Introdução aos espaços de Banach

Aldo Bazán

Alex Farah Pereira

Cecília de Souza Fernandez

34º Colóquio Brasileiro de Matemática

impa

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Introdução aos espaços de Banach

Introdução aos espaços de Banach
Primeira impressão, setembro de 2023

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

ISBN 978-85-244-0543-3 (print)
ISBN 978-85-244-0544-0 (ebook)
MSC (2020) Primary: 46B25, Secondary: 46B45, 46A30, 46C05

Coordenação Geral Carolina Araujo

Produção Books in Bytes **Capa** IMPA

Realização da Editora do IMPA
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
www.impa.br
editora@impa.br

B362i Bazán, Aldo
Introdução aos espaços de Banach / Aldo Bazán, Alex Farah Pereira e Cecília de Souza Fernandez. - 1.ed. -- Rio de Janeiro: IMPA, 2023.
34 Colóquio Brasileiro de Matemática; v. 3, 125p.: il.; 23cm
ISBN 978-85-244-0543-3 (print)
ISBN 978-85-244-0544-0 (ebook)
1. Espaços de Banach. 2. Espaços de Sequências. 3. Espaços de Lebesgue. I. Bazán, Aldo; Pereira, Alex Farah; Fernandez, Cecília de Souza. II. Série. III. Título
UDC: 517.9
Carolina Celano Lima/CRB-7: 2438

Sumário

Aos meus pais, Amilcar e Yolanda
À minha esposa, Danielly
(AABP)

Aos meus pais, Angela e Celio
À minha irmã, Monica
À minha esposa, Renata
(AFP)

À minha filha, Ana Cecília
(CSFZ)

Prefácio

O presente livro foi produzido para ser utilizado como texto do curso introdutório intitulado ”Introdução aos Espaços de Banach”, a ser ministrado no 34º Colóquio Brasileiro de Matemática.

Os pré-requisitos para a leitura deste livro são as disciplinas de Álgebra Linear e de Análise Real, já que se supõe que o leitor tenha familiaridade com os conceitos de espaço vetorial e de transformação linear e, também, com os conceitos de sequências convergentes, de Cauchy de números reais e de certas noções da topologia da reta, como conjuntos abertos e conjuntos fechados.

Cabe mencionar que o termo espaços de Banach foi introduzido pelo matemático francês René Maurice Fréchet (1878–1973), primeiro matemático a definir espaços métricos. Fréchet introduziu o termo espaços de Banach pelo reconhecimento do trabalho do matemático polonês Stefan Banach (1892–1945), que em sua tese de doutorado, publicada em 1922, formalizou o conceito de *espaços vetoriais normados completos*, que são os chamados espaços de Banach, estabelecendo a base da Análise Funcional. São vários os resultados importantes obtidos por Banach, como o Teorema da Aplicação Aberta, também conhecido como o Teorema de Banach–Schauder, o Teorema do Gráfico Fechado, o Teorema de Banach–Steinhaus, o Teorema do ponto fixo de Banach, o Teorema de Hahn–Banach, entre outros.

Este texto está dividido em seis capítulos e, por ser introdutório à Teoria dos Espaços de Banach, apresenta alguns dos resultados acima esperando que o leitor se sinta motivado a debruçar-se sobre outros resultados clássicos da Análise Funcional. Por isso, o Capítulo 1 trata de conceitos básicos de espaços normados e de noções topológicas dos espaços normados. Assim, definimos espaços de Banach e apresentamos vários exemplos de tais espaços. Finalizamos o capítulo apresentando as aplicações lineares entre espaços normados. O Capítulo 2 trata de dois teoremas clássicos da Análise Funcional no contexto dos espaços de Banach: o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado. Vamos mostrar que esses dois resultados são equivalentes para aplicações lineares mas, se generalizarmos as funções considerando aplicações bilineares, tais resultados deixam de ser equivalentes. Mais precisamente, o Teorema do Gráfico Fechado é verdadeiro para aplicações bilineares no contexto dos espaços de Banach, enquanto que o Teorema da Aplicação Aberta não é válido para aplicações bilineares, mesmo considerando-se espaços de dimensão finita.

O Capítulo 3 trata dos espaços de Hilbert, que formam uma classe de espaços de Banach. Definimos o conceito de produto interno e de certas noções geométricas, como a noção de ortogonalidade. Apresentamos o Teorema de Representação de Riesz–Fréchet, que se refere à representação de funcionais lineares contínuos em espaços de Hilbert, e o Teorema de Lax–Milgram, que para espaços de Hilbert garante a existência e a unicidade da solução de certas equações diferenciais. O Capítulo 4 apresenta os espaços de Lebesgue com expoente variável que, como veremos, são espaços de Banach. Finalizamos o capítulo apresentando o espaço dual de tais espaços de Lebesgue. O Capítulo 5 trata da função maximal de Hardy–Littlewood em espaços de Lebesgue com expoente fixo, em que faremos algumas observações sobre esta função maximal em espaços de Lebesgue com expoentes variáveis. O Capítulo 6 apresenta alguns exercícios sobre os capítulos anteriores.

As notações usadas neste livro são usuais e não devem gerar dificuldades ao leitor. Mencionamos apenas que $A \setminus B$ denota a diferença do conjunto A pelo conjunto B e $\mathbb{N}^*$ denota o conjunto de todos os números naturais $1, 2, 3, \ldots$.

Terminamos agradecendo ao Comitê Científico do 34º Colóquio Brasileiro de Matemática pela oportunidade de apresentar o curso “Introdução aos Espaços de Banach”. Comentários sobre o livro são bem-vindos e podem ser enviados para um dos autores.

Aldo Bazan,
Alex Farah,
Cecília Fernandez.
Abril de 2023.

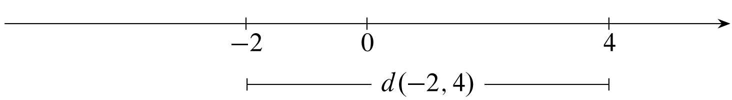
1 Espaços de Banach

1.1 Espaços métricos: definição e exemplos

Em uma primeira disciplina de Cálculo, vemos que, no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, a distância entre dois números a e b em $\mathbb{R}$, denotada por $d(a,b)$, é dada por

$$d(a,b) = |a-b|.$$

Por exemplo, $d(-2,4) = 6$.



A ideia de "estar próximo" é muito importante em Matemática. Se M é um conjunto não vazio e se $a, b \in M$, dizer que "a está próximo de b" significa afirmar que "a distância entre a e b é pequena". A seguir, vamos definir a noção de distância entre dois elementos de um conjunto não vazio M qualquer.

Definição 1.1. Seja M um conjunto não vazio. Uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que a cada par $(a,b) \in M \times M$ associa o número real $d(a,b)$, é dita uma *métrica* em M se, para quaisquer a, b e $c \in M$, são válidas as seguintes condições:

(d1) $d(a,b) \geqslant 0$;

(d2) $d(a,b) = 0$ se, e somente se, $a = b$;

(d3) $d(a,b) = d(b,a)$;

(d4) $d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)$.

Um *espaço métrico* é um par (M,d), em que M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M. Frequentemente designamos o espaço métrico (M,d) apenas por M, deixando a métrica subentendida. A seguir, apresentaremos alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1.1. $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico, sendo

$$d(a,b) = |a-b|; \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

De fato, as condições (d1) – (d4) resultam imediatamente das propriedades do valor absoluto de números reais. A métrica d é chamada de *métrica usual em* $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.2. Seja M um conjunto não vazio. A função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(a,b) = \begin{cases} 1 \text{ se } a \neq b \\ 0 \text{ se } a = b, \end{cases}$$

em que $(a,b) \in M \times M$, é uma métrica em M. De fato, as condições (d1), (d2) e (d3) são facilmente verificadas. Para verificar (d4), tomemos a, b e $c \in M$. Vamos considerar os seguintes casos:

Caso 1: $a \neq b$ e $b \neq c$.

Como $d(a,b) = d(c,b)$ e $d(c,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)$, segue que $d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)$

Caso 2: $a = b$.

Como $d(a,c) \geqslant 0$ e $d(c,b) \geqslant 0$, segue que $d(a,b) = 0 \leqslant d(a,c) + d(c,b)$.

Caso 3: $b = c$.

Se $b = c$, então $d(a,c) = d(a,b)$ e $d(c,b) = 0$. Assim, $d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$.

A métrica d é chamada de *métrica discreta em* M, que será importante para darmos contraexemplos.

Exemplo 1.3. Sejam (M, d_1) e (N, d_2) espaços métricos. Podemos definir em $M \times N$ uma métrica da seguinte maneira:

$$d((a,b),(c,d)) = \max\{d_1(a,c), d_2(b,d)\},$$

sendo $(a,b),(c,d) \in M \times N$. Deixamos como exercício para o leitor a verificação de que d é uma métrica em $M \times N$, usual no produto cartesiano $M \times N$ e sempre usada salvo menção ao contrário.

Exemplo 1.4. Podemos generalizar o exemplo acima para um produto cartesiano de n ($n \in \mathbb{N}^*$) espaços métricos.

Dados $(M_1, d_1), (M_2, d_2), \ldots, (M_n, d_n)$ espaços métricos, podemos definir uma métrica d em $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ da seguinte maneira:

$$d(x, y) = \max\{d_i\,(x_i, y_i)\,;\, 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

em que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in M$. A métrica d é a *métrica usual no produto cartesiano* M. Em particular, $(\mathbb{R}^n, d)$ é um espaço métrico com

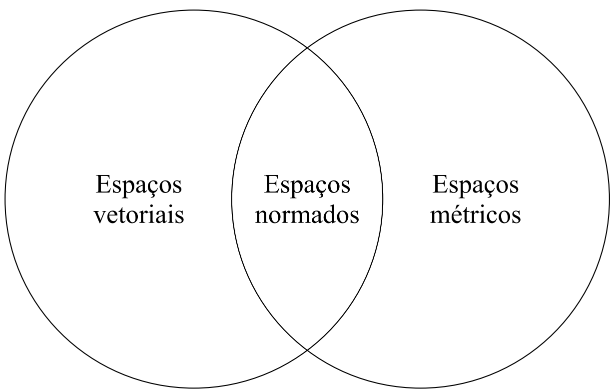
$$d(x, y) = \max\{|x_i - y_i|\,;\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

sendo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$.

1.2 Espaços normados e convergência

Nesta seção, estudaremos os espaços normados, isto é, uma classe especial de espaços métricos.

Os espaços normados possuem uma estrutura algébrica que nos permitirá realizar operações de adição e multiplicação por um escalar. De fato, os espaços normados são espaços métricos munidos de uma estrutura vetorial.



Para os leitores interessados em ler sobre espaços vetoriais indicamos o livro *Introdução à Álgebra Linear*, (Hefez e Fernandez 2022).

No que se segue, $\mathbb{K}$ denota o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Além disso, os espaços vetoriais mencionados são todos considerados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$.

Definição 1.2. Seja E um espaço vetorial. Uma função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in E$ associa o número real $\|x\|$, é dita uma *norma* em E se, para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, são válidas as seguintes condições:

(n_1) $\|x\| = 0$ implica $x = 0$;

(n_2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

(n_3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Um *espaço vetorial normado* ou simplesmente um *espaço normado* é um par $(E, \|\cdot\|)$, sendo E um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ uma norma em E. Frequentemente designamos o espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ apenas por E, deixando a norma subentendida.

Notemos que $\|0\| = 0$, bastando tomar, em (n_2) , $\lambda = 0$. Tomando $\lambda = -1$ em (n_2), vemos que $\|x\| = \|-x\|$ para todo $x \in E$. Além disso, tomando $y = -x$ em (n_3), temos $0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leqslant \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|$, ou seja, $\|x\| \geqslant 0$ para todo $x \in E$.

Uma consequência bastante útil dos axiomas (n_1) , (n_2) e (n_3) é que, para quaisquer $x, y \in E$, temos
$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x - y\|.$$

De fato, sejam $x, y \in E$. Por (n_3), temos
$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|,$$
o que implica que
$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|.$$
Trocando os papéis de x e y na desigualdade que acabamos de obter, temos
$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|y - x\| = \|x - y\|.$$
Consequentemente
$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| = \max\{\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\} \leqslant \|x - y\|.$$

A seguir, vejamos alguns exemplos de espaços normados.

Exemplo 1.5. O par $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, em que $|\cdot|$ denota o valor absoluto em $\mathbb{R}$, é um espaço normado. Com efeito, a condição (n_1) segue imediatamente da definição de $|\cdot|$. Para verificar a condição (n_2), basta observar que $|\cdot|$ é uma função não negativa e que
$$|\lambda x|^2 = (\lambda x)^2 = \lambda^2 x^2 = |\lambda|^2 |x|^2 = (|\lambda| \cdot |x|)^2$$
para quaisquer $\lambda, x \in \mathbb{R}$. Passemos à verificação de (n_3). Tomando $x, y \in \mathbb{R}$, temos
$$|x| = \max\{-x, x\} \quad \text{e} \quad |y| = \max\{-y, y\},$$
o que nos leva a concluir que $x + y \leqslant |x| + |y|$ e $-x - y \leqslant |x| + |y|$. Logo
$$|x + y| = \max\{-x - y, x + y\} \leqslant |x| + |y|.$$

Exemplo 1.6. O par $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, em que $|\cdot|$ denota o módulo usual em $\mathbb{C}$, é um espaço normado. Com efeito, temos que $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, onde $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Daí $|z| = 0$ implica que $\sqrt{x^2+y^2} = 0$, ou seja, $x^2 + y^2 = 0$. Daí $x = y = 0$, mostrando a condição (n_1). Notemos que, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, temos $|\lambda z|^2 = (\lambda z)\cdot\overline{(\lambda z)} = (\lambda\overline{\lambda})\cdot(z\overline{z}) = |\lambda|^2|z|^2 = (|\lambda|\cdot|z|)^2$ (em que a barra denota a conjugação), sendo $|\lambda z| = |\lambda|\cdot|z|$. Assim vale a condição (n_2). Finalmente a condição (n_3) vem das relações

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w})\\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + w\overline{w}\\
&= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2\\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2,
\end{aligned}$$

válidas para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, em que utilizamos propriedades básicas dos números complexos (vide Fernandez e Bernardes Jr. (2019)).

Exemplo 1.7. Os pares $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ e $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, onde para cada vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_1 = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k| \quad \text{e} \quad \|x\|_2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

são espaços normados. As aplicações $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são normas em $\mathbb{R}^n$. Com efeito:
(a) $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$: A propriedade (n_1) é satisfeita, pois se $\|x\| = 0$, então $|x_k| = 0$ para todo $k \in \{1, \ldots n\}$, implicando que $x_k = 0$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ e, consequentemente, $x = 0$. A propriedade (n_2) também é satisfeita, pois

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda|^2 \, |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(|\lambda|^2 \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|x\|
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Para verificarmos a propriedade (n_3), recordemos a desigualdade de Cauchy–Schwarz (ver Hefez e Fernandez (2022, p. 174))

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|y_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k)^2} = \|x\|\|y\|,$$

válida para quaisquer $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Vamos mostrar que $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} |x_k\|y_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Daí $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ e concluímos que $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$.
(b) $\|\cdot\|_1$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$: Se $\|x\|_1 = 0$, temos que $|x_k| = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Assim $x_k = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, ou seja, $x = 0$. Logo a condição (n_1) está verificada. Notemos que se $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\|\lambda x\|_1 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda x_k| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda| \cdot |x_k| = |\lambda| \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| = |\lambda| \cdot \|x\|_1$$

e

$$\|x + y\|_1 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k + y_k| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1,$$

seguindo as condições (n_2) e (n_3). Assim, $\|\cdot\|_1$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$.
(c) Para concluir que $\|\cdot\|_2$ é uma norma, basta argumentar como no item (b), o que deixamos a cargo do leitor.

No Exemplo 1.7, vimos que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ é um espaço normado. Podemos definir a função $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

em que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Temos que d é uma métrica em $\mathbb{R}^n$. De fato, as condições (d1), (d2) e (d3) são facilmente verificadas. Para verificarmos (d4), basta notar que, para quaisquer x e y em $\mathbb{R}^n$, temos

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

e, assim, para quaisquer a, b e c em $\mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned}d(a, b) &= \|a - b\| = \|(a - c) + (c - b)\| \\ &\leqslant \|a - c\| + \|c - b\| = d(a, b) + d(b, c).\end{aligned}$$

A métrica d é chamada de *métrica euclidiana* em $\mathbb{R}^n$ e será denotada por d_e. Ela provém da fórmula para a distância entre dois pontos no plano (em coordenadas cartesianas), deduzida pelo Teorema de Pitágoras (Figura 1.1).

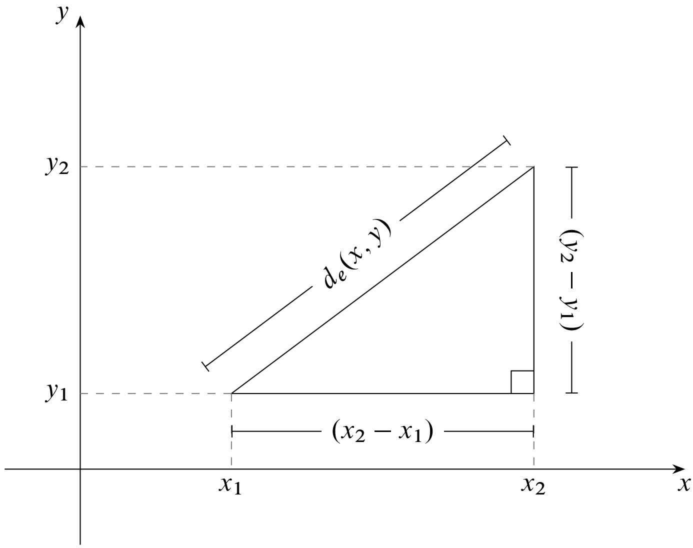


Figura 1.1

Em Geometria Analítica, d_e é conhecida como a *distância euclidiana* e $(\mathbb{R}^n, d_e)$ como o espaço euclideano n-dimensional.

Vimos que a norma euclidiana $\|\cdot\|$ e a métrica euclidiana d_e estão relacionadas entre si. Mais precisamente,

$$d_e(x, y) = \|x - y\|; \ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Os Exemplos 1.4 e 1.7 mostram que a norma $\|\cdot\|_1$ e a métrica usual d em $\mathbb{R}^n$ estão relacionadas da mesma forma, ou seja,

$$d(x, y) = \|x - y\|_1; x, y \in \mathbb{R}^n.$$

A relação entre d_e e $\|\cdot\|$ e a relação entre d e $\|\cdot\|_1$ não são uma coincidência. O próximo resultado traz a informação de que todo espaço normado é um espaço métrico.

Proposição 1.1. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado. A função $d : E \times E \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in E),$$

é uma métrica em E. A métrica d é chamada de métrica proveniente da norma $\|\cdot\|$.

Demonstração. Para mostrar (d1), (d2), (d3) e (d4), basta utilizar o fato de $\|\cdot\|$ ser uma norma em E. □

Pela Proposição 1.1, todo espaço normado é um espaço métrico. Uma pergunta natural é se toda métrica em um espaço vetorial E provém de uma norma. O próximo resultado nos diz que isso nem sempre é verdade.

Proposição 1.2. *Seja E um espaço vetorial. Uma métrica d em E é proveniente de uma norma em E se, e somente se, para quaisquer $x, y, a \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se $d(x+a, y+a) = d(x, y)$ e $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.*

Demonstração. Suponhamos que d é uma métrica em E proveniente de uma norma em E, ou seja, para quaisquer x e y em E, temos

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

sendo $\|\cdot\|$ uma norma em E. Ora

$$d(x+a, y+a) = \|(x+a) - (y+a)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

e

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - y)\| = |\lambda| \|x - y\| = |\lambda| d(x, y),$$

para quaisquer $x, y, a \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Reciprocamente, suponhamos que d é uma métrica em E que satisfaz as condições

$$d(x+a, y+a) = d(x, y) \quad \text{e} \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$$

para quaisquer $x, y, a \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Vamos mostrar que existe uma norma $\|\cdot\|$ em E tal que d provém de $\|\cdot\|$. Para isso, definamos

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| = d(x, 0), \end{aligned}$$

e vejamos que (n_1), (n_2) e (n_3) são satisfeitas.
Verificação de (n_1): Se $\|x\| = 0$, então $d(x, 0) = 0$. Como d é uma métrica, $x = 0$.
Verificação de (n_2): Tomemos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$. Temos que $\|\lambda x\| = d(\lambda x, 0) = d(\lambda x, \lambda 0) = |\lambda| d(x, 0) = |\lambda| ||x||$.
Verificação de (n_3): Tomemos x e y em E. Como d é uma métrica, $d(0, -y) = d(-y, 0)$ e $d(x, -y) \leqslant d(x, 0) + d(0, -y)$. Assim $\|x + y\| = d(x + y, 0) = d(x + y, -y + y) = d(x, -y) \leqslant d(x, 0) + d(-y, 0) = \|x\| + \|-y\|$. Como $\|-y\| = \|y\|$ por (n_2), segue que

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Como (n_1), (n_2) e (n_3) são satisfeitas, $(E. \|\cdot\|)$ é um espaço normado. Além disso, d provém de $\|\cdot\|$, pois, para quaisquer x e y em E, temos

$$d(x, y) = d(x - y, y - y) = d(x - y, 0) = \|x - y\|.$$

□

Com a Proposição 1.2, não é difícil obter um espaço métrico (E, d) que não seja um espaço normado. Por exemplo, consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ com a sua métrica discreta d, que não provém de uma norma em $\mathbb{R}^2$. De fato, se d fosse proveniente de uma norma em $\mathbb{R}^2$, então $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ para quaisquer x, y em $\mathbb{R}^2$ e λ em $\mathbb{R}$. Mas, como d é a métrica discreta, tomando $x = (1, 0)$, $y = (0, 0)$ e $\lambda = \frac{1}{2}$, temos

$$d\left(\frac{1}{2}(1,0), \frac{1}{2}(0,0)\right) = 1 \neq \frac{1}{2} = \left|\frac{1}{2}\right| d((1,0),(0,0)).$$

Em uma primeira disciplina de Análise Real, vimos a noção de sequência convergente e a noção de sequência de Cauchy. A seguir, vamos generalizar esses conceitos para o contexto dos espaços normados. Para os leitores interessados em ler sobre essas noções, no contexto de conjunto dos números reais, indicamos Lima (2019).

Definição 1.3. Seja E um espaço normado. Uma *sequência* em E é uma aplicação $x\colon \mathbb{N}^* \to E$ que faz corresponder a cada $n \in \mathbb{N}^*$ um ponto $x_n \in E$. A sequência pode ser denotada por $(x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou simplesmente (x_n). A imagem de $n \in \mathbb{N}^*$ pela aplicação x é chamada de *n-ésimo termo* da sequência e será denotada por x_n. Por outro lado, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, $\{x_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ ou $x(\mathbb{N}^*)$ denotam o conjunto dos termos ou conjunto imagem da sequência.

Exemplo 1.8. Consideremos $x\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, em que $x_n = 1 + (-1)^n$. Temos que $(x_n) = (0, 2, 0, 2, \ldots)$ e o conjunto de seus termos é $x(\mathbb{N}^*) = \{0, 2\}$.

Definição 1.4. Uma *subsequência* de uma sequência (x_n) em um espaço normado E é a restrição da função $x\colon \mathbb{N}^* \to E$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots n_k < \ldots\}$ de $\mathbb{N}^*$. Denotamos a subsequência $x|_{\mathbb{N}'}$ por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$, $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Notemos que a notação $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ nos mostra uma função de domínio $\mathbb{N}^*$ que, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, faz corresponder um x_{n_k}, ou seja, uma subsequência é efetivamente uma sequência.

Exemplo 1.9. Consideremos a sequência $(x_n) = (1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots)$. Temos $(x_{n_k}) = (1, 1/3, 1/5, \ldots 1/(2k-1), \ldots)$ como uma subsequência de (x_n), em que $n \in \mathbb{N}' = \{n \in \mathbb{N}^* : n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}^*\}$.

Definição 1.5. Seja (x_n) uma sequência em um espaço normado E. Dizemos que (x_n) é convergente se existir $a \in E$ com a seguinte propriedade: para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$||x_n - a|| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n \geqslant n_0.$$

Em virtude da próxima proposição, dizemos que $a \in E$ é o *limite da sequência* (x_n) e escrevemos

$$a = \lim x_n \text{ ou } x_n \to a.$$

Proposição 1.3. *Seja (x_n) uma sequência convergente em um espaço normado E. Então (x_n) possui um único limite.*

Demonstração. Suponhamos que a e b em E sejam limites da sequência (x_n). Seja $\varepsilon > 0$. Então existem $n_0 \in \mathbb{N}^*$ e $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tais que

$$||x_n - a|| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad n \geqslant n_0$$

e

$$||x_n - b|| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad n \geqslant n_1.$$

Daí, tomando $N = \max\{n_0, n_1\}$, resulta que

$$||a - b|| \leqslant ||x_N - a|| + ||x_N - b|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $||a - b|| = 0$, ou seja $a = b$. □

Proposição 1.4. *Seja (x_n) uma sequência em um espaço normado E. Se* $\lim x_n = a$, *então toda subsequência de (x_n) converge para a.*

Demonstração. Com efeito, seja $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \dots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}^*$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$ se $n > n_0$. Como $\mathbb{N}'$ é ilimitado, existe $k_0 \in \mathbb{N}'$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Logo se $k > k_0$, então $n_k > n_{k_0} > n_0$, o que implica que $||x_{n_k} - a|| < \varepsilon$. Portanto $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a = \lim x_n$. □

Proposição 1.5. ***(Operações com limites).*** *Seja E um espaço normado. Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$, *então* $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$ *e* $\lim(kx_n) = ka$, *sendo $k \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tais que $||x_n - a|| < \varepsilon/2$ se $n > n_1$ e $||y_n - b|| < \varepsilon/2$ se $n > n_2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Notemos que se $n > n_0$, então

$$\begin{aligned} ||(x_n + y_n) - (a + b)|| &= ||x_n - a + y_n - b|| \\ &\leqslant ||x_n - a|| + ||y_n - b|| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $\lim(x_n + y_n) = a + b$. De modo análogo provamos que $\lim(x_n - y_n) = a - b$. Para provarmos que $\lim(kx_n) = ka$,em que $k \in \mathbb{K}$, notemos que se $k = 0$, então, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $kx_n = 0$ e a sequência (kx_n) converge trivialmente para $0 = ka$. Suponhamos que $k \neq 0$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $||x_n - a|| < \varepsilon/|k|$ se $n > n_0$. Consequentemente $||kx_0 - ka|| = |k|||x_n - a|| < \varepsilon$ se $n > n_0$. Assim $\lim(kx_n) = ka$. □

Definição 1.6. Uma sequência (x_n) em um espaço normado E é dita uma *sequência de Cauchy* quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sempre que $n, m > n_0$.

O próximo resultado mostra que toda sequência em um espaço normado E convergente é de Cauchy, mas nem toda sequência de Cauchy em E é convergente. Ser uma sequência de Cauchy é uma condição dos termos da sequência. Ser convergente, como visto na Definição 1.5, depende da existência de um elemento em E cujos termos da sequência se aproximem cada vez mais.

(a) Sequência de Cauchy (b) Sequência convergente

Figura 1.2: Sequências de Cauchy e convergentes

No que segue, E denota um espaço normado.

Proposição 1.6. *Seja (x_n) uma sequência convergente em E. Então (x_n) é de Cauchy.*

Demonstração. Pela Definição 1.5, existe $a \in E$ tal que $x_n \to a$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n - a|| < \varepsilon$ se $n > n_0$. Tomando $m, n > n_0$, temos

$$||x_n - x_m|| \leqslant ||x_n - a|| + ||x_m - a|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Portanto, (x_n) é de Cauchy. $\square$

Para vermos que nem toda sequência de Cauchy em E é convergente, considere

$$X = \{r \in \mathbb{Q};\ r^2 < 2\}.$$

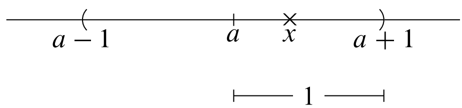
Pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ (ver Lima (2019)), podemos construir uma sequência (r_n) em X tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(2 - r_n^2) < \frac{1}{n}$. Assim, $r_n^2 \to 2$ e, consequentemente, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|r_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Pela demonstração da proposição anterior, é fácil ver que (r_n) é de Cauchy, mas (r_n) não pode ser dita convergente em $\mathbb{Q}$, pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Os espaços normados que têm a propriedade de toda sequência de Cauchy ser convergente são ditos *espaços de Banach*. Numa disciplina de Análise Real, vemos que uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, ela é de Cauchy. Assim $\mathbb{R}$, com sua norma usual, é um espaço de Banach. Outros exemplos de espaços de Banach serão apresentados neste capítulo.

1.3 Bolas e conjuntos limitados

A noção de intervalo em $\mathbb{R}$ é importante para expressar matematicamente a ideia "x está próximo de a", sendo x e a números reais. De fato, se considerarmos em $\mathbb{R}$ a sua norma usual, dizer que "x dista de a menos que 1" é equivalente a dizer que "x pertence ao intervalo aberto $(a-1, a+1)$".

$$|x-a| < 1 \Leftrightarrow x \in (a-1, a+1)$$



As noções a seguir generalizam, para um espaço normado qualquer, as noções de intervalo aberto e fechado de números reais.

Definição 1.7. Seja $(E, ||\cdot||)$ um espaço normado. Para cada $a \in E$ e cada número real $r > 0$, definimos

$$B(a;r) = \{x \in E; \|x-a\| < r\},$$
$$B[a;r] = \{x \in E; \|x-a\| \leqslant r\},$$
$$S(a;r) = \{x \in E; \|x-a\| = r\}.$$

Os conjuntos $B(a;r)$, $B[a;r]$ e $S(a;r)$ são chamados, respectivamente, de *bola aberta*, *bola fechada* e *esfera* de centro a e raio r. Notemos que $B[a;r] = B(a;r) \cup S(a;r)$. Notemos também que se considerarmos $\mathbb{R}$ com a norma usual, $B(a;r) = (a-r, a+r)$, $B[a;r] = [a-r, a+r]$ e $S(a;r) = \{a-r, a+r\}$.

Exemplo 1.10. Consideremos $\mathbb{R}^2$ com as normas apresentadas no Exemplo 1.7. Dados $a \in \mathbb{R}^2$ e um número real $r > 0$, a bola $B(a;r)$ adquire formas geométricas distintas dependendo da norma utilizada. Vamos verificar tal fato. Primeiramente, em $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||)$, temos que a bola aberta $B(a;r)$ é o interior do círculo de centro $a = (a_1, a_2)$ e raio r. Com efeito, se $x \in B(a;r)$, com $x = (x_1, x_2)$, então $(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2$. A Figura 1.3 representa essa bola no plano $\mathbb{R}^2$.

Considerando $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$, a bola $B(a;r)$ é o interior de um quadrado de centro $a = (a_1, a_2)$ e lados de comprimento $2r$, paralelos aos eixos coordenados. Com efeito, se $x = (x_1, x_2) \in B(a;r)$, então $||x-a||_1 < r$, ou seja, $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant 2} |x_k - a_k| = \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} < r$. Assim $|x_1 - a_1| < r$ e $|x_2 - a_2| < r$. Logo $x_1 \in (a_1 - r, a_1 + r)$ e $x_2 \in (a_2 - r, a_2 + r)$, isto é, $x \in (a_1 - r, a_1 + r) \times (a_2 - r, a_2 + r)$. Reciprocamente se $x = (x_1, x_2) \in (a_1 - r, a_1 + r) \times (a_2 - r, a_2 + r)$, então $x_1 \in (a_1 - r, a_1 + r)$ e $x_2 \in (a_2 - r, a_2 + r)$. Daí $|x_1 - a_1| < r$ e $|x_2 - a_2| < r$, ou seja, $||x-a||_1 = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant 2} |x_k - a_k| = \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} < r$, o que implica que $x \in B(a;r)$. Temos a representação dessa bola na Figura 1.4.

