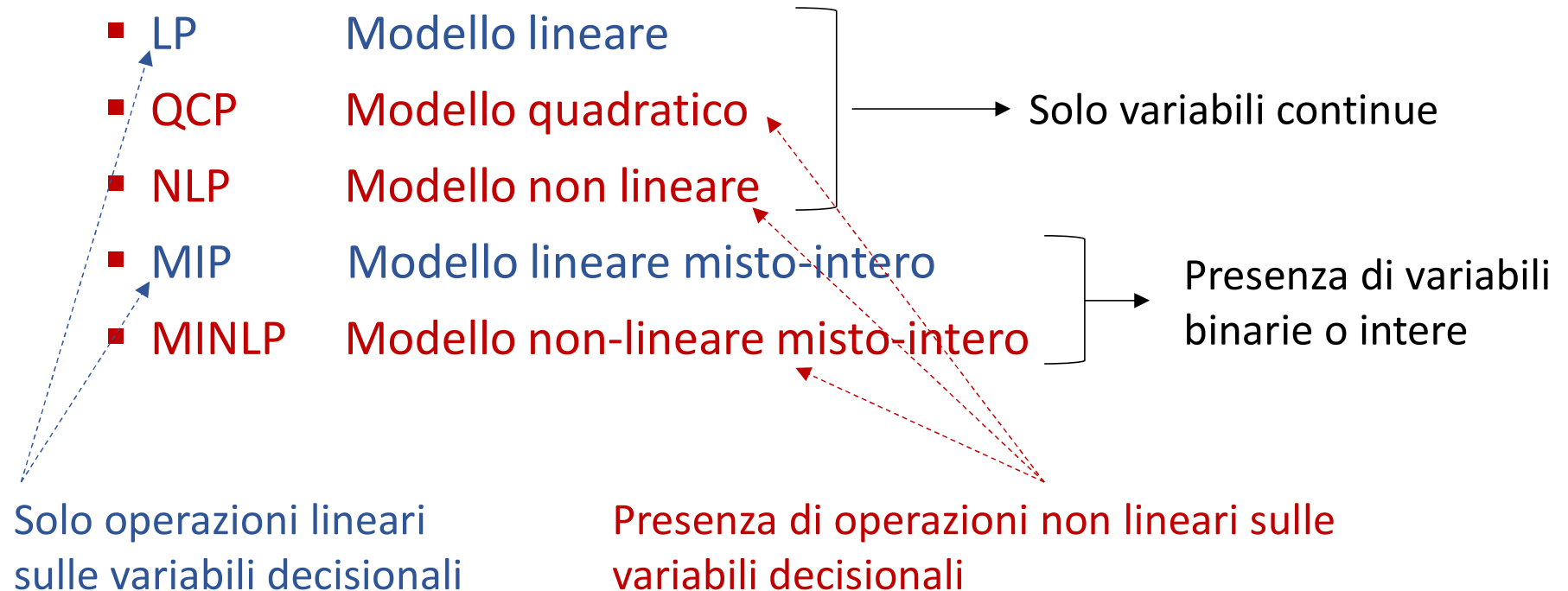
✓ Domanda

$$x_j + s_j = D_j \quad \forall j$$



- Vincoli sulle variabili decisionali (Serie)
 - $x_j \geq 0 \quad \forall j$
 - $s_j \geq 0 \quad \forall j$

- Un modello di programmazione matematica
 - ✓ Vincoli e variabili inclusi in un modello determinano la classe del modello stesso



- Vincoli sulle variabili decisionali (Serie)

- $x_j \geq 0 \quad \forall j$

→ LP

- $s_j \geq 0 \quad \forall j$



- Vincoli sulle variabili decisionali (Serie)

