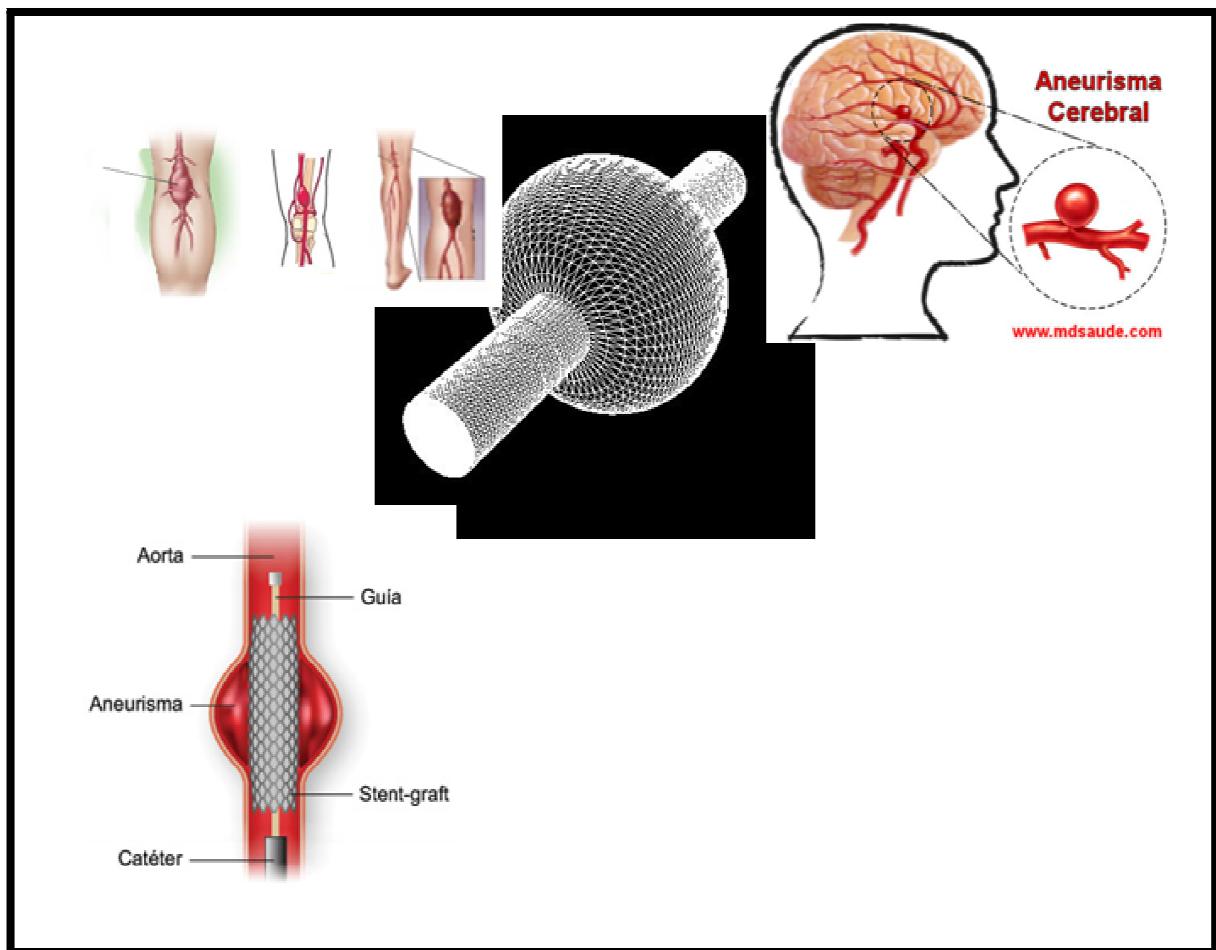


## MODELIZACIÓN DE SISTEMAS BIOMÉDICOS

## MODELIZACIÓN DEL ANEURISMA CON FREEFEM++



4º Curso Ingeniería de la Salud  
Isabel Amaya Rodríguez Cristina Forja Barbosa



## **Índice**

1. Introducción.....	04
2. Definición del problema.....	06
3. Solución del problema.....	08
4. Implementación del problema.....	18
5. Referencias.....	28

## Introducción

Un aneurisma Un aneurisma es una dilatación localizada y permanente que se produce en las paredes de las arterias, localizándose en los distintos tramos de la arteria. Se produce un aneurisma cuando la presión de la sangre que pasa por una sección de una arteria debilitada empuja la pared del vaso hacia afuera y forma lo que podría describirse como una ampolla. No todos los aneurismas son peligrosos. Pero si la dilatación estira demasiado la arteria, ésta podría romperse y provocar una hemorragia mortal. Un aneurisma que sangra en el cerebro puede provocar un ataque cerebral o la muerte.

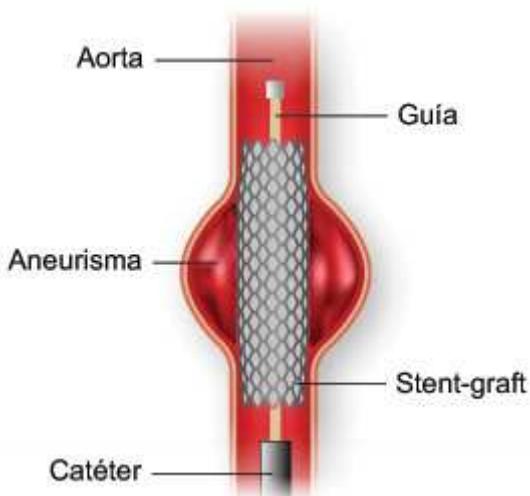
Algunos aneurismas están presentes al nacer (congénitos) aunque otras veces los defectos en algunas de las partes de la pared arterial pueden ser responsables. Los lugares comunes para los aneurismas incluyen: la arteria mayor que sale del corazón (la aorta), el cerebro (aneurisma cerebral), detrás de la rodilla en la pierna (aneurisma de la arteria poplítea), el intestino (aneurisma de la arteria mesentérica) y una arteria en el bazo (aneurisma de la arteria esplénica).

La técnica de angioplastia no es quirúrgica sino una intervención coronaria percutánea. Se realiza con un catéter con globo (una sonda pequeña, hueca y flexible que tiene un globo cerca del extremo) y permite colocar un stent (una malla metálica), que va montado sobre un pequeño balón y se introduce en la arteria del corazón a través del catéter.

Mediante control radiológico se va siguiendo el catéter hasta que llega al corazón. Para ver bien los vasos y las obstrucciones, se inyecta un contraste que resalta el flujo de la sangre. Al llegar a la zona afectada, se hincha el balón y la malla se abre y comprime la placa hacia fuera, dejando una luz amplia en la arteria.

Una vez implantado el stent, el balón se retira de la arteria. La malla metálica queda impactada contra las paredes de la arteria, creando una especie de andamio metálico que impide que ésta se vuelva a cerrar. La malla elimina la obstrucción y permite que la sangre llegue bien al músculo cardiaco.

En la actualidad, algunos de los stents que se colocan van recubiertos con fármacos,



como la rapamicina o el taxol, que sirven para que tarden más en volver a ocluirse. Esta técnica rápida y segura sustituye en muchos casos a una intervención quirúrgica a 'corazón abierto', que conlleva muchos más riesgos y posibilidades de complicación. Por tanto, es una técnica tan eficaz como la cirugía pero mucho menos agresiva y más cómoda.