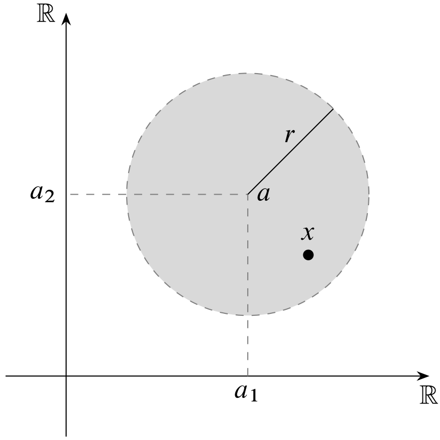


Figura 1.3: $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$

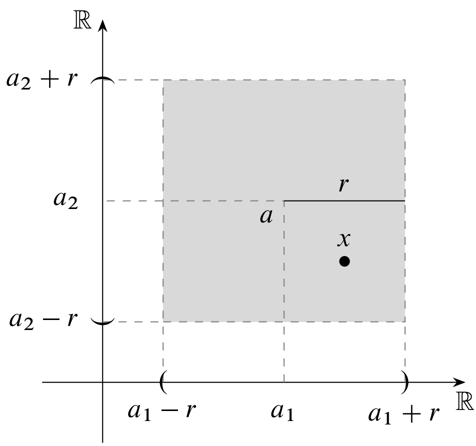


Figura 1.4: $|x_1 - a_1| < r$ e $|x_2 - a_2| < r$

Já em $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$, a bola $B(a;r)$ é o interior de um quadrado de centro $a = (a_1, a_2)$ e diagonais de comprimento $2r$, ambas paralelas aos eixos coordenados. Deixamos a cargo do leitor verificar esse fato.

Seja E um espaço normado e consideremos $a \in E$, $r > 0$ e $\lambda > 0$. Definindo

$$a + B(0;r) = \{x \in E; x = a + y, \text{ com } y \in B(0;r)\}$$

e

$$\lambda \cdot B(0;r) = \{x \in E; x = \lambda y, \text{ com } y \in B(0;r)\},$$

temos a seguinte

Proposição 1.7. *Com a notação acima, temos:*
(i) $a + B(0;r) = B(a;r)$;
(ii) $\lambda \cdot B(0;r) = B(0;\lambda r)$.

Demonstração. (i) Para mostrarmos essa afirmação, tomemos $w \in B(a;r)$ e consideremos $y = w - a$. Temos, então, que $w = a + y$, sendo $y \in B(0;r)$, já que $||y|| = ||w - a|| < r$. Com isso, vemos que $w \in a + B(0;r)$. Por outro lado, tomemos $w \in a+B(0;r)$. Por definição, $w = a+y$, onde $y \in B(0;r)$. Assim $||w-a|| = ||y|| < r$, o que mostra que $w \in B(a;r)$.

(ii) Tomemos $w \in B(0, \lambda r)$. Logo $||w|| < \lambda r$. Seja $y = w/\lambda$. Temos $w = \lambda y$, com $y \in B(0;r)$, já que $||y|| = \left\| \frac{w}{\lambda} \right\| = \left| \frac{1}{\lambda} \right| \cdot ||w|| = \frac{1}{\lambda} \cdot ||w|| < \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda r = r$. Com isso, temos que $w \in \lambda \cdot B(0;r)$. Para mostrarmos a outra inclusão, tomemos $w \in \lambda \cdot B(0;r)$. Daí temos que $w = \lambda y$ com $y \in B(0;r)$. Notemos que $||w|| = ||\lambda y|| = \lambda ||y|| < \lambda r$, o que mostra que $w \in B(0;\lambda r)$. □

Sejam $(E_1, ||\cdot||_1)$, $(E_2, ||\cdot||_2)$, ..., $(E_n, ||\cdot||_n)$ espaços normados. Consideremos $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$. Defina $a+b$, com $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E$ e $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in E$, como

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Defina ka, com $k \in \mathbb{K}$ e $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E$ como

$$ka = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n).$$

Deixamos a cargo do leitor verificar que E é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar acima definidas.

Agora tomemos $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E$ e definamos

$$||a|| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} ||a_k||_k.$$

É fácil verificar que $||\cdot||$ é uma norma em E, chamada norma usual em E, que será usada salvo menção ao contrário. O próximo resultado mostra que em $(E, ||\cdot||)$, a “bola aberta do produto cartesiano é um produto cartesiano de bolas abertas”.

Proposição 1.8. *Seja $(E, ||\cdot||)$ um produto cartesiano como acima. Tomemos $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E$ e $r > 0$. Então*

$$B(a;r) = B(a_1;r) \times B(a_2;r) \times \cdots \times B(a_n;r).$$

Demonstração. Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$. Temos

$$\begin{aligned} x \in B(a;r) &\Leftrightarrow ||x-a|| < r \\ &\Leftrightarrow \max\{||x_i - a_i||; 1 \leqslant i \leqslant n\} < r \\ &\Leftrightarrow ||x_i - a_i|| < r \text{ para todo } 1 \leqslant i \leqslant n \\ &\Leftrightarrow x_i \in B(a_i;r) \text{ para todo } 1 \leqslant i \leqslant n \\ &\Leftrightarrow x \in B(a_1;r) \times B(a_2;r) \times \cdots \times B(a_n;r). \end{aligned}$$ □

O resultado acima também é válido para bolas fechadas. Mais precisamente,

$$B[a;r] = B[a_1;r] \times B[a_2;r] \times \cdots \times B[a_n;r].$$

Sejam E um espaço normado e $X \subset E$ não vazio. Dizemos que X é um *conjunto limitado* quando está contido em alguma bola $B(a;r)$ com $a \in E$ e $r > 0$. Deixamos a cargo do leitor verificar que dizer que X é limitado equivale a dizer que X *está contido em alguma bola aberta centrada no zero.*

1.4 Conjuntos abertos e conjuntos fechados

Definição 1.8. Seja X um subconjunto de um espaço normado E. Dizemos que um ponto $a \in X$ é um *ponto interior* de X quando existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset X$. O conjunto de todos os pontos interiores de X é chamado o *interior* de X, sendo denotado por $\text{int}(X)$.

Por definição, $\text{int}(X) \subset X$. Notemos que, dizer que um ponto $b \in X$ *não* é interior a X, significa que toda bola aberta de centro b contém algum ponto que não pertence a X, motivando a seguinte definição:

Definição 1.9. O conjunto formado pelos pontos $b \in E$ tais que $B(b;r) \cap X \neq \emptyset$ e $B(b;r) \cap (E \setminus X) \neq \emptyset$, para todo $r > 0$, é chamado de *fronteira* de X e denotado por ∂X.

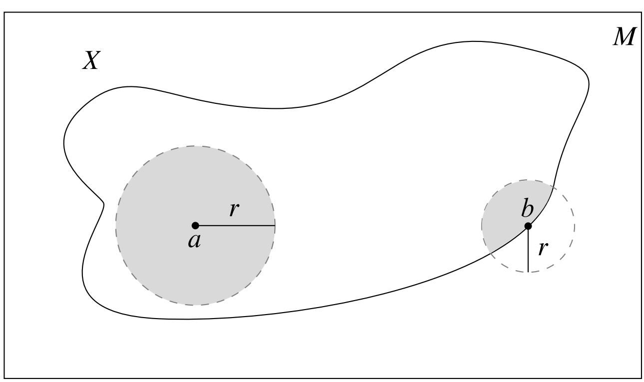


Figura 1.5: $a \in \text{int}(X)$ e $b \in \partial X$

Exemplo 1.11. Consideremos $\mathbb{R}$ com a sua norma usual. O intervalo $I = [-1, 2)$ é tal que $\text{int}(I) = (-1, 2)$ e $\partial I = \{-1, 2\}$. Com efeito, se $-1 < a < 2$, então, pondo $r = \min\{a + 1, 2 - a\}$, temos que $(a - r, a + r) \subset [-1, 2)$. Logo $a \in \text{int}(I)$. Porém $-1 \in \partial I$, pois, para todo $r > 0$, temos $(-1-r, r-1) \cap (\mathbb{R} - I) \neq \emptyset$ e $(-1-r, r-1) \cap I \neq \emptyset$. Analogamente vemos que $2 \in \partial I$.

Consideremos $X \subset E$, sendo E um espaço normado. Dado um ponto $a \in E$, temos três possibilidades exclusivas: ou $a \in \text{int}(X)$, ou $a \in \text{int}(E \setminus X)$ ou $a \in \partial X$. Assim podemos afirmar que todo conjunto X decompõe o espaço E na reunião disjunta

$$E = \text{int}(X) \cup \partial X \cup \text{int}(E \setminus X).$$

Observação 1.1. Se um conjunto e seu complementar têm ambos interior vazio, então a fronteira de cada um deles é o espaço inteiro.

Definição 1.10. Seja E um espaço normado. Dizemos que $X \subset E$ é *aberto* em E quando $\text{int}(X) = X$.

Como $\text{int}(X) \subset X$, para mostrarmos que um conjunto X em E é aberto, devemos provar que $X \subset \text{int}(X)$, ou seja, que, para cada $x \in X$, existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset X$.

Proposição 1.9. *Em qualquer espaço normado E, toda bola aberta $B(a; r)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração. Vamos mostrar que, para cada $x \in B(a; r)$, existe $s > 0$ tal que $B(x; s) \subset B(a; r)$. Para isso, seja $x \in B(a; r)$. Então $||x - a|| < r$. Tomemos $s > 0$ tal que $||x - a|| + s = r$. Temos que $B(x; s) \subset B(a; r)$, pois se $y \in B(x; s)$, então $||y - a|| \leqslant ||y - x|| + ||x - a|| < s + ||x - a|| = r$, mostrando que $y \in B(a; r)$. □

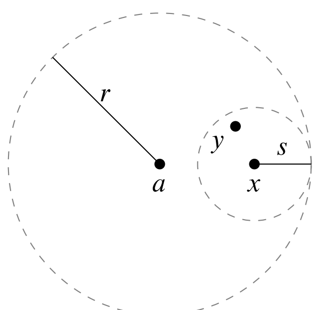


Figura 1.6: $B(x; s) \subset B(a; r)$

Corolário 1.1. *Seja E um espaço normado. Para todo $X \subset E$, $\text{int}(X)$ é aberto em E.*

Demonstração. Com efeito, seja $a \in \text{int}(X)$. Daí existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset X$. Pela Proposição 1.9, para todo $x \in B(a;r)$, existe $s > 0$ tal que $B(x;s) \subset B(a;r)$. Logo, $B(x;s) \subset X$, ou seja, para todo $x \in B(a;r)$, tem-se que $x \in \text{int}(X)$. Portanto $B(a;r) \subset \text{int}(X)$, o que mostra que $\text{int}(X)$ é aberto em E. □

Pelo Corolário acima, vemos que $\text{int}(X)$ é o maior aberto contido em X, ou seja, se A é aberto em X e $A \subset X$, então $A \subset \text{int}(X)$.

Proposição 1.10. *Seja E um espaço normado. Então:*

(i) *E e $\emptyset$ são conjuntos abertos;*

(ii) *a interseção de um número finito de conjuntos abertos de E é um conjunto aberto;*

(iii) *a reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos de E é um conjunto aberto.*

Demonstração. (i) E é aberto, pois dados $a \in E$ e $r > 0$, temos $B(a;r) \subset E$, ou seja, $a \in \text{int}(E)$. O conjunto vazio $\emptyset$ também é aberto. Com efeito, se $\emptyset$ não fosse aberto, existiria $x \in \emptyset$, tal que $x \notin \text{int}(\emptyset)$ o que é impossível. Logo $\emptyset$ é aberto.

(ii) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ abertos de E, em que $n \in \mathbb{N}^*$. Tomemos $a \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Como esses conjuntos são abertos, existem $r_1 > 0, r_2 > 0, \ldots, r_n > 0$ tais que $B(a;r_1) \subset A_1$, e $B(a;r_2) \subset A_2, \ldots, B(a;r_n) \subset A_n$. Tomemos $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$. Daí

$$B(a;r) \subset B(a;r_1) \subset A_1,$$

$$B(a;r) \subset B(a;r_2) \subset A_2, \ldots, B(a;r) \subset B(a;r_n) \subset A_n.$$

Logo

$$B(a;r) \subset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Portanto $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ é aberto.

(iii) Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de abertos de E. Tomemos $a \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Daí existe $\lambda_0 \in L$ tal que $a \in A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_0} é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset A_{\lambda_0}$. Logo $B(a;r) \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = A$. Portanto A é aberto. □

Corolário 1.2. *Consideremos um espaço normado E. Um subconjunto A de E é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.*

Demonstração. Segue da Proposição 1.10. □

Exemplo 1.12. A interseção de uma família infinita de abertos pode não ser um conjunto aberto. Consideremos $\mathbb{R}$ com sua métrica usual. Temos que $\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (-1/n, 1/n)$. É claro que $\{0\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (-1/n, 1/n)$.

Vamos mostrar a outra inclusão. Tomemos $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (-1/n, 1/n)$. Suponhamos, por absurdo, que $x \neq 0$. Daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n_0 > 1/|x|$, ou seja, $|x| > 1/n_0$. Logo, $x \notin (-1/n_0, 1/n_0)$. Portanto, $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (-1/n, 1/n)$, o que é um absurdo. Notemos também que $\{0\}$ não é aberto, já que a bola $(-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset \{0\}$, para todo $\varepsilon > 0$.

Proposição 1.11. *Seja E um espaço normado. Se F é um subespaço vetorial de E, com $F \neq E$, então int$(F) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\text{int}(F) \neq \emptyset$. Então existem $x \in F$ e $r > 0$ tais que $B(x; r) \subset F$. Ora, pela Proposição 1.7, temos que $x + B(0; r) = B(x; r) \subset F$. Como F é um subespaço vetorial de E,

$$B(0; r) \subset F - x \subset F. \tag{1.1}$$

Além disso, para todo $\lambda > 0$

$$\lambda \cdot B(0; r) \subset \lambda \cdot F \subset F. \tag{1.2}$$

Aplicando a Proposição 1.7 em (1.2), temos $B(0; \lambda r) \subset F$ para todo $\lambda > 0$.

Agora tomemos $x \in E$. Se $x = 0$, então $x \in F$, já que F é um subespaço vetorial de E. Se $x \neq 0$, temos $B(0; 2||x||) = B(0; \lambda r) \subset F$, sendo $\lambda = \frac{2||x||}{r}$. Isto mostra que $x \in F$. Daí temos que $E \subset F$, o que é um absurdo, pois F é subespaço próprio de E. Portanto $\text{int}(F) = \emptyset$. $\square$

Definição 1.11. Sejam E um espaço normado e $X \subset E$. Dizemos que um ponto $a \in E$ é *aderente* a X quando, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

Chamamos de *fecho* ou *aderência* de um conjunto $X \subset E$, ao conjunto $\overline{X}$ formado pelos pontos de E que são aderentes a X.

Exemplo 1.13. Todo ponto $a \in X$ é aderente a X, já que $a \in X$ implica que $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Consequentemente $a \in \overline{X}$. Assim $X \subset \overline{X}$ para todo $X \subset E$, sendo E um espaço normado. Claramente vemos que os pontos da fronteira de X são aderentes a X, uma vez que $x \in \partial X$ implica que $B(x; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

Exemplo 1.14. Seja E um espaço normado. Então o fecho de uma bola aberta $B(a; r)$ é a bola fechada $B[a; r]$, isto é, $\overline{B(a; r)} = B[a; r]$. Deixamos para o leitor a verificação desse fato.

Para que a não seja aderente a $X \subset E$, é necessário e suficiente que exista uma bola aberta de centro a, na qual não haja pontos de X, ou seja, $a \notin \overline{X}$ se, e somente se, $B(a; r) \cap X = \emptyset$ para algum $r > 0$. Assim vemos que $E \setminus \overline{X} = \text{int}(E \setminus X)$. Como foi visto anteriormente, o espaço E pode ser decomposto em três conjuntos dois a dois disjuntos, a saber: $E = \text{int}(X) \cup \partial X \cup \text{int}(E \setminus X)$. Como $E \setminus \overline{X} = \text{int}(E \setminus X)$, concluímos que $\overline{X} = \text{int}(X) \cup \partial X$.

Definição 1.12. Dizemos que um conjunto $F \subset E$ é um *conjunto fechado* num espaço normado E quando $F = \overline{F}$, isto é, se todo ponto aderente a F pertencer a F.

Proposição 1.12. *Para todo subconjunto $X \subset E$, tem-se $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.*

Demonstração. Com efeito, vamos mostrar que $\overline{\overline{X}} \subset \overline{X}$, já que a outra inclusão é óbvia. Tomemos $a \in \overline{\overline{X}}$. Fixemos $\varepsilon > 0$. Por definição, temos que $B(a;\varepsilon) \cap \overline{X} \neq \emptyset$. Daí existe $b \in \overline{X}$ tal que $b \in B(a;\varepsilon)$. Seja $\delta > 0$ tal que $B(b;\delta) \subset B(a;\varepsilon)$. Como $b \in \overline{X}$, temos que $B(b;\delta) \cap X \neq \emptyset$. Logo $B(a;\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Como $\varepsilon > 0$ foi tomado de modo arbitrário, segue que $a \in \overline{X}$. □

Pela Proposição 1.12, segue que o fecho de todo conjunto $X \subset E$ é um conjunto fechado. Além disso, $\overline{X}$ é o menor subconjunto fechado de E que contém X, ou seja, se F é fechado e $X \subset F$, então $\overline{X} \subset F$. De fato, se $X \subset F$, então $\overline{X} \subset \overline{F}$. Como $F = \overline{F}$, segue que $\overline{X} \subset F$.

Proposição 1.13. *Seja E um espaço normado. Temos que $F \subset E$ é fechado se, e somente se, seu complementar $E \setminus F$ é aberto.*

Demonstração. Vimos que E $\setminus \overline{X} = \operatorname{int}(E \setminus X)$ para qualquer $X \subset E$. Tomemos $F \subset E$ fechado. Então E $\setminus \overline{F} = E \setminus F$. Daí, $E \setminus F = \operatorname{int}(E \setminus F)$, mostrando que $E \setminus F$ é aberto. Suponhamos agora que $E \setminus F$ seja aberto. Então, $E \setminus F = \operatorname{int}(E \setminus F)$. Como int $(E \setminus F) = E \setminus \overline{F}$, segue que $E \setminus F = E \setminus \overline{F}$, ou seja, $F = \overline{F}$, mostrando que F é fechado. □

Exemplo 1.15. Num espaço normado E, toda bola fechada $B[a;r]$ é um subconjunto fechado de E, pois seu complementar é aberto. Com efeito, seja $A = E \setminus B[a;r]$. Se $A = \emptyset$, então A é aberto. Suponhamos $A \neq \emptyset$. Tomemos $c \in A$. Daí $\|c - a\| > r$. Tomemos $s > 0$ tal que $r + s < \|a - c\|$. Segue que $B[a;r] \cap B[c;s] = \emptyset$. Logo $B[c;s] \subset E \setminus B[a;r]$, sendo $c \in \operatorname{int}(A)$. Portanto $A = E \setminus B[a;r]$ é aberto.

A seguinte proposição é a versão para conjuntos fechados da Proposição 1.10. A demonstração fica a cargo do leitor.

Proposição 1.14. *Seja $\mathcal{F}$ a coleção dos subconjuntos fechados de um espaço normado E. Então:*

(i) $E \in \mathcal{F}$ *e* $\emptyset \in \mathcal{F}$ *(o espaço E e $\emptyset$ são fechados);*

(ii) *Se $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, então $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n \in \mathcal{F}$ (a reunião de um número finito de conjuntos fechados de E é um subconjunto fechado de E);*

(iii) *Se $F_\lambda \in \mathcal{F}$ para todo $\lambda \in L$, então $A = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \in \mathcal{F}$ (a interseção arbitrária de subconjuntos fechados de E é um subconjunto fechado de E.*

Definição 1.13. Sejam E um espaço normado e $X \subset E$. Dizemos que $a \in E$ é um *ponto de acumulação* de X quando $B(a;\varepsilon) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$. Denotamos por X' o conjunto de todos os pontos de acumulação de X.

Notemos que, pela definição, $a \in X'$ se, e somente se, $a \in \overline{X \setminus \{a\}}$.

Proposição 1.15. *Se X é um subconjunto de um espaço normado E, então $\overline{X} = X \cup X'$.*

Demonstração. Com efeito, tomemos $a \in \overline{X}$. Daí $a \in X$ ou $a \notin X$. Se $a \notin X$, então toda bola aberta de centro a contém um ponto $x \in X$ com $x \neq a$ e, portanto, $a \in X'$. Por outro lado, tomemos $a \in X \cup X'$. Assim $a \in X$ ou $a \in X'$. Se $a \in X$, então $a \in \overline{X}$. Se $a \in X'$, então $a \in \overline{X \setminus \{a\}} \subset \overline{X}$. □

Pela Proposição anterior, todo ponto de acumulação é um ponto aderente, mas nem todo ponto aderente é um ponto de acumulação. Temos a seguinte definição:

Definição 1.14. Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X, a é dito ser um *ponto isolado* de X, isto é, existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \cap X = \{a\}$.

Um subconjunto X de um espaço normado E é dito ser *discreto* quando todo ponto de X é isolado.

Por exemplo, $\mathbb{Z}$ é um subconjunto discreto do espaço normado $\mathbb{R}$. De fato, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos $(n-1, n+1) \cap \mathbb{Z} = \{n\}$.

A seguir, vamos caracterizar o fecho de um conjunto por meio de sequências. Também vamos caracterizar conjuntos fechados, conjuntos abertos e a noção de ponto de acumulação por sequências.

Proposição 1.16. *Sejam E um espaço normado, $X \subset E$ e $a \in E$. Então $a \in \overline{X}$ se, e somente se, existe uma sequência (x_n) em X tal que $\lim x_n = a$.*

Demonstração. Suponhamos que (x_n) seja uma sequência em X tal que $\lim x_n = a$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\|x_n - a\| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Logo $x_n \in B(a,\varepsilon) \cap X$ para todo $n > n_0$, implicando que $B(a;\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Portanto $a \in \overline{X}$. Reciprocamente suponhamos que $a \in \overline{X}$. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $B(a;1/n) \cap X \neq \emptyset$. Assim podemos tomar $x_n \in B(a;1/n) \cap X$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$. A sequência (x_n) é uma sequência em X que satisfaz $\|x_n - a\| < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Portanto $\lim x = a$. □

Corolário 1.3. *Sejam E um espaço normado e $F \subset E$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) F é fechado;

(b) Se (x_n) é uma sequência em F convergindo para $a \in E$, então $a \in F$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Suponhamos que $F = \overline{F}$ e (x_n) seja uma sequência em F tal que $\lim x_n = a$. Pela Proposição anterior, temos que $a \in \overline{F}$. Daí $a \in F$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Com efeito, basta mostrar que $\overline{F} \subset F$. Tomemos a $\in \overline{F}$. Pela Proposição 1.16, existe uma sequência (x_n) em F tal que $\lim x_n = a$. Pela hipótese, temos que $a \in F$ e, portanto, $\overline{F} \subset F$. Daí F é fechado. □

Proposição 1.17. *Seja A um subconjunto de E. As afirmações a seguir são equivalentes:*

(a) A é aberto;

i(b) Para cada sequência (x_n) em E, que converge a um elemento $a \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \geqslant n_0$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Suponhamos que A seja aberto e $\lim x_n = a \in A$. Daí existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a;\varepsilon) \subset A$ e, portanto, para $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n \in B(a;\varepsilon) \subset A$ se $n > n_0$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Se A não fosse aberto, existiria $b \in A$ com a seguinte propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}^*$,

$$B(b;1/n) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, tome $y_n \in B(b;1/n) \cap (E \setminus A)$. A sequência (y_n) é uma sequência em $E \setminus A$ que converge para $b \in A$, o que contradiz b). □

Proposição 1.18. *Seja $X \subset E$, onde E é um espaço normado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $a \in X'$;

(b) existe una sequência (x_n), de pontos distintos de X, tal que $\lim x_n = a$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Seja $a \in X'$. Daí existe $x_1 \neq a$ tal que $x_1 \in B(a;1) \cap X$. Da mesma forma, existe $x_2 \neq a$ tal que $x_2 \in B\,(a;\varepsilon_1) \cap X$, sendo $\varepsilon_1 = \min\{1/2, d\,(x_1,a)\}$. Prosseguindo indutivamente, obtemos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de modo que $x_n \in B(a;1/n) \cap X$, sendo $x_m \neq x_n$ sempre que $m \neq n$. Como $\|x_n - a\| < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, segue que (x_n) é uma sequência de pontos distintos de X tal que $\lim x_n = a$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Suponhamos que (x_n) seja uma sequência de pontos distintos em X, em que $\lim x_n = a$. Daí, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n \in B(a;\varepsilon) \cap X$ se $n > n_0$. Como (x_n) possui pontos distintos, possivelmente apenas um dos seus termos pode ser igual a a. Com isso, $B(a;\varepsilon) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \emptyset$. Logo $a \in X'$. □

1.5 Espaços de Banach: os espaços c_0, ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$ e ℓ_∞

Os espaços de Banach formam uma classe especial de espaços normados, pois nesses espaços existe a possibilidade de verificarmos a convergência de uma sequência de um modo mais simples. Neste livro, vamos apresentar vários espaços de Banach: os espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, os espaços de sequências c, c_0, l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ e ℓ_∞, os espaços de Hilbert e os espaços L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Por ser introdutório, outros espaços de Banach importantes na Matemática não serão apresentados no nosso curso, como os espaços de Hardy, os espaços de Bergman e os espaços de Orlicz, que são objetos de estudo da Análise Matemática, mais especificamente da Análise Harmônica e da Análise Funcional.

Nesta seção, vamos apresentar alguns resultados básicos sobre os espaços de Banach, assim como alguns exemplos. Comecemos com a seguinte proposição que deixa claro a importância de subespaços fechados de um espaço de Banach.

Antes deixemos claro que se E é um espaço normado e F é um subespaço vetorial de E, então E induz uma norma em F chamada de *norma induzida* em F. Mais precisamente, se $\|\cdot\|$ é uma norma em E, então $\|\cdot\| : F \to \mathbb{K}$ é uma norma em F.

Proposição 1.19. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) F é um espaço de Banach;

(b) F é fechado em E.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Suponhamos que F é um espaço de Banach. Tomemos (x_n) como uma sequência em F que converge para a $a \in E$. Temos que (x_n) é de Cauchy em F. Logo existe $b \in F$ tal que (x_n) converge para b, já que F é um espaço de Banach. Pela unicidade do limite de uma sequência convergente em um espaço normado, temos $a = b$. Pelo Corolário 1.3, F é fechado.
(b) $\Rightarrow$ (a): Suponhamos agora que F é fechado. Tomemos (x_n) uma sequência de Cauchy em F. Segue que (x_n) é de Cauchy em E e, como E é um espaço de Banach, existe $a \in E$ tal que $x \to a$. Pelo fato de F ser fechado, novamente, pelo Corolário 1.3, $a \in F$. Assim F é um espaço de Banach. □

O próximo resultado mostra que o produto cartesiano de n espaços de Banach é um espaço de Banach.

Proposição 1.20. *Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_n$ espaços de Banach. O produto cartesiano $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ é um espaço de Banach com sua norma usual.*

Demonstração. Seja $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de Cauchy em $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$. Então, para cada $m \in \mathbb{N}^*$, $x_m = (x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{nm}) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$. Assim, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, $(x_{im})_{m\in\mathbb{N}^*}$ é uma sequência em E_i. Como, para quaisquer k e j em $\mathbb{N}^*$, temos

$$\left\|x_{ij} - x_{ik}\right\|_i \leqslant \left\|x_j - x_k\right\|, \text{ para todo } 1 \leqslant i \leqslant n,$$

segue que $(x_{im})_{m\in\mathbb{N}^*}$ é de Cauchy em E_i, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$. Pelo fato de E_1, E_2, …, E_n serem espaços de Banach, existe, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, $a_i \in E_i$ tal que $x_{im} \to a_i$. Como, para todo $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\|x_m - a\| = \max\left\{\|x_{im} - a_i\| ; 1 \leqslant i \leqslant n\right\},$$

sendo $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, segue que $x_m \to a$. □

Em uma primeira disciplina de Análise Real, vemos que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente. Assim $\mathbb{R}$ com sua norma usual é um espaço de Banach. Segue da proposição acima o seguinte:

Exemplo 1.16. $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach.

Segue também da proposição anterior que $\mathbb{C}^n$ *é um espaço de Banach*, em que $\mathbb{C}$ denota o corpo dos números complexos. Para os leitores interessados em ler sobre números complexos, indicamos Fernandez e Bernardes Jr. (2019).

A seguir, vamos apresentar outros exemplos de espaços de Banach.

Exemplo 1.17. Denotemos por c_0 o conjunto de todas as sequências de números reais ou de números complexos que convergem para zero. Mais precisamente, fixado $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, temos

$$c_0 = \{(x_n)\,; x_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^* \text{ e } x_n \to 0\}\,.$$

Consideremos em c_0 as seguintes operações de adição e multiplicação por um escalar: sejam (x_n) e (y_n) em c_0 e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(x_n) + (y_n) = (z_n)\,, \text{ em que } z_n = x_n + y_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}^*$$

e

$$\lambda \cdot (x_n) = (z_n)\,, \text{ em que } z_n = \lambda \cdot x_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}^*.$$

Agora tomemos (x_n) em c_0 e definamos

$$\|(x_n)\| = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}^*\}\,.$$

Deixamos a cargo do leitor verificar que as operações acima definidas tornam c_0 um espaço vetorial e que $\|\cdot\|$ acima é definida como uma norma em c_0. Assim $(c_0, \|\cdot\|)$ é um espaço normado. Vejamos que c_0 é um espaço de Banach. Para isso, seja $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de Cauchy em c_0. Para cada $m \in \mathbb{N}^*$, $x_m = (x_{mj})_{j\in\mathbb{N}^*}$.

Como $(x_m)_{m\in N^*}$ é de Cauchy em c_0, temos que, para cada $j \in \mathbb{N}^*$ fixado, a sequência $\left(x_{mj}\right)_{m\in N^*}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ já que

$$\left|x_{mj} - x_{n_j}\right| \leqslant \sup\{|x_{ml} - x_{nl}|\,; l \in \mathbb{N}^*\} = \|x_m - x_m\|$$

para todo $m, n \in N^*$. Como $\mathbb{K}$ é um espaço de Banach, para cada $j \in \mathbb{N}^*$ fixado, existe $a_j \in \mathbb{K}$ que é limite da sequência $\left(x_{mj}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$. Tomemos $a = \left(a_j\right)_{j\in N^*}$.

Vamos mostrar que $a \in c_0$ e que $x_m \to a$ em c_0. Ora tomemos $\varepsilon > 0$. Pelo fato de $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ ser Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$|x_{mj} - x_{n_0 j}| < \varepsilon/3 \text{ para todo } m \geqslant n_0 \text{ e para todo } j \in \mathbb{N}^*. \tag{1.3}$$

Como $(x_{n_0 j})_{j\in\mathbb{N}^*} \in c_0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\left|x_{n_0 j}\right| < \varepsilon/3 \text{ para todo } j \geqslant j_0. \tag{1.4}$$

Agora, fixemos $j \geqslant j_0$. Como $(x_{mj})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge para a_j, existe $m_j \geqslant n_0$ tal que

$$\|a_j - x_{m_j j}\| < \varepsilon/3. \tag{1.5}$$

De (1.3), (1.4) e (1.5), vemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\left|a_j\right| \leqslant \left|a_j - x_{m_j j}\right| + \left|x_{m_j j} - x_{n_0 j}\right| + \left|x_{n_0 j}\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

sempre que $j \geqslant j_0$, o que mostra que $a \in c_0$. Vejamos agora que $x_m \to a$ em c_0. Para isso, tomemos $\varepsilon > 0$. Fixemos $j \in \mathbb{N}^*$. Como $(x_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ é Cauchy , existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\left|x_{mj} - x_{nj}\right| < \varepsilon/4 \text{ se } m, n \geqslant n_0. \tag{1.6}$$

Como $a_{nj} \to a_j$ quando $n \to +\infty$, existe $n_j \geqslant n_0$ tal que

$$\left|x_{n_j j} - a_j\right| < \varepsilon/4. \tag{1.7}$$

De (1.6) e (1.7), vemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\left|x_{mj} - a_j\right| \leqslant \left|x_{m_j} - x_{n_j j}\right| + \left|x_{n_j j} - a_j\right| < \varepsilon/2 \tag{1.8}$$

para todo $m \geqslant n_0$ e para todo $j \in \mathbb{N}^*$. De (1.8), segue que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\|x_m - a\| < \varepsilon$ sempre que $m \geqslant n_0$, como queríamos mostrar.

Exemplo 1.18. Denotemos por ℓ_∞ o conjunto de todas as sequências limitadas de números reais ou de números complexos: Mais precisamente, fixado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, com $x_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, é um elemento de ℓ_∞ se existe $M > 0$ tal que $|x_m| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Deixamos a cargo do leitor verificar que ℓ_∞ *é um espaço normado* com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em c_0 e com a norma definida em c_0. Vejamos que ℓ_∞ é um espaço de Banach. Para isso, seja $(x_m)_{m \in N^*}$ uma sequência de Cauchy em ℓ_∞. Para cada $m \in \mathbb{N}^*$, $x_m = \left(x_{mj}\right)_{j \in \mathbb{N}^*}$. Como $(x_m)_{m \in N^*}$ é de Cauchy em ℓ_∞, temos que, para cada $j \in \mathbb{N}^*$ fixado, a sequência $\left(x_{mj}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$, que, por ser um espaço de Banach, garante a existência de um elemento de $\mathbb{K}$ para o qual $\left(x_{mj}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Chamemos tal elemento de $\mathbb{K}$ de a_j e consideremos $a = (a_j)_{j \in N^*}$. Vamos mostrar que $a \in \ell_\infty$ e $x_m \to a$ em ℓ_∞. Ora, seguindo o argumento usado para mostrar que $a \in c_0$ no Exemplo 1.17, temos que existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\left|a_j\right| < 1 + M \text{ sempre que } j > j_0. \tag{1.9}$$

Tomemos $C = \max\left\{|a_1|, \ldots, |a_{j_0}|, 1 + M\right\}$. Segue que $\left|a_j\right| \leqslant C$ para todo $j \in \mathbb{N}^*$, mostrando que $a \in \ell_\infty$. Para mostrarmos que $x_m \to a$ em ℓ_∞ basta seguirmos o argumento usado para mostrar que $x_m \to a$ em c_0.

Observação 1.2. Claramente c_0 é um subespaço de ℓ_∞. Assim poderíamos ter apresentado c_0 após ℓ_∞ e, pela Proposição 1.19, mostrar que c_0 é um espaço de Banach provando que c_0 é fechado em ℓ_∞. É o que vamos fazer para verificar que c, o espaço das sequências com termos em $\mathbb{K}$ que são convergentes, é um espaço de Banach.

Exemplo 1.19. Denotemos por c o conjunto de todas as sequências convergentes com termos em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Mais precisamente, fixado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, com $x_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, é um elemento de c se x é convergente.

Deixamos a cargo do leitor verificar que $c \subset \ell_\infty$ é um subespaço de ℓ_∞. Aqui devemos lembrar que uma sequência de números reais ou de números complexos convergente é limitada. Para provarmos que c é um espaço de Banach, vamos provar que c é fechado em ℓ_∞. Ora tome $a \in \overline{c}$. Então $a = \left(a_j\right)_{j\in N^*}$ é uma sequência limitada de números reais ou números complexos para a qual existe uma sequência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ em c tal que $x_m \to a$. Observemos que, para cada $m \in \mathbb{N}^*$, $x_m = \left(x_{mj}\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$ é um elemento de c. Vamos mostrar que $a \in c$. Para isso, basta mostrar que a é uma sequência de Cauchy, já que $\mathbb{K}$ é um espaço de Banach. Ora tomemos $\varepsilon > 0$. Como $x_m \to a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\left|x_{n_0 j} - a_j\right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } j \in \mathbb{N}^*. \tag{1.10}$$

Como $x_{n_0} \in c$, x_{n_0} é uma sequência de Cauchy. Assim existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\left|x_{n_0 j} - x_{n_0 k}\right| < \varepsilon/3 \text{ para todo } j, k \geqslant j_0. \tag{1.11}$$

Portanto, para todo $j, k \geqslant j_0$,

$$\left|a_j - a_k\right| \leqslant \left|a_j - x_{n_0 j}\right| + \left|x_{n_0 j} - x_{n_0 k}\right| + \left|x_{n_0 k} - a_k\right| < \varepsilon,$$

o que mostra que a é de Cauchy. Segue que $\overline{c} = c$, uma vez que $a \in \overline{c}$ foi tomado de modo arbitrário.

Vejamos agora um espaço de sequências de termos em $\mathbb{K}$ que não seja um espaço de Banach.

Exemplo 1.20. Denotemos por c_{00} o conjunto de todas as sequências de números reais ou de números complexos eventualmente nulas. Mais precisamente, fixado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, com $x_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, é um elemento de c_{00} quando existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n = 0$ para todo $n > n_0$. É fácil verificar que c_{00} é um subespaço de ℓ_∞. Contudo c_{00} não é um espaço de Banach. Para isso, vamos verificar que c_{00} não é fechado em ℓ_∞, ou seja, que $\overline{c_{00}} \not\subset c_{00}$. Consideremos $x = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Temos que $x \in \overline{c_{00}}$, mas $x \notin c_{00}$. Para vermos que $x \in \overline{c_{00}}$, consideremos a sequência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ em que, para cada $m \in \mathbb{N}^*$, $x_m = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{m}, 0, 0, \ldots\right)$. A sequência $(x_m)_{m\in N^*}$ é uma sequência em c_{00} que converge para x, já que $\|x_m - x\| = \frac{1}{m+1} \to 0$ quando $m \to +\infty$.

Observemos, pelos exemplos acima, que

$$c_{00} \subset c_0 \subset c \subset l_\infty.$$

Para finalizar esta seção, vejamos os espaços $\ell_p(1 \leqslant p < \infty)$.

Exemplo 1.21. Seja ℓ_p, com $p \in [1, +\infty)$, o conjunto de todas as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de elementos de $\mathbb{R}$ tais que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Se definirmos

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

e

$$\lambda\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\,,$$

sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\,, (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell_p$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então ℓ_p é um espaço vetorial, e a aplicação

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell_p \mapsto \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em ℓ_p.

Não havendo dificuldades em tratar o caso em que $p = 1$, analisemos o caso com $p > 1$. Antes disso, vamos provar três afirmações:
Afirmação 1: Se $0 < \alpha < 1$ e $a, b \geqslant 0$, então $a^{\alpha} b^{1-\alpha} \leqslant \alpha a + (1-\alpha) b$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $0 < a < b$ (o caso em que $a = b = 0$ é óbvio). Consideremos a aplicação derivável $t \in [a, b] \mapsto t^{1-\alpha} \in \mathbb{R}$. Pelo teorema do valor médio, existe $t \in (a, b)$ tal que

$$(1-\alpha) t^{-\alpha} (b-a) = b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}.$$

Como $a < t$, então $t^{-\alpha} < a^{-\alpha}$. Daí

$$b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} = (1-\alpha) t^{-\alpha} (b-a) < (1-\alpha) a^{-\alpha} (b-a).$$

Multiplicando essa desigualdade por a^{α}, temos $a^{\alpha} b^{1-a} - a < (1-\alpha)(b-a)$, isto é

$$a^{\alpha} b^{1-\alpha} < \alpha a + (1-\alpha) b.$$

Afirmação 2: Seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $n \in \mathbb{N}$ e $x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, então

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(}\textit{Desigualdade de Hölder}^{1}\text{)}$$

[1]Otto Ludwig Hölder (1859–1937): Nascido em Stuttgart, Alemanha, estudou engenharia no Instituto Politécnico de Stuttgart por um ano e em 1877 foi para Universidade de Berlim. Sua área de pesquisa era a convergência das Séries de Fourier, posteriormente se interessando pela Teoria dos Grupos. Em 1884, descobriu a desigualdade que leva seu nome.

Com efeito, o caso em que $\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p = 0$ (ou $\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q = 0$) é claro. Assim suponhamos que $\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p > 0$ e $\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q > 0$. Para cada k, com $0 \leqslant k \leqslant \dot{n}$, consideremos

$$a_k = \frac{|x_k|^p}{\sum_{j=0}^{n} \left|x_j\right|^p} \quad \text{e} \quad b_k = \frac{|y_k|^q}{\sum_{j=0}^{n} \left|y_j\right|^q}.$$

Aplicando a Afirmação 1 com $\alpha = \frac{1}{p}$, temos

$$(a_k)^{1/p} \cdot (b_k)^{1/q} = a_k^{\alpha} \cdot b_k^{1-\alpha} \leqslant \alpha a_k + (1-\alpha) b_k = \frac{1}{p} a_k + \frac{1}{q} b_k.$$

Logo,

$$\frac{|x_k|}{\left(\sum_{j=0}^{n} \left|x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y_k|}{\left(\sum_{j=0}^{n} \left|y_j\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_k|^p}{\sum_{j=0}^{n} \left|x_j\right|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_k|^q}{\sum_{j=0}^{n} \left|y_j\right|^q},$$

para cada $k = 0, 1, \ldots, n$.

Assim

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{|x_k|}{\left(\sum_{j=0}^{n} \left|x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y_k|}{\left(\sum_{j=0}^{n} \left|y_j\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \right] \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{p} \cdot \frac{|x_k|^p}{\sum_{j=0}^{n} \left|x_j\right|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_k|^q}{\sum_{j=0}^{n} \left|y_j\right|^q} \right]$$

ou seja,

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} |x_k| \cdot |y_k|}{\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} \left(\frac{\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p}{\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{\sum_{k=0}^{n} |y_k|^p}{\sum_{k=0}^{n} |y_k|^p} \right)$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

seguindo a desigualdade desejada.

Afirmação 3: Se $n \in \mathbb{N}$ e $x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, então

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(Desigualdade de Minkowski[2])

O resultado é claro se $\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k + y_k| = 0$. Assim suponhamos que $\sum\limits_{k=0}^{n} | x_k + y_k | > 0$. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |x_k| + \sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |y_k| \\
&\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \left(|x_k + y_k|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \left(|x_k + y_k|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

sendo a última desigualdade obtida aplicando duas vezes a desigualdade de Hölder.

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ implica $p = (p-1)q$, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p &\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]
\end{aligned}$$

[2]Hermann Minkowski (1864–1909): Nascido em Alexotas, Império Russo (hoje Kaunas, Lituânia), mostrou seu talento para matemática ainda cedo, ao estudar no ginásio em Königsberg, Alemanha. Em 1883 ganhou o prêmio da Academia de Paris por ter dado uma solução para o problema do número de representações de um inteiro como soma de cinco quadrados. Seu interesse era pela matemática pura, em particular, pelas Formas Quadráticas e pelas Frações Contínuas. Sua contribuição mais original foi sobre Geometria dos Números, conduzindo-o a trabalhar em Corpos Convexos.

Multiplicando essa desigualdade por $\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{-\frac{1}{q}} > 0$, vem

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

seguindo a Afirmação 3.

Com as três afirmações que acabamos de demonstrar, vejamos que ℓ_p é um espaço normado. Com efeito, o fato de ℓ_p ser um espaço vetorial segue diretamente da desigualdade de Minkowski, obtida na Afirmação 3. Além disso, a aplicação

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell_p \longmapsto \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em ℓ_p. Realmente as condições (n_1) e (n_2) da Definição 1.2 podem ser facilmente verificadas. Já a condição (n_3) provém diretamente da desigualdade de Minkowski. Portanto ℓ_p é um espaço normado.

Vejamos que ℓ_p é um espaço de Banach. Para isso, seja $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de Cauchy em ℓ_p. Para cada $m \in \mathbb{N}^*$, $x_m = \left(x_{mj}\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$. Como $(x_m)_{m\in N^*}$ é de Cauchy em ℓ_p, temos que, para cada $j \in \mathbb{N}^*$ fixado, a sequência $(x_{mj})_{m\in N^*}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ já que

$$\left|x_{mj} - x_{nj}\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_{mj} - x_{nj}\right|^p\right)^{1/p} = \|x_m - x_n\|.$$

Como $\mathbb{K}$ é um espaço de Banach, para cada $j \in \mathbb{N}^*$ fixado, existe $a_j \in \mathbb{K}$ que é limite da sequência $\left(x_{mj}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$. Tomemos $a = (a_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$. Vamos mostrar que $a \in \ell_p$ e $x \to a$ em ℓ_p. Ora, pelo fato de $(x_m)_{m\in\mathbb{N}*}$ ser de Cauchy, $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ é limitada. Assim existe $C > 0$ tal que

$$\|x_m\| \leqslant c$$

para todo $m \in \mathbb{N}^*$. Logo, para todo $m \in \mathbb{N}^*$ e $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \left|x_{m_j}\right|^p\right)^{1/p} \leqslant \|x_m\| \leqslant c.$$

Agora fixemos $k \in \mathbb{N}^*$. Fazendo $m \to +\infty$ na desigualdade acima, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \left|a_j\right|^p\right)^{1/p} \leqslant C.$$

Como $k \in \mathbb{N}^*$ foi fixado arbitrariamente, a desigualdade anterior mostra que $a \in \ell_p$. Para vermos que $x_m \to a$ em ℓ_p, tomemos $\varepsilon > 0$. Como $(x_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ é de Cauchy, existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_{mj} - x_{nj} \right|^p \right)^{1/p} = \|x_m - x_n\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.12}$$

para quaisquer $m, n \geqslant m_0$. Agora fixemos $k \in \mathbb{N}^*$. Como $x_{mj} \to a_j$ quando $m \to +\infty$, para cada $j \in \mathbb{N}^*$ com $1 \leqslant j \leqslant k$, existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\left| x_{nj} - a_j \right|^p < \frac{\varepsilon^p}{2^p \cdot k} \tag{1.13}$$

para qualquer $n > m_j$. Seja $N = \max\{m_0, m_1, \ldots, m_k\}$. Segue da desigualdade de Minkowski que sempre que $n > N$ e $m > m_0$,

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \left| x_{mj} - a_j \right|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{k} \left| x_{mj} - x_{nj} \right|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{k} \left| x_{nj} - a_j \right|^p \right)$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{5\varepsilon}{6}.$$

Por (1.12) e (1.13), fazendo $k \to +\infty$, obtemos que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_{mj} - a_j \right|^p \right)^{1/p} < \varepsilon$$

sempre que $m > m_0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\|x_m - a\| < \varepsilon$ sempre que $m > m_0$, o que mostra que $x_m \to a$.

1.6 Aplicações lineares

Numa disciplina de Álgebra Linear, estudamos as aplicações lineares entre espaços vetoriais E e F de dimensão finita. Inclusive vemos que o conjunto de todas as aplicações lineares de E e F, denotado por $\mathcal{L}_a(E, F)$, é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas pontualmente e que é isomorfo ao espaço vetorial $\mathcal{M}(m, n)$ das matrizes em $\mathbb{K}$ de ordem $m \times n$, quando a dimensão de E é n e a dimensão de F é m com $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Enquanto que uma aplicação linear $T : E \to F$ na Álgebra Linear tem E e F apenas com uma estrutura algébrica associada a eles, na Análise Funcional o interesse é outro: que E e F sejam espaços normados e, mais ainda, espaços de Banach. Podemos dizer que o interesse em estudar aplicações lineares entre espaços de dimensão finita se amplia, já que na Análise Funcional o foco é estudar aplicações lineares entre espaços de dimensão infinita. Nessa seção, vamos estudar $\mathcal{L}(E, F)$ quando E e F são espaços normados quaisquer, que denota o espaço vetorial de todas as aplicações lineares contínuas de E em F. Vamos introduzir uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$ e mostrar que esse espaço normado é um espaço de Banach quando F for um espaço de Banach.

Nos espaços normados, temos a noção "estar próximo de". Assim podemos definir continuidade de uma aplicação $T : E \to F$ quando E e F são espaços normados.

Definição 1.15. Sejam $T : E \to F$ uma função com E e F espaços normados e $x_0 \in E$. Dizemos que T é *contínua* em x_0 se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$$

para todo $x \in E$ com $\|x - x_0\| < \delta$.

Podemos dizer, de forma equivalente, que $T : E \to F$ é contínua em $x_0 \in E$ quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$T(B(x_0, \delta)) \subset B(T(x_0), \varepsilon).$$

Exemplo 1.22. Uma aplicação constante $T : E \to F$, definida por $T(x) = k \in F$ para todo $x \in E$, é uma função contínua. Temos, também que, a norma $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, do espaço normado E, é uma função contínua, pois $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in E$.

Exemplo 1.23 (Continuidade das operações de soma e multiplicação por um escalar)**.** Seja E um espaço normado. A operação de soma $s : E \times E \longrightarrow E$ definida por $s(x, y) = x + y$ e a operação de multiplicação por escalar $m : \mathbb{K} \times E \to E$ definida por $m(\lambda, x) = \lambda x$ são aplicações contínuas. Com efeito, fixados $x_0, y_0 \in E$ e $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}
\|s(x, y) - s(x_0, y_0)\| &= \|(x + y) - (x_0 + y_0)\| \\
&\leqslant \|x - x_0\| + \|y - y_0\| \\
&\leqslant 2 \max\{\|x - x_0\|, \|y - y_0\|\} \\
&= 2\|(x - x_0, y - y_0)\| \\
&= 2\|(x, y) - (x_0, y_0)\|,
\end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in ExE$, e

$$\begin{aligned}
\|m(\lambda, x) - m(\lambda_0, x_0)\| &= \|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \\
&= \|\lambda x - \lambda_0 x + \lambda_0 x - \lambda_0 x_0\| \\
&\leqslant \|x\| \|\lambda - \lambda_0\| + \|\lambda_0\| x - x_0\|,
\end{aligned}$$

para todo $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$. Daí s é contínua em $(x_0, y_0) \in E \times E$ e m é contínua em $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times E$.

Definição 1.16. Uma função $T : E \to F$ é dita *contínua* quando é contínua em todo ponto de E. Quando T não é contínua num ponto $x_0 \in E$, T é dita descontínua nesse ponto.

Devemos observar que a noção de continuidade num ponto x_0 depende apenas do comportamento da função nas proximidades do ponto. Em verdade, dado $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ depende de ε e do ponto x_0. Quando dado $\varepsilon > 0$, exista um $\delta > 0$ que independa do ponto x_0, a função receberá um outro nome, aliás, como já visto em alguma disciplina de Análise Real.

Definição 1.17. Uma aplicação $T : E \longrightarrow F$ é dita *uniformemente contínua* se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(y)\| < \varepsilon$ para quaisquer $x, y \in E$ com $\|x - y\| < \delta$.

É claro que se $T : E \to F$ é uniformemente contínua, então T é contínua. Contudo a recíproca é falsa (numa disciplina de Análise Real, vimos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é contínua, mas não é uniformemente contínua). A seguir, veremos que as noções de continuidade e continuidade uniforme são equivalentes se $T : E \to F$ é linear.

Teorema 1.1. *Sejam E e F espaços normados e $T : E \to F$ uma aplicação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *T é uniformemente contínua;*

(b) *T é contínua;*

(c) *T é contínua em algum ponto de E;*

(d) *T é contínua na origem;*

(e) $\sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leqslant 1\} < \infty$*;*

(f) *existe uma constante $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. As implicações (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) são verdadeiras e não dependem do fato de T ser linear. Vejamos que $(c) \Rightarrow (d)$. Ora suponhamos T contínua em algum $x_0 \in E$. Seja $\varepsilon > 0$; existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ sempre que $x \in E$ com $\|x - x_0\| < \delta$. Agora tomemos $x \in E$ com $\|x\| < \delta$. Come $T(0) = 0$ e $\|(x + x_0) - x_0\| < \delta$, temos que

$$\|T(x)\| = \|T(x) + T(x_0) - T(x_0)\| = \|T(x + x_0) - T(x_0)\| < \varepsilon,$$

o que mostra que T é continua em 0.

Vejamos que (d) $\Rightarrow$ (e). Pelo fato de T ser contínua na origem, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\| < 1$ sempre que $x \in E$ com $\|x\| < \delta$. Agora, tomemos $x \in E$ com $\|x\| \leqslant 1$. Então $\left\|\frac{\delta x}{2}\right\| < \delta$ e, consequentemente, $\left\|T\left(\frac{\delta x}{2}\right)\right\| < 1$. Daí, $\|T(x)\| < \frac{2}{\delta}$ para todo $x \in E$ com $\|x\| \leqslant 1$, mostrando que $\sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leqslant 1\} < \infty$.

Vejamos que (e) $\Rightarrow$ (f). Por (e), existe $M > 0$ tal que

$$\sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leqslant 1\} = M.$$

Assim, $\|T(x)\| \leqslant M$ para todo $x \in E$ com $\|x\| \leqslant 1$. Tomemos $x \in E$ qualquer, $x \neq 0$. Então $\frac{x}{\|x\|} \in E$ e tem norma 1. Logo,

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant M$$

e, consequentemente,

$$\|T(x)\| \leqslant M\|x\|.$$

A desigualdade acima se verifica se $x = 0$. Portanto, $\|T(x)\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in E$.

Vejamos que (f) $\Rightarrow$ (a). Para isso, seja $\varepsilon > 0$. Consideremos $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Para quaisquer $x, y \in E$ com $\|x - y\| < \delta$, temos

$$\|T(x - y)\| \leqslant M\|x - y\| < \varepsilon.$$

Daí, $\|T(x) - T(y)\| < \varepsilon$ pana quaisquer $x, y \in E$ com $\|x - y\| < \delta$ como desejado. $\square$

Por (e) do Teorema 1.1, podemos definir uma norma no conjunto das aplicações lineares contínuas de E em F, como mostra a seguinte

Proposição 1.21. *Sejam E e F espaços normados. A função $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E, F) \to \mathbb{R}$, que a cada $T \in \mathcal{L}(E, F)$ associa o número real*

$$\sup\{\|T(x)\|; \quad x \in E \text{ e } \|x\| \leqslant 1\},$$

é uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$.

Demonstração. Vamos verificar as condições (n_1), (n_2) e (n_3) da Definição 1.2.
(n_1): Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ com $\|T\| = 0$. Então $\|T(x)\| = 0$ para todo $x \in E$ com $\|x\| \leqslant 1$. Tomemos $x \in E$ qualquer com $x \neq 0$. Temos $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = 0$ e, portanto, $\|T(x)\| = 0$. Como F é um espaço normado, $T(x) = 0$. Portanto, T é a função nula de $\mathcal{L}(E, F)$.
(n_2) : Sejam $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Como F é um espaço normado, $\|(\lambda T)(x)\| = |\lambda|\|T(x)\|$ para todo $x \in E$. Assim,

$$\begin{aligned}\|\lambda T\| &= \sup\{\|(\lambda T)(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leqslant 1\}\\ &= \sup\{|\lambda|\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leqslant 1\}\\ &= |\lambda| \cdot \|T\|.\end{aligned}$$

(n_3) : Sejam T e S em $\mathcal{L}(E, F)$. Como F é normado,

$$\|(T + S)(x)\| = \|T(x) + S(x)\| \leqslant \|T(x)\| + \|S(x)\|$$

para todo $x \in E$. Assim,

$$\begin{aligned}\|T+S\| &= \sup\{\|(T+S)(x); x \in E \text{ e } \|x\| \leqslant 1\} \\ &= \sup\{\|T(x)+S(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leqslant 1\} \\ &\leqslant \sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leqslant 1\} \\ &\quad + \sup\{\|S(x); x \in E \text{ e } \|x\| \leqslant 1\} \\ &= \|T\| + \|S\|.\end{aligned}$$

□

Corolário 1.4. *Para quaisquer $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $x \in E$, temos $\|T(x)\| \leqslant \|T\|\|x\|$.*

Demonstração. Fica ao cargo do leitor. □

O Teorema 1.1 nos permite mostrar que toda aplicação linear $T : E \to F$, onde E e F são espaços normados com E de dimensão finita, é contínua.

Proposição 1.22. *Seja $T : E \to F$ uma aplicação linear, onde E é um espaço normado de dimensão finita e F um espaço normado qualquer. Então, T é contínua.*

Demonstração. Suponhamos $\dim E = n$. Consideremos uma base $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de E com $\|v_j\| = 1$ para todo $1 \leqslant j \leqslant n$. Tomemos $v \in E$ com $\|v\|1$. existem escalares $a_1, a_2 \ldots, a_n$ tais que

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n.$$

Como $\dim E = n$, E é isomorfo ao espaço vetorial $\mathbb{K}^n$ e, assim, podemos considerar em E a norma $\|\cdot\|_1$ do Exemplo 1.7. Então,

$$\|T(v)\| \leqslant |a_1|\,\|T(v_1)\| + |a_2|\,\|T(v_2)\| + \ldots + |a_n|\,\|T(v_n)\| \leqslant M\|v\|,$$

com $M = \max\left\{\left\|T\left(v_j\right)\right\|; 1 \leqslant j \leqslant n\right\}$. Como $\|v\| \leqslant 1$, segue que

$$\sup\{\|T(v)\|; v \in E \text{ com } \|v\| \leqslant 1\} \leqslant M$$

e, portanto, T é contínua. □

Pelo resultado acima, temos que $\mathcal{L}_a(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$ quando E é um espaço normado de dimensão finita e F é um espaço normado qualquer. De um modo geral, temos $\mathcal{L}(E,F) \subsetneq \mathcal{L}_a(E,F)$. Ou seja, existem aplicações lineares de E em F que não são contínuas.

O próximo resultado mostra que $\mathcal{L}(E,F)$ com a norma dada pelo Teorema 1.1 é um espaço de Banach, se F é um espaço de Banach.

Teorema 1.2. *O espaço normado $\mathcal{L}(E,F)$ é um espaço de Banach se F é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E,F)$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ sempre que $n,m > n_0$. Pelo Corolário acima,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \varepsilon\|x\|$$

para todo $x \in E$ e para quaisquer $n,m \geqslant n_0$. Portanto, para cada $x \in E$ fixado, a sequência $(T_n(x))_{n\in N^*}$ é uma sequência de Cauchy em F, que é convergente, já que F é um espaço de Banach. Chamemos $T(x)$ o limite de $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Agora, defina a função $T : E \to F$ por $T(x) = \lim T_n(x)$, para cada $x \in E$. Vamos mostrar que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e que $T_n \to T$ em $\mathcal{L}(E,F)$. A linearidade de T segue do fato de que cada T_n é linear e da Proposição 1.5. Vejamos que T é contínua. Pelo Teorema 1.1, basta mostrar que T é contínua na origem. Tomemos $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\|x\|$ para todo $n,m \geqslant n_0$ e para todo $x \in E$. Agora, para cada $x \in E$ com $\|x\| \leqslant 1$, existe $n_x \in \mathbb{N}^*$ tal que $\|T_n(x) - T(x)\| < \varepsilon/3$ para todo $n \geqslant n_x$. Tomemos $m_0 > n_0$. Pela continuidade de T_{m_0} na origem, existe $0 < \delta < 1$ tal que $\left\|T_{m_0}(x)\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$ sempre que $x \in E$ com $\|x\| < \delta$. Fixemos $N_x > \max\{n_x, n_0\}$. Então, para cada $x \in E$ com $\|x\| < \delta$, temos

$$\|T(x)\| \leqslant \|T(x) - T_{N_x}(x)\| + \left\|T_{N_x}(x) - T_{m_0}(x)\right\| + \left\|T_{m_0}(x)\right\| < \varepsilon,$$

mostrando a continuidade de T. Deixamos a cargo do leitor provar que $T_n \to T$ em $\mathcal{L}(E,F)$. $\square$

2 O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado

2.1 O Teorema da Aplicação Aberta

Um dos resultados mais importantes da Análise Funcional em espaços de Banach é o Teorema do Gráfico Fechado, que apresenta uma condição para que uma aplicação linear entre espaços de Banach seja contínua. Vimos no Capítulo 1 que se os espaços têm dimensão finita, toda aplicação linear entre eles é contínua. Mas, em dimensão infinita isso não ocorre.

Nessa seção vamos apresentar um resultado equivalente ao Teorema do Gráfico Fechado: o Teorema da Aplicação Aberta. Antes de enunciá-lo, vamos apresentar a definição de aplicação aberta e alguns resultados necessários para o entendimento da demonstração que daremos aqui.

Definição 2.1. Uma aplicação $T : E \longrightarrow F$, onde E e F são espaços normados, é uma *aplicação aberta* se $T(A)$ é um aberto em F sempre que A é um aberto em E.

Proposição 2.1. *Sejam E e F espaços normados e $T : E \to F$ uma aplicação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *T é aberta;*

(b) *Existe $r > 0$ tal que $B_F(0, r) \subset T(B_E(0, 1))$.*

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b). Como $B_E(0,1)$ é um aberto em E, $T\,(B_E(0,1))$ é um aberto em F. Como $0 \in T\,(B_E(0,1))$, já que $T(0) = 0$, existe $r > 0$ tal que $B_F(0,r) \subset T\,(B_E(0,1))$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Tome A um aberto em E. Devemos mostrar que $T(A)$ é um aberto em F. Para isso, tomemos $y \in T(A)$. Existe $x \in A$ tal que $y = T(x)$. Como A é um aberto, existe $s > 0$ tal que

$$x + sB_E(0,1) = B_E(x,s) \subset A,$$

pela Proposição 1.7. Pela linearidade de T,

$$T(x) + s \cdot T\,(B_E(0,1)) \subset T(A).$$

Pela hipótese, existe $r > 0$ tal que $B_F(0,r) \subset T\,(B_E(0,1))$, ou seja,

$$T(x) + sB_F(0,r) \subset T(A),$$

donde

$$B_F(y,sr) \subset T(A),$$

provando o desejado. □

Exemplo 2.1. A aplicação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$, é aberta. Já a aplicação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, não é aberta, pois $T(-1,1) = [0,1)$.

Definição 2.2. Seja C um subconjunto de um espaço normado E. Dizemos que C é um *conjunto convexo* quando

$$tx + (1-t)y \in A, \text{ para quaisquer } x, y \in A \text{ e } t \in [0,1].$$

Proposição 2.2. *Seja X um espaço vetorial e seja $A \subset X$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) A é convexo;

(b) $(s+t)A = sA + tA$ para quaisquer $r, t \in \mathbb{R}^*$.

Demonstração. Deixamos ao cargo do leitor. □

Exemplo 2.2. Seja E um espaço normado e sejam $x \in E$ e $r > 0$. As bolas $B(x;r)$ e $B[x;r]$ são conjuntos convexos. Com efeito, dados $y, z \in B(x,r)$ e $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \|x - (ty + (1-t)z)\| &= \|t(x-y) + (1-t)(x-z)\| \\ &\leqslant t\|x-y\| + (1-t)\|x-z\| \\ &\leqslant tr + (1-t)r = r, \end{aligned}$$

mostrando que $ty + (1-t)z \in B(x,r)$. Logo, $B(x;r)$ é convexo. De modo análogo, podemos provar que $B[x;r]$ é convexo.

Deixamos para o leitor a demonstração da seguinte

Proposição 2.3. *Seja E um espaço normado e seja $C \subset E$ um conjunto convexo. Então, $\overline{C}$ e $\operatorname{int} C$ são conjuntos convexos.*

Para a demonstração do Teorema da Aplicação Aberta vamos precisar do Teorema de Baire[1], que é um resultado importante de Topologia Geral, que aqui vai ser apresentado no contexto dos espaços de Banach.

Teorema 2.1 (Teorema de Baire)**.** *Sejam E um espaço de Banach e $(F_n)_{n\geqslant 1}$ uma sequência de subconjuntos fechados de E tais que $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que F_{n_0} tem interior não vazio.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\operatorname{int}(F_n) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Seja, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = E \setminus F_n$. Pela Proposição 1.13, cada A_n é aberto e

$$\overline{A_n} = \overline{(E \setminus F_n)} = E \setminus F_n \cup \partial(E \setminus F_n) = E \setminus F_n \cup \partial F_n = E \setminus \operatorname{int}(F_n) = E,$$

mostrando que $A_n \neq \emptyset$. Como $\overline{A_n} = E$, para todo $x \in E$ e para todo $r > 0$,

$$B(x;r) \cap A_n \neq \emptyset$$

Seja $a_1 \in A_1$. Como A_1 é aberto, existe $0 < \delta_1 < 1$ tal que $B[a_1, \delta_1] \subset A_1$. Como $\overline{A_2} = E$, temos $A_2 \cap B(a_1, \delta_1) \neq \emptyset$. Além disso, como $A_2 \cap B(a_1, \delta_1)$ é aberto, existem $a_2 \in A_2 \cap B(a_1, \delta_1)$ e $0 < \delta_2 < 1/2$ tais que

$$B[a_2, \delta_2] \subset A_2 \cap B(a_1, \delta_1) \subset A_2 \cap B[a_1, \delta_1]$$

Continuando indutivamente para cada $n \in \mathbb{N}^*$, como $\overline{A_n} = E$, temos

$$A_n \cap B(a_{n-1}, \delta_{n-1}) \neq \emptyset$$

e, daí, existem $a_n \in A_n \cap B(a_{n-1}, \delta_{n-1})$ e $0 < \delta_n < 1/n$ tais que

$$B[a_n, \delta_n] \subset A_n \cap B(a_{n-1}, \delta) \subset A_n \cap B[a_{n-1}, \delta_{n-1}].$$

Construímos, assim, a sequência $(a_n)_{n\in N^*}$ em E com $a_n \in A_n$ para todo $n \in N^*$ e $a_n \in B(a_{n-1}, \delta_{n-1})$ para todo $n \geqslant 2$, e a sequência $(\delta_n)_{n\in N^*}$ em $\mathbb{R}$ com $0 < \delta_n < \frac{1}{n}$ para todo $n \in N^*$ e $B[a_n, \delta_n] \subset A_n \cap B(a_{n-1}, \delta_{n-1})$ para todo $n \geqslant 2$ e $B[a_1, \delta_1] \subset A_1$.

Afirmação. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ é uma sequência de Cauchy.

De fato, tomemos $\varepsilon > 0$. Consideremos $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. Então, se $m, n > n_0$, temos

$$a_m \in B[a_m, \delta_m] \subset B\left[a_{n_0}, \delta_{n_0}\right]$$

[1] Em Topologia Geral, o Teorema de Baire assume E um espaço compacto de Hausdorff ou E um espaço métrico completo (Munkres 2000).

e

$$a_n \in B[a_n, \delta_n] \subset B\left[a_{n_0}, \delta_{n_0}\right];$$

consequentemente

$$\|a_m - a_n\| \leqslant \left\|a_m - a_{n_0}\right\| + \left\|a_{n_0} - a_n\right\| = 2\delta_0 < \frac{2}{n_0} < \varepsilon,$$

mostrando que $\|a_m - a_n\| < \varepsilon$ sempre que $m, n > n_0$. Logo, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é uma sequência de Cauchy em E.

Como E é um espaço de Banach, existe $a \in E$ tal que $a_n \to a$. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, como $a_m \in B[a_m, \delta_m] \subset B[a_n, \delta_n]$ sempre que $m \geqslant n$, então $a \in \overline{B[a_n, \delta_n]} = B[a_n, \delta_n]$ já que $B[a_n, \delta_n]$ é um conjunto fechado. Consequentemente, como $B[a_n, \delta_n] \subset A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Portanto,

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E \setminus F_n) = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = E \setminus E = \emptyset,$$

o que é um absurdo. $\square$

Vejamos agora o Teorema da Aplicação Aberta:

Teorema 2.2 (Teorema da Aplicação Aberta)**.** *Sejam E e F espaços de Banach. Se $T : E \longrightarrow F$ é uma aplicação linear, sobrejetiva e contínua, então T é aberta.*

Demonstração. Pela Proposição 2.1 basta mostrar que existe $r > 0$ tal que $B_F(0, r) \subset T(B_E(0, 1))$. Vejamos que existe $r > 0$ tal que $B_F(0, 2r) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$. De fato, desde que T é uma aplicação sobrejetiva, temos que

$$F = \bigcup_{n\geqslant 1} n\overline{T(B_E(0, 1))}.$$

Pelo Teorema de Baire, existe $m \geqslant 1$ tal que

$$\operatorname{int}\left(m\overline{T(B_E(0, 1))}\right) \neq \emptyset,$$

o que implica em $\operatorname{int}\overline{(T(B_E(0, 1)))} \neq \emptyset$. Daí, existe $y \in \operatorname{int}\overline{(T(B_E(0, 1)))}$, donde $B_F(y, 4r) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$ para algum $r > 0$. Como $B_E(0, 1)$ é um subconjunto convexo de E, pela Proposição 2.3, $\overline{T(B_E(0, 1))}$ é convexo. Assim,

$$B_F(0, 4r) = B_F(y, 4r) - y \subset \overline{T(B_E(0, 1))} + \overline{T(B_E(0, 1))} = 2\overline{T(B_E(0, 1))}.$$

Portanto, existe $r > 0$ tal que $B_F(0, 2r) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$. Daí,

$$B_F\left(0, \frac{r}{2^{n-1}}\right) \subset \overline{T\left(B\left(0, \frac{1}{2^n}\right)\right)} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.1}$$

Tomemos agora $z \in B_F(0,r)$. Devemos mostrar que existe $x \in B_E(0,1)$ tal que $z = T(x)$. Por (2.1), no caso em que $n = 1$, $B_F(0,r) \subset \overline{T(B_E(0,1/2))}$. Assim, existe $x_1' \in E$ com $\|x_1'\| < 1/2$ tal que $\|z - T(x_1')\| < \frac{r}{2}$. Por (2.1), no caso em que $n = 2$, $B_F(0,r/2) \subset \overline{T(B_E(0,1/4))}$. Assim, existe $x_2' \in E$ com $\|x_2'\| < \frac{1}{4}$ tal que $\|z - T(x_1') - T(x_2')\| < r/4$.

Continuando o processo, obtemos uma sequência $(x_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ em E tal que $\|x_n'\| < \frac{1}{2n}$ e $\|z - T(x_1') - \cdots - T(x_n')\| < \frac{r}{2^n}$. Consideremos a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = x_1' + \cdots + x_n'$. Temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ é uma sequência de Cauchy. Como E é um espaço de Banach, existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$. Como, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $\|x_n\| \leqslant \|x_1'\| + \cdots + \|x_n'\| < \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} = 1$, temos que $\|x\| < 1$, ou seja, $x \in B_E(0,1)$. Vejamos que $z = T(x)$. Ora, para cada $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\|z - T(x_n)\| &= \|z - T(x_1' + \cdots + x_n')\| \\
&= \|z - T(x_1') - \cdots - T(x_n')\| \\
&< \frac{r}{2^n}.
\end{aligned}$$

Como T é contínua e $x_n \to x$, temos $T(x_n) \to T(x)$. Assim, $z = T(x)$. □

2.2 O Teorema do Gráfico Fechado

O Teorema do Gráfico Fechado é um dos principais resultados da Análise Funcional no contexto dos espaços de Banach. Nessa seção, vamos mostrar que esse Teorema é equivalente ao Teorema da Aplicação Aberta. Antes, vejamos a seguinte definição.

Definição 2.3. Sejam E e F espaços normados e $T : E \to F$ uma aplicação. Definimos o *gráfico* de T como o conjunto

$$\text{Graf}(T) = \{(x,y) \in E \times F; y = T(x)\}.$$

Em outras palavras

$$\text{Graf}(T) = \{(x, T(x))\,; x \in E\}.$$

Quando $T : E \to F$ é linear, temos que Graf(T) é subespaço vetorial de $E \times F$. E se T é contínua, temos que Graf(T) é um subespaço fechado de $E \times F$. Ou seja, se $T : E \to F$ é uma aplicação linear contínua, com E e F espaços normados, então Graf(T) é fechado. O Teorema do Gráfico Fechado trás a recíproca desse fato, assumindo E e F espaços de Banach.

Teorema 2.3 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** *Sejam E e F dois espaços de Banach. Se $T : E \to F$ é uma aplicação linear cujo gráfico é fechado, então T é contínua.*

Demonstração. Seja $T : E \to F$ uma aplicação linear com gráfico fechado. Para provarmos que T é contínua, vamos mostrar que T é a composição de duas funções contínuas.

Ora, consideremos $T_1 : (x, T(x)) \in \mathrm{Graf}(T) \mapsto x \in E$. Como, por hipótese, $\mathrm{Graf}(T)$ é fechado em $E \times F$ e $E \times F$ é um espaço de Banach (pela Proposição 1.20), segue da Proposição 1.19 que $\mathrm{Graf}(T)$ é um espaço de Banach. Assim, T_1 é uma aplicação linear, contínua e bijetiva entre espaços de Banach e, portanto, pelo Teorema da Aplicação Aberta, T_1 é aberta, o que equivale a dizer que T_1^{-1} é contínua. Agora, consideremos $T_2 : (x, T(x)) \in \mathrm{Graf}(T) \mapsto T(x) \in F$. Claramente T_2 é linear e contínua e, assim,

$$T = T_2 \circ T_1^{-1}$$

é contínua em E, como a composta de duas funções contínuas.

□

$$\begin{tikzcd}
x \in E \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "T_1^{-1}"'] & & T(x) \in F \\
(x, T(x)) \in \mathrm{Graf}(T) \arrow[urr, "T_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.1: $T = T_2 \circ T_1^{-1}$

A demonstração acima apresenta que o Teorema da Aplicação Aberta implica o Teorema do Gráfico Fechado. Vejamos a seguir que o Teorema do Gráfico Fechado implica o Teorema da Aplicação Aberta. Mais precisamente, esses dois resultados clássicos da Análise Funcional são equivalentes. Antes, contudo, vamos precisar de alguns resultados.

Definição 2.4. Seja E um espaço vetorial. Consideremos E_1 um subespaço vetorial de E. Se $a, b \in E$, dizemos que a é equivalente a b módulo E_1 se

$$a - b \in E_1,$$

e denotamos por $a \sim b$ ou $a \sim b(\mathrm{Mod} E_1)$ quando for necessário apresentar E_1. Podemos definir, então, una relação de equivalência em E, onde a classe de equivalência do vetor a, denotada por $[a]$, é dada por

$$[a] = \{u \in E; u \sim a\}$$

Observemos que a classe de equivalência do vetor nulo é o subespaço E_1, ou seja,

$$[0] = E_1.$$

Proposição 2.4. *Seja E_1 um subespaço do espaço vetorial E. As operações de adição e multiplicação por escalar no conjunto das classes de equivalência módulo E_1 definidas por*

$$[a] + [b] = [a + b],$$
$$\lambda[a] = [\lambda a],$$

onde $a, b \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, tornam o conjunto das classes de equivalência módulo E_1 um espaço vetorial, chamado espaço quociente de E por E_1 e denotado por E/E_1

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor. □

A aplicação $\pi : E \longrightarrow E/E_1$ definida por $\pi(x) = [x]$, para cada $x \in E$, é chamada de aplicação quociente. Claramente, π é linear e sobrejetiva.

Proposição 2.5. *Seja E um espaço normado e E_1 um subespaço fechado de E. Defina*

$$\|[x]\| = \inf_{y \in [x]} \|y\|, \quad [x] \in E/E_1.$$

Então:

(1) $[x] = \{x\} + E_1$*;*

(2) A função $[x] \in E/E_1 \longmapsto \|[x]\| \in \mathbb{R}$ *é uma norma em* E/E_1*.*

(3) A aplicação quociente $\pi : E \to E/E_1$ *é contínua e aberta.*

(4) Se E é um espaço de Banach, então E/E_1 é um espaço de Banach.

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor. □

Seja $T : E \to F$ uma aplicação linear contínua, com E e F espaços de Banach. Consideremos $\ker T$. Pelo fato de T ser contínua, $\ker T$ é um subespaço fechado de E. Portanto, a Proposição acima se aplica ao núcleo de T e, consequentemente, a aplicação $\pi : E \to E/\ker T$ é contínua e aberta e $E/\ker T$ é um espaço de Banach. O próximo resultado também será necessário para provarmos que o Teorema do Gráfico Fechado implica o Teorema da Aplicação Aberta.

Proposição 2.6. *Seja $T : E \to F$ uma aplicação linear contínua, com E e F espaços de Banach. A aplicação $\widetilde{T} : E/\ker T \longrightarrow F$ definida por*

$$\widetilde{T}(x + \ker T) = T(x)$$

é linear, contínua e bijetiva.

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor. □

Vamos, agora, *provar o Teorema da Aplicação Aberta com o Teorema do Gráfico Fechado e, assim, provar que esses dois resultados são equivalentes.*

Seja $T : E \to F$ uma aplicação linear, sobrejetiva e contínua, com E e F espaços de Banach. Então, T é aberta.

Demonstração. Consideremos a aplicação

$$\widetilde{T} : E/\ker T \longrightarrow F$$

definida por $T(x + \ker T) = T(x)$. Pela Proposição acima, $\widetilde{T}$ é linear, contínua e bijetiva. Assim, a aplicação inversa $\widetilde{T}^{-1}$ é linear. Vejamos que $\widetilde{T}^{-1}$ é contínua. Ora, seja

$$\operatorname{Graf}\left(\widetilde{T}^{-1}\right) = \{(y, T^{-1}(y);\ y \in F\},$$

onde

$$T^{-1}(y) = \left\{x' \in E;\ T\left(x'\right) = y\right\} = x + \ker T,$$

para qualquer $x \in T^{-1}(y)$. Para cada $x \in E$, consideremos $[x] = \{x\} + \ker T$. Tomemos $(y, [x]) \in \overline{\operatorname{Graf}\left(\widetilde{T}^{-1}\right)}$. Existe, portanto, uma sequência

$$\left(y_n, \widetilde{T}^{-1}(y_n)\right)_{n \in \mathbb{N}^\star}$$

em $\operatorname{Graf}\left(\widetilde{T}^{-1}\right)$ tal que

$$\left(y_n, \widetilde{T}^{-1}(y_n)\right) \longrightarrow (y, [x]),$$

e, consequentemente,

$$y_n \to y \text{ e } \widetilde{T}^{-1}(y_n) \to [x].$$

Como $\widetilde{T}$ é contínua,

$$\widetilde{T}\left(\widetilde{T}^{-1}(y_n)\right) \to \widetilde{T}([x]),$$

ou seja,

$$y_n \longrightarrow \widetilde{T}([x]).$$

Pela unicidade dos limites, temos

$$y = \widetilde{T}([x]).$$

Daí,

$$[x] = \widetilde{T}^{-1}(y).$$

Assim, $(y, [x]) \in \operatorname{Graf}\left(\widetilde{T}^{-1}\right)$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado, $\widetilde{T}^{-1}$ é contínua. Consequentemente, $\widetilde{T}$ é aberta. Como T é a composta de $\widetilde{T}$ com a aplicação quociente $\pi : x \in E \to [x] \in E/\ker$, temos que T é aberta, já que $\widetilde{T}$ e π são aplicações abertas. $\square$

$$\begin{tikzcd} x \in E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & T(x) \in F \\ {[x] \in E/\ker(T)} \arrow[ur, "\widetilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 2.2: $T = \widetilde{T} \circ \pi$

A importância de considerarmos E e F espaços de Banach no Teorema do Gráfico Fechado e, equivalentemente, no Teorema da Aplicação Aberta é ilustrada no seguinte

Exemplo 2.3. Seja $T : c_{00} \to c_{00}$ a aplicação definida por

$$T\left((x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\right) = (n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} .$$

Claramente, T é linear. Vejamos que T não é contínua, mas Graf(T) é fechado. Notemos que, como visto no Capítulo 1, c_{00} não é um espaço de Banach. Ora, para provar que T não é contínua, vamos mostrar que T não é contínua no zero. Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, existe $X_k = (x_{kn})_{n \in \mathbb{N}^*} \in c_{00}$ tal que $\|X_k\| < \frac{1}{k}$, mas $\|T(X_k)\| > \frac{1}{2}$. De fato, fixemos $k \in \mathbb{N}^*$. Definamos $X_k = (x_{kn})_{n \in \mathbb{N}^*}$ por:

$$X_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{se } n = k+1, \\ 0 & \text{se } n \neq k+1. \end{cases}$$

Temos $\|X_k\| = \sup\{|x_{kn}| \,; n \in \mathbb{N}^*\} = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$. Contudo,

$$\|T(X_k)\| = \sup\{|T(x_{kn})| \,; n \in \mathbb{N}^*\} = (k+1) \cdot \frac{1}{k+1} = 1 > \frac{1}{2}.$$

Agora, vejamos que Graf(T) é fechado, ou seja, $\overline{\text{Graf}(T)} = \text{Graf}(T)$. Tomemos $(a, b) \in \overline{\text{Graf}(T)}$. Então $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in c_{00}$ e $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in c_{00}$. Vamos mostrar que $b = T(a)$. Ora, existe uma sequência $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ em c_{00} tal que $X_k \to a$ e $T(X_k) \to b$. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \in c_{00}$; digamos $X_k = (x_{kn})_{n \in \mathbb{N}^*}$. Fixemos $n \in \mathbb{N}^*$. Seja $\varepsilon > 0$. Então, existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$\left\|X_{k_0} - a\right\| < \frac{\varepsilon}{2n}$$

e

$$\left\|T\left(X_{k_0}\right) - b\right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} |T(a_n) - b_n| &= |n a_n - b_n| \\ &\leqslant n\left|a_n - x_{k_0 n}\right| + \left|n x_{k_0 n} - b_n\right| \\ &\leqslant n\left\|X_{k_0} - a\right\| + \left\|T\left(X_{k_0}\right) - b\right\| \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado de modo arbitrário, $b_n = T(a_n)$. Como $n \in \mathbb{N}^*$ foi fixado arbitrário, $b = T(a)$.

Nas próximas seções veremos que o Teorema do Gráfico Fechado e o Teorema da Aplicação Aberta não são equivalentes no contexto das aplicações bilineares. De fato, vamos apresentar um contraexemplo para a versão bilinear do Teorema da Aplicação Aberta e vamos provar o Teorema do Gráfico Fechado para aplicações bilineares.

2.3 Um contraexemplo para o Teorema da Aplicação Aberta no caso de aplicações bilineares

Comecemos esta seção definindo uma aplicação bilinear.

Definição 2.5. Sejam E_1, E_2 e F espaços normados. Dizemos que uma aplicação $T : E_1 \times E_2 \to F$ é *bilinear* se T é linear em cada variável. Ou seja, T é bilinear se a aplicação

$$x_1 \in E_1 \mapsto T(x_1, x_2) \in F$$

for linear, para todo $x_2 \in E_2$ fixado (linearidade em relação à primeira variável), e se a aplicação

$$x_2 \in E_2 \mapsto T(x_1, x_2) \in F$$

for linear, para todo $x_1 \in E_1$ fixado (linearidade em relação à segunda variável).

Exemplo 2.4. Sejam E e F espaços vetoriais. A aplicação

$$(x, T) \in E \times \mathcal{L}_a(E, F) \mapsto T(x) \in F$$

é bilinear, onde $\mathcal{L}_a(E, F)$ denota o espaço vetorial de todas as aplicações lineares de E em F.

O próximo resultado é uma versão do Teorema 1.1 no contexto das aplicações bilineares.

Teorema 2.4. *Sejam E_1, E_2 e F espaços normados e $T : E_1 \times E_2 \to F$ uma aplicação bilinear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) T é contínua;

(b) T é contínua na origem;

(c) $\sup\{\|T(x_1, x_2)\| \,;\, (x_1, x_2) \in E$ e $\|(x_1, x_2)\| \leqslant 1\} < \infty$,

(d) existe uma constante $M > 0$ tal que $\|T(x_1, x_2)\| \leqslant M \|x_1\| \cdot \|x_2\|$ para qualquer $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.

Demonstração.
(a) $\Rightarrow$ (b): Como T é contínua, T é contínua na origem.
(b) $\Rightarrow$ (c) : Como T é contínua na origem, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x_1, x_2)\| < 1,$$

sempre que $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ com $\|(x_1, x_2)\| < \delta$. Seja $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ com $\|x\| \leqslant 1$. Então, $\left\|\left(\frac{\delta}{2}x_1, \frac{\delta}{2}x_2\right)\right\| < \delta$ implica em

$$\left\|T\left(\frac{\delta}{2}x_1, \frac{\delta}{2}x_2\right)\right\| < 1,$$

donde

$$\|T(x_1, x_2)\| < \left(\frac{2}{\delta}\right)^2.$$

Portanto,

$$\sup\{\|T(x_1, x_2)\|;\ (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \text{ com } \|(x_1, x_2)\| \leqslant 1\} < \infty.$$

(c) $\Rightarrow$ (d): Seja $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tal que $x_i \neq 0$ para todo $i = 1, 2$. Temos que $\left\|\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\right\| = 1$. Logo, por (c), existe $M > 0$ tal que

$$\left\|T\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_2}{\|x_2\|}\right)\right\| \leqslant M,$$

donde

$$\|T(x_1, x_2)\| \leqslant M\,\|x_1\|\,\|x_2\|.$$

Se $x_i = 0$ para algum $i = 1, 2$, temos $T(x_1, x_2) = 0$ e, portanto,

$$\|T(x_1, x_2)\| \leqslant M\,\|x_1\|\,\|x_2\|$$

para qualquer $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.
(d) $\Rightarrow$ (a): Sejam (a_1, a_2) e $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. Pela bilinearidade de T,

$$T(x_1, x_2) - T(a_1, a_2) = T(x_1 - a_1, a_2) + T(a_1, x_2 - a_2) + T(x_1 - a_1, x_2 - a_2).$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\|T(x_1, x_2) - T(a_1, a_2)\| \\ &\qquad \leqslant M\,\|x_1 - a_1\|\,\|a_2\| + M\,\|a_1\|\,\|x_2 - a_2\| + M\,\|x_1 - a_1\|\,\|x_2 - a_2\|. \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Tomemos $\varepsilon > 0$. Seja $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3M\|(a_1,a_2)\|}, \frac{1}{M}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\right\}$. Então

$$\|T(x_1, x_2) - T(a_1, a_2)\| < \varepsilon,$$

sempre que $\|(x_1, x_2) - (a_1, a_2)\| < \delta$, mostrando assim a continuidade de T em (a_1, a_2). Como $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ foi tomado de modo arbitrário, mostramos a continuidade de T. $\square$

Denotamos por $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ o espaço vetorial das aplicações bilineares contínuas de $E_1 \times E_2$ em F, que é um espaço normado com a norma definida por

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{L}(E_1, E_2; F) &\to \mathbb{R} \\ T &\mapsto \sup\{\|T(x)\|; x \in E_1 \times E_2 \text{ e } \|x\| \leqslant 1\}. \end{aligned}$$

De forma análoga ao caso linear, se F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ também é um espaço de Banach.

Vimos que o Teorema do Gráfico Fechado e o Teorema da Aplicação Aberta são equivalentes no caso linear. Uma pergunta natural é se tal equivalência contínua válida no caso bilinear. Nessa seção veremos que uma aplicação bilinear contínua de um produto de dois espaços de Banach sobre um espaço de Banach não é necessariamente uma aplicação aberta.

Um exemplo simples para esta situação é dado pela aplicação $T : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T((a; (b, c))) = (ab, ac)$ para todo $(a; (b, c)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$. Que esta aplicação é bilinear, contínua e sobrejetiva é fácil de se verificar. Mas, tal aplicação não é aberta no ponto $(0; (1, 1))$, isto é, existe um aberto contendo $(0; (1, 1))$ cuja imagem por T não é um aberto contendo $(0, 0)$. Para verificarmos isto basta mostrar que $\widetilde{T} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ definida por $\widetilde{T}(a, b, c) = (ab, ac)$ não é aberta em $(0, 1, 1)$, já que $\mathbb{C}^3$ e $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ são espaços isomorfos. Com efeito, consideremos $A = B_{\mathbb{C}}(0, 1/2) \times B_{\mathbb{C}}(1, 1/2) \times B_{\mathbb{C}}(1, 1/2)$. Temos que A é um aberto em $\mathbb{C}^3$, mas $\widetilde{T}(A)$ não é um aberto em $\mathbb{C}^2$, pois caso contrário, seu complementar seria fechado. Dessa forma, o limite da sequencia $(0, 1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, que está no complementar de $\widetilde{T}(A)$, deveria pertencer a este complementar, o que não ocorre, pois $(0, 0) \in \widetilde{T}(A)$.

Observemos que embora a aplicação T não seja aberta, ela é aberta na origem, isto é, T transforma abertos contendo 0 em abertos contendo 0 .

Em Rudin (1969) o autor perguntou, se aplicações bilineares contínuas de um produto espaços de Banach sobre um espaço de Banach são sempre abertas na origem. Em 1975, C. Horowitz (1975) apresentou um contraexemplo para o problema proposto por Rudin.

Antes de apresentarmos este contraexemplo vamos mostrar a seguinte:

Proposição 2.7. *Sejam E e F dois espaços normados. Seja $T : E^m \to F$ uma aplicação m-linear sobrejetiva. Se T é aberta na origem, então todo subconjunto limitado de F pode ser obtido como imagem de algum subconjunto limitado de E^m.*

Demonstração. Seja L um subconjunto limitado de F. Queremos mostrar que existe $M \subset E^m$ limitado tal que $T(M) = L$. De fato, seja $B = B_E(0, 1) \times \cdots \times B_E(0, 1)$ a bola aberta de centro zero e raio 1 em E^m.

Como T é uma aplicação aberta na origem, $T(B)$ é um aberto contendo a origem. Assim, existe $r > 0$ tal que

$$B_F(0, r) \subset T(B).$$

Por L ser limitado, existe $R > 0$ tal que $L \subset B_F(0, R)$. Seja $\lambda > 0$ tal que $\lambda R < r$. Daí, $\lambda L \subset T(B)$ Ora,

$$T(B) = \{y \in F;\ y = T\,(x_1, \ldots, x_m) \\ \text{com } x_j \in B_E(0,1) \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Seja

$$M = \{(x_1, \ldots, x_m) \in B_E\left(0, \lambda^{-1}\right) \times B_E(0,1) \times \ldots \times B_E(0,1) \\ \text{tal que } T\,(x_1, \ldots, x_m) \in L\}.$$

É claro que $T(M) \subset L$. Vejamos que $L \subset T(M)$. Para isso, tomemos $y \in L$. Dessa forma, $y = \lambda^{-1} T\,(x_1, \ldots, x_m)$ com $x_j \in B_E(0,1)$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$. Assim, $y = T\left(\lambda^{-1} x_1, \ldots, x_m\right)$ com $x_j \in B_E(0,1)$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, Portanto, $y \in T(M)$. Logo, $T(M) = L$. Como M é limitado, a proposição está demonstrada. □

Passemos ao contraexemplo de C. Horowitz.

Consideremos em $\mathbb{C}^n, n \geqslant 1$, a norma $\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$ para todo $x = (x_1, \ldots, x) \in \mathbb{C}^n$.

Seja a aplicação $T : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ definida por

$$T\,((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \\ (x_1 y_1, x_1 y_2, x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_2, x_3 y_2 + x_2 y_1)\,.$$

A bilinearidade e a continuidade de T são fáceis de serem verificadas. Vejamos que T é sobrejetiva. Tomemos $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$ arbitrário.

1º caso: Se z_3 e z_4 são quaisquer e $z_1 = z_2 = 0$, basta escolhermos $x = (0, z_4, z_3)$ e $y = (1, 0, 0)$ para que $T(x, y) = z$.

2º caso: Se z_2, z_3 e z_4 são quaisquer e $z_1 \neq 0$, basta escolhermos $x = \left(1, \frac{z_4}{z_1}, 0\right)$ e $y = \left(z_1, z_2, \quad z_3 - \frac{z_4 z_2}{z_1}\right)$ para que $T(x, y) = z$.

3º caso: Se z_1, z_3 e z_4 são quaisquer e $z_2 \neq 0$ basta escolhermos $x = \left(1, 0, \frac{z_4}{z_2}\right)$ e $y = \left(z_1, z_2, z_3 - \frac{z_4 z_1}{z_2}\right)$ para que $T(x, y) = z$.

Os casos acima mostram a sobrejetividade de T.

Mostraremos agora que T não é uma aplicação aberta na origem. Como T é sobrejetiva, para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $(x, y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ tal que $T(x, y) = (a, a, a, 1)$. Seja $A = \left\{(a, a, a, 1); a \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } |a| < 1\right\}$. É fácil verificar que A é um subconjunto limitado de C^4. Da definição de T, podemos afirmar que para todo $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ e $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3$ tais que $T(x, y) = (a, a, a, 1) \in A$ temos $x_1 \neq 0$ (porque $a \neq 0$), $y_1 = y_2 = \frac{a}{x_1}$, $x_2 + \frac{x}{3} = \frac{x_1}{a}$ e $y_3 = \frac{a-1}{x_1}$. Dai, $(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) =$

$3a + 2 - \frac{1}{a}$. Consequentemente, para cada $a \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $|a| < 1$, temos

$$\begin{aligned}&\left\{(x, y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3; T(x, y) = (a, a, a, 1)\right\} \subset \\ &\qquad \subset \left\{(x, y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3; (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) = 3a + 2 - \frac{1}{a}\right\}\end{aligned} \tag{2.3}$$

Como A é limitado, se T fosse uma aplicação aberta, existiria, pela Proposição 2.7, um limitado $N \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ tal que $T(N) = A$. Mas, se N é limitado, existe $r > 0$ tal que para todo $(x, y) \in N$, temos $\|(x, y)\| < r$, isto é, $\max\{\|x\|, \|y\|\} < r$. Daí, teríamos que $\|x\|\|y\| < r^2$ para todo $(x, y) \in N$. Isto implicaria em

$$(|x_1| + |x_2| + |x_3|)(|y_1| + |y_2| + |y_3|) < r^2,$$

donde

$$\left|3a + 2 - \frac{1}{a}\right| = |(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)| < r^2$$

para todo $a \in \mathbb{R}_+^*$ com $|a| < 1$.

Tomemos $a = \frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{N}^*$. Então, $\left|\frac{3}{n} + 2 - n\right| < r^2$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, donde temos que $n < r^2 + 5$ já que $n \geqslant 1$. Mas, isso é um absurdo, pois $\mathbb{N}^*$ é ilimitado superiormente. Isto prova que T não é uma aplicação aberta na origem.

2.4 O Teorema do Gráfico Fechado para aplicação bilineares

O Teorema do Gráfico Fechado é considerado uma das mais profundas contribuições de Stefan Banach para a Análise Funcional. Como vimos, esse resultado é equivalente ao Teorema da Aplicação Aberta. Também é equivalente ao seguinte resultado:

Teorema 2.5. *Se E e F são espaços de Banach e $T : E \to F$ é uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva, então existe uma constante $A > 0$ tal que para qualquer $y \in F$ com $\|y\| = 1$, existe $x \in E$ com $T(x) = y$ e $\|x\| \leqslant A$.*

A comunidade matemática internacional passou, por algum tempo, a achar que a versão bilinear do Teorema do Gráfico Fechado era falsa, uma vez que o título do artigo *A counterexample to the closed graph theorem for bilinear maps*, Paul J. Cohen (1974), sugere que teria dado um contraexemplo para o seguinte Teorema, que é uma versão bilinear para o Teorema do Gráfico Fechado no contexto de Espaços de Banach.