- $x_j \geq 0 \quad \forall j$

→ LP

- $s_j \geq 0 \quad \forall j$

- $x_j \in \mathbb{N} \quad \forall j$

→ MIP →

Controllo del gap
di ottimalità

- $s_j \in \mathbb{N} \quad \forall j$



Gap di ottimalità

- I modelli MIP possono richiedere un enorme impegno di risorse per la determinazione della soluzione ottima
 - Rilassamento continuo (tempo polinomiale)
 - Branch-and bound (tempo esponenziale)
- Di default GAMS nella risoluzione di un modello MIP non determina l'ottimo, ma una soluzione intera (SI) che si trova sufficientemente vicina ad una stima della soluzione ottima (SO)
- Si definisce gap di ottimalità la distanza tra le due soluzioni:
 - ✓ $|SO - SI|$ è il gap assoluto di ottimalità
 - ✓ $\frac{|SO - SI|}{\max(|SO|, |SI|)}$ è il gap relativo di ottimalità
- I gap di ottimalità sono controllabili mediante le estensioni optca e optcr (e.g. *Model_Name.optcr = 0 ;* → soluzione ottima)



- Post-processamento (Serie)
 - ✓ A valle della risoluzione del modello, introduciamo

❖ Un nuovo scalare X_{tot}

$$X_{tot} = \sum_j x_j$$

❖ Un nuovo vettore Sat_i

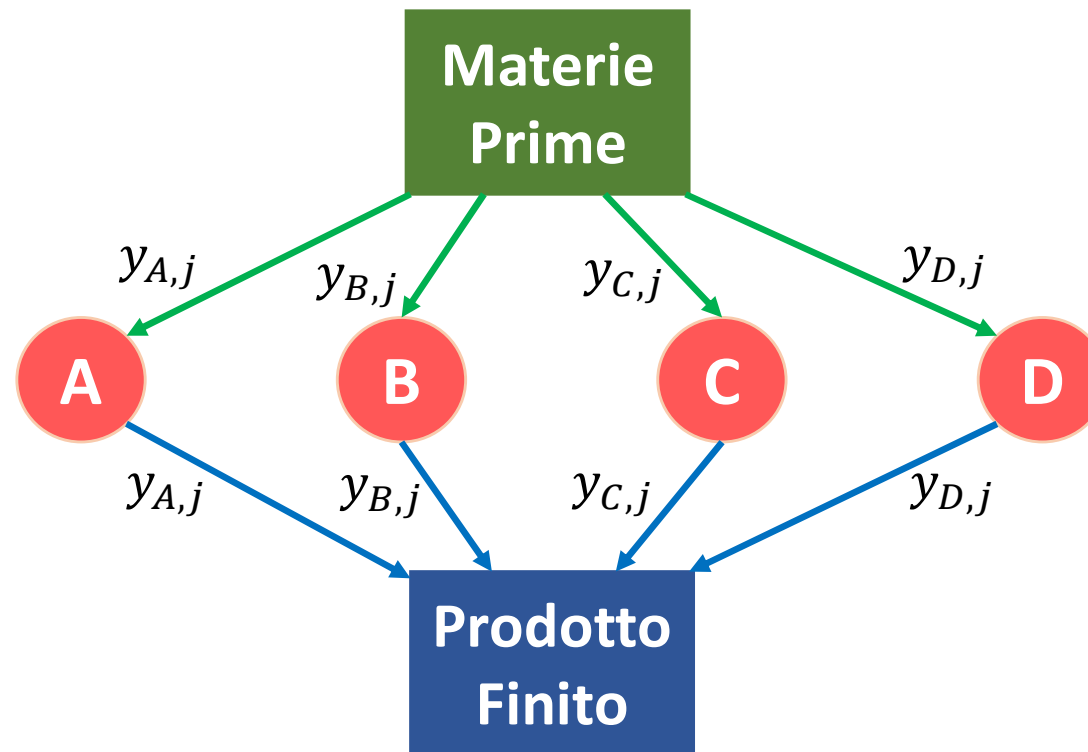
$$Sat_i = \frac{\sum_j tl_{ij} x_j}{C}, \quad \forall i$$



Esercizio 1

- La **configurazione** dei processi produttivi determina la tipologia di variabili decisionali da introdurre.

Reparti in parallelo



- Variabili Decisionali (Parallelo)
 - y_{ij} Quantità del prodotto j realizzata nel reparto i
 - s_j Quantità di domanda del prodotto j non soddisfatta
 - z Variabile obiettivo : profitti totali [\$]

- Funzione obiettivo (Parallelo)

Penalità per il non soddisfacimento
della domanda

$$\max z = \sum_j Pr_j \sum_i y_{ij} - \sum_j Pen_j s_j$$

Ricavi derivanti dal soddisfacimento
della domanda

- Vincoli (Parallelo)

✓ Capacità

$$\sum_j tl_{ij}y_{ij} \leq C \quad \forall i$$

✓ Domanda

$$\sum_i y_{ij} + s_j = D_j \quad \forall j$$



- Vincoli sulle variabili decisionali (Parallelo)

- $y_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$

→ LP

- $s_j \geq 0 \quad \forall j$

- $y_{ij} \in \mathbb{N} \quad \forall i, j$

- $s_j \in \mathbb{N} \quad \forall j$

→ MIP →

Controllo del gap
di ottimalità



- Post-processamento (Parallelo)
 - ✓ A valle della risoluzione del modello, introduciamo

❖ Un nuovo scalare Y_{tot}

$$Y_{tot} = \sum_i \sum_j y_{ij}$$

❖ Un nuovo vettore Sat_i^2

$$Sat_i^2 = \frac{\sum_j tl_{i,j} y_{ij}}{C}, \quad \forall i$$



- Insiemi

✓ T : insieme dei mesi dell'orizzonte di pianificazione

$$T = \{1,2,3,4,5,6\}$$



- Dati - Vettori

- D_t Domanda al mese t
- cp_t Costo unitario di produzione [\$] al mese t



- Dati - Scalari

■	cs	Costo unitario di stoccaggio [\$]	8
■	$I0$	Giacenza iniziale del magazzino	50
■	IF	Giacenza finale del magazzino	60
■	IM	Capacità massima del magazzino	100

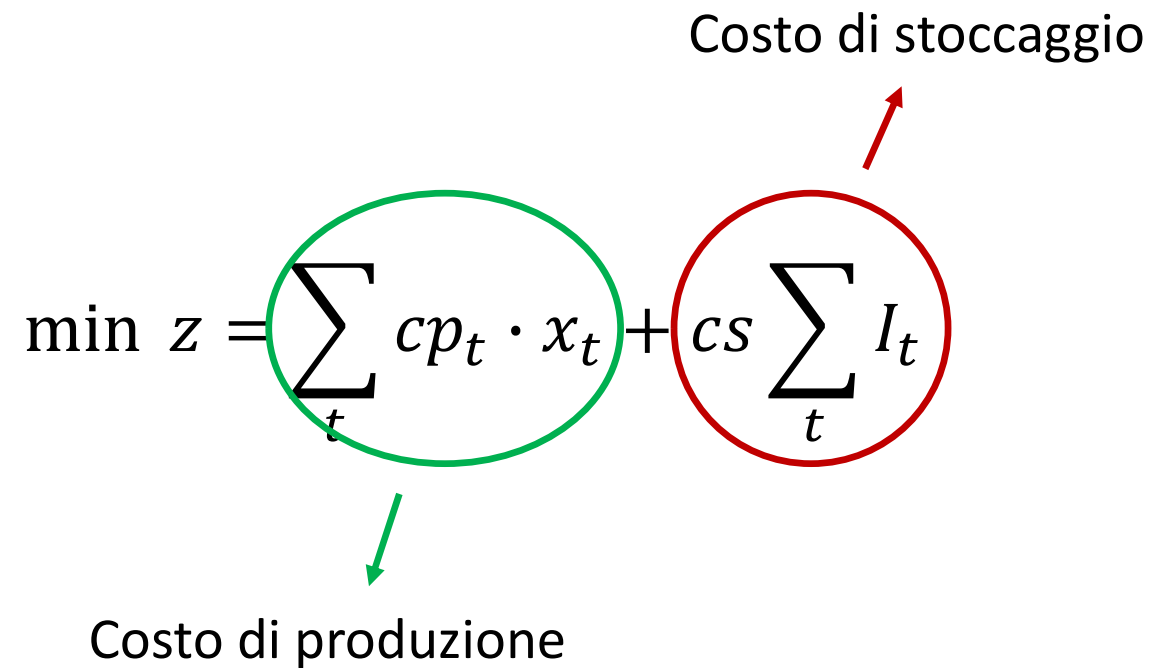
- Variabili Decisionali
 - x_t Produzione al mese t
 - I_t Livello del magazzino alla fine del mese t
 - z Variabile obiettivo : costi totali [\$]

- Funzione obiettivo

$$\min z = \sum_t cp_t \cdot x_t + cs \sum_t I_t$$

Costo di stoccaggio

Costo di produzione



- Vincoli

- ✓ Livello finale del magazzino

Alla fine dell'orizzonte di pianificazione, il livello delle scorte deve essere superiore al minimo valore finale

- Vincoli

- ✓ Livello finale del magazzino

$$I_6 \geq IF$$



- Vincoli

- ✓ Livello finale del magazzino

$$I_6 \geq IF$$

- ✓ Livello massimo del magazzino

In **ogni** mese il livello del magazzino non può eccedere la massima capacità

- Vincoli

- ✓ Livello finale del magazzino

$$I_6 \geq IF$$

- ✓ Livello massimo del magazzino

$$I_t \leq IM \quad \forall t$$

- Vincoli

- ✓ Bilancio

In **ogni** mese la quantità resa disponibile deve eguagliare la quantità utilizzata



- Vincoli

- ✓ Bilancio

- Mese 1

$$I_0 + x_1 = D_1 + I_1$$



- Vincoli

- ✓ Bilancio

- Mese 1

$$I_0 + x_1 = D_1 + I_1$$

- Mese 2

$$I_1 + x_2 = D_2 + I_2$$



- Vincoli

- ✓ Bilancio

- Mese 1 $I_0 + x_1 = D_1 + I_1$

- Mese 2 $I_1 + x_2 = D_2 + I_2$

⋮

⋮

- Mese 6 $I_5 + x_6 = D_6 + I_6$



- Vincoli
- ✓ Bilancio

$$I_{t-1} + I0|_{t=1} + x_t = D_t + I_t \quad \forall t$$

- Vincoli

- ✓ Bilancio

$$I_{t-1} + IO|_{t=1} + x_t = D_t + I_t \quad \forall t$$

Variable decisionale
(definita solo per $t > 1$)

Parametro in input (da includere
nell'equazione solo per $t = 1$)

- Vincoli sulle variabili decisionali

- $x_t \geq 0 \quad \forall t$

→ LP

- $I_t \geq 0 \quad \forall t$



- Vincoli sulle variabili decisionali

- $x_t \geq 0 \quad \forall t$

→ LP

- $I_t \geq 0 \quad \forall t$

- $x_t \in \mathbb{N} \quad \forall t$

→ MIP

- $I_t \in \mathbb{N} \quad \forall t$

→ Controllo del gap di ottimalità



1. Pianificazione della produzione
2. Regole di modellazione



1. Pianificazione della produzione

- La struttura dei processi produttivi (serie vs parallelo) determina la tipologia di variabili decisionali da introdurre nel problema.
- In presenza di più fonti di disponibilità di un prodotto (e.g., produzione ordinaria, produzione straordinaria, magazzino, outsourcing) e/o impieghi (e.g., vendita su canali diversi, stoccaggio) è indispensabile la scrittura di un vincolo di bilancio che eguagli disponibilità e utilizzi.



2. Regole di modellazione

- Tutti i modelli formulati dovranno essere lineari.
- Per ottenere risultati interi non è sufficiente modificare l'attributo Positive Variables in Integer Variables
 - Va modificata la classe di ottimizzazione (MIP)
 - Va controllato il gap di ottimalità
 - Va controllato l'upper bound.