Los stents también se utilizan para desobstruir y mantener abiertas otras estructuras tubulares en el cuerpo, incluyendo los uréteres (los conductos que drenan la orina desde los riñones hasta la vejiga), los bronquios (pequeños conductos de aire en los pulmones) y los conductos biliares (que llevan la bilis desde el hígado al intestino).

Por lo tanto, estos dispositivos se pueden usar para paliar las obstrucciones de los conductos urinarios por piedras o tumores; tratar aneurismas, incluyendo los de la aorta torácica; mantener el flujo de la bilis en los conductos biliares si están bloqueados (estenosis biliar) por cálculos de bilis, tumores, inflamaciones y ayudar a que la persona respire si tiene una obstrucción en las vías respiratorias.

## Definición del problema

Sea  $\Omega \subseteq R^3$  un dominio acotado que contiene un fluido newtoniano e incompresible. Se quiere determinar el campo de velocidades,  $\mathbf{u}$ , y la presión del fluido,  $p$ .

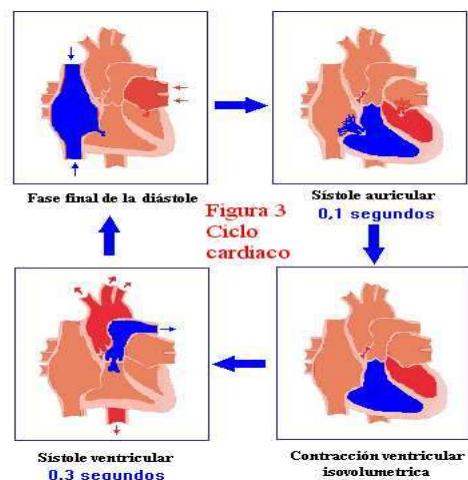
Hallar  $\mathbf{u}: (0, T) \times \Omega \subset R^3 \rightarrow R^3$  y  $p: (0, T) \times \Omega \subset R^3 \rightarrow R$  tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 & \text{en } \Omega. \end{array} \right.$$

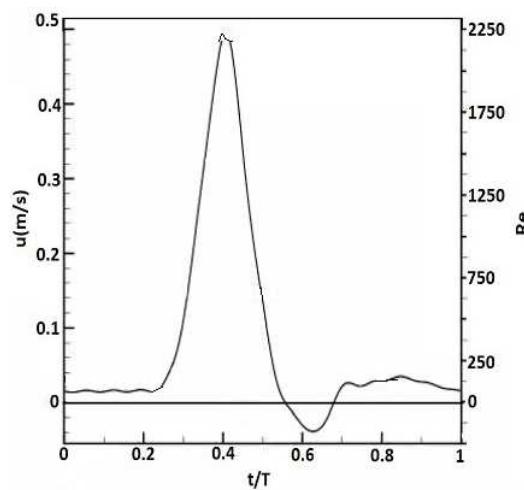
La primera ecuación representa la conservación del momento lineal, es decir, dependiendo de la fuerza externa que se aplique, la sangre se va a comportar de una forma u otra. La segunda ecuación representa la conservación de la masa. La tercera ecuación representa cómo actúa las partículas del fluido sobre la pared, en nuestro caso, no hay movimiento sobre las paredes tomaremos la velocidad en las paredes como 0. La cuarta ecuación representa la velocidad inicial del fluido que en nuestro caso estará modelado por un valor extraído de la fórmula explicada anteriormente, eligiendo la fase de diástole del ciclo cardíaco.

Donde  $\mathbf{f} = 9800 \text{ mm/s}^2$ , es decir, la fuerza que actúa sobre la aneurisma es la gravedad, y  $\mathbf{u}_0 = 135 (1 + \sin(\frac{2\pi t}{T})) \text{ mm/s}$ , siendo ésta la velocidad inicial con la que entra en el vaso sanguíneo la sangre. Los perfiles de velocidad en las cuatro diferentes fases de un ciclo cardíaco para el flujo en un tubo largo, recto y cilíndrico son:

- $t/T = 0.125 \rightarrow$  Velocidad inicial  $\rightarrow$  Diástole  $\rightarrow$  Movimiento de relajación. Entrada de sangre.
- $t/T = 0.375 \rightarrow$  Sístole auricular  $\rightarrow$  movimiento de contracción.
- $t/T = 0.625 \rightarrow$  Contracción ventricular isovolumétrica  $\rightarrow$  aumento de la presión y de la velocidad con ello.
- $t/T = 0.875 \rightarrow$  Sístole ventricular  $\rightarrow$  contracción, se alcanza la velocidad máxima dado que la sangre sale por la arteria aorta y pulmonar.



Estas funciones son pulsos trifásicos apropiados para condiciones hemodinámicas normales en el segmento infrarenal de la arteria aorta humana. El uso de un pulso transitorio a la entrada basado en una condición fisiológicamente normal, se justifica por el hecho de que la condición de contorno en la entrada es aplicada por encima del cuello proximal del aneurisma, un segmento no dilatado de la arteria aorta. Como se conoce, en condiciones de reposo, el flujo sanguíneo en la arteria aorta es generalmente laminar, la desaceleración del flujo que se alcanza después del máximo sistólico induce al establecimiento de un flujo laminar localmente perturbado y a la formación de vórtices. El máximo sistólico en nuestro estudio se encuentra en 0.875.



## Solución del problema

Para solucionar el problema, primero planteamos la formulación variacional de las **ecuaciones de Navier-Stokes**, que representan el movimiento de la sangre por la aneurisma.

Sea  $\mathbf{v}$  una función test suficientemente regular tal que  $\mathbf{v} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Sea  $V = \{\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega) \mid \mathbf{v}=0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$  y  $Q = \{p \in H_0^1(\Omega)\}$ . Multiplicamos la primera ecuación del sistema por la función test  $\mathbf{v} \in V$  y la segunda ecuación, por  $\mathbf{q} \in Q$ , que es otra función test e integramos sobre  $\Omega$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx - \nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \text{en } \Omega \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, q \, dx = 0 \quad \text{en } \Omega \end{array} \right.$$

Cogemos el tercer término de la primera ecuación y aplicamos la fórmula de Green:

$$-\int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\partial\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, \mathbf{v} \, dS$$

De esta igualdad, el último término es nulo porque hicimos la función test  $\mathbf{v}=0$ , ya que no conocemos la variación de la velocidad en el contorno.

A continuación, cogemos el cuarto término de la primera ecuación y la descomponemos:

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx$$

Sustituyendo la simplificación de estos dos términos en la primera ecuación, nos queda que la formulación variacional de este sistema es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \text{en } \Omega \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, q \, dx = 0 \quad \text{en } \Omega \end{array} \right.$$

A continuación, se va a calcular una estimación de energía para ver la estabilidad del sistema. Por lo que, sustituimos las funciones test por  $v = u$  y por  $q = p$  en la formulación variacional.

Primero reemplazamos en la primera ecuación, por lo que queda así:

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{u} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dx$$

Y la segunda ecuación queda así:

$$\int_{\Omega} \mathbf{p} \nabla \cdot \mathbf{u} \, dx = 0 \text{ en } \Omega$$

Para simplificar la primera ecuación vamos a integrar por partes alguno de sus términos y a sustituir datos iniciales.