Teorema do Gráfico Fechado para aplicação bilineares: *Se E_1, E_2, F são espaços de Banach e $T : E_1 \times E_2 \to F$ é uma aplicação bilinear com gráfico fechado, então T é contínua.*

Contudo, o que foi realmente apresentado por Cohen foi um contraexemplo para uma versão bilinear do Teorema 2.5, a saber:

Se E_1, E_2, F são espaços de Banach e $T : E_1 \times E_2 \to F$ é uma aplicação bilinear, sobrejetiva e contínua, então existe uma constante $A > 0$ tal que para qualquer $y \in F$ com $\|y\| = 1$, existe $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tal que $T(x_1, x_2) = y$ e $\|x_1\| \|x_2\| \leqslant A$.

Em Cecília S. Fernandez (1996) foi provado o Teorema do Gráfico Fechado para aplicações bilineares. Cabe mencionar que o resultado de Fernandez pode ser estendido para aplicações multilineares.

Definição 2.6. Se $E_1, \ldots, E_m$ e F são espaços vetoriais, dizemos que a aplicação $T : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ é *multilinear* quando é linear em cada variável.

Para a prova do resultado de Fernandez, vamos precisar de alguns resultados, que faremos a seguir. Antes, vejamos a seguinte

Definição 2.7. Sejam E, F e G espaços normados. Dizemos que uma aplicação $T : E \times F \to G$ é contínua em relação à primeira variável quando a aplicação $T : E \to G$ dada por $T_b(x) = T(x, b)$ é contínua para todo $b \in F$. Analogamente, dizemos que T é continua em relação a segunda variável quando a aplicação $T : F \to G$ dada por $T_a(y) = T(a, y)$ é contínua para todo $a \in E$. Dizemos que T é separadamente contínua quando os dois casos acima ocorrem.

O próximo resultado é também um resultado clássico da Análise Funcional no contexto dos espaços de Banach. É o Teorema de Banach–Steinhaus, também conhecido como Princípio da Limitação Uniforme.

Teorema 2.6 (Banach–Steinhaus)**.** *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}(E; F)$. Se, para cada $x \in E$, $\mathcal{X}(x) = \{T(x); T \in \mathcal{X}\}$ é limitado em F, então $\mathcal{X}$ é limitado em $L(E; F)$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, chamemos

$$F_n = \{x \in E; \|T(x)\| \leqslant n, T \in \mathcal{X}\} = \bigcap_{T \in \mathcal{X}} \{x \in E;\ \|T(x)\| \leqslant n\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, temos que F_n é fechado em E. Por hipótese, se $x \in E$, então existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $\|T(x)\| \leqslant m$ para todo $T \in \mathcal{X}$, ou seja, $x \in F_m$. Dai, $E = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$. Pelo teorema de Baire, existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\operatorname{int}\left(F_{n_0}\right) \neq \emptyset$. Sejam $y \in E$ e $r > 0$ tais que $\overline{B_E}(y, r) \subset F_{n_0}$. Se $x \in \overline{B}_E(0, 1)$ e $T \in \mathcal{X}$, então

$$\|T(rx)\| = \|T(rx + y - y)\| \leqslant \|T(rx + y)\| + \|T(y)\|.$$

Como, se $z \in F_{n_0}$, $\|S(z)\| \leqslant n_0$ para todo $S \in \mathcal{X}$, temos que $\|T(x)\| \leqslant \frac{2n_0}{r}$ para todo $x \in \overline{B}_E(0, 1)$. Isto implica que $\mathcal{X}$ é limitado em $\mathcal{L}(E; F)$ $\square$

Proposição 2.8. *Sejam E um espaço de Banach, F e G espaços normados e $T : E \times F \to G$ uma aplicação bilinear separadamente contínua. Então T é contínua.*

Demonstração. Seja $x = \left\{T_y;\ y \in \overline{B}_F(0,1)\right\}$, onde $T_y : E \to G$ é dada por $T_y(x) = T(x,y)$. Temos que $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}(E;G)$.

Tomemos $x \in E$. Vamos mostrar que existe $r_x > 0$ tal que $\left\|T_y(x)\right\| \leqslant r_x$ para todo $T_y \in \mathcal{X}$. De fato, como a aplicação $T_x : F \to G$ dada por $T_x(y) = T(x,y)$ é linear e contínua, existe $r_x > 0$ tal que $\|T_x(y)\| \leqslant r_x\|y\|$ para todo $y \in F$. Em particular, $\|T_x(y)\| \leqslant r_x$ para todo $y \in \overline{B}_F(0,1)$. Daí, $\left\|T_y(x)\right\| \leqslant r_x$ para todo $T_y \in \mathcal{X}$. Pelo Teorema de Banach–Steinhaus, $\mathcal{X}$ é limitado em $\mathcal{L}(E;G)$, isto é, existe $M > 0$ tal que $\left\|T_y\right\| \leqslant M$ para todo $y \in \overline{B}_F(0,1)$. Logo, $\|T(x,y)\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in E$ e para todo $y \in \overline{B}_F(0,1)$. Consequentemente, $\|T(x,y)\| \leqslant M\|x\|\|y\|$ para todo $x \in E$ e $y \in F$. Portanto, T é contínua. □

Teorema do Gráfico Fechado para aplicações bilineares: *Sejam E, F e G espaços de Banach. Se $T : E \times F \to G$ é uma aplicação bilinear cujo gráfico é fechado, então T é contínua.*

Demonstração. Fixemos $a \in E$ e $b \in F$ de modo arbitrário. Consideremos as aplicações

$$T_a : y \in F \longmapsto T(a,y) \in G$$

e

$$T_b : x \in E \longmapsto T(x,b) \in G.$$

Como T é bilinear, temos que T_a e T são lineares.

Sejam

$$\text{Graf}\,(T_a) = \{(y, T_a(y))\,;\, y \in F\}$$

e

$$\text{Graf}\,(T_b) = \{(x, T_b(x))\,;\, x \in E\}\,.$$

Tomemos $(y,z) \in F \times G$ tal que $(y,z) \in \overline{\text{Graf}\,(T_a)}$. Então, existe uma sequência $(y_n, T_a\,(y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tal que $(y_n, T_a\,(y_n)) \to (y,z)$, donde $y_n \to y$ e $T_a\,(y_n) \to z$. Consideremos a sequência $((a, y_n)\,, T\,(a, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Esta sequência tem seus termos no Graf(T). Como, por hipótese, Graf(T) é fechado, temos que $((a,y),z) \in$ Graf(T). Dessa forma, $z = T(a,y) = T_a(y)$, o que mostra que Graf$\,(T_a)$ é fechado em $F \times G$. Analogamente, timos que Graf$\,(T_b)$ é fechado em $E \times G$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 2.3), T_a e T_b são aplicações contínuas. Como a e b foram tomados de modo arbitrário em E e F respectivamente, pela Proposição 2.8, T é contínua. □

3 Espaços de Hilbert

3.1 Produto interno

Lembramos que o símbolo $\mathbb{K}$ representa o corpo do números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Se $\alpha \in \mathbb{K}$, então $\overline{\alpha}$ é o complexo conjugado de α. É claro que se $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\overline{\alpha} = \alpha$.

Definição 3.1. Seja $\mathcal{H}$ um espaço vetorial. Um produto interno em $\mathcal{H}$ é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $x, y, z \in \mathcal{H}$, satisfaz

(p1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;

(p2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

(p3) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$;

(p4) se $\langle x, x \rangle = 0$, então $x = 0$.

Um espaço com produto interno é um par $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ onde $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $\mathcal{H}$. Denotaremos o par $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ simplesmente por $\mathcal{H}$, ficando assim subtendido seu produto interno. Pelas propriedades (p1) e (p2) é fácil notar que

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$$

e

$$\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$$

para todos $x, y, z \in \mathcal{H}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Em particular, $\langle 0, 0 \rangle = 0$. Além disso, se $y, z \in \mathcal{H}$ são tais que

$$\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle \text{ para todo } x \in \mathcal{H}, \text{ então } y = z. \tag{3.1}$$

Exemplo 3.1. O produto interno usual sobre $\mathbb{K}^n$ é definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

para todos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ vetores em $\mathbb{K}^n$.

Exemplo 3.2. Mostramos no Exemplo 1.21 que ℓ_p é um espaço de Banach para $p \geqslant 1$. Afirmamos que ℓ_2 é um espaço com produto interno. De fato, para cada $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell_2$ a função

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

é um produto interno em ℓ_2. Veremos mais adiante que ℓ_p para $p \geqslant 1$ com $p \neq 2$ não é um espaço com produto interno.

Proposição 3.1 (Desigualdade de Cauchy–Schwarz). *Seja um espaço com produto interno $\mathcal{H}$. Para todos $x, y \in \mathcal{H}$ temos*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \tag{3.2}$$

Além disso, vale a igualdade em (3.2) se, e somente se, $y = \alpha x$ para algum $\alpha \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Dados $x, y \in \mathcal{H}$, existem $b \geqslant 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$ tais que $\langle y, x \rangle = be^{i\theta}$. Fixe $t \in \mathbb{R}$ e defina $\alpha = te^{-i\theta}$. Das propriedades do produto interno obtemos que

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \alpha \langle y, x \rangle - \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + |\alpha|^2 \langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - e^{-i\theta} t b e^{i\theta} - e^{i\theta} t b e^{-i\theta} + t^2 \langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - 2bt + \langle y, y \rangle t^2.
\end{aligned}$$

Chamando $c = \langle x, x \rangle$ e $a = \langle y, y \rangle$, pela desigualdade acima a função quadrática $p(t) = at^2 - 2bt + c$ tem discriminante $\Delta \leqslant 0$. Mas

$$\Delta = 4(|\langle x, y \rangle|^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle)$$

e daí

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

que é a desigualdade desejada.

Agora, se $y = \alpha x$ para algum $\alpha \in \mathbb{K}$, é claro (verifique!) que vale a igualdade em (3.2). Reciprocamente, suponhamos que existam $x, y \in \mathcal{H}$ tais que a igualdade em (3.2) é válida. Denotando $a = \langle x, x\rangle$, $b = \langle y, x\rangle$ e $c = \langle y, y\rangle$, a igualdade em (3.2) fica na forma $|b|^2 = ac$. Usando as propriedades do produto interno segue que

$$\begin{aligned}
\langle ay - bx, ay - bx\rangle &= a^2\langle y, y\rangle - \overline{a}b\langle x, y\rangle - a\overline{b}\langle y, x\rangle + |b|^2\langle x, x\rangle \\
&= a^2c - \overline{a}b\overline{b} - a\overline{b}b + a|b|^2 \\
&= a^2c - \overline{a}|b|^2 - a|b|^2 + a|b|^2 \\
&= a^2c - a|b|^2 \\
&= a(ac - |b|^2)
\end{aligned}$$

pois $a = \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$. Como vale a igualdade em (3.2) segue que

$$\langle ay - bx, ay - bx\rangle = 0$$

e, portanto, $ay - bx = 0$. Agora, se $x = 0$, então está provado. Por outro lado, se $x \neq 0$, então $a > 0$ e assim tomando $\alpha = b/a$, temos que $y = \alpha x$, como queríamos demonstrar. □

A desigualdade em (3.2) recebe o nome de *Desigualdade de Cauchy–Schwarz*. Veremos a seguir que todo produto interno define, de um modo natural, uma norma neste espaço. Desta forma, podemos concluir que todo espaço com produto interno é também um espaço normado.

Proposição 3.2. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço com produto interno. A função $\|\cdot\| : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{3.3}$$

para todo $x \in \mathcal{H}$ é uma norma sobre $\mathcal{H}$.

Demonstração. As propriedades (n1) e (n2) saem diretamente das propriedades do produto interno. Provaremos a propriedade (n3). Sejam $x, y \in \mathcal{H}$. Pela Desigualdade de Cauchy–Schwarz resulta que

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \\
&\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| \\
&\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

Usando o fato que $\|\cdot\| \geqslant 0$ segue a desigualdade triangular, ou seja,

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Concluímos que a função definida em (3.3) é uma norma em $\mathcal{H}$. □

A função em (3.3) é a norma induzida pelo produto interno. Portanto, todo espaço com produto interno é um espaço normado. Neste caso, se $\mathcal{H}$ é um espaço com produto interno, a Desigualdade de Cauchy–Schwarz é reescrita na seguinte forma

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\| \tag{3.4}$$

para todos $x, y \in \mathcal{H}$. Note que $\mathcal{H}$ está munido da topologia da norma induzida pelo produto interno tendo assim definida uma estrutura topológica. Isto nos permite, por exemplo, estudar funções contínuas em $\mathcal{H}$. Considerando a topologia produto em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, como consequência desta desigualdade, verifica-se que o produto interno em $\mathcal{H}$ é uma função contínua em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Observe que no espaço ℓ_2 a norma induzida pelo produto interno definido no Exemplo 3.2 é

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$$

para todo $x = (x_n) \in \ell_2$, a norma usual de ℓ_2.

Para fins de notação, em todo espaço com produto interno, a função $\|\cdot\|$ é a norma induzida pelo produto interno. As próximas proposições mostram características geométricas dos espaços com produto interno.

Proposição 3.3 (Lei do Paralelogramo)**.** *Seja $\mathcal{H}$ um espaço com produto interno. Para quaisquer $x, y \in \mathcal{H}$ vale a igualdade*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{3.5}$$

Demonstração. Com efeito, dados $x, y \in \mathcal{H}$, seguem das propriedades do produto interno as seguintes igualdades

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \tag{3.6}$$

e

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2. \tag{3.7}$$

Somando-as obtemos o desejado. □

Proposição 3.4 (Fórmula de Polarização, caso real)**.** *Seja $\mathcal{H}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno. Para quaisquer $x, y \in \mathcal{H}$ vale a igualdade*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2). \tag{3.8}$$

Demonstração. Basta fazer (3.6) − (3.7) e lembrar que $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$. □

Proposição 3.5 (Fórmula de Polarização, caso complexo)**.** *Seja $\mathcal{H}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com produto interno. Para quaisquer $x, y \in \mathcal{H}$ vale a igualdade*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)]. \tag{3.9}$$

Demonstração. Dados $x, y \in \mathcal{H}$, fazendo os cálculos como em (3.6) e (3.7) temos

$$\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 - i\langle x, y\rangle + i\langle y, x\rangle + \|y\|^2 \tag{3.10}$$

e

$$\|x-iy\|^2 = \|x\|^2 + i\langle x, y\rangle - i\langle y, x\rangle + \|y\|^2. \tag{3.11}$$

Subtraindo (3.11) de (3.10) ficamos com a igualdade

$$\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = -2i\langle x, y\rangle + 2i\langle y, x\rangle. \tag{3.12}$$

Por outro lado, subtraindo (3.7) de (3.6) segue que

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle. \tag{3.13}$$

Usando então as igualdade (3.12) e (3.13) resulta a igualdade desejada, isto é,

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) = 4\langle x, y\rangle.$$

□

Vimos que todo espaço com produto interno é um espaço normado com a norma induzida pelo produto interno. É natural perguntar se toda norma é induzida por um produto interno, ou seja, dado um espaço normado E com norma $\|\cdot\|$, existe um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em E tal que $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$? Respondemos a esta pergunta usando a Proposição 3.3. Este resultado nos diz que em espaços com produto interno vale a Lei do Paralelogramo. Portanto, espaços normados onde a Lei do Paralelogramo não é válida são exemplos de espaços onde a norma não é induzida por um produto interno.

Exemplo 3.3. Vejamos que, para $p \neq 2$, a norma usual de ℓ_p não provém de um produto interno. De fato, tomando $x = (1, 0, 0, \ldots)$ e $y = (0, 1, 0, \ldots)$ sequências em ℓ_p temos que $\|x+y\| = 2^{2/p}$, $\|x\| = \|y\| = 1$ e daí

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2.2^{2/p} \neq 4 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

pois $p \neq 2$. Portanto não vale a Lei do Paralelogramo em ℓ_p o que nos leva a concluir que a norma de ℓ_p não provém de um produto interno.

Motivados pela Lei do Paralelogramo e pelo exemplo anterior, podemos fazer a seguinte pergunta: quando a norma de um espaço normado provém de um produto interno? O resultado a seguir dá essa resposta.

Proposição 3.6. *Seja E um espaço normado. Se vale a Lei do Paralelogramo, isto é,*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

para todos $x, y \in E$, então esta norma provém de um produto interno. Mais especificamente, E é um espaço com produto interno.

A demonstração ficará como exercício. Basta provar que, nestas condições, a Fórmula de Polarização (definida em (3.8) para o caso real e (3.9) para o caso complexo) é um produto interno em E. Pelos resultados anteriores temos a seguinte afirmação: para que um espaço normado seja um espaço com produto interno é necessário e suficiente que a norma satisfaça a Lei do Paralelogramo.

Dizemos que um espaço com produto interno $\mathcal{H}$ é um *espaço de Hilbert* quando $\mathcal{H}$ munido da norma induzida pelo produto interno é um espaço de Banach.

3.2 Ortogonalidade

Lembramos que dois vetores no espaço $\mathbb{R}^3$ são ortogonais quando esses vetores fazem um ângulo reto, isto é, um ângulo de $\pi/2$. Equivalentemente, estes vetores são ortogonais quando o produto interno destes vetores é zero. Motivados pelo conceito de ortogonalidade em $\mathbb{R}^3$, veremos que este conceito é o mesmo para qualquer espaço vetorial com produto interno.

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço com produto interno e $x, y \in \mathcal{H}$ tais que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Pela Desigualdade de Cauchy–Schwarz temos que

$$-1 \leqslant \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leqslant 1$$

e daí existe $\theta \in (0, \pi)$ tal que

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos\theta.$$

Note que para $x = 0$ ou $y = 0$ a igualdade anterior continua válida. Portanto, do ponto de vista geométrico, o produto interno mede o ângulo entre os vetores x e y.

Definição 3.2. Seja $\mathcal{H}$ um espaço com produto interno. Dizemos que $x, y \in \mathcal{H}$ são ortogonais, e denotamos $x \perp y$, quando $\langle x, y\rangle = 0$.

Desta forma, podemos então pensar que em qualquer espaço com produto interno, dois vetores são ortogonais quando estes vetores formam um ângulo de $\pi/2$.

Seja $\mathcal{H}$ um espaço com produto interno e M um subespaço de $\mathcal{H}$. Para todo $x \in \mathcal{H}$, lembramos que a distância de x a M é definida da seguinte forma

$$\operatorname{dist}(x, M) = \inf\{\|x-y\|\,;\ y \in M\}.$$

O próximo resultado garante que, sob certas condições, esta distância é atingida em algum ponto do subespaço.

Proposição 3.7. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço com produto interno e M um subespaço completo de $\mathcal{H}$. Se $x \in \mathcal{H}$, então existe um único $x_0 \in M$ tal que*

$$\|x - x_0\| = dist(x, M).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, supomos $x = 0$. Vamos provar a existência de $x_0 \in M$. Chamando $d = \text{dist}(0, M)$, por definição, existe uma sequência (y_n) em M que satisfaz $\|y_n\| \to d$. Vamos mostrar que a sequência (y_n) é de Cauchy em M. De fato, fixados $m, n \in \mathbb{N}$, pela Lei do Paralelogramo resulta que

$$\|y_n + y_m\|^2 = 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - \|y_n - y_m\|^2,$$

ou seja,

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2. \tag{3.14}$$

Pela hipótese de M ser um subespaço, temos que $(y_n + y_m)/2 \in M$, o que implica em

$$\left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \geqslant d^2.$$

Daí, a expressão (3.14) fica da seguinte forma

$$\|y_n - y_m\|^2 \leqslant 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4d^2. \tag{3.15}$$

Dado $\epsilon > 0$, como $\|y_n\| \to d$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|y_n\|^2 < d^2 + \frac{\epsilon^2}{4}$$

para todo $n \geqslant n_0$ e substituindo na expressão (3.15) com $n, m \geqslant n_0$ resulta que

$$\|y_n - y_m\|^2 \leqslant 2\left(d^2 + \frac{\epsilon^2}{4}\right) + 2\left(d^2 + \frac{\epsilon^2}{4}\right) - 4d^2 = \epsilon^2,$$

isto é, $\|y_n - y_m\| < \epsilon$ para todos $n, m \geqslant n_0$. Isto mostra que a sequência (y_n) é de Cauchy no subespaço completo M e, portanto, existe $x_0 \in M$ tal que $y_n \to x_0$. Agora, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$d \leqslant \|x_0\| \leqslant \|x_0 - y_n\| + \|y_n\|$$

e fazendo $n \to +\infty$, como $\|y_n\| \to d$ e $y_n \to x_0$, concluímos que $\|x_0\| = d$.

Para a unicidade, suponhamos que exista $y_0 \in M$ tal que $\|y_0\| = d$. Novamente usando a Lei do Paralelogramo obtemos

$$\|x_0 + y_0\|^2 + \|x_0 - y_0\|^2 = 2\|x_0\|^2 + 2\|y_0\|^2,$$

ou seja,

$$\|x_0 - y_0\|^2 = 4d^2 - \|x_0 + y_0\|^2 = 4d^2 - 4\left\|\frac{x_0 + y_0}{2}\right\|^2$$

Como M é um subespaço, temos que $(x_0 + y_0)/2 \in M$ e, portanto,

$$0 \leqslant \|x_0 - y_0\|^2 \leqslant 4d^2 - 4d^2 = 0$$

o que mostra que $x_0 = y_0$. □

Definição 3.3. Sejam $\mathcal{H}$ um espaço com produto interno e M um subconjunto de $\mathcal{H}$. O complemento ortogonal de M, denotado por $M^\perp$, é o subconjunto definido por

$$M^\perp = \{x \in \mathcal{H}\,;\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo } y \in M\}.$$

Listamos na proposição a seguir algumas propriedades do complemento ortogonal. A verificação ficará a cargo do leitor.

Proposição 3.8. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço com produto interno e M e N subconjuntos de $\mathcal{H}$. Temos as seguintes propriedades*

(a) $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$ *e* $\{0\}^\perp = \mathcal{H}$*;*

(b) $M \subset (M^\perp)^\perp$*;*

(c) $M^\perp$ *é um subespaço fechado de* $\mathcal{H}$*;*

(d) $M \cap M^\perp = \{0\}$ *se* $0 \in M$ *e* $M \cap M^\perp = \emptyset$ *caso contrário;*

(e) Se $M \subset N$*, então* $N^\perp \subset M^\perp$*.*

O resultado a seguir mostra que todo espaço de Hilbert pode ser escrito de modo único como a soma de um subespaço fechado e o complemento ortogonal deste subespaço.

Proposição 3.9. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Se $x \in \mathcal{H}$, então existem únicos $y \in M$ e $z \in M^\perp$ tais que $x = y + z$. Além disso,*

$$\|x - y\| = \mathit{dist}(x, M).$$

Noutras palavras, $\mathcal{H}$ é a soma direta do subespaço M com seu complemento ortogonal $M^\perp$ e, neste caso, escrevemos $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$.

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{H}$. Note que M é completo pois M é um subespaço fechado do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Assim, existe um único $y \in M$ tal que $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, M)$. Chamando $z = x - y$, vamos mostrar que $z \in M^\perp$, isto é, $\langle z, a\rangle = 0$ para todo $a \in M$. Fixados $a \in M$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que $y + \lambda a \in M$, visto que M é um subespaço de $\mathcal{H}$. Daí

$$\|z\|^2 = \|x - y\|^2 \leqslant \|x - (y + \lambda a)\|^2 = \|z - \lambda a\|^2. \tag{3.16}$$

Por outro lado, lembrando que $\|z - \lambda a\|^2 = \langle z - \lambda a, z - \lambda a\rangle$ segue que

$$\|z - \lambda a\|^2 = \|z\|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\langle a, z\rangle) + |\lambda|^2\|a\|^2. \tag{3.17}$$

Substituindo (3.17) em (3.16) seque que

$$\|z\|^2 \leqslant \|z\|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\langle a, z\rangle) + |\lambda|^2\|a\|^2,$$

ou seja,

$$\operatorname{Re}(\lambda\langle a, z\rangle) \leqslant \frac{|\lambda|^2}{2}\|a\|^2.$$

Seja $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\langle a, z\rangle = |\langle a, z\rangle|e^{i\theta}$. Tomando $\lambda = te^{-i\theta}$ para $t > 0$ na desigualdade anterior segue que

$$|\langle a, z\rangle| \leqslant \frac{t}{2}\|a\|^2.$$

A desigualdade anterior é válida para todo $t > 0$ o que nos permite concluir que $\langle a, z\rangle = 0$. Como $a \in M$ é arbitrário, concluímos que $z \in M^\perp$.

Vejamos agora a unicidade. Suponhamos que existam $y, y_0 \in M$ e $z, z_0 \in M^\perp$ tais que $y + z = y_0 + z_0$. Como M e $M^\perp$ são subespaços de $\mathcal{H}$, temos que $y - y_0 \in M$ e $y - y_0 = z - z_0 \in M^\perp$. Daí $y - y_0 \in M \cap M^\perp$. Concluímos então que $y = y_0$. Disto segue diretamente que $z = z_0$. □

Se tirarmos a hipótese de M ser fechado na proposição anterior, então o resultado pode não ser verdade. Por exemplo, tomando o espaço de Hilbert ℓ_2 e M o subespaço das sequências (x_n) em ℓ_2 tais que $x_n = 0$ exceto para um número finito de índices n, segue que M é um subespaço de ℓ_2 que não é fechado e $M^\perp = \{0\}$. Assim, $\ell_2 \neq M \oplus M^\perp$.

A proposição anterior nos permite definir as projeções ortogonais de $\mathcal{H}$ em seus subespaços.

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e M um subespaço de $\mathcal{H}$. Dado $x \in \mathcal{H}$, podemos escrever de modo único $x = y + z$ onde $y \in M$ e $z \in M^\perp$. O operador linear $P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ onde $P(x) = y$ é contínuo e satisfaz $P^2 = P$. Além disso, $P(\mathcal{H}) = M$ e $\|P\| = 1$ se $M \neq \{0\}$. Este operador P é chamado de *projeção ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M*. Analogamente, definimos o operador linear contínuo $Q : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ com $Q(x) = z$. Este operador Q satisfaz $Q^2 = Q$, $Q(\mathcal{H}) = M^\perp$ e $\|Q\| = 1$ se $M \neq \mathcal{H}$. Mais ainda, os operadores P e Q tem a propriedade: $P \circ Q = Q \circ P = 0$. A verificação destas propriedades ficará a cargo do leitor.

Como consequência da Proposição 3.9, terminaremos esta seção mostrando uma caracterização dos subespaços fechados de um espaço de Hilbert. Mais precisamente, provaremos que o fecho de todo subespaço de um espaço de Hilbert é o complemento ortogonal de um subespaço.

Proposição 3.10. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e M um subespaço de $\mathcal{H}$. Então $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$.*

Demonstração. Como $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$ e $(M^{\perp})^{\perp}$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$, temos que $\overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

Reciprocamente, seja $x \in (M^{\perp})^{\perp}$. Sabemos que $\overline{M}$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$ e pela Proposição 3.9 existem $y \in \overline{M}$ e $z \in (\overline{M})^{\perp}$ tais que $x = y + z$. Vamos mostrar que $z = 0$. De fato, $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle + \|z\|^2$. Pelas escolhas de y e z resulta que $\langle y, z\rangle = 0$ e daí

$$\langle x, z\rangle = \|z\|^2. \tag{3.18}$$

Agora, note que $(\overline{M})^{\perp} \subset M^{\perp}$ pois $M \subset \overline{M}$. Portanto, pelo fato de $x \in (M^{\perp})^{\perp}$ e $z \in (\overline{M})^{\perp}$, segue que $\langle x, z\rangle = 0$. Concluímos por (3.18) que $z = 0$. Então $x = y \in \overline{M}$ e, como x foi tomado de forma arbitrária em $(M^{\perp})^{\perp}$, obtemos que $(M^{\perp})^{\perp} \subset \overline{M}$, concluindo assim a demonstração. □

Corolário 3.1. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Então $M = (M^{\perp})^{\perp}$.*

Demonstração. Basta lembrar que se M é fechado, então $\overline{M} = M$ e usar a proposição anterior. □

3.3 Teorema de Representação de Riesz–Fréchet

Na Seção 1.6 definimos as aplicações lineares entre espaços de Banach. Se E e F são espaços de Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ denota o espaço das aplicações lineares contínuas de E em F. Em particular, quando $F = \mathbb{K}$, então $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ é o espaço dos funcionais lineares contínuos $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$, denotado por E' e chamado de *dual* de E. Note que E' é sempre um espaço de Banach mesmo que E não seja um espaço de Banach (Teorema 1.2). Lembramos que se $f \in E'$, então sua norma é dada por

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|\,;\ \|x\| \leqslant 1\}.$$

Nesta seção estudaremos os funcionais lineares contínuos em um espaço de Hilbert. Pelas propriedades do produto interno podemos definir, de um modo natural, um funcional linear neste espaço. De fato, seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Fixado $h_0 \in \mathcal{H}$ tal que $h_0 \neq 0$, defina $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$f(x) = \langle x, h_0\rangle \tag{3.19}$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. É fácil ver que f é um funcional linear. Além disso, a Desigualdade de Cauchy–Schwarz nos dá que

$$|f(x)| = |\langle x, h_0\rangle| \leqslant \|x\|\|h_0\|$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Isso mostra que f é contínua e que $\|f\| \leqslant \|h_0\|$. Por outro lado, $f(h_0/\|h_0\|) = \|h_0\|$. Portanto, $\|f\| = \|h_0\|$.

O resultado a seguir mostra que todo funcional linear contínuo em um espaço de Hilbert é da forma (3.19).

Teorema 3.1 (Teorema de Representação de Riesz–Fréchet)**.** *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Se $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo, então existe um único $h_0 \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) = \langle x, h_0 \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Mais ainda, $\|f\| = \|h_0\|$.*

Demonstração. Se $f = 0$, isto é, f é o funcional identicamente nulo, então o Teorema está provado bastando tomar $h_0 = 0$. Vejamos o caso em que $f \neq 0$. Seja M o núcleo de f, isto é,

$$M = f^{-1}(0) = \{x \in \mathcal{H}\,;\ f(x) = 0\}.$$

Como f é um funcional linear contínuo, temos que M é um subespaço fechado próprio de $\mathcal{H}$ e daí $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$. Além disso, $M^{\perp} \neq \{0\}$ pois $f \neq 0$. Assim, existe $h \in M^{\perp}$ tal que $f(h) = 1$. Seja $x \in \mathcal{H}$. Temos que

$$f(x - f(x)h) = f(x) - f(x)f(h) = f(x) - f(x) = 0$$

e daí $x - f(x)h \in M$. Pela escolha de $h \in M^{\perp}$ obtemos que

$$0 = \langle x - f(x)h, h \rangle = \langle x, h \rangle - f(x)\|h\|^2,$$

ou seja,

$$f(x) = \left\langle x, \frac{h}{\|h\|^2} \right\rangle.$$

Portanto, basta tomar $h_0 = h/\|h\|^2$ para termos $f(x) = \langle x, h_0 \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. A igualdade $\|f\| = \|h_0\|$ foi provada anteriormente.

Quanto à unicidade, se $y_0 \in \mathcal{H}$ é tal que $f(x) = \langle x, y_0 \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$, então $\langle x, y_0 \rangle = \langle x, h_0 \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Agora, basta lembrar da propriedade dada em (3.1) para termos $y_0 = h_0$. □

Como dito no início da seção, o dual E' de um espaço de Banach é um espaço de Banach. Vejamos que o mesmo vale para espaços de Hilbert, ou seja, que o dual de um espaço de Hilbert é um espaço de Hilbert. Isto é consequência do Teorema de Riesz–Fréchet.

Corolário 3.2. *Se $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, então o dual $\mathcal{H}'$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Com efeito, sejam $f, g \in \mathcal{H}'$. Pelo Teorema de Representação de Riesz–Fréchet, existem (únicos) h_0 e k_0 em $\mathcal{H}$ tais que

$$f(x) = \langle x, h_0 \rangle \quad \text{e} \quad g(x) = \langle x, k_0 \rangle$$

para todo $x \in \mathcal{H}$ onde $\|f\| = \|h_0\|$ e $\|g\| = \|k_0\|$. Defina a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H}' \times \mathcal{H}' \longrightarrow \mathbb{K}$ como

$$\langle f, g \rangle = \langle k_0, h_0 \rangle$$

para todos $f, g \in \mathcal{H}'$. Verifica-se que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $\mathcal{H}'$. Além disso, a norma de $\mathcal{H}'$ provém deste produto interno. De fato,

$$\langle f, f \rangle = \langle h_0, h_0 \rangle = \|h_0\|^2 = \|f\|^2,$$

ou seja, $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Portanto, $\mathcal{H}'$ é um espaço de Hilbert. □

3.4 Teorema de Lax–Milgram

Nesta seção, enunciaremos e provaremos um resultado análogo ao Teorema de Representação de Riesz–Fréchet para outros tipos de aplicações em um espaço de Hilbert, a saber, para as aplicações sesquilineares no caso complexo e para as aplicações bilineares no caso real. Este resultado é conhecido como o Teorema de Lax–Milgram. Para fazermos a sua demonstração precisamos de algumas definições.

Definição 3.4. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Uma função $T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ é dita uma forma sesquilinear quando

$$T(\alpha x + \beta y, z) = \alpha T(x, z) + \beta T(y, z)$$

e

$$T(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} T(x, y) + \overline{\beta} T(x, z)$$

para todos $x, y, z \in \mathcal{H}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Produtos internos são formas sesquilineares. Note que se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert sobre o corpo dos números reais, então uma forma sesquilinear é uma aplicação bilinear.

Definição 3.5. Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear. Dizemos que T é contínua quando existe $c > 0$ satisfazendo

$$|T(x, y)| \leqslant c\|x\|\|y\| \tag{3.20}$$

para todos $x, y \in \mathcal{H}$. O número

$$\|T\| = \inf\{c > 0\,;\ c \ \text{ satisfaz } \ (3.20)\}$$

é dita a norma de T.

Da definição da norma de uma forma sesquilinear T sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ resulta que

$$|T(x, y)| \leqslant \|T\|\|x\|\|y\|$$

para todos $x, y \in \mathcal{H}$.

Lembramos que se E é um espaço de Banach, então uma aplicação linear $A : E \longrightarrow E$ é dita um operador linear. Para provarmos o Teorema de Lax–Milgram precisamos do seguinte

Lema 3.1. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear contínua. Então existe um único operador linear $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ contínuo tal que*

$$T(x, y) = \langle x, A(y) \rangle$$

para todos $x, y \in \mathcal{H}$. Além disso, $\|T\| = \|A\|$.

Demonstração. Fixemos $y \in \mathcal{H}$ e considere a função $L_y : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ definida da seguinte forma $L_y(x) = T(x, y)$ para todo $x \in \mathcal{H}$. É fácil ver que L_y é linear. Vejamos que L_y é contínua. De fato, como T é contínua, dado $x \in \mathcal{H}$ temos

$$|L_y(x)| = |T(x, y)| \leqslant \|T\|\|x\|\|y\|$$

o que mostra a continuidade de L_y. Portanto, L_y é um funcional linear contínuo sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e, pelo Teorema de Representação de Riesz–Fréchet, existe (único) $h_y \in \mathcal{H}$ tal que $L_y(x) = \langle x, h_y\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Construa a aplicação $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ dada por $A(y) = h_y$ para todo $y \in \mathcal{H}$. Note que se $x \in \mathcal{H}$, então

$$T(x, y) = L_y(x) = \langle x, h_y\rangle = \langle x, A(y)\rangle,$$

isto é $T(x, y) = \langle x, A(y)\rangle$.

Vejamos que A é um operador linear contínuo sobre $\mathcal{H}$. Com efeito, fixados $x, y, z \in \mathcal{H}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, usando o fato que T é sesquilinear temos

$$\begin{aligned} \langle x, A(\alpha y + \beta z)\rangle &= T(x, \alpha y + \beta z) \\ &= \overline{\alpha} T(x, y) + \overline{\beta} T(x, z) \\ &= \overline{\alpha}\langle x, A(y)\rangle + \overline{\beta}\langle x, A(z)\rangle \\ &= \langle x, \alpha A(y) + \beta A(z)\rangle. \end{aligned}$$

e como esta igualdade vale para todo $x \in \mathcal{H}$, da propriedade (3.1) segue que $A(\alpha y+\beta z) = \alpha A(y) + \beta A(z)$ mostrando que A é linear. Claramente, $T = 0$ se, e somente se, $A = 0$. Se $T \neq 0$, então existem $x, y \in \mathcal{H}$ não nulos tais que $T(x, y) \neq 0$. Isso implica em $A(y) \neq 0$. Agora

$$\begin{aligned} \frac{\|A(y)\|}{\|y\|} &= \frac{\|A(y)\|^2}{\|y\|\|A(y)\|} \\ &= \frac{\langle A(y), A(y)\rangle}{\|y\|\|A(y)\|} \\ &= \frac{T(A(y), y)}{\|y\|\|A(y)\|} \\ &\leqslant \frac{\|T\|\|A(y)\|\|y\|}{\|y\|\|A(y)\|} \\ &= \|T\| \end{aligned}$$

e daí, $\|A\| \leqslant \|T\|$. Por outro lado,

$$|T(x, y)| = |\langle x, A(y)\rangle| \leqslant \|x\|\|A(y)\| \leqslant \|A\|\|x\|\|y\|$$

o que nos dá $\|T\| \leqslant \|A\|$. Assim, $\|T\| = \|A\|$.

Por fim, deixaremos a unicidade a cargo do leitor. □

Definição 3.6. Dizemos que uma forma sesquilinear T sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é coerciva quando existe $c > 0$ tal que

$$|T(x,x)| \geqslant c\|x\|^2$$

para todo $x \in \mathcal{H}$.

Teorema 3.2 (Teorema de Lax–Milgram)**.** *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear contínua e coerciva. Se $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo, então existe $h_0 \in \mathcal{H}$ tal que*

$$f(x) = T(x, h_0)$$

para todo $x \in \mathcal{H}$.

Demonstração. Pelo lema anterior, existe um operador linear contínuo $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ satisfazendo

$$T(x,y) = \langle x, A(y)\rangle \tag{3.21}$$

para todos $x, y \in \mathcal{H}$. Por hipótese, T é coerciva e daí existe $c > 0$ tal que

$$|T(x,x)| \geqslant c\|x\|^2$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Note que se $x \neq 0$, então

$$c\|x\|^2 \leqslant |T(x,x)| = |\langle x, A(x)\rangle| \leqslant \|x\|\|A(x)\|$$

e assim

$$\|A(x)\| \geqslant c\|x\|. \tag{3.22}$$

A expressão anterior também vale para $x = 0$ e, portanto, vale para todo $x \in \mathcal{H}$.

Vejamos que A é um operador linear bijetivo.

A é injetivo: De fato, se $x \in \mathcal{H}$ é tal que $A(x) = 0$, pela desigualdade em (3.22) temos que $\|x\| = 0$, o que implica $x = 0$. Isto garante que A é injetiva pois A é linear.

A é sobrejetivo: Seja $z \in \overline{A(\mathcal{H})}$. Existe uma sequência (x_n) em $A(\mathcal{H})$ tal que $A(x_n) \to z$. Como $(A(x_n))$ é de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A(x_n) - A(x_m)\| < c\,\epsilon \tag{3.23}$$

para todos $n, m \geqslant n_0$. Por (3.22) e (3.23) segue que

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{c}\|A(x_n) - A(x_m)\| < \epsilon$$

para todos $n, m \geqslant n_0$ o que mostra que (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}$. Portanto, existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $x_n \to x$. Pela continuidade do operador A, temos que $A(x_n) \to A(x)$ e pela unicidade do limite obtemos que $A(x) = z$. Logo $z \in A(\mathcal{H})$ e isto nos permite concluir que $A(\mathcal{H})$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Assim, podemos escrever $\mathcal{H} = A(\mathcal{H}) \oplus A(\mathcal{H})^{\perp}$. Mostraremos que $A(\mathcal{H})^{\perp} = \{0\}$. Com efeito, seja $y \in A(\mathcal{H})^{\perp}$. Por definição temos que $\langle y, A(y)\rangle = 0$. Por (3.21) temos que $T(y, y) = 0$ e pela coercividade de T obtemos que $y = 0$. Isso mostra que $A(\mathcal{H})^{\perp} = \{0\}$ e daí $A(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Ou seja, A é sobrejetivo.

Concluímos então que A é um operador linear contínuo bijetivo e, portanto, A^{-1} existe e é linear. Além disso, A^{-1} é contínuo por conta da desigualdade em (3.22).

Agora, se $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo, pelo Teorema de Representação de Riesz–Fréchet, existe $h \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(x) = \langle x, h\rangle \tag{3.24}$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Seja $h_0 = A^{-1}(h) \in \mathcal{H}$. Dado $x \in \mathcal{H}$, usando (3.21) e (3.24), temos que

$$T(x, A^{-1}(h)) = \langle x, A(A^{-1}(h))\rangle = \langle x, h\rangle = f(x).$$

Concluímos então que

$$f(x) = T(x, h_0)$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. □

Como consequência imediata do Teorema de Lax–Milgram provaremos uma versão do Teorema de Representação de Riesz–Fréchet para as aplicações bilineares em um espaço de Hilbert.

Corolário 3.3. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ e $T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear contínua e coerciva. Se $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então existe $h_0 \in \mathcal{H}$ tal que*

$$f(x) = T(x, h_0)$$

para todo $x \in \mathcal{H}$.

Demonstração. Basta notar que uma forma sesquilinear em um espaço de Hilbert sobre o corpo dos números reais é uma aplicação bilinear. □

4 Os espaços de Lebesgue com expoente variável

Nos capítulos anteriores foram apresentadas diversos resultados gerais sobre espaços de Banach. Uma classe particular deste espaços são os denominados espaços de Lebesgue, ou espaços $L^p(\Omega)$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, e p é, ou um número real positivo, ou representa $+\infty$. Estes espaços aparecem a partir da procura de espaços de funções que são soluções de equações diferenciais parciais, e que possuem baixa regularidade, isto é, não necessariamente são de classe C^2, ou mesmo de classe C^1. Um ponto importante é que, no caso de p ser um número real positivo, é frequente considerar p maior ou igual a 1. A literatura sobre as propriedades e resultados importantes de funções neste tipo de espaços é muito ampla, por exemplo Maz'ja (1985), Adams e Fournier (2003) ou Lieb e Loss (2001).

Neste capítulo, primeiro apresentamos algumas definições e resultados sobre espaços $L^p(\Omega)$ onde p é um número real positivo maior ou igual a 1. Posteriormente, consideramos o caso de p ser uma função definida também em Ω.

4.1 Noções de medida

Definição 4.1. Seja Ω um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Uma coleção $\mathcal{M}$ de subconjuntos de Ω é denominada uma *σ-álgebra* em Ω se os elementos de $\mathcal{M}$ satisfazem as seguintes condições:

- $\Omega \in \mathcal{M}$;

- Se A é um elemento de $\mathcal{M}$, o complemento $\Omega \setminus A$ é também um elemento de $\mathcal{M}$.
- Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ é uma coleção enumerável de elementos de $\mathcal{M}$, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ é também um elemento de $\mathcal{M}$.

Dois exemplos de uma σ-álgebra definida num conjunto Ω são as coleções $\{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{P}_\Omega$ (o conjunto potência de Ω). Note que uma σ-álgebra é uma coleção de conjuntos que tem propriedades *razoáveis* para serem medidos, no sentido do complemento e da união enumerável de conjuntos que podemos medir ainda serem também também conjuntos que podemos medir. Os elementos de uma σ-álgebra serão denominados *mensuráveis*. É possível definir várias σ-álgebras a partir do mesmo conjunto Ω, e note que esta definição diz que existem conjuntos que *potencialmente* são passíveis de serem medidos, mas não temos ainda uma noção de *como* medir eles. A definição a seguir apresenta este mecanismo.

Definição 4.2. Seja Ω um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$, e $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra associada a Ω. Uma função $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ é denominada uma *medida* (em Ω), se verifica as seguintes condições:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ é uma coleção enumerável *disjunta* de elementos de $\mathcal{M}$,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Dois dos exemplos mais utilizados de medida em subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ são a *medida de Lebesgue* e a *medida de contagem*. intuitivamente falando, a primeira medida associa a um elemento de uma σ-álgebra especifica, o *volume* do elemento dado. Por outro lado, a segunda medida associa a um conjunto que pertence a $\mathcal{P}_\Omega$, o número de elementos do conjunto dado.

Definição 4.3. Seja Ω um subconjunto aberto e não vazio de $\mathbb{R}^n$, e $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra em Ω. Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é denominada uma *função mensurável* se para qualquer número real t, o conjunto

$$f^{-1}(t) = \{x \in \Omega : f(x) > t\},$$

é mensurável. isto é, $f^{-1}(t) \in \mathcal{M}$.

4.2 Alguns resultados dos espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção apresentamos algumas definições e resultados em espaços de Lebesgue com expoente fixo. Os resultados serão enunciados sem demonstrações, e estes possuem generalizações para espaços com expoente variável. As referências utilizadas nesta seção são Adams e Fournier (2003), e Lieb e Loss (2001).

Definição 4.4. Seja Ω um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Consideremos uma medida μ e um número real fixo $p \in [1, \infty)$. Definamos o seguinte conjunto:

$$L^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \ f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) < \infty\}.$$

No caso de considerarmos a medida de contagem μ_c, $L^p(\Omega, \mu_c) = l^p(\Omega)$, o que implica que podemo ver os espaços $L^p(\Omega)$ como uma generalização dos espaços de sequências $l^p(\Omega)$ apresentados nos capítulos anteriores. Ao longo deste capítulo e do próximo, vamos considerar μ a medida de Lebesgue, e usaremos a notação $L^p(\Omega)$. A seguir, para cada $f \in L^p(\Omega)$, definimos um operador $f \mapsto \|f\|_p$ da forma seguinte:

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Ao tentar mostrar que este operador é uma norma no espaço $L^p(\Omega)$, surge um problema: se $\|f\|_p = 0$, temos que $f(x) = 0$ exceto num conjunto de medida nula. Neste caso, dizemos que f é nula em *quase todo ponto* em Ω. Uma forma de resolver este problema é considerar um espaço vetorial quociente a partir do espaço $L^p(\Omega)$, usando como relação de equivalência que duas funções são iguais, se e somente se, *coincidem em quase todo ponto em* Ω. Neste espaço vetorial quociente, o operador $f \mapsto \|f\|_p$ é de fato uma norma. Ao longo deste capítulo e do próximo, usaremos a mesma notação $L^p(\Omega)$ para o espaço quociente, e diremos que $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial normado, sendo que duas funções neste espaço vão ser iguais se elas coincidem em quase todo ponto em Ω.

Uma desigualdade muito útil nos espaços $L^p(\Omega)$ é a denominada *desigualdade de Hölder*: se f, g são duas funções tais que $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, onde $1 < p, q < \infty$, e $1/p + 1/q = 1$, então $fg \in L^1(\Omega)$, e

$$\left| \int_\Omega f(x)g(x)dx \right| \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

Note que esta é uma versão integral da desigualdade de Hölder apresentada no capítulo 1. Em relação a convergência, sabemos que qualquer sequência em $\mathbb{R}^n$ que é de Cauchy converge. Como apresentado nos capítulos anteriores, este resultado não necessariamente se estende para espaços de dimensão infinita. Entretanto, para espaços $L^p(\Omega)$ temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1 (Completude)**.** *Se* $1 < p < \infty$*,* $L^p(\Omega)$ *é um espaço de Banach.*

Este resultado permite obter informações importantes quando tivermos uma sequência em algum espaço $L^p(\Omega)$. A seguir, apresentamos três resultados sobre a relação entre a convergência de uma sequência de elementos no espaço $L^p(\Omega)$ e as integrais dos elementos desta sequência.

Teorema 4.2 (Convergência monótona). *Seja $(f_n)_{n\geqslant 1}$ uma sequência crescente de funções em $L^1(\Omega)$ em quase todo ponto em Ω tais que*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}+}\int_{\Omega} f_n(x)dx < \infty.$$

Então $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge em quase todo ponto em Ω a uma função f em $L^1(\Omega)$. Mais ainda, $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Lema 4.1 (Lema de Fatou). *Seja $(f_n)_{n\geqslant 1}$ uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$, não negativas em quase todo ponto em Ω tais que*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}+}\int_{\Omega} f_n(x)dx < \infty.$$

Então, se para quase todo $x \in \Omega$, $f(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega} f_n(x)dx \geqslant \int_{\Omega} f(x)dx.$$

Teorema 4.3 (Convergência dominada). *Seja $(f_n)_{n\geqslant 1}$ uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ em quase todo ponto em Ω tal que existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ que verifica*

$$|f_n(x)| \leqslant g(x), \quad \textit{para quase todo ponto em } x \in \Omega.$$

Então $f \in L^1(\Omega)$, e $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

O resultado a seguir mostra que, se tivermos uma função $f \in L^p(\Omega)$, é possível achar uma função com uma *certa regularidade*, arbitrariamente próxima de f.

Teorema 4.4 (Densidade). *O espaço $C_c(\Omega)$ é denso no espaço $L^p(\Omega)$, onde $1 < p < \infty$.*

Finalmente, o último resultado desta seção mostra que o espaço dual de um espaço $L^p(\Omega)$ pode se identificar com um espaço $L^q(\Omega)$, para um expoente q que depende do expoente p.

Teorema 4.5 (Dualidade). *Se $1 < p < \infty$, existe uma isometria linear sobrejetiva entre o dual do espaço $L^p(\Omega)$ e o espaço $L^q(\Omega)$, onde $1/p + 1/q = 1$.*

Um expoente q que verifica a condição $1/p + 1/q = 1$ é denominado o expoente *conjugado* de p. Assim, se $1 < p < \infty$, usamos a identificação $[L^p(\Omega)]^* = L^q(\Omega)$, onde $[L^p(\Omega)]^*$ é o espaço dual do espaço $L^p(\Omega)$.

4.3 Os espaços $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

4.3.1 A noção de modular

Nesta seção começamos a apresentar algumas definições e resultados quando o expoente do espaço $L^p(\Omega)$ é uma função em Ω, isto é, $p = p(x)$. A primeira diferença com os espaços com expoente fixo é a existência de um novo operador, que denominamos o *modular* de uma função. Ao longo deste capítulo e do próximo, vamos considerar o expoente uma função *contínua* em Ω. As definições, os resultados e as demonstrações neste e no próximo capítulo foram obtidos principalmente seguindo a referência Cruz-Uribe e Fiorenza (2013), onde podem ser encontrados resultados mais gerais, assim como diversos exemplos e aplicações. Uma outra referência para este assunto é Diening et al. (2011), onde existe também muita informação sobre funções com baixa regularidade em espaços de Lebesgue variáveis, e que possuem derivada num sentido *fraco*, que também estão num espaço de Lebesgue com expoente variável. Este tipo de espaços são denominados *espaços de Sobolev com expoente variável*.

Definição 4.5. O conjunto de todas as funções contínuas definidas em Ω tais que sempre assumem valores maiores estritamente do que 1 será denotado por $\mathcal{P}(\Omega)$, isto é,

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{p : \Omega \to (1, \infty) : p \text{ é contínua em } \Omega\}.$$

Os elementos de $\mathcal{P}(\Omega)$ vão ser denominados *expoentes*. Se $W \subset \Omega$ e $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, usamos as notações:

$$p_-(W) = \inf\{p(x) : \ x \in W\}; \quad p_+(W) = \sup\{p(x) : \ x \in W\}.$$

Uma vez que a função p é limitada inferiormente, $p_-(W)$ sempre será considerado um número real, desde que $W \neq \emptyset$. Por outro lado, dado que p é ilimitada superiormente, é possível termos $p_+(W) = \infty$.

Observação 4.1. Assim como no caso dos espaços $L^p(\Omega)$, onde p é fixo, o expoente conjugado de $p(\cdot)$, que denotaremos por $p'(\cdot)$, é definido da forma seguinte:

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1, \quad \forall x \in \Omega,$$

Note que as seguintes igualdades são satisfeitas

$$(p'(\cdot))_+ = (p_-(\cdot))', \quad (p'(\cdot))_- = (p_+(\cdot))'.$$

Exemplo 4.1. Se $p(x) = p_0$, onde p_0 é um número real fixo estritamente maior do que 1,

$$p_-(W) = p_+(W) = p_0,$$

onde W é qualquer aberto de $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.2. Se $p(x) = 1 + |x|$ e $W = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$p_-(W) = 1, \quad p_+(W) = \infty.$$

Neste exemplo, a função p possui um mínimo em W.

Exemplo 4.3. Se $p(x) = |x| + (1/|x|)$ e $W = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$p_-(W) = 2, \quad p_+(W) = \infty.$$

Neste exemplo, de forma similar ao caso anterior, a função p também possui um mínimo em W.

Definição 4.6. Dado $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, e uma função mensurável f, definimos o *modular* associado a $p(\cdot)$ da forma seguinte:

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx.$$

Se $|f(\cdot)|^{p(\cdot)} \notin L^1(\Omega)$, definimos $\rho_{p(\cdot)}(f) = \infty$.

Teorema 4.6. *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. O modular $\rho(\cdot)$, associado ao expoente $p(\cdot)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

a. Para qualquer função Lebesgue mensurável f, $\rho(f) \geqslant 0$.

b. $\rho(f) = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$, para quase todo $x \in \Omega$.

c. Se $\rho(f) < \infty$, então $f(x) < \infty$ para quase todo $x \in \Omega$.

d. Se $\alpha, \beta \geqslant 0$ e $\alpha + \beta = 1$, $\rho(\alpha f + \beta g) \leqslant \alpha\rho(f) + \beta\rho(g)$.

e. Se $|f(x)| \geqslant |g(x)|$ quase sempre em Ω, $\rho(f) \geqslant \rho(g)$.

f. Se para algum $a > 0$, $\rho(f/a) < \infty$, a função $\lambda \mapsto \rho(f/\lambda)$ é contínua e decrescente no intervalo $[a, +\infty)$. Mais ainda, $\rho(f/\lambda) \to 0$ se $\lambda \to +\infty$.

Demonstração. Note que a função f considerada em todos os casos, não é necessariamente uma função em $L^1(\Omega)$.

a. Segue da definição de modular.

b. Segue da definição da integral da função $x \mapsto |f(x)|$, que é não negativa quase sempre em Ω.

c. Segue da definição de integral.

d. Segue da convexidade da função $t \mapsto t^{p(x}$.

e. Segue das propriedades da integral, e da condição $p(x) > 1$.

f. Exercício.

□

4.3.2 A definição dos espaços $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Definição 4.7. Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Se $\mathcal{L}$ é o conjunto da funções mensuráveis em Ω, definimos:

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \ f \in \mathcal{L}, \ \rho(f/\lambda) < \infty, \text{ para algum } \lambda > 0\}.$$

De forma similar ao caso constante, a partir desde conjunto podemos gerar uma conjunto quociente e definir as operações de soma e produto por um escalar entre as classes dentro deste conjunto quociente. Entretanto, de agora em diante vamos considerar o espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ como um conjunto de funções com uma estrutura de espaço vetorial. Aqui é importante lembrar que neste espaço, duas funções vão coincidir se, e somente se, elas são iguais exceto num conjunto de medida de Lebesgue nula. Em particular, dizemos que $f \equiv 0$ se $f(x) = 0$, exceto por um conjunto de medida de Lebesgue nula.

Teorema 4.7. *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. As afirmações a seguir são equivalentes.*

a. $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *se, e somente se,* $\rho(f) < \infty$.

b. $p_-(\Omega) = \infty$ *ou* $p_+(\Omega) < \infty$.

Demonstração. Note que é possível termos $p(x) < \infty$ para qualquer $x \in \Omega$, e $p_+(\Omega) = \infty$.

($b. \Rightarrow a.$) Vamos supor que $p_+(\Omega) < \infty$. Se $\rho(f) < \infty$, temos que $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, considerando $\lambda = 1$. Por outro lado, se $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $\rho(f/\lambda) < \infty$ para algum $\lambda > 1$. Então

$$\begin{aligned}
\rho(f) &= \int_\Omega \left[\frac{\lambda f(x)}{\lambda}\right]^{p(x)} dx \\
&= \int_\Omega \lambda^{p(x)} \left[\frac{f(x)}{\lambda}\right]^{p(x)} dx \\
&\leqslant \lambda^{p_+(\Omega)} \rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) < \infty.
\end{aligned}$$

Note que a última igualdade é obtida pois $\lambda > 1$ e $p_+(\Omega) < \infty$. Finalmente, se $\rho(f/\lambda) < \infty$ para algum $\lambda < 1$, do teorema **4.6.**,

$$\rho(f/\mu) \leqslant \rho(f/\lambda), \quad \forall \mu > \lambda.$$

Em particular, se escolhermos $\mu = 1$, temos $\rho(f) < \infty$.

($a. \Rightarrow b.$) Vamos supor que $p_-(\Omega) < \infty$ e $p_+(\Omega) = \infty$. O nosso objetivo é definir uma função $f \in L^{p(\cdot)}$ tal que $\rho(f) = \infty$. Para qualquer $k > 0$, consideremos os conjuntos

$$E_k = \{x \in \Omega : p(x) > k\} = p^{-1}(k, \infty).$$

Estes conjuntos são abertos não vazios (pois p é contínua) que possuem medida positiva. Note que estes conjuntos geram uma sequência de conjuntos encaixados de forma decrescente, e que o volume deles converge a zero para valores arbitrariamente grandes de k. Mais ainda, temos

$$|E_k \setminus E_{k+1}| > 0; \quad p(x) \geqslant p_k > k, \text{ para cada } x \in E_k.$$

A seguir, definamos

$$f(x) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1_{E_k \setminus E_{k+1}}(x)}{|E_k \setminus E_{k+1}|} \right]^{1/p(x)}.$$

Note que esta função é uma soma infinita de funções características, multiplicada cada um delas por um número positivo. Mais ainda, para cada $x \in \Omega$, existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x \in E_k \setminus E_{k+1}$, de onde a soma infinita é de fato um único número real. Agora, se $\lambda > 1$,

$$\rho(f/\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|E_k \setminus E_{k+1}|} \int_{E_k \setminus E_{K+1}} \frac{1}{\lambda^{p(x)}} dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} < \infty,$$

de onde $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Por outro lado

$$\rho(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|E_k \setminus E_{k+1}|} \int_{E_k \setminus E_{K+1}} dx = \infty.$$

Assim, temos o resultado.

□

Teorema 4.8. *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$.*

a. Se $p_+ < \infty$, para qualquer $\lambda \geqslant 1$, $\rho(\lambda f) \leqslant \lambda^{p_+(\Omega)} \rho(f)$.

b. Se $p_+ < +\infty$ e $\lambda \geqslant 1$, $\lambda^{p_-} \rho(f) \leqslant \rho(\lambda f) \leqslant \lambda^{p_+}(f)$.

Se $0 < \lambda < 1$, as desigualdades reversas são satisfeitas.

Demonstração. Exercício. □

Teorema 4.9. *Se $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço vetorial.*

Demonstração. Uma vez que consideramos $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ um subconjunto do espaço das funções contínuas de Ω em $\mathbb{R}$, para mostrar que $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço vetorial, é suficiente mostrar que a função nula e a combinação linear de funções em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ estão em

$L^{p(\cdot)}(\Omega)$, pois estas duas condições garantem que o subconjunto $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é de fato um subespaço vetorial. Dado que

$$\rho(0) = \rho\left(\frac{0}{\lambda}\right) = 0,$$

onde λ é qualquer número real positivo, $0 \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Por outro lado, sejam $f, g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, isto é, existem $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tais que

$$\rho\left(\frac{f}{\lambda_1}\right), \rho\left(\frac{g}{\lambda_2}\right) < \infty. \tag{4.1}$$

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, supondo $\lambda_1 < \lambda_2$, dado que $\rho(f/\lambda_1) < \infty$ e a função $\lambda \mapsto \rho(f/\lambda)$ é decrescente no intervalo $[\lambda_1, \infty)$, escolhendo $\lambda = \lambda_2$ temos $\rho(f/\lambda_2) < \infty$. Assim, em (4.1) podemos considerar as constantes λ_1 e λ_2 iguais. Denotaremos esta constante por λ.

Se a, b são números reais não negativos tais que $a + b = 1$, uma vez que o modular preserva ordem e que é convexo, se fizermos $d = (|a| + |b|)\lambda$, obtemos

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{af + bg}{d}\right) &= \rho\left(\frac{|af + bg|}{d}\right) \\
&\leqslant \rho\left(\frac{|a|}{|a| + |b|}\frac{|f|}{\lambda} + \frac{|b|}{|a| + |b|}\frac{|g|}{\lambda}\right) \\
&\leqslant \frac{|a|}{|a| + |b|}\rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) + \frac{|b|}{|a| + |b|}\rho\left(\frac{g}{\lambda}\right).
\end{aligned}$$

Dado que f, g são elementos do espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, a última expressão de cadeia de desigualdades acima é finita, de onde $af + bg$ é também um elemento do espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. $\square$

4.3.3 A noção de norma nos espaços $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Nesta subseção apresentamos a definição de norma que utilizamos nos espaços de Lebesgue com expoente variável. Esta definição usa a noção de modular como condição principal, e assim, é razoável supor que existe uma relação entre esta definição de norma e a definição de modular. De fato, vamos apresentar alguns resultados sobre a relação entre esta duas definições. Posteriormente, em outra subseção, apresentamos uma outra norma, que denominamos norma associada, que será equivalente a norma que vamos a definir nesta subseção.

Definição 4.8. Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Se f é uma função mensurável, definimos

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leqslant 1\right\}. \tag{4.2}$$

Note que a aplicação $f \mapsto \|f\|_{p(\cdot)}$ é não negativa. Por outro lado, se para qualquer escolha de $\lambda > 0$, $\rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) > 1$, definimos $\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = +\infty$. O resultado a seguir mostra que a aplicação (4.2) faz do conjunto $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ um espaço vetorial normado.

Teorema 4.10. *Se $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, a função $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ define uma norma em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Devemos mostrar que a aplicação $f \mapsto \|f\|_{p(\cdot)}$ verifica as condições de uma norma:

a. $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$ se, e somente se, $f \equiv 0$.

b. $\|\alpha f\|_{p(\cdot)} = |\alpha| \, \|f\|_{p(\cdot)}$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

c. $\|f + g\|_{p(\cdot)} \leqslant \|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)}$.

Para mostrar que cada condição é satisfeita, usamos a definição e as propriedades do modular.

a. Se $f \equiv 0$, $\rho(f/\lambda) = 0 \leqslant 1$ para qualquer $\lambda > 0$, de onde $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$. Reciprocamente, vamos supor que a norma de f em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é nula, isto é,

$$\inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \left[\frac{|f(x)|}{\lambda}\right]^{p(x)} dx \leqslant 1.\right\} = 0$$

Sabemos que $p_- \leqslant p(x)$, para qualquer $x \in \Omega$. Por outro lado, uma vez que o infimo acima é zero, existe $\lambda < 1$ tal que

$$\frac{1}{\lambda^{p_-}} \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx \leqslant 1. \tag{4.3}$$

Utilizando a definição de ínfimo, podemos definir uma sequência de números positivos convergindo a 0 tal que a desigualdade (4.3) é satisfeita, o que implica que

$$\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx = 0.$$

Portanto, para quase todo ponto em Ω, $f = 0$.

b. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Se $\alpha \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_{p(\cdot)} &= \inf\{\lambda > 0 : \rho(|\alpha| f/\lambda) \leqslant 1\} \\
&= |\alpha| \inf\{\lambda/|\alpha| > 0 : \rho(f/(\lambda/|\alpha|)) \leqslant 1\} \\
&= |\alpha| \, \|f\|_{p(\cdot)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $\alpha = 0$, a igualdade acima também é satisfeita.

c. Sejam $f, g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Então, existem $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tais que

$$\rho\left(\frac{f}{\lambda_1}\right), \quad \rho\left(\frac{g}{\lambda_2}\right) < \infty.$$

Da propriedade f. do Teorema 4.6, sabemos que a função $\lambda \mapsto \rho(f/\lambda)$ converge a 0 se $\lambda \to \infty$. Em particular, existe $\alpha > 1$ tal que $\rho(f/\alpha) \leqslant 1$. De forma similar, existe $\beta > 1$ tal que $\rho(g/\beta) \leqslant 1$. A seguir, seja $\gamma = \alpha + \beta$. Utilizando a convexidade do modular ρ, obtemos

$$\rho\left(\frac{f+g}{\gamma}\right) = \rho\left(\frac{\alpha}{\gamma}\frac{f}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma}\frac{g}{\beta}\right) \leqslant \frac{\alpha}{\gamma}\rho(f/\alpha) + \frac{\beta}{\gamma}\rho(g/\beta) \leqslant 1.$$

Assim, $\|f+g\|_{p(\cdot)} \leqslant \alpha + \beta$. Utilizando a definição da aplicação $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$:

$$\|f+g\|_{p(\cdot)} \leqslant \|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)}.$$

□

A seguir, apresentamos alguns resultados que mostram a relação entre os conceitos de modular e de norma nos espaços $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Teorema 4.11. *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$.*

a. *Se $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $\|f\|_{p(\cdot)} > 0$, $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) \leqslant 1$.*

b. *Para qualquer $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ não nulo, $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) = 1$ se, e somente se, $p_+(\Omega) < \infty$.*

Demonstração. Note que a condição $p_+(\Omega) < \infty$ é equivalente a dizer que o expoente $p(\cdot)$ é limitado superiormente.

a. A partir da definição do ínfimo, sabemos que existe $(\lambda_k)_{k\geqslant 1}$, uma sequência decrescente, tal que

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \lim_{k\to\infty} \lambda_k,$$

e assim

$$\frac{1}{\|f\|_{p(\cdot)}} f = \lim_{k\to\infty} \frac{f}{\lambda_k}.$$

Pelo lema de Fatou e a definição de modular,

$$\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \rho(f/\lambda_k) \leqslant 1.$$

b. Seja $p_+(\Omega) < \infty$. Do item anterior, sabemos que $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) \leqslant 1$. Dado $0 < \lambda < \|f\|_{p(\cdot)}$ tal que $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) < 1$, do Teorema 4.8,

$$\rho(f/\lambda) = \rho\left(\frac{\|f\|_{p(\cdot)}}{\lambda}\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leqslant \left(\frac{\|f\|_{p(\cdot)}}{\lambda}\right)^{p_+(\Omega)} \rho\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right).$$

Se escolhermos λ suficientemente próximo a $\|f\|_{p(\cdot)}$, obtemos $\rho(f/\lambda) < 1$. Entretanto, dado que $\lambda < \|f\|_{p(\cdot)}$, a partir da definição da norma de f, $\rho(f/\lambda) \geqslant 1$. Esta contradição implica que $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) = 1$. A afirmação recíproca é deixada como exercício.

□

Corolário 4.1. *Seja* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. *Então*

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leqslant 1 \Rightarrow \rho(f) \leqslant \|f\|_{p(\cdot)}; \quad \|f\|_{p(\cdot)} > 1 \Rightarrow \rho(f) \geqslant \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Demonstração. Uma vez que a norma de f em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é não negativa, vamos considerar três casos:

a. $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$. Então $f \equiv 0$, de onde $\rho(f) = 0$.

b. $0 < \|f\|_{p(\cdot)} \leqslant 1$. Da convexidade do modular, e do Teorema 4.11,

$$\rho(f) = \rho\left(\frac{\|f\|_{p(\cdot)}\, f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leqslant \|f\|_{p(\cdot)}\, \rho\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \leqslant \|f\|_{p(\cdot)}.$$

c. $\|f\|_{p(\cdot)} > 1$. Então $\rho(f) > 1$, pois se $\rho(f) \leqslant 1$, da definição de norma temos $\|f\|_{p(\cdot)} \leqslant 1$. Então, dado que $\rho(f) > 1$,

$$\rho\left(\frac{f}{\rho(f)}\right) = \int_\Omega \left[\frac{|f(x)|}{\rho(f)}\right]^{p(x)} dx \leqslant \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\rho(f)} dx = 1.$$

Da definição da norma da função f em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ temos $\|f\|_{p(\cdot)} \leqslant \rho(f)$.

□

Corolário 4.2. *Seja* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. *Então*

$$\|f\|_{p(\cdot)} > 1 \quad \Rightarrow \rho(f)^{1/p_+} \leqslant \|f\|_{p(\cdot)} \leqslant \rho(f)^{1/p_-}; \tag{4.4}$$

$$0 < \|f\|_{p(\cdot)} \leqslant 1 \Rightarrow \rho(f)^{1/p_-} \leqslant \|f\|_{p(\cdot)} \leqslant \rho(f)^{1/p_+}. \tag{4.5}$$

Demonstração. Exercício. □

Nos espaços $L^p(\Omega)$, onde p é constante, uma das desigualdades mais úteis é a desigualdade de Hölder. No caso dos espaços de Lebesgue com expoente variável, é possível também obter uma desigualdade similar.

Teorema 4.12 (Desigualdade de Hölder)**.** *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Então, para quaisquer $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leqslant K_{p(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)}, \tag{4.6}$$

onde

$$K_{p(\cdot)} = \left[\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+} + 1\right].$$

Demonstração. No caso de termos $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$ ou $\|g\|_{p'(\cdot)} = 0$, $fg \equiv 0$, de onde segue (4.6). Agora, vamos supor que $\|f\|_{p(\cdot)} \cdot \|g\|_{p'(\cdot)} > 0$. Mais ainda, pela homogeneidade da norma, vamos assumir que $\|f\|_{p(\cdot)} = \|g\|_{p(\cdot)} = 1$. Da desigualdade pontual de Young,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)g(x)|dx &\leqslant \frac{1}{p(x)} \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx + \frac{1}{p'(x)} \int_\Omega |g(x)|^{p'(x)} dx \\ &\leqslant \frac{1}{p_-} \rho_{p(\cdot)}(f) + \frac{1}{p'(\cdot)_-} \rho_{p'(\cdot)}(g).\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\frac{1}{p'(\cdot)_-} = \frac{1}{(p_+)'} = 1 - \frac{1}{p_+},$$

e do Teorema 4.11, $\rho_{p(\cdot)}(f), \rho_{p'(\cdot)}(g) \leqslant 1$, temos

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leqslant \frac{1}{p_-} + 1 - \frac{1}{p_+}.$$

□

4.3.4 A norma associada em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Nesta subseção, enunciamos uma nova aplicação que associa a cada função no espaço $L^p(\Omega)$ um número real. É possível mostrar que esta nova aplicação é de fato, uma outra norma no espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Apresentamos alguns resultados sobre a relação desta aplicação com o modular, e com a norma definida na subseção anterior.

Definição 4.9. Dados $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ e f uma função mensurável em Ω, definimos

$$\|f\|'_{p(\cdot)} = \sup\left\{\int_\Omega f(x)g(x)dx : g \in L^{p'(\cdot)}, \|g\|_{p'(\cdot)} \leqslant 1\right\}.$$

É possível mostrar que este novo operador é de fato uma norma, que denominamos a *norma associada em* $L^p(\Omega)$ com respeito a norma $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$. O conjunto de todas as funções f, mensuráveis em Ω, tais que $\|f\|'_{p(\cdot)} < \infty$ será denotado por $M^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Teorema 4.13. *Dado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, o conjunto $M^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço vetorial normado, com respeito à norma $\|\cdot\|'_{p(\cdot)}$. Mais ainda, a norma preserva ordem, isto é, dados $f, g \in M^{p(\cdot)}$ que verificam a desigualdade $|f| \leqslant |g|$, $\|f\|'_{p(\cdot)} \leqslant \|g\|'_{p(\cdot)}$.*

Demonstração. Exercício. □

Observação 4.2. Uma consequência do Teorema 4.13 é uma outra versão de desigualdade de Hölder:

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leqslant K\, \|f\|_{p(\cdot)}\, \|g\|'_{p'(\cdot)}\,.$$

Lema 4.2. *Dado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, se $\|f\|'_{p(\cdot)} \leqslant 1$ e $\rho(f) < \infty$, então $\rho(f) \leqslant 1$.*

Demonstração. Vamos supor por contradição que $\rho(f) > 1$. Uma vez que $\rho(f) < \infty$, sabemos que a função $\lambda \mapsto \rho(f/\lambda)$ é decrescente e contínua em $[1, \infty)$. Mais ainda , dado que $\rho(f/\lambda) \to 0$ se $\lambda \to \infty$, pela continuidade do modular, existe $\lambda > 1$ tal que $\rho(f/\lambda) = 1$. A seguir, definamos

$$g(x) = \left[\frac{|f(x)|}{\lambda}\right]^{p(x)-1} \operatorname{sgn} f(x)$$

Note que na definição de g, estamos considerando as partes negativa e positiva de f. Então,

$$\rho_{p'(\cdot)}(g) = \int_\Omega |g(x)|^{p'(x)} dx = \int_\Omega \left[\frac{|f(x)|}{\lambda}\right]^{p(x)} dx = \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) = 1$$

o que implica que $\|g\|_{p'(\cdot)} \leqslant 1$. Uma vez que $|f(x)| = f(x)\operatorname{sgn} f(x)$, das definições da função g e de norma associada

$$\begin{aligned}
\|f\|'_{p(\cdot)} &\geqslant \int_\Omega f(x)g(x)dx \\
&= \int_\Omega f(x)[\operatorname{sgn} f(x)] \left[\frac{|f(x)|}{\lambda}\right]^{p(x)-1} dx \\
&= \lambda \int_\Omega \left[\frac{|f(x)|}{\lambda}\right]^{p(x)} dx \\
&= \lambda\rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) > 1.
\end{aligned}$$

Isto contradiz a nossa hipótese sobre f. Portanto, $\rho(f) \leqslant 1$. □

Teorema 4.14. *Se $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ e f uma função Lebesgue mensurável, $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ se, e somente se, $f \in M^{p(\cdot)}(\Omega)$. Mais ainda*

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leqslant \|f\|'_{p(\cdot)} \leqslant K_{p(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)},$$

onde

$$K_{p(\cdot)} := \left[\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+} + 1\right].$$

Demonstração. Ver Cruz-Uribe e Fiorenza (2013). □

4.3.5 Algumas imersões nos espaços $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Nos espaços $L^p(\Omega)$, onde p é constante, os resultados sobre imersões entre eles são muito úteis, dependendo da relação entre os expoentes, ou da medida do conjunto Ω. A seguir, apresentamos alguns resultados sobre imersões entre espaços de Lebesgue com expoente variável.

Lema 4.3. *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}$. Se U é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de medida de Lebesgue finita, $1_U \in L^{p(\cdot)}$ e $\|1_U\|_{p(\cdot)} \leqslant |U| + 1$.*

Demonstração. Seja $\alpha = |U| + 1$. Então $\alpha \geqslant 1$. Além disso,

$$\rho(1_U/\alpha) = \int_U \frac{1}{\alpha^{p(x)}} dx \leqslant \frac{|U|}{\alpha} \leqslant 1.$$

Usando a definição da norma $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$, temos o resultado. □

Teorema 4.15. *Sejam $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Então, $L^{q(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e existe $K > 1$ tal que para todo $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$, $\|f\|_{p(\cdot)} \leqslant K \|f\|_{q(\cdot)}$, se e somente se,*

a. $p(x) \leqslant q(x)$ *para quase todo* $x \in \Omega$;

b. Existe $\lambda > 1$ *tal que*

$$\int_D \lambda^{-r(x)} dx < \infty,$$

onde $D = \{x \in \Omega : p(x) < q(x)\}$ e $r(\cdot)$ é o expoente definido por

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}.$$

Demonstração. Ver Cruz-Uribe e Fiorenza (ibid.). □

Note que, nas condições do Teorema 4.15 para termos uma imersão entre espaços $L^{p(\cdot}(\Omega)$, a diferença do caso com o expoente fixo, *não estamos supondo que a medida de Ω seja finita.*

Corolário 4.3. *Seja $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Vamos assumir que $|\Omega| < \infty$. Então $L^{q(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ se, e somente se, $p(x) \leqslant q(x)$ quase sempre. Mais ainda, nesse caso temos*

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leqslant [1 + |\Omega|] \, \|f\|_{q(\cdot)} .$$

Demonstração. Exercício. □

Observação 4.3. Uma vez que $p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+$, se $|\Omega| < \infty$, do corolário 4.3,

$$L^{p_+}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p_-}(\Omega).$$

Teorema 4.16. *Se $p(\cdot) \in \mathcal{P}$, então $L^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p_+}(\Omega) + L^{p_-}(\Omega)$, e*

$$\|f\|_{L^{p_+} + L^{p_-}} \leqslant 2 \, \|f\|_{L^{p(\cdot)}} .$$

Demonstração. Pela homogeneidade das normas, podemos assumir sem perda de generalidade que $\|f\|_{p(\cdot)} = 1$. Seja $f = f_1 + f_2$, onde

$$f_1 = f 1_{\{x \in \Omega : \, |f(x)| \leqslant 1\}}, \quad f_2 = f 1_{\{x \in \Omega : \, |f(x)| > 1\}\}}.$$

Se $p_+ < \infty$, do Corolário 4.1,

$$\int_\Omega |f_1(x)|^{p_+} dx \leqslant \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx \leqslant \|f\|_{p(\cdot)} = 1,$$
$$\int_\Omega |f_2(x)|^{p_-} dx \leqslant \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx \leqslant \|f\|_{p(\cdot)} = 1,$$

Então,

$$\|f\|_{L^{p_+} + L^{p_-}} \leqslant \|f_1\|_{p_+} + \|f_2\|_{p_-} \leqslant 2 = 2 \, \|f\|_{p(\cdot)} .$$

Se $p_+ = \infty$, de forma similar ao caso anterior, $\|f_1\|_\infty \leqslant 1 = \|f\|_{p(\cdot)}$. □

4.3.6 Convergência no espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Nesta subseção apresentamos alguns resultados sobre duas noções de convergência nos espaços $L^{p(\cdot)}(\Omega)$: a convergência em modular e a convergência em norma. Estas duas convergências, sob certas condições, são equivalentes. Posteriormente, enunciamos e provamos três resultados da relação entre integrais e convergência em norma de uma sequência de elementos de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$: o teorema da convergência monótona, o lema de Fatou, e o teorema da convergência dominada. Estes resultados, que aparecem dentro da teoria dos espaços $L^p(\Omega)$ com p fixo, possuem uma formulação semelhante para espaços com expoente variável.

Definição 4.10. Sejam $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, e $(f_k)_{k \geqslant 1}$ uma sequência de funções em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Definamos dois tipos de convergência deste tipo de sequências.

- $f_k \to f$ em *modular* se, para algum $\beta > 0$, $\rho(\beta(f_k - f)) \to 0$, quando $k \to \infty$.
- $f_k \to f$ em *norma* se $\|f_k - f\|_{p(\cdot)} \to 0$, quando $k \to \infty$.

A seguir, apresentamos dois resultados sobre a relação entre estes dois tipos de convergência.

Teorema 4.17. *Sejam* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, *e* $(f_k)_{k\geqslant 1}$ *uma sequência de elementos de* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. *A sequência* $(f_k)_{k\geqslant 1}$ *converge em norma se, e somente se, para todo* $\beta > 0$, $\rho(\beta(f_k - f)) \to 0$, *desde que* $k \to \infty$.

Demonstração. Vamos supor que $f_k \to f$ em norma. Seja $\beta > 0$. Se escolhermos k suficientemente grande tal que $\|f_k - f\|_{p(\cdot)} < 1/\beta$, do corolário (4.1) obtemos,

$$\rho(\beta(f_k - f)) \leqslant \|\beta(f_k - f)\|,$$

e assim $\rho(\beta(f_k - f)) \to 0$ quando $k \to \infty$. Para provar a reciproca, se fizermos $\beta = 1/\lambda$, onde $\lambda > 0$, então $\rho((f_k - f)/\lambda) \leqslant 1$, para k suficientemente grande, de onde $\|f_k - f\|_{p(\cdot)} \leqslant \lambda$. Dado que esta desigualdade é satisfeita para qualquer λ positivo, $\|f_k - f\|_{p(\cdot)} \to 0$. $\square$

Teorema 4.18. *Seja* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. *A convergência em norma é equivalente a convergência em modular se, e somente se,* $p_-(\Omega) = \infty$ *ou* $p_+(\Omega) < \infty$.

Demonstração. Exercício.

$\square$

Agora, apresentamos o teorema da convergência monótona de uma sequência no espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Dizemos que uma sequência $(f_k)_{k\geqslant 1}$ *converge pontualmente de forma crescente a uma função* f *em quase todo ponto em* Ω se

$$\forall k \in \mathbb{Z}^+,\ f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x); \quad \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x),\ \text{onde } f(x) = \sup_{k\in\mathbb{Z}^+} f_k(x).$$

Teorema 4.19 (Convergência monótona)**.** *Seja* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. *Se* $(f_k)_{k\geqslant 1}$ *é uma sequência de funções não negativas em* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *tal que ela converge pontualmente de forma crescente a uma função* f *em quase todo ponto em* Ω, *então,* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *e* $\|f_k\|_{p(\cdot)} \to \|f\|_{p(\cdot)}$, *ou* $f \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *e* $\|f_k\|_{p(\cdot)} \to \infty$.

Demonstração. Seja $(f_k)_{k\geqslant 1}$ uma sequência crescente de funções em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Se $\lambda > 0$, uma vez que o modular preserva a ordem de funções não negativas,

$$f_k(x) \leqslant f_k(x) \Rightarrow \rho\left(\frac{f_k(x)}{\lambda}\right) \leqslant \rho\left(\frac{f_k(x)}{\lambda}\right) \Rightarrow \|f_k\|_{p(\cdot)} \leqslant \|f_k\|_{p(\cdot)}.$$

Assim, a sequência $(\|f_k\|_{p(\cdot)})_{k\geqslant 1}$ também é crescente. Note que isto implica que a sequência $(f_k)_{k\geqslant 1}$ converge a uma função f, ou diverge para ∞. Se $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, dado que

$f_k \leqslant f$, temos $\|f_k\|_{p(\cdot)} \leqslant \|f\|_{p(\cdot)}$; mas, se $f \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$, uma vez que $\|f_k\|_{p(\cdot)} < \infty$, temos $\|f_k\|_{p(\cdot)} < \|f\|_{p(\cdot)}$. Em particular, se $f = 0$ em quase todo ponto, temos que $f \in L^{p(p(\cdot)}(\Omega)$ e $\|f_k\| \to \|f\|_{p(\cdot)}$. Assim, vamos supor que $\|f\|_{p(\cdot)} > 0$.

Agora, seja $\lambda > 0$ tal que $\|f\|_{p(\cdot)} > \lambda$. Pela definição de norma em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $\rho(f/\lambda) > 1$. Então, pelo teorema da convergência monótona usual,

$$\rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) = \int_\Omega \left[\frac{|f(x)|}{\lambda}\right]^{p(x)} dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \left[\frac{|f_k(x)|}{\lambda}\right]^{p(x)} dx = \lim_{k\to\infty} \rho\left(\frac{f_k}{\lambda}\right).$$

Portanto, para todo k suficientemente grande, $\rho(f_k/\lambda) > 1$, e assim $\|f_k\|_{p(\cdot)} > \lambda$. Se $\|f\|_{p(\cdot)} = \infty$, podemos escolher $\lambda = k$, e nesse caso temos $\|f_k\|_{p(\cdot)} \to \infty$. Por outro lado, se $\|f\|_{p(\cdot)} < \infty$, podemos escolher $\lambda = \|f\|_{p(\cdot)} - (1/k)$, para k suficientemente grande, de onde

$$\|f\|_{p(\cdot)} - \frac{1}{k} < \|f_k\|_{p(\cdot)} \leqslant \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Fazendo $k \to \infty$ temos $\|f_k\| \to \|f\|_{p(\cdot)}$. □

A seguir, apresentamos o lema de Faotu para espaços de Lebesgue com expoente variável. A diferença do teorema da convergência monótona, aqui não exigimos que os elementos da sequência sejam não negativos e que a sequência seja crescente. Entretanto, só podemos obter uma desigualdade com o limite inferior, e não com o limite original da sequência.

Lema 4.4 (Lema de Fatou). *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Se a sequência $(f_k)_{k\geqslant 1}$ de elementos de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é tal que $f_k \to f$ converge em quase todo ponto em Ω, e*

$$\liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{p(\cdot)} < \infty, \tag{4.7}$$

então $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{p(\cdot)}. \tag{4.8}$$

Demonstração. Definamos a sequência $g_k(x) = \inf_{m\geqslant k} |f_m(x)|$. Note que, para qualquer $m \geqslant k$, as funções g_k são não negativas. Além disso, $g_k(x) \leqslant |f_m(x)|$. Dado que cada função f_m é um elemento do espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, temos que $g_k \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Mais ainda, uma vez que $(f_k)_{k\geqslant 1}$ é uma sequência crescente, e

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \liminf_{m\to\infty} |f_m(x)| = |f(x)|, \quad \text{quase sempre em } \Omega,$$

pelo Teorema 4.19,

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_{p(\cdot)} \leqslant \lim_{k\to\infty} \left(\inf_{m\geqslant k} \|f_m\|_{p(\cdot)}\right) = \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{p(\cdot)}.$$

Destas desigualdades obtemos (4.8). Mais ainda, usando a condição (4.7) obtemos que $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. □

Finalmente, apresentamos o teorema da convergência dominada para espaços $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Aqui, a diferença do teorema da convergência monótona e do lema de Fatou, não temos uma limitação uniforme dos elementos da sequência, mas temos uma função que *controla* o crescimento da cada elemento da sequência. Note que neste caso também não colocamos a condição sobre o sinal dos elementos da sequência.

Teorema 4.20 (Convergência Dominada). *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $p_+ < \infty$. Se a sequência $(f_k)_{k\geqslant 1}$ é tal que $f_k(x) \to f(x)$ em quase todo ponto $x \in \Omega$, e existe $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $|f_k(x)| \leqslant g(x)$ em quase todo ponto em Ω, então $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $\|f_k - f\|_{p(\cdot)} \to 0$ quando $k \to \infty$.*

Demonstração. Uma vez que a desigualdades

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f(x)|^{p(x)} &\leqslant 2^{p(x)-1}\left[|f_k(x)|^{p(x)} + |f(x)|^{p(x)}\right] \\ &\leqslant 2^{p(x)-1}\left[|g(x)|^{p(x)} + |g(x)|^{p(x)}\right] \\ &\leqslant 2^{p_+}|g(x)|^{p(x)} \end{aligned}$$

são satisfeitas pontualmente, e dado que $|g(\cdot)|^{p(\cdot)} \in L^1(\Omega)$, pelo teorema da convergência dominada usual, $\rho(f_k - f) \to 0$ quando $k \to 0$. Uma vez que o expoente p é limitado superiormente, do Teorema 4.18, $\|f_k - f\|_{p(\cdot)} \to 0$. □

4.3.7 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço de Banach

Nesta subseção mostramos que o espaço normado $(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(\cdot)})$, onde $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, é um espaço de Banach, isto é, qualquer sequência de Cauchy neste espaço converge na norma $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ a uma função também neste espaço. Para provar este resultado, apresentamos primeiro um teorema sobre séries no espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Teorema 4.21 (Riesz-Fisher). *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Se uma sequência $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ de elementos de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ satisfaz a condição*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{p(\cdot)} < \infty,$$

existe $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{k\to 0}\left\|\sum_{j=1}^{k} f_j - f\right\|_{p(\cdot)} = 0, \quad e \quad \|f\|_{p(\cdot)} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{p(\cdot)}.$$

Demonstração. Ver Cruz-Uribe e Fiorenza (2013). □

Teorema 4.22. *Se $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, qualquer sequência de Cauchy em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ converge em norma em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $(f_k)_{k\geqslant 1}$ uma sequência de Cauchy em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Escolhemos k_1 tal que

$$\| f_i - f_j \|_{p(\cdot)} < \frac{1}{2}, \quad \text{onde } i, j \geqslant k_1.$$

A seguir, escolhemos $k_2 > k_1$ tal que

$$\| f_i - f_j \|_{p(\cdot)} < \frac{1}{2^2}, \quad \text{onde } i, j \geqslant k_2.$$

Em geral, podemos construir uma sequência de números inteiros positivos k_m, $m \geqslant 1$, tais que $k_1 < k_2 < k_3, ...,$ e

$$\| f_i - f_j \|_{p(\cdot)} < \frac{1}{2^l}, \quad \text{onde } i, j \geqslant k_l.$$

Esta construção gera uma subsequência $(f_{k_j})_{j\geqslant 1}$ da sequência $(f_k)_{k\geqslant 1}$, onde $k_{j+1} > k_j$, e

$$\| f_{k_{j+1}} - f_{k_j} \| < \frac{1}{2^j}.$$

Agora, definimos uma nova sequência $(g_j)_{j\geqslant 1}$ por $g_1 = f_{k_1}$ e para $j > 1$, $g_j = f_{k_j} - f_{k_{j-1}}$. Então, para todo j, temos

$$\sum_{i=1}^{j} g_i = f_{k_j}.$$

Além disso,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| g_j \|_{p(\cdot)} \leqslant \| f_{k_1} \|_{p(\cdot)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty.$$

Então, pelo Teorema 4.21, existe $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que

$$\| f_{k_j} - f \|_{p(\cdot)} \to 0.$$

Assim, temos que uma subsequência da sequência de Cauchy $(f_k)_{k\geqslant 1}$ converge. Portanto, a sequência $(f_k)_{k\geqslant 1}$ também converge em norma em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, e temos o resultado. □

4.3.8 Densidade em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Uma função $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ pode ter muitos pontos de descontinuidade, pois só temos as informações de mensurabilidade e integrabilidade. Entretanto como no caso com expoente fixo, aqui também podemos aproximar f por funções com um *melhor comportamento*, no sentido pontual e de continuidade. Mais precisamente, vamos mostrar que, se o expoente p é limitado superiormente, um subconjunto do conjunto das funções simples é denso em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Primeiro, enunciamos e provamos um resultado sobre o conjunto das funções limitadas com suporte compacto. Lembremos que o suporte de uma função é o fecho do conjunto dos pontos onde a função não se anula.

Teorema 4.23. *Seja* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tal que* $p_+ < \infty$. *Então, o conjunto das funções limitadas com suporte compacto, contido em* Ω, *é denso em* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Demonstração. Seja K_j uma sequência de subconjuntos compactos de Ω tais que

$$K_j \subset K_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}^+; \quad \Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j.$$

Seja $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Definamos a sequência $(f_j)_{j \geqslant 1}$ por

$$f_j(x) = \begin{cases} j, & f(x) > j; \\ f(x), & -j \leqslant f(x) \leqslant j; \\ -j, & f(x) < -j. \end{cases}$$

Note que os elementos da sequência $(f_j)_{j \geqslant 1}$ são funções cujas imagens estão no intervalo $[-j, j]$. Além disso, a partir da sequência f_j, definimos a sequência $(g_j)_{j \geqslant 1}$ por $g_j(x) = f_j(x) 1_{K_j}(x)$. Uma vez que f é finita em quase todo ponto em Ω, pois $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $g_j \to f$ pontualmente em quase todo ponto em Ω. Mais ainda, desde que $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $|g_j(x)| \leqslant |f(x)|$, $g_j \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Então, dado que p é limitado superiormente, do Teorema 4.20, $\left\| g_j - f \right\|_{p(\cdot)} \to 0$. □

Se $\mathcal{S}(\Omega)$ é o conjunto das funções simples em Ω, isto é, o conjunto das funções f tais que

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{A_j}(x),$$

onde os conjuntos $A_j \subset \Omega$ são disjuntos dois a dois, definamos $\mathcal{S}_0(\Omega) \subset \mathcal{S}(\Omega)$ da seguinte forma:

$$\mathcal{S}_0(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{S}(\Omega) : \ f = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{A_j}(x), \left| \bigcup_{j=1}^{k} A_j \right| < \infty \right\}.$$

Corolário 4.4. *Seja* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tal que* $p_+ < \infty$. *Então, o conjunto* $\mathcal{S}_0(\Omega)$ *é denso em* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Demonstração. Do Teorema 4.23, existe uma função g, limitada e com suporte compacto em Ω, tal que $\|f - g\|_{p(\cdot)} < \epsilon/2$. A seguir, dado que o suporte de g é compacto, uma cobertura arbitrária de bolas abertas do suporte de g possui uma subcobertura finita do suporte de g, isto é, existem uma quantidade finita de bolas abertas $B_1, ..., B_N$ tais que

$$\sup(g) \subset \bigcup_{r=1}^{N} (B_r \cap \Omega)\,. \tag{4.9}$$

Em particular, podemos supor que suporte de g esteja contido numa das bolas B_r, que denotaremos por B. Assim, vamos supor que o suporte de g está contido na interseção $B \cap \Omega$. Uma vez que $p_+ < \infty$, o conjunto das funções simples $\mathcal{S}_0(B \cap \Omega)$ é denso em $L^{p_+}(B \cap \Omega)$. Então, existe $h \in \mathcal{S}_0(B \cap \Omega)$ tal que

$$\|g - h\|_{L^{p_+}(\Omega)} = \|g - h\|_{L^{p_+}(B\cap\Omega)} < \frac{\epsilon}{2(1 + |B \cap \Omega|)}.$$

Assim, dado que $|B \cap \Omega| < \infty$, pelo Corolário 4.3,

$$\|g - h\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \|g - h||_{L^{p(\cdot)}(B\cap\Omega)} \leqslant (1 + |B \cap \Omega|)\, \|g - h\|_{L^{p_+}(B\cap\Omega)} < \frac{\epsilon}{2},$$

de onde

$$\|f - h\|_{p(\cdot)} \leqslant \|f - g\|_{p(\cdot)} + \|g - h\|_{p(\cdot)} < \epsilon.$$

O caso geral, quando temos a inclusão (4.9), segue de forma similar. □

Observação 4.4. É possível mostrar que o conjunto $C_c(\Omega)$, das funções contínuas com suporte compacto em Ω, é também denso em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, desde que o expoente $p(\cdot)$ seja limitado superiormente.

4.3.9 O espaço dual de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Assim como nos espaços com p fixo, nos espaços de Lebesgue com expoente variável existe também uma caracterização dos espaços duais. Começamos lembrando a definição destes espaços.

Definição 4.11. O *espaço dual* de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é definido por

$$[L^{p(\cdot)}(\Omega)]^* = \left\{\varphi : L^{p(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R} :\ \varphi \text{ é linear e contínua}\right\}.$$

Podemos mostrar que este espaço, com as operações usuais de soma e produto por um escalar, é um espaço vetorial. Mais ainda, da Proposição 1.21, o operador $\varphi \mapsto \|\varphi\|^*$ definido por

$$\|\varphi\|^* = \sup_{\|f\|_{p(\cdot)} \leqslant 1} |\varphi(f)|,$$

é uma norma no espaço $[L^{p(\cdot)}(\Omega)]^*$. Uma vez que $\mathbb{R}$ é um espaço de Banach com a norma usual, da Teorema 1.2, o espaço $([L^{p(\cdot)}(\Omega)]^*, \|\cdot\|^*)$ é um espaço de Banach.

Definição 4.12. Dada uma função mensurável $g : \Omega \to \mathbb{R}$, definamos a aplicação $\varphi_g : L^{p(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Note que o funcional linear φ_g não é necessariamente contínuo, então, em princípio, não é um elemento de $[L^{p(\cdot)}(\Omega)]^*$. O resultado a seguir mostra a condição necessária, e suficiente, para que o funcional φ_g seja contínuo.

Teorema 4.24. *Sejam $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ e uma função mensurável $g : \Omega \to \mathbb{R}$. Então, φ_g é um funcional linear contínuo sobre $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ se, e somente se, $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$.*

Demonstração. Exercício. □

Teorema 4.25. *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}$. Se $p_+ < \infty$ e $|\Omega| < \infty$, os espaços $[L^{p(\cdot)}(\Omega)]^*$ e $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ são isomorfos.*

Demonstração. Seja $p_+ < \infty$. Vamos mostrar que, se $\varphi \in [L^{p(\cdot)}(\Omega)]^*$, existe uma única $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ tal que $\varphi = \varphi_g$. Definamos a função $\mu(E) = \varphi(1_E)$ para todo conjunto mensurável $E \subset \Omega$. É possível mostrar que μ é uma medida em Ω. Mais ainda, μ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, pois se $E \subset \Omega$ e $|E| = 0$,

$$\mu(E) = \varphi(1_E) = 0.$$

Então, pelo teorema de Radon–Nikodým, existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\varphi(1_E) = \int_\Omega 1_E(x)g(x)dx.$$

Se f é uma função simples em Ω, da linearidade de φ,

$$\varphi(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Uma vez que $|\Omega| < \infty$, da observação após o Corolário 4.4, o conjunto das funções simples é denso em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Então, os funcionais φ e φ_g coincidem no conjunto das funções simples em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, e por densidade, $\varphi = \varphi_g$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Assim, do Teorema 4.24, $g \in L^{p'(\cdot)}$. Agora, vamos supor que existem $g_1, g_2 \in L^{p'(\cdot)}$ tais que $\varphi_{g_1} = \varphi_{g_2}$, isto é

$$\int_\Omega f(x)[g_1(x) - g_2(x)]dx = 0, \quad \forall f \in L^{p(\cdot)}(\Omega). \tag{4.10}$$

Dado que $|\Omega| < \infty$, da Observação 4.3, $g_1 - g_2 \in L^{p'(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p'_-}(\Omega)$, e como temos a identificação $L^{p'_-} = L^{(p_+)'}$, então $g_1 - g_2 \in L^{(p_+)'}$. Uma vez que (4.10) é satisfeita para qualquer $f \in L^{p_+}(\Omega)$, pois $L^{p_+}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$, temos que $g_1 = g_2$ para quase todo ponto em Ω. Assim, φ é um isomorfismo entre $[L^{p(\cdot)}(\Omega)]^*$ e $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$. □

Observação 4.5. Se o conjunto Ω tiver medida infinita, podemos obter também a identificação do Teorema 4.25.

5 A função maximal de Hardy–Littlewood

5.1 A função maximal de Hardy–Littlewood em $L^p(\mathbb{R}^n)$

Definição 5.1. Seja f uma função em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. A *função maximal de Hardy–Littlewood* $Mf : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ é definida por

$$Mf(x) := \sup \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy, B \in \mathcal{B}_x \right\},$$

onde $\mathcal{B}_x$ é o conjunto de todas as bolas no $\mathbb{R}^n$ que contém o elemento $x \in \mathbb{R}^n$.

Note que, na definição de Mf, não é especificado se as bolas B são abertas ou fechadas. Uma vez que a fronteira das bolas tem medida de Lebesgue nula, o valor de Mf é o mesmo se considerarmos qualquer um dos dois casos. Por outro lado, dado que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, cada uma das integrais na definição da função mxaximal de Hardy–Littlewood é limitada, porém o supremo pode divergir a ∞.

Exemplo 5.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \alpha_0$, onde α_0 é um número real fixo. Sabemos que a integral

$$\int_B |f(x)| dx = |\alpha_0|.$$

Então $Mf(x) = |\alpha_0|$.

Exemplo 5.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [(\ln x)/x]^2 1_{(0,\infty)}$. Sabemos que a integral desta função diverge para $+\infty$, para qualquer intervalo contendo a origem. Então $Mf(0) = +\infty$. Por outro lado, se considerarmos $x \neq 0$, e os intervalos I_x, de centro x e comprimento $2|x|$, estes intervalos contém a origem para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Então

$$\frac{1}{|I_x|}\int_{I_x} |f(x)|dx = +\infty,$$

e assim, se $x \neq 0$, $Mf(x) = +\infty$.

Exemplo 5.3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (1/|x|)1_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$. Se B é qualquer bola contendo a origem,

$$\int_B \frac{1}{|x|}dx = +\infty.$$

Então $Mf(0,0) = +\infty$. Por outro lado, se $x \neq 0$, escolhendo as bolas de centro x e raio $2|x|$, obtemos

$$\int_{B_{2|x|}(x)} \frac{1}{|y|}dy = +\infty,$$

de onde, se $(x, y) \neq (0,0)$, $Mf(x, y) = +\infty$.

Teorema 5.1. *O operador maximal de Hardy–Littlewood tem as seguintes propriedades:*

a. A função Mf é mensurável.

b. $M(f + g)(x) \leqslant Mf(x) + Mg(x)$.

c. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $M(\alpha f)(x) = |\alpha|Mf(x)$.

d. Se existe $x_o \in \mathbb{R}^n$ tal que $Mf(x_0) = 0$, a função f é nula em quase todo ponto de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Em cada caso, consideramos as funções no espaços $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entretanto, nas propriedades a.,c. e d., podemos supor a função f somente mensurável.

a. A função Mf é mensurável. De fato, seja $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}$. Se $u \in E_\alpha$, existe uma bola B contendo u e

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy > \alpha.$$

Se escolhermos qualquer elemento v suficientemente próximo a u tal que $v \in B$, teremos a mesma desigualdade, de onde $v \in E_\alpha$. Portanto, E_α é aberto, e assim, Mf é mensurável.

b. Sejam $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Se x é qualquer elemento de $\mathbb{R}^n$ e B é uma bola arbitraria contendo x,

$$\int_B |f(y) + g(y)|dy \leqslant \int_B |f(y)|dy + \int_B |g(y)|dy.$$

Esta desigualdade implica que $M(f+g)(x) \leqslant Mf(x) + Mg(x)$, isto é, a função maximal $f \mapsto Mf$ é sublinear.

c. Segue da definição de supremo e da função da função $f \mapsto Mf$.

d. Se x_0 tal que $Mf(x_0) = 0$,

$$\sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|dy = 0, \quad x_0 \in B.$$

Esta igualdade implica que a integral da função $y \mapsto |f(y)|$ em qualquer bola contendo x_0 é zero. Assim, $f = 0$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^n$.

$\square$

A seguir, seja $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. A partir da definição da função maximal $f \mapsto Mf$, temos a desigualdade

$$\|Mf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty . \tag{5.1}$$

Mais ainda, usando o teorema de diferenciação de Lebesgue, podemos mostrar que a desigualdade (5.1) é de fato uma igualdade. O próximo resultado que apresentamos mostra que, no espaço $L^1(\mathbb{R}^n)$, só existem um tipo de funções tais que a função maximal dessas funções esteja também em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Lema 5.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $f = 0$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja ϵ um número real positivo arbitrário. Então, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| > \epsilon$. Note que a última desigualdade implica que $B_\epsilon(0) \subset B_{2|x|}(x)$, pois

$$|u| < \epsilon \Rightarrow |u - x| \leqslant |u| + |x| < \epsilon + |x| < 2|x|.$$

Assim, da definição da função maximal de Hardy–Littlewood, temos

$$Mf(x) \geqslant \frac{C}{|x|^n} \int_{B_{2|x|}(x)} |f(y)|dy \geqslant \frac{C}{|x|^n} \int_{B_\epsilon(0)} |f(x)|dx.$$

Uma vez que a integral no $\mathbb{R}^n$ da função $x \mapsto C/|x|^n$ diverge a $+\infty$ e $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, devemos ter a igualdade

$$\int_{B_\epsilon(0)} |f(x)|dx = 0.$$

Dado que ϵ é um número positivo arbitrário, f é a função nula em quase todo ponto de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Agora, apresentamos dois resultados que permitem obter uma limitação superior da função maximal. O primeiro deles faz uso do lema de cobertura de Vitali. Este lema permite obter uma estimativa de medida da soma dos elementos de uma subcoleção finita de bolas a partir da medida da união de uma coleção de bolas também finita.

Lema 5.2. *(Cobertura de Vitali) Seja $\mathcal{B} = \{B_1.B_2, ..., B_N\}$ uma coleção finita de bolas abertas em $\mathbb{R}^n$. Então existe uma subcoleção disjunta $\mathcal{B}' = \{B_{i_1}, B_{i_2}, ..., B_{i_k}\}$ de $\mathcal{B}$ que satisfaz*

$$\left|\bigcup_{j=1}^{N} B_j\right| \leqslant 3^n \sum_{l=1}^{k} |B_{i_l}|.$$

Demonstração. Ver Cruz-Uribe e Fiorenza (2013). □

O primeiro resultado na direção da limitação da função maximal Mf é uma desigualdade considerando funções no espaço $L^1(\mathbb{R}^n)$, substituindo a norma em $L^1(\mathbb{R}^n)$ por uma versão fraca dela.

Teorema 5.2. *Dado $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para todo $t > 0$,*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| \leqslant \frac{C_1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy,$$

onde C_1 é uma constante positiva que só depende da dimensão n.

Demonstração. Seja $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}$. Se $x \in E_t$, existe uma bola B contendo x tal que $\int_B |f(y)|dy > t|B|$, ou, de forma equivalente,

$$|B| < \frac{1}{t} \int_B |f(y)| dy. \tag{5.2}$$

A seguir, seja K um subconjunto compacto de E_t. Sabemos que a coleção de bolas B que satisfazem (5.2) é uma cobertura de K. Dado que K é compacto, existe uma quantidade finita de bolas B_1,...B_N tais que geram uma cobertura de K, i.e.

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_j.$$

Do lema de cobertura de Vitali, existe uma subcoleção $B_{i_1}, ..., B_{i_k}$ de bolas disjuntas dois a dois, tais que

$$\left|\bigcup_{j=1}^{N} B_j\right| \leqslant 3^n \sum_{l=1}^{k} |B_{i_k}|. \tag{5.3}$$

Uma vez que as bolas $B_{i_1}, ..., B_{i_k}$ são disjuntas, e verificam (5.2) e (5.3), temos

$$\begin{aligned}
|K| &\leqslant \left| \bigcup_{j=1}^{N} B_j \right| \leqslant 3^n \sum_{l=1}^{k} |B_{i_l}| \\
&\leqslant \frac{3^n}{t} \sum_{l=1}^{k} \int_{B_{i_l}} |f(y)| dy \\
&= \frac{3^n}{t} \int_{\bigcup_{l=1}^{k} B_{i_l}} |f(y)| dy \\
&\leqslant \frac{3^n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy.
\end{aligned}$$

Dado que K é um subconjunto compacto de E_t, usando a propriedade de regularidade interna da medida de Lebesgue, temos o resultado. □

Corolário 5.1. *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável, para todo $t > 0$*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| \leqslant \frac{C}{t} \int_{|f|>t/2} |f(y)| dy, \tag{5.4}$$

onde C é uma constante positiva que só depende da dimensão n.

Demonstração. Definamos uma função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ da forma seguinte:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| < t/2, \\ 0, & \text{se } |f(x)| \geqslant t/2. \end{cases}$$

Afirmamos que, se $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(x)| \leqslant |g(x)| + \frac{t}{2}, \quad \forall t > 0. \tag{5.5}$$

De fato, se x é tal que $|f(x)| < t/2$, temos (5.5), pois $|g(x)|$ é não negativo, para qualquer valor de x. Por outro lado, se x é tal que $|f(x)| \geqslant t/2$, da definição de g, $|f(x)| = |g(x)|$, de onde segue (5.5). A seguir, uma consequência da desigualdade (5.5) é

$$Mf(x) \leqslant Mg(x) + \frac{t}{2}, \quad \forall t > 0, \tag{5.6}$$

pois, se $x \in \mathbb{R}^n$ e B é qualquer bola contendo x,

$$\int_B |f(y)| dy \leqslant \int_B |g(y)| dy + \frac{t}{2} |B|,$$

de onde segue (5.6). Em particular, se $Mf(x) > t$, $Mg(x) \geqslant t/2$, o que implica

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| \leqslant |\{x \in \mathbb{R}^n : Mg(x) > (t/2)\}|. \tag{5.7}$$

Uma vez que o lado direito de (5.7) é o lado esquerdo da desigualdade obtida no Teorema 5.2, temos

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mg(x) > (t/2)\}| \leqslant \frac{C_2}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy. \tag{5.8}$$

Finalmente, de (5.7), (5.8), e da definição da função g,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \; Mf(x) > t\}| \leqslant \frac{C}{t} \int_{|f|>t/2} |f(y)| dy.$$

□

Para mostrar a limitação da função maximal Mf no espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $1 < p \leqslant \infty$, usaremos uma reformulação da integral no $\mathbb{R}^n$ a partir de uma integral nos números reais positivos. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função Lebesgue mensurável. A função distribuição $\lambda_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$ com respeito a f, é definida por

$$\lambda_f(t) = |\{x \in \mathbb{R}^n : \; |f(x)| > t\}|.$$

É possível mostrar que, para qualquer $0 < p < \infty$, e f Lebesgue mensurável,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = \int_0^\infty \lambda_f(t^{1/p}) dt. \tag{5.9}$$

Teorema 5.3. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $1 < p \leqslant \infty$. Então*

$$\|Mf\|_{L^p} \leqslant C \, \|f\|_{L^p} \,,$$

onde C é uma constante positiva que depende unicamente da dimensão n.

Demonstração. Uma vez que o operador maximal Mf é uma função mensurável, aplicando a igualdade (5.9) à função Mf,

$$\int_{\mathbb{R}^n} [Mf(x)]^p dx = \int_0^\infty \lambda_{Mf}(t^{1/p}) dt.$$

Agora, da definição da norma $L^p(\mathbb{R}^n)$, e do Corolário 5.1,

$$\int_{\mathbb{R}^n} [Mf(x)]^p dx \leqslant C_1 \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{t^{1/p}} \left[\int_{|f|>(t^{1/p})/2} |f(x)| dx \right] dt}_{=I}. \tag{5.10}$$

Note que podemos reescrever a integral I da forma seguinte:

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left[\int_0^{|2f(x)|^p} \frac{1}{t^{1/p}} dt \right] dx.$$

Uma vez que

$$\int_0^{|2f(x)|^p} \frac{1}{t^{1/p}} dt = \left[\frac{p}{p-1} \right] 2^{p-1} |f(x)|^{p-1},$$

temos

$$I = C_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = C_p \, \|f\|_p^p, \quad C_p = \left(\frac{p}{p-1} \right) 2^{p-1}. \tag{5.11}$$

Portanto, aplicando (5.11) em (5.10),

$$\|Mf\|_p \leqslant C \, \|f\|_p \,,$$

onde $C = C_1.C_p^{1/p}$. Note que o valor de C_p diverge para o infinito quando $p \to 1^+$. □

5.2 A função maximal de Hardy–Littlewood em $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

Dada uma função mensurável definida no $\mathbb{R}^n$, a definição da função maximal de Hardy–Littlewood é a mesma que no caso constante para este tipo de funções. No caso $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, o resultado a seguir mostra que esta função maximal está bem definida, e mais ainda, que ela é finita em quase todo ponto de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.4. *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Se $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, Mf está bem definido e $Mf(x) < \infty$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Uma vez que $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, temos que f é localmente integrável, e assim a função maximal está bem definida. Por outro lado, sabemos do Teorema 4.16 que qualquer função $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ pode-se escrever da forma $f = f_1 + f_2$, onde $f_1 \in L^{p+}$ e $f_2 \in L^{p-}$. Uma vez que a função maximal é sublinear nos espaços de Lebesgue com expoente fixo, $Mf = M(f_1 + f_2) \leqslant Mf_1 + Mf_2$, e do Teorema 5.3, o lado direito da última desigualdade é finito para quase todo ponto em $\mathbb{R}^n$. Portanto, a função maximal Mf é finita em quase todo ponto de $\mathbb{R}^n$. □

Observação 5.1. Sabemos que, se f é uma função não nula no espaço $L^1(\mathbb{R}^n)$, a função maximal $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. No caso dos espaços com expoente variável, temos que, se $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e $p_- = 1$, o operador maximal $Mf \notin L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Uma referência onde pode ser procurada a demonstração desta afirmação é Cruz-Uribe e Fiorenza (2013). Um exemplo desta afirmação é o seguinte. Seja $p(x) = 1 + |x|$ uma função contínua em $\mathbb{R}$. Então $p_- = 1$. Se $k \in \mathbb{Z}^+$, definamos os conjuntos

$$A_k = \{x \in \mathbb{R} : p(x) < 1 + (1/4k)\} = (-1/4k, 1/4k).$$

Note que para qualquer $k \in \mathbb{Z}^+$, $A_k \supset A_{k+1}$. Agora, definamos os elementos de uma sequência de funções $(f_k)_{k\geqslant 1}$ da forma seguinte:

$$f_k(x) = |x|^{-k/(k+1)} 1_{A_k}(x).$$

Note que os elementos da sequência $(f_k)_{k\geqslant 1}$ estão em $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$, pois

$$\rho(f_k) = \int_{A_k} |x|^{\left(-\frac{k}{k+1}\right)(1+|x|)} dx \leqslant \int_{A_k} |x|^{\left(-\frac{k}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{4k}\right)} dx < \infty.$$

Por outro lado, seja $x \in A_k$. Se $r = 1/4k$, a partir da definição da função maximal de Hardy–Littlewood, temos

$$Mf_k(x) \geqslant \frac{1}{2r} \int_{(-r,r)} |y|^{-\frac{k}{k+1}} dy. \tag{5.12}$$

Agora, seja o conjunto $B_{r,k}$ definido por $B_{r,k} = \{y \in \mathbb{R} : \ a_k r < |y| < r\}$, onde $a_k = 1/2^{k+1}$. Note que $B_{r,k} \subset A_k$, e

$$|B_{r,k}| = |\{y \in \mathbb{R} : \ a_k r < |y| < r\}| = 2r\left[1 - a_k\right].$$

Então, de (5.12)

$$Mf_k(x) \geqslant \frac{1}{2r} \int_{B_{r,k}} |y|^{-\frac{k}{k+1}} dy = \frac{(k+1)}{2} r^{-\frac{k}{k+1}}.$$

Uma vez que $r = 1/4k$, temos que r é um número real estritamente menor do que 1. Dado que $x \in A_k$, $r^{-k/(k+1)} > |x|^{-k/(k+1)}$. Assim

$$Mf_k(x) \geqslant \frac{(k+1)}{2} f_k(x). \tag{5.13}$$

Uma vez que a função f_k se anula no complemento do intervalo $(-1/4k, 1/4k)$, de (5.12) obtemos a desigualdade

$$\|Mf_k\|_{p(\cdot)} \geqslant \frac{(k+1)}{2} \|f_k\|_{p(\cdot)}.$$

Assim como nos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ com expoente fixo, onde $1 < p \leqslant \infty$, nos espaços $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ podemos também fornecer as condições para termos uma limitação da função maximal. Neste caso, precisamos que o expoente possua uma certa *regularidade*. Mais precisamente, se $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, dizemos que $p(\cdot)$ é *localmente log-Hölder contínua* se existe uma constante $C_0 > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in \Omega$, $|x - y| < 1/2$,

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{C_0}{-\log(|x - y|)}.$$

Por outro lado, dizemos que $p(\cdot)$ é *log-Hölder contínua no infinito* contínua se existem constantes positivas C_∞ and p_∞ tais que para qualquer $x \in \Omega$,

$$|p(x) - p_\infty| \leqslant \frac{C_\infty}{\log(e + |x|)}.$$

Se $p(\cdot)$ é log-Hölder contínua localmente e no infinito, dizemos que p é *globalmente log--Hölder contínua*. Então, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.5. *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $p_+ < \infty$. Se $p(\cdot)$ é globalmente log-Hölder contínua,*

$$\left\| t 1_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}} \right\|_{p(\cdot)} \leqslant C \, \|f\|_{p(\cdot)} .$$

Além disso, se $p_- > 1$,

$$\|Mf\|_{p(\cdot)} \leqslant C \, \|f\|_{p(\cdot)} .$$

Nas duas desigualdades, as constantes dependem da dimensão n, as constantes log-Hölder de $1/p(\cdot)$, e p_∞ (se este valor é finito).

Uma vez que os elementos da demonstração deste teorema estão fora do escopo deste texto, indicamos ao leitor interessado as referências Cruz-Uribe e Fiorenza (2013) e Diening et al. (2011).

6 Exercícios

1. Mostre que as funções definidas nos Exemplos 1.3 e 1.4 definem métricas nestes conjuntos.

2. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todas as sequências de números reais. Para quaisquer $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ em $\mathcal{S}$, defina

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{(1 + |x_n - y_n|)}.$$

Mostre que d é uma métrica em $\mathcal{S}$. Além disso, como $\mathcal{S}$ é um espaço vetorial, esta métrica provém de uma norma?

3. Verifique que $\|\cdot\|_2$ definida no Exemplo 1.7 é uma norma em $\mathbb{R}^n$.

4. Seja $C[a, b]$ o espaço das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$.

   (a) Prove que a função

   $$\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ x \in [a, b]\}$$

   para toda $f \in C[a, b]$ é uma norma em $C[a, b]$.

   (b) Prove que a função

   $$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

para toda $f \in C[a,b]$ é uma norma em $C[a,b]$.

(c) Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha\|f\|_1 \leqslant \|f\| \leqslant \beta\|f\|_1$$

para toda $f \in C[a,b]$?

5. Prove que em todo espaço normado E vale $\overline{B(a;r)} = B[a;r]$ onde $a \in E$ e $r > 0$.

6. Demonstre a Proposição 1.14.

7. Sejam A e B subconjuntos do espaço normado E. Prove as seguintes afirmações:

   a. $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.
   b. $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B \subset \operatorname{int}(A \cup B)$.
   c. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   d. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
   e. $\overline{A} = E$ se, e somente se, $\operatorname{int}(E \setminus A) = \emptyset$.

8. Seja E um espaço normado. Sejam A e B subconjuntos de E e $\alpha \in \mathbb{K}$. Prove que $\alpha\overline{A} = \overline{\alpha A}$ e $\overline{A + B} \subset \overline{A} + \overline{B}$.

9. Sejam E um espaço normado e A um subconjunto limitado de E. Mostre que $\overline{A}$ é um subconjunto limitado de E.

10. Sejam E um espaço normado e M um subespaço fechado de E. Se $x_0 \notin M$, prove que
$$\operatorname{dist}(x_0, M) := \inf\{\|x_0 - x\|;\ x \in M\} > 0.$$

11. Considere em $C[a,b]$ a norma do sup definida no exercício 4. Mostre que o conjunto $\{f \in C[a,b];\ f(x) > 0,\ \forall\, x \in [a,b]\}$ é aberto em $C[a,b]$.

12. Prove que $C[a,b]$ com a norma do sup definida no exercício 4 é um espaço de Banach.

13. Sejam E e F espaços normados. Seja $T : E \longrightarrow F$ uma função contínua e bijetiva. Se $T^{-1} : F \longrightarrow E$ é contínua, dizemos que T é um homeomorfismo. Neste caso, dizemos que E e F são homeomorfos. Mostre que

    a. Duas bolas abertas em E são homeomorfas;

    b. Toda bola aberta em E é homeomorfa a E.

14. Sejam E e F espaços normados. Mostre que se $T \in \mathcal{L}(E, F)$, então

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|T(x)\|;\ \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|T(x)\|;\ \|x\| < 1\} \\ &= \sup\{\|T(x)\|/\|x\|;\ x \neq 0\} \\ &= \inf\{c > 0;\ \|T(x)\| \leqslant c\|x\|,\ \forall x \in E\}. \end{aligned}$$

15. Sejam E e F espaços normados. Prove que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se, e somente se, T transforma conjuntos limitados de E em conjuntos limitados de F.

16. Sejam E e F espaços normados e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Mostre que o núcleo de T é um subconjunto fechado de E.

17. Seja $T : \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty$ definida por $T(x) = (x_n/n)$ para todo $x = (x_n) \in \ell_\infty$. Prove que T é linear e contínua.

18. Sejam $x_1, \ldots, x_n$ vetores dois a dois ortogonais em um espaço com produto interno. Mostre que
$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$$

19. Sejam x, y vetores em um espaço com produto interno tais que $x \perp y$ e $x \perp -y$. Verifique que
$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

20. Verifique as afirmações da Proposição 3.8.

21. Prove que se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e K é um subconjunto convexo fechado de $\mathcal{H}$, então existe um único $k_0 \in K$ tal que
$$\|h - k_0\| = \text{dist}(h, K).$$

22. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e M um subespaço de $\mathcal{H}$. Dado $x \in \mathcal{H}$, podemos escrever de modo único $x = y + z$ onde $y \in M$ e $z \in M^\perp$. Verifique que os operadores $P, Q : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ definidos por $P(x) = y$ e $Q(x) = z$ tem as seguintes propriedades

    a. P e Q são operadores lineares contínuos;
    b. $P^2 = P$ e $Q^2 = Q$;
    c. $P(\mathcal{H}) = M$ e $\|P\| = 1$ se $M \neq \{0\}$;
    d. $Q(\mathcal{H}) = M^\perp$ e $\|Q\| = 1$ se $M \neq \mathcal{H}$;
    e. $P \circ Q = Q \circ P = 0$.

23. Considere, no espaço de Hilbert ℓ^2, o subespaço

$$M = \{(x_n)\,;\, x_n \neq 0 \text{ para um número finito de índices}\}.$$

Mostre que $M^{\perp} = \{0\}$, concluindo que $\ell^2 \neq M \oplus M^{\perp}$, e que M não é um subespaço fechado de ℓ^2.

24. Fixado $N \geqslant 1$, defina a função $f : \ell_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $f(x) = x_N$ para todo $x = (x_n) \in \ell_2$. Mostre que existe $h_0 \in \ell_2$ tal que

$$f(x) = \langle x, h_0 \rangle$$

para todo $x \in \ell_2$. Além disso, determine h_0.

25. Defina a função $p : \mathbb{R}^n \to (1, \infty)$ por

$$p(x) = 1 + \frac{1}{|x|^2 + 1}.$$

   a. Ache o expoente conjugado $p'(\cdot)$.
   b. Verifique se a função é localmente log-Hölder contínua.
   c. Verifique se a função é globalmente log-Hölder contínua.

26. Defina a função $p : \mathbb{R}^n \to (1, \infty)$ por

$$p(x) = 3 + sen|x|.$$

   a. Ache o expoente conjugado $p'(\cdot)$.
   b. Verifique se a função é localmente log-Hölder contínua.
   c. Verifique se a função é globalmente log-Hölder contínua.

27. Defina a função $p : \mathbb{R}^n \to (1, \infty)$ por

$$p(x) = 1 + \frac{|ln|x||}{|x|}.$$

   a. Ache o expoente conjugado $p'(\cdot)$.
   b. Verifique se a função é localmente log-Hölder contínua.
   c. Verifique se a função é globalmente log-Hölder contínua.

28. Defina uma função $f \in L^{p(\cdot)}(B)$, onde B é a bola unitária no $\mathbb{R}^n$ e $p(\cdot) \in \mathcal{P}(B)$, tal que $\rho_{p(\cdot)}(f)$ é finita, porém $\|f\|_{p(\cdot)} = +\infty$.

29. Ache a função maximal de Hardy–Littlewood associada à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = (1/x)1_{(0,1)}$.

30. Ache a função maximal de Hardy–Littlewood associada à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = (1/x)1_{(a,b)}$, onde $a < b$.

A Um pouco sobre... Stefan Banach

A Análise Funcional foi desenvolvida nos últimos anos do século XIX e durante as primeiras décadas do século XX. Seu desenvolvimento se deu, em grande parte, em resposta a questões oriundas do estudo de equações diferenciais e integrais. Essas questões eram de grande importância na época devido o interesse em se entender fenômenos físicos. Muitos matemáticos têm seus nomes associados com o nascimento e o desenvolvimento da Análise Funcional. Mas, sem dúvidas, os trabalhos de Stefan Banach tiveram maior influência.

Stefan Banach nasceu em 30 de março de 1892 em Cracóvia, Império Austríaco, atual Polônia. Pouco se sabe sobre os pais de Banach e sobre sua infância. Sabe-se que sua mãe o abandonou em 1892. Ele nunca conheceu sua mãe, embora conhecesse e tivesse um relacionamento relativamente normal, senão próximo, com seu pai.

Banach não teve uma formação acadêmica tradicional. Ele frequentou a universidade, obtendo um “meio diploma” equivalente ao primeiro e segundo anos de universidade em 1914 na Universidade de Lvov (agora Lviv, Ucrânia). Banach não apenas não se formou em uma universidade, mas também obteve seu doutorado de uma maneira nada convencional. Quando assumiu seu cargo em Lvov, já havia escrito vários trabalhos de Matemática com resultados importantes e estava constantemente apresentando novas ideais. Banach foi “descoberto” por outro famoso matemático polonês, Hugo Steinhaus. Os talentos de Banach foram então rapidamente reconhecidos pela grande maioria da comunidade matemática polonesa. Banach completou, então, seu doutorado em 1920 na Universidade de Jan Kazimierz. Em 1922, ele se tornou professor da Universidade de Lvov. Pelo fato de Banach e Steinhaus serem excelentes matemáticos, Lvov se tornou um importante centro internacional para a Análise Funcional da época.

Banach se tornou uma autoridade mundial em Análise Funcional devido a muitos resultados obtidos por ele e também em colaboração com outros matemáticos. Inúmeros teoremas importantes levam seu nome, como por exemplo, o princípio da contração de Banach, o teorema de Banach–Steinhaus e o teorema de Hahn–Banach. Foi Banach que sistematizou a teoria da Análise Funcional. Seus esforços claramente unificaram resultados isolados devidos, inicialmente, a Fredholm, Hilbert e Volterra sobre equações integrais. Outras contribuições importantes de Banach são o livro *Théorie des Opérations Linéaires*, publicado em 1932, e a criação da revista *Studia Mathematica* em 1929. Essa revista, internacionalmente respeitada, era e ainda é dedicada a publicação de artigos relacionados com Análise Funcional. No livro *Théorie des Opérations Linéaires*, muitas das noções da Análise Funcional foram introduzidas, como os axiomas para espaços normados completos e a ideia de espaço dual. De fato, o reconhecimento mundial de Banach realmente veio após a publicação de seu livro em 1931, que no ano seguinte foi traduzido para o francês como *Théorie des Opérations Linéaires* (Teoria das Operações Lineares). Foi o primeiro volume de uma série de monografias intituladas "Monografias Matemáticas" ("Monografie Matematyczne" em polonês), da qual Banach foi um dos fundadores. Esta monografia foi o primeiro livro-texto em Análise Funcional. Cabe mencionar que o reconhecimento mundial de Banach o fez, em 1936, realizar uma Plenária no Congresso Internacional de Matemáticos, realizados em Oslo. (ICM).

O final da vida de Banach foi marcado pelo regime nazista. Durante a segunda guerra mundial, Lvov foi primeiramente ocupada pelos soviéticos, e então pelos alemães. Os soviéticos deportaram a maioria dos poloneses de Lvov, mas Banach era muito respeitado por eles, e dessa forma conseguiu permanecer em Lvov. Banach mantinