函数下半连续性的两种定义的等价性证明

> 函数$f: X \mapsto [-\infty, \infty], X \subset \mathbb{R}^n$，以下两种命题等价：
> (1)$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k)$对任意$x_k \to x$的点列$\{x_k\} \subset X$成立；
> (2)对$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}_+$，使得对$\forall \{x_k\} \to x$且$\{x_k\} \subset X$，当$k > n$时，$f(x) - \epsilon < f(x_k)$成立。

> 证明：$(1) \to (2)$:
> $\forall \{x_k\} \to x, f(x) \leq \lim_{K\to\infty} \inf_{k\geq K} f(x_k) = \lim_{K\to\infty} a_K$,
> $\implies \forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}_+$,使得当$K > n$时，$|a_K - \lim_{K\to\infty} a_K| < \epsilon$,
> $\implies \lim_{K\to\infty} a_K - \epsilon < a_K < \lim_{K\to\infty} a_K + \epsilon$,
> $\implies f(x) - \epsilon < a_K \leq f(x_k)$,其中$k \geq K$,
> 即有对$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}_+$,当$k \geq n$时，$f(x) - \epsilon < f(x_k)$成立。
> $(2) \to (1)$:
> 对$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}_+$，使得对$\forall \{x_k\} \to x$且$\{x_k\} \subset X$，当$k > n$时，$f(x) - \epsilon < f(x_k)$成立, 于是$\inf_{k>n} f(x_k)$一定存在，且$f(x) - \epsilon \leq \inf_{k>n} f(x_k) \leq f(x_{n+1})$。
> 对$\inf_{k>n} f(x_k)$关于n求极限$n \to \infty$，若该极限存在，则显然由上式得$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k)$，若该极限不存在，即显然有$\lim_{n\to\infty} \inf_{k>n} f(x_k) = \infty$，从而满足$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k)$。
> 故而对任意$x_k \to x$的点列$\{x_k\} \subset X$都有$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k)$成立。

这两个等价定义的证明中，我曾疑惑，如果将（1）中$\liminf_{k\to\infty} f(x_k)$换成$\lim_{k\to\infty} f(x_k)$，似乎也没什么不妥，充要性似乎也能证明。后来我转念一想，这一改动在证明$(2) \to (1)$时，求极限的过程无法确认$\lim_{k\to\infty} f(x_k)$的存在性，也就没办法用到证明过程中对不等式直接求极限。我在看网上的一些文档在两个证明等价性过程时，两个文档的方式都是直接求极限，并没有阐明极限的存在性，那么这种证明方式下，换成$\lim_{k\to\infty} f(x_k)$对于证明是丝毫没有影响的，但是应用在实际的某些函数[1]中，二者的判别方式却有所出入，所以$\liminf_{k\to\infty} f(x_k)$才是必定的结论。

1. 例如自定义函数：

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{if } x > 0; \\ 0, & \text{if } x \leq 0; \end{cases}$$

在$x = 0$处时，由定义(2)可以判定下半连续，但是若定义(1)改成$\lim_{k\to\infty} f(x_k)$，则函数$f(x)$在

$x=0$处不存在$\lim_{k\to\infty} f(x_k)$，由此定义(1)失效，也就不存在(1)(2)定义之间的等价性。但是$\liminf_{k\to\infty} f(x_k)$依旧可以判定。↩