- $\int_{\Omega} \partial_t |\mathbf{u}|^2 \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, dx$
- $\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) |\mathbf{u}|^2 \, dx = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \, dx + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \, d\sigma$

Esta parte es nula, porque el primer término es cero porque estamos ante un fluido incompresible y el segundo término es cero porque por las condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas,  $u = 0$ .

- $\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \, dx = \nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx$
- $\int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{u} \, dx = 0$

Esta parte es nula por la sustitución de la conservación de la masa en su formulación variacional.

- Vamos a aplicar varios teoremas sobre esta parte de la ecuación:

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dx$$

Primero utilizamos el **teorema de Cauchy-Schwarz**:

$$\leq \left( \int_{\Omega} |\mathbf{f}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, el **teorema de Poincaré**:

$$\leq \left( \int_{\Omega} |\mathbf{f}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} C_{\Omega} \left( \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Por último, el teorema de Young:

$$\leq \frac{C_{\Omega}^2}{2\nu} \int_{\Omega} |\mathbf{f}|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx$$

Por lo que nos queda la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq \frac{C_{\Omega}^2}{2\nu} \int_{\Omega} |\mathbf{f}|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx$$

Simplificando los términos  $|\nabla \mathbf{u}|^2$  y los  $\frac{1}{2}$  nos queda:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq \frac{C_{\Omega}^2}{\nu} \int_{\Omega} |\mathbf{f}|^2 dx$$

Por último, integramos entre 0 y t,  $t \in [0, T]$ :

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u}(t)|^2 dx - \int_{\Omega} |\mathbf{u}(0)|^2 dx + \nu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx dt \leq \frac{C_{\Omega}^2}{\nu} \int_0^t \int_{\Omega} |\mathbf{f}|^2 dx dt$$

Reordenando y sustituyendo la velocidad inicial, el balance de energía queda finalmente así:

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u}(t)|^2 dx + \nu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx dt \leq \frac{C_{\Omega}^2}{\nu} \int_0^t \int_{\Omega} |\mathbf{f}|^2 dx dt + \int_{\Omega} |\mathbf{u}_0|^2 dx$$

A continuación, vamos a aplicar el método de Euler en nuestro problema.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{K}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{f}(t^{n+1}) & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Se va a calcular la formulación variacional de este problema aplicando el método de Euler. Multiplicamos la primera ecuación del sistema por la función test  $\mathbf{v}$  suficientemente regular tal que  $\mathbf{v} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , y la segunda ecuación, por  $\mathbf{q}$ , que es otra función test e integramos sobre  $\Omega$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{K} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, dx - \nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, dx \\ \quad + \int_{\Omega} \nabla p^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t^{n+1}) \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \text{en } \Omega \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \, \mathbf{q} \, dx = 0 \quad \text{en } \Omega \end{array} \right.$$

Ponemos en el segundo término de la primera ecuación  $\mathbf{u}^n$  en vez de  $\mathbf{u}^{n+1}$  porque si no tendríamos un término no lineal y no se podría calcular.

Cogemos el tercer término de la primera ecuación y aplicamos la fórmula de Green:

$$-\int_{\Omega} \Delta \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\partial\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, \mathbf{v} \, dS$$

De esta igualdad, el último término es nulo porque hicimos la función test  $\mathbf{v}=0$ , ya que no conocemos la variación de la velocidad en el contorno.

A continuación, cogemos el cuarto término de la primera ecuación y la descomponemos:

$$\int_{\Omega} \nabla p^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{p}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx$$

Por último, se tiene que descomponer el término convectivo para hacer el método de Euler:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, d$$

Sustituyendo la simplificación de estos dos términos en la primera ecuación, nos queda que la formulación variacional de este sistema es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{K} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx \\ \quad - \int_{\Omega} \mathbf{p}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1}) \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \text{en } \Omega \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \, q \, dx = 0 \end{array} \right.$$

A continuación se va a calcular una estimación de energía para ver la estabilidad del sistema. Por lo que, sustituimos las funciones test por  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{n+1}$  y por  $q = p^{n+1}$  en la formulación variacional.

Primero reemplazamos en la primera ecuación, por lo que queda así:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{u}^{n+1} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{u}^{n+1} \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} : \nabla \mathbf{u}^{n+1} \, dx \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{p}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1}) \cdot \mathbf{u}^{n+1} \, dx \end{aligned}$$

Y la segunda ecuación queda así:

$$\int_{\Omega} \mathbf{p}^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \, dx = 0 \quad \text{en } \Omega$$

Para simplificar la primera ecuación vamos a integrar por partes alguno de sus términos y a sustituir datos iniciales.

- $\int_{\Omega} \partial_t (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{u}^{n+1} \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}^n|^2 + |\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n|^2) \, dx$

Lo que se ha utilizado para conseguir esta descomposición es la siguiente propiedad:  
 $(a - b)^2 = \frac{1}{2} (a^2 - b^2 + |a - b|^2)$ .

- $\int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{u}^{n+1} \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{u}^{n+1} \, dx =$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \frac{|\mathbf{u}^{n+1}|^2}{2} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) \frac{|\mathbf{u}^{n+1}|^2}{2} dx + \int_{\partial\Omega} (n \cdot \mathbf{u}^{n+1}) \frac{|n|^2}{2} dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) \frac{|\mathbf{u}^{n+1}|^2}{2} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) \frac{|\mathbf{u}^{n+1}|^2}{2} dx \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} (n \cdot \mathbf{u}^{n+1}) \frac{|n|^2}{2} dx
\end{aligned}$$

Esta parte es cero, porque los primeros términos se anulan y, el segundo término, es cero porque por las condiciones de contorno de Dirichlet,  $\mathbf{u}^{n+1} = 0$ .

- $\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} : \nabla \mathbf{u}^{n+1} dx = \nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 dx$
- $\int_{\Omega} \mathbf{p}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} dx = 0$

Esta parte es nula por la sustitución de la conservación de la masa en su formulación variacional.

- Vamos a aplicar varios teoremas sobre esta parte de la ecuación:

$$\int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1}) \cdot \mathbf{u}^{n+1} dx$$

Primero utilizamos el teorema de Cauchy-Schwarz:

$$\leq \left( \int_{\Omega} |\mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1})|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, el teorema de Poincaré:

$$\leq \left( \int_{\Omega} |\mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1})|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} C_{\Omega} \left( \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Por último, el teorema de Young:

$$\leq \frac{C_{\Omega}^2}{2\nu} \int_{\Omega} |\mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1})|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 dx$$

Por lo que nos queda la ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2K} \int_{\Omega} (|\mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}^n|^2 + |\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n|^2) dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 dx \\ \leq \frac{C_{\Omega}^2}{2\nu} \int_{\Omega} |\mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1})|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 dx \end{aligned}$$

Multiplicando por K y simplificando los términos  $|\nabla \mathbf{u}|^2$  y los  $\frac{1}{2}$  nos queda finalmente así el balance de energía:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 dx + \int_{\Omega} |\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n|^2 dx + K\nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 dx \\ \leq \frac{KC_{\Omega}^2}{\nu} \int_{\Omega} |\mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1})|^2 dx + \int_{\Omega} |\mathbf{u}^n|^2 dx \end{aligned}$$

A continuación, vamos a aplicar el **método de Crank-Nicolson** en nuestro problema.

Definimos  $\mathbf{t}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{t}^{n+1} + \mathbf{t}^n}{2}$  y  $\mathbf{u}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2}$ .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{K} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n+1/2} = \mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1/2}) & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1/2} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1/2} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Se va a calcular la formulación variacional de este problema aplicando el método de Crank-Nicolson. Multiplicamos la primera ecuación del sistema por la función test  $\mathbf{v}$  suficientemente regular tal que  $\mathbf{v} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , y la segunda ecuación, por  $\mathbf{q}$ , que es otra función test e integramos sobre  $\Omega$ .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{K} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \mathbf{v} dx - \nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \mathbf{v} dx \\ \quad + \int_{\Omega} \nabla p^{n+1/2} \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1/2}) \cdot \mathbf{v} dx & \text{en } \Omega \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1/2} \mathbf{q} dx = 0 & \text{en } \Omega \end{array} \right.$$

Ponemos en el segundo término de la primera ecuación  $\mathbf{u}^n$  en vez de  $\mathbf{u}^{n+1/2}$  porque si no tendríamos un término no lineal y no se podría calcular.

Cogemos el tercer término de la primera ecuación y aplicamos la fórmula de Green:

$$-\int_{\Omega} \Delta \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\partial\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \mathbf{n} \mathbf{v} \, dS$$

De esta igualdad, el último término es nulo porque hicimos la función test  $\mathbf{v}=0$ , ya que no conocemos la variación de la velocidad en el contorno.

A continuación, cogemos el cuarto término de la primera ecuación y la descomponemos:

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{p}^{n+1/2} \cdot \mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{p}^{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx$$

Por último, se tiene que descomponer el término convectivo para hacer el método de Euler:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \mathbf{v} \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \mathbf{v} \, dx$$

Sustituyendo la simplificación de estos dos términos en la primera ecuación, nos queda que la formulación variacional de este sistema es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{K} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \mathbf{v} \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx \\ \quad - \int_{\Omega} \mathbf{p}^{n+1/2} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1/2}) \mathbf{v} \, dx \quad \text{en } \Omega \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1/2} \mathbf{q} \, dx = 0 \quad \text{en } \Omega \end{array} \right.$$

A continuación, se va a calcular una estimación de energía para ver la estabilidad del sistema. Por lo que, sustituimos las funciones test por  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{n+1/2}$  y por  $\mathbf{q} = \mathbf{p}^{n+1/2}$  en la formulación variacional.

Primero reemplazamos en la primera ecuación, por lo que queda así:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{u}^{n+1/2} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \mathbf{u}^{n+1/2} \, dx + \\ & + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{p}^{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} \, dx = \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1/2}) \cdot \mathbf{u}^{n+1} \, dx \end{aligned}$$

Y la segunda ecuación queda así:

$$\int_{\Omega} p^{n+1/2} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1/2} dx = 0 \text{ en } \Omega$$

Para simplificar la primera ecuación vamos a integrar por partes alguno de sus términos y a sustituir datos iniciales.

- $\int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{u}^{n+1/2} dx = \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2} dx =$   
 $= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}^n|^2 dx$

Lo que se ha utilizado para conseguir esta descomposición es la siguiente identidad notable:  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$  y la definición  $\mathbf{u}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2}$ .

- $\int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \mathbf{u}^{n+1/2} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \mathbf{u}^{n+1/2} dx =$   
 $= \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \frac{|\mathbf{u}^{n+1/2}|^2}{2} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) \frac{|\mathbf{u}^{n+1/2}|^2}{2} dx + \int_{\partial\Omega} (n \cdot \mathbf{u}^{n+1/2}) \frac{|n|^2}{2} dx$   
 $= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) \frac{|\mathbf{u}^{n+1/2}|^2}{2} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) \frac{|\mathbf{u}^{n+1/2}|^2}{2} dx$   
 $+ \int_{\partial\Omega} (n \cdot \mathbf{u}^{n+1/2}) \frac{|n|^2}{2} dx$

Esta parte es cero, porque los primeros términos se anulan y, el segundo término, es cero porque por las condiciones de contorno de Dirichlet,  $u^{n+1/2} = 0$ .

- $\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} dx = \nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{n+1/2}|^2 dx$
- $\int_{\Omega} p^{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} dx = 0$

Esta parte es nula por la sustitución de la conservación de la masa en su formulación variacional.

- Vamos a aplicar varios teoremas sobre esta parte de la ecuación:

$$\int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1/2}) \cdot \mathbf{u}^{n+1/2} dx$$

Primero utilizamos el teorema de Cauchy-Schwarz:

$$\leq (\int_{\Omega} |\mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1/2})|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_{\Omega} |\mathbf{u}^{n+1/2}|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, el teorema de Poincaré:

$$\leq (\int_{\Omega} |\mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1/2})|^2 dx)^{\frac{1}{2}} C_{\Omega} (\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{n+1/2}|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

Por último, el teorema de Young:

$$\leq \frac{C_{\Omega}^2}{2\nu} \int_{\Omega} |\mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1/2})|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{n+1/2}|^2 dx$$

Por lo que nos queda la ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2K} \int_{\Omega} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}^n|^2 dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{n+1/2}|^2 dx \\ & \leq \frac{C_{\Omega}^2}{2\nu} \int_{\Omega} |\mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1/2})|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{n+1/2}|^2 dx \end{aligned}$$

Multiplicando por K y simplificando los términos  $|\nabla \mathbf{u}|^2$  y los  $\frac{1}{2}$  nos queda finalmente así el balance de energía:

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 dx + K\nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{n+1/2}|^2 dx \leq \frac{KC_{\Omega}^2}{\nu} \int_{\Omega} |\mathbf{f}(\mathbf{t}^{n+1/2})|^2 dx + \int_{\Omega} |\mathbf{u}^n|^2 dx$$

## Implementación del problema (FreeFem++)

Como se explicó anteriormente, la velocidad de la sangre varía según en qué etapa se encuentre el ciclo cardíaco. Para esta simulación se ha utilizado la etapa en Diástole, esta etapa en una etapa relajación. Así mismo, podría modelarse con cualquiera de las otras tres velocidades ya definidas.

### 1. ANEURISMA

#### a. ANEURISMA 2D

Modelado con FreeFem++:

```
//Definimos los bordes del aneurisma, en este caso un circulo con los cilindros a cada lado.
border aaa (t=0,10) {x=t;y=5;};
border bbb (t=0,10) {x=10+t;y=5-sqrt(25-(x-15)^2);};
border ccc (t=0,10) {x=20+t;y=5;};
border ddd (t=5,7) {x=30;y=t;};
border eee (t=0,10) {x=30-t;y=7;};
border fff (t=0,10) {x=20-t;y=7+sqrt(25-(x-15)^2);};
border ggg (t=0,10) {x=10-t;y=7;};
border hhh (t=0,2) {x=0;y=7-t;};
func bord = aaa(60) + bbb(40)+ ccc(40) + ddd (40) + eee(40) + fff(40) + ggg(40) + hhh(60);
plot(bord);

mesh Th=buildmesh(bord);
plot(Th,wait=1);

//Espacios de elementos finitos que verifiquen las condiciones inf-sup
fespace Vh(Th, P2), Qh(Th, P1); //Creados dos espacios uno para la velocidad y otro para la presión. Vimos tipos de pares que verificaban
Vh u1nmas1, u2nmas1, u1n, u2n; //Incognitas velocidad
Qh pnmas1; //Incognitas presion
Vh v1, v2;//Funciones test velocidad
Qh q; //Funcion test presión
Vh f1, f2, g1, g2, u10, u20;//Datos

real mu,k;
mu=1; k=0.01;

problem NS ([u1nmas1, u2nmas1, pnmas1], [v1, v2, q]) =
    int2d(Th) (u1nmas1*v1+u2nmas1*v2)
    + int2d(Th) (mu*k*(dx(u1nmas1)*dx(v1)+dy(u1nmas1)*dy(v1))
    + dx(u2nmas1)*dx(v2)+dy(u2nmas1)*dy(v2))
    +int2d(Th) (u1n*dx(u1nmas1)*v1+u2n*dy(u1nmas1)*v1
    +u1n*dx(u2nmas1)*v2+u2n*dy(u2nmas1)*v2)
    -int2d(Th) (k*(pnmas1*(dx(v1)+dy(v2))))
    -int2d(Th) (1e-10*pnmas1*q) //para matrices no simétricas
    -int2d(Th) (k*(f1*v1+f2*v2))
    +int2d (Th) (q*(dx(u1nmas1)+dy(u2nmas1)))
    +on(1,3,5,7, u1nmas1=g1, u2nmas1=g2) + on (8,4, u1nmas1=u10, u2nmas1=u20) + on (2,6, u1nmas1=sin(2*pi), u2nmas1=0);
    //Definimos sobre 8 y 4 la condición de la velocidad
```

```

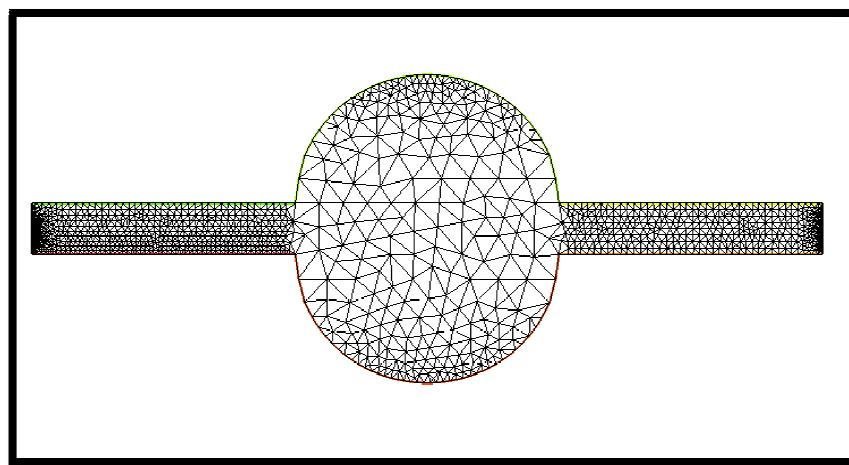
//Definición de la condición inicial:
u10=0.135*(1+sin(2*pi*0.125)); //Velocidad de entrada.
u20=0;
//Definición condición de contorno:
g1=0;
g2=0;
//Asignación a u1n y u2n:
u1n=u10;
u2n=u20;

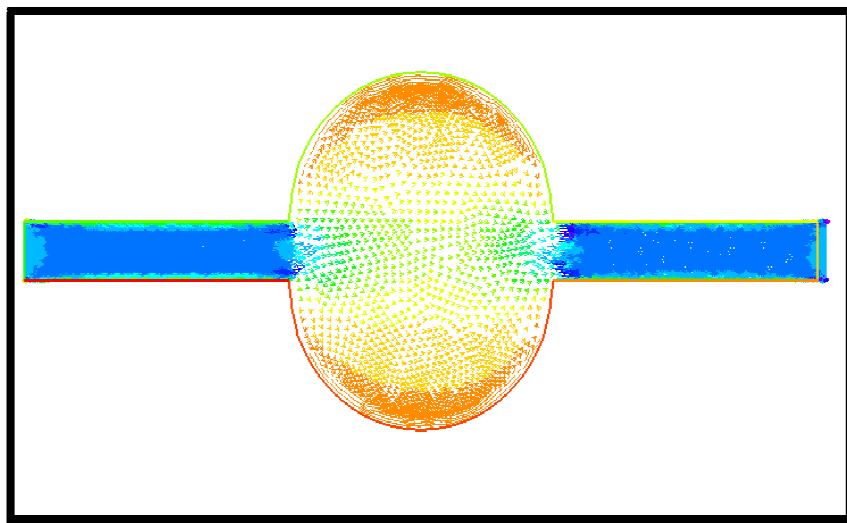
real t=0;
real T=1;

for (int m; m< T/k; m++)
{
t=t+k;
f1=0;
f2=9.8; //Como fuerza contamos con la gravedad
NS;
plot(coef=1.5,[u1nmas1, u2nmas1], wait=1);
plot(pnmas1, wait=1);
u1n=u1nmas1;
u2n=u2nmas1;
}:

```

Imágenes obtenidas:





Podemos observar que como en la vida real se produce un régimen turbulento en las paredes que propiciará posteriormente la rotura de las paredes de la arteria. En la zona central del aneurisma el fluido tiende a comportarse de forma laminar siendo la velocidad igual a la velocidad de entrada y de salida que poníamos como parámetros en la implementación.

#### b. ANEURISMA EN 3D

```

border aaa (t=0,30) {x=t;y=0;};
border bbb (t=0,2) {x=30;y=t;};
border ccc (t=0,10) {x=30-t;y=2;};
border ddd (t=0,10) {x=20-t;y=2+sqrt(25-(x-15)^2)};
border eee (t=0,10) {x=10-t;y=2;};
border fff (t=0,2) {x=0;y=2-t;};
func bord = aaa(60) + bbb(40)+ ccc(40) + ddd (40) + eee(40) + fff(60);
//plot(bord);

mesh Th2=buildmesh(bord);
plot(Th2,wait=1);

int[int] l23=[0,0,1,1];
mesh3 Th=buildlayers(Th2,coef= 1, 50 ,zbound=[0,2*pi]
,transfo=[x,y*cos(z),y*sin(z)],facemerge=1,labelmid=l23);

```

```

//Espacios de elementos finitos que verifiquen las condiciones inf-sup
fespace Vh(Th, P1); //Creados dos espacios uno para la velocidad y otro para la presion. Vimos tipos de pares que verificaban la condición de inf-sup
Vh u1nmas1, u2nmas1, u3nmas1, u1n, u2n, u3n; //Incognitas velocidad
Qh pnmas1; //Incognita presión
Vh v1, v2, v3; //Funciones test velocidad
Qh q; //Función test presión
Vh f1, f2, f3, g1, g2, g3, u10, u20, u30; //Datos

real mu, k;
mu=1; k=0.01;

problem NS ([u1nmas1, u2nmas1, u3nmas1, pnmas1], [v1, v2, v3, q]) =
int3d(Th) (u1nmas1*v1+u2nmas1*v2+u3nmas1*v3)
+ int3d(Th) (mu*k*(dx(u1nmas1)*dx(v1)+dy(u1nmas1)*dy(v1)+dz(u1nmas1)*dz(v1))
+ dx(u2nmas1)*dx(v2)+dy(u2nmas1)*dy(v2)+dz(u2nmas1)*dz(v2)
+ dx(u3nmas1)*dx(v3)+dy(u3nmas1)*dy(v3)+dz(u3nmas1)*dz(v3))
+int3d(Th) (u1n*dx(u1nmas1)*v1+u2n*dy(u1nmas1)*v1+u3n*dz(u1nmas1)*v1
+u1n*dx(u2nmas1)*v2+u2n*dy(u2nmas1)*v2+u3n*dz(u2nmas1)*v2
+u1n*dx(u3nmas1)*v3+u2n*dy(u3nmas1)*v3+u3n*dz(u3nmas1)*v3)
-int3d(Th) (k*(pnmas1*(dx(v1)+dy(v2)+dz(v3))))
-int3d(Th) (le-10*pnmas1*q) //para matrices no simétricas
-int3d(Th) (k*(f1*v1+f2*v2+f3*v3))
+int3d(Th) (q*(dx(u1nmas1)+dy(u2nmas1)+dz(u3nmas1)))
+on(1,3,5, u1nmas1=g1, u2nmas1=g2, u3nmas1=g3) + on (2,6, u1nmas1=u10, u2nmas1=u20, u3nmas1=u30) + on (4, u1nmas1=sin(2*pi), u2nmas1=0, u3nmas1=0);

```

```

//Definición de la condición inicial:
u10=0.135*(1+sin(2*pi*0.125));
u20=0;
u30=0;
//Definición condición de contorno:
g1=0;
g2=0;
g3=0;
//Asignación a u1n , u2n y u3n:
u1n=u10;
u2n=u20;
u3n=u30;

real t1=0;
real T=1;
for (int m; m< T/k; m++) {
t1=t1+k;
f1=0;
f2=0;
f3=9.8;

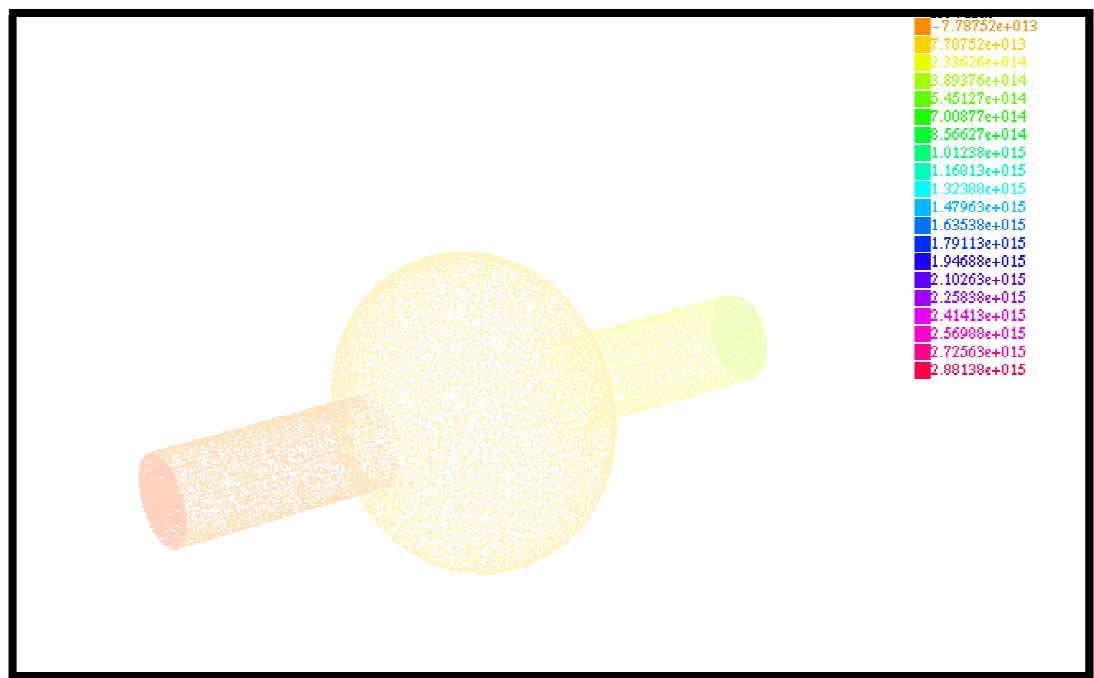
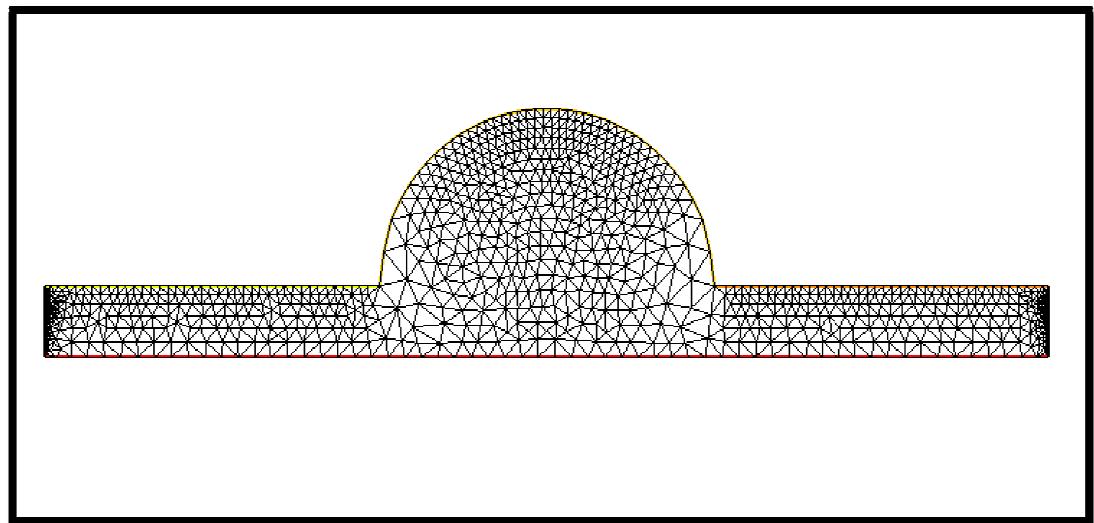
NS;

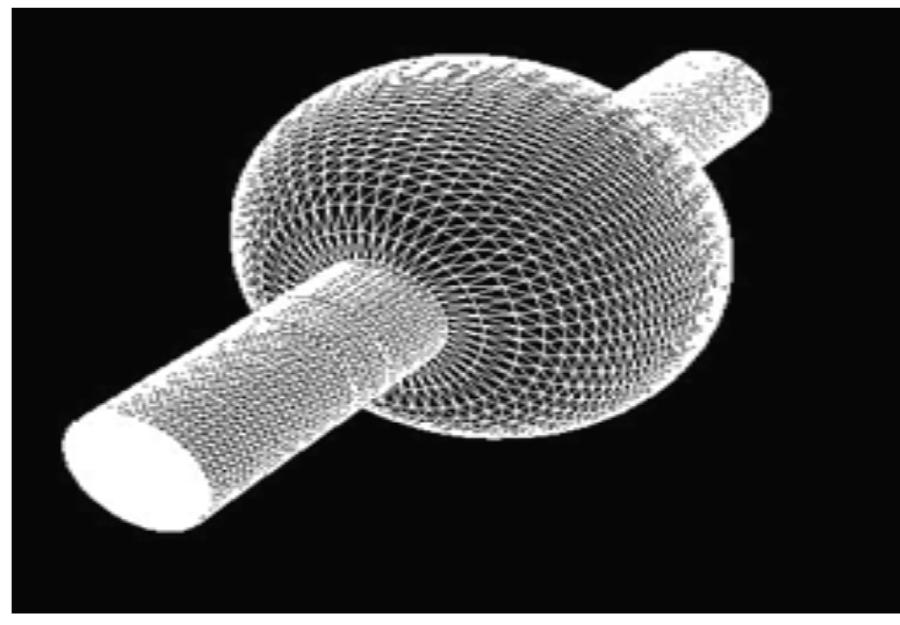
plot(coef=1.5,[u1nmas1, u2nmas1,u3nmas1], wait=1);
plot(pnmas1, wait=1);

u1n=u1nmas1;
u2n=u2nmas1;
u3n=u3nmas1;
}:

```

Imágenes obtenidas:





En este caso, no podemos simular el flujo del fluido en 3D puesto que nuestros ordenadores no tenían la capacidad suficiente como para poder albergar la gran cantidad de ecuaciones que resultan al modelar el aneurisma en 3D, así como cualquier otro dominio.

## 2. ANEURISMA CON STENT

### a. ANEURISMA CON STENT 2D

```
border aaa (t=0,30) {x=t;y=2;};
border bbb (t=0,5) {x=30;y=2+t;};
border ccc (t=0,30) {x=30-t;y=7;};
border ddd (t=0,5) {x=0;y=7-t;};
func bord = aaa(60) + bbb(40)+ ccc(40) + ddd (60);

//plot(bord);

mesh Th=buildmesh(bord);
plot(Th,wait=1);
```

```

//Espacios de elementos finitos que verifiquen las condiciones inf-sup
fespace Vh(Th, P2), Qh(Th, P1); //Creados dos espacios uno para la velocidad y otro para la presión. Vimos tipos de pares que verificaban
Vh u1nmas1, u2nmas1, u1n, u2n; //Incognitas velocidad
Qh pnmas1; //Incognitas presión
Vh v1, v2; //Funciones test velocidad
Qh q; //Funcion test presión
Vh f1, f2, g1, g2, u10, u20; //Datos

real mu,k;
mu=1; k=0.01;

problem NS ([u1nmas1, u2nmas1, pnmas1], [v1, v2, q]) =
    int2d(Th) (u1nmas1*v1+u2nmas1*v2)
    + int2d(Th) (mu*k*(dx(u1nmas1)*dx(v1)+dy(u1nmas1)*dy(v1))
    + dx(u2nmas1)*dx(v2)+dy(u2nmas1)*dy(v2))
    + int2d(Th) (u1n*dx(u1nmas1)*v1+u2n*dy(u1nmas1)*v1
    | | | | +u1n*dx(u2nmas1)*v2+u2n*dy(u2nmas1)*v2)
    - int2d(Th) (k*(pnmas1*(dx(v1)+dy(v2))))
    - int2d(Th) (1e-10*pnmas1*q) //para matrices no simétricas
    - int2d(Th) (k*(f1*v1+f2*v2))
    + int2d (Th) (q*(dx(u1nmas1)+dy(u2nmas1)))
    +on(1,3, u1nmas1=g1, u2nmas1=g2) + on (2,4, u1nmas1=u10, u2nmas1=u20);

```

```

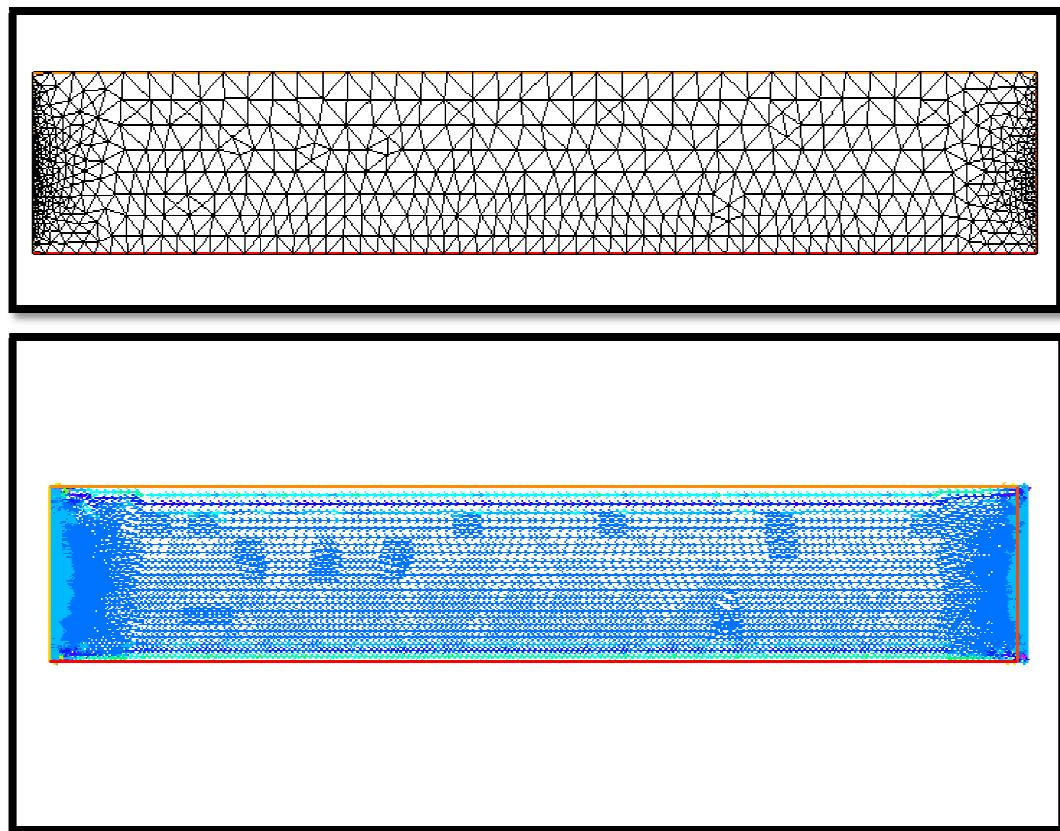
//Definición de la condición inicial:
u10=0.135*(1+sin(2*pi*0.125));
u20=0;
//Definición condición de contorno;
g1=0;
g2=0;
//Asignación a u1n y u2n:
u1n=u10;
u2n=u20;

real t=0;
real T=1;

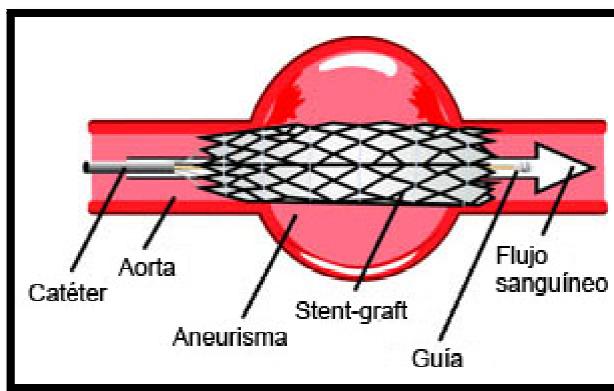
for (int m; m< T/k; m++)
{
    t=t+k;
    f1=0;
    f2=9.8;
    NS;
    plot(coef=1.5,[u1nmas1, u2nmas1], wait=1);
    plot(pnmas1, wait=1);
    u1n=u1nmas1;
    u2n=u2nmas1;
}

```

Imágenes obtenidas:



Al modelar cómo sería el comportamiento al colocar un stent obtenemos de forma general un régimen laminar por lo que el problema desaparecería y el aneurisma quedaría reducido en el tiempo.



## b. ANEURISMA CON STENT 3D

```

border aaa (t=0,30) {x=t;y=0;};
border bbb (t=0,2) {x=30;y=t;};
border ccc (t=0,30) {x=30-t;y=2;};
border ddd (t=0,2) {x=0;y=2-t;};
func bord = aaa(60) + bbb(40)+ ccc(40) + ddd (60);
//plot(bord);

mesh Th2=buildmesh(bord);
plot(Th2,wait=1);

int[int] l23=[0,0,1,1];
mesh3 Th=buildlayers(Th2,coef= 1, 50 ,zbound=[0,2*pi]
,transfo=[x,y*cos(z),y*sin(z)],facemerge=1,labelmid=l23);

macro Grad(u) [dx(u),dy(u),dz(u)] // 
fespace Vh(Th,P1); Vh u,v;
solve Poisson(u,v) = int3d(Th)( Grad(u)'*Grad(v) ) - int3d(Th)( v ) + on(1,u=1);
plot(u,wait=1,nbiso=20,value=1);
medit("u",Th,u,wait=1);

```

```

//Espacios de elementos finitos que verifiquen las condiciones inf-sup
fespace Vh(Th, P1b), Qh(Th, P1); //Creados dos espacios uno para la velocidad y otro para la presión. Vimos tipos de pares que verificaban la condición inf-sup
Vh u1nmas1, u2nmas1, u3nmas1, u1n, u2n, u3n; //Incógnitas velocidad
Qh pnmas1; //Incógnitas presión
Vh v1, v2, v3;//Funciones test velocidad
Qh q; //Función test presión
Vh f1, f2, f3, g1, g2, g3, u10, u20, u30;//Datos

real mu,k;
mu=1; k=0.01;

problem NS ([u1nmas1, u2nmas1, u3nmas1, pnmas1], [v1, v2, v3, q]) =
int3d(Th) (u1nmas1*v1+u2nmas1*v2+u3nmas1*v3)
+ int3d(Th) (mu*k*(dx(u1nmas1)*dx(v1)+dy(u1nmas1)*dy(v1)+dz(u1nmas1)*dz(v1))
+dx(u2nmas1)*dx(v2)+dy(u2nmas1)*dy(v2)+dz(u2nmas1)*dz(v2)
+dx(u3nmas1)*dx(v3)+dy(u3nmas1)*dy(v3)+dz(u3nmas1)*dz(v3))
+int3d(Th) (u1n*dx(u1nmas1)*v1+u2n*dy(u1nmas1)*v1+u3n*dz(u1nmas1)*v1
+u1n*dx(u2nmas1)*v2+u2n*dy(u2nmas1)*v2+u3n*dz(u2nmas1)*v2
+u1n*dx(u3nmas1)*v3+u2n*dy(u3nmas1)*v3+u3n*dz(u3nmas1)*v3)
-int3d(Th) (k*(pnmas1*(dx(v1)+dy(v2)+dz(v3))))
-int3d(Th) (1e-10*pnmas1*q) //para matrices no simétricas
-int3d(Th) (k*(f1*v1+f2*v2+f3*v3))
+int3d (Th) (q*(dx(u1nmas1)+dy(u2nmas1)+dz(u3nmas1)))
+on(1,3, u1nmas1=g1, u2nmas1=g2, u3nmas1=g3) + on (2,4, u1nmas1=u10, u2nmas1=u20, u3nmas1=u30);

```

```

//Definición de la condición inicial:
u10=0.135*(1+sin(2*pi*0.125));
u20=0;
u30=0;
//Definición condición de contorno:
g1=0;
g2=0;
g3=0;
//Asignación a u1n , u2n y u3n:
u1n=u10;
u2n=u20;
u3n=u30;

real t1=0;
real T=1;
for (int m; m< T/k; m++) {
t1=t1+k;
f1=0;
f2=0;
f3=9.8;

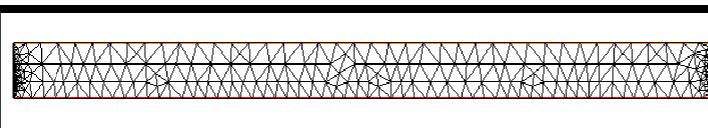
NS:

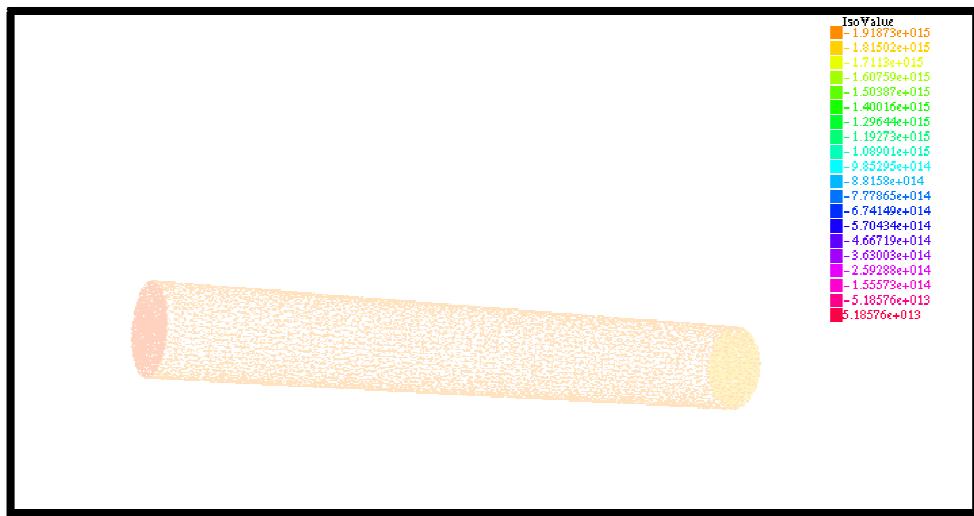
plot(coef=1.5,[u1nmas1, u2nmas1,u3nmas1], wait=1);
plot(pnmas1, wait=1);

u1n=u1nmas1;
u2n=u2nmas1;
u3n=u3nmas1;
}

```

Imágenes obtenidas:





Al igual que en el caso anterior, en 3D únicamente podemos representar el contorno de nuestro problema. Aunque hayamos logrado hacer el código de manera correcta, nuestros ordenadores no tienen capacidad para ello.

## Referencias

[http://www.texasheart.org/HIC/Topics\\_Esp/Proced/asurg\\_span.cfm](http://www.texasheart.org/HIC/Topics_Esp/Proced/asurg_span.cfm)

<http://www.elmundo.es/elmundosalud/especiales/2007/11/tecnologia/cardio/stent.html>

<http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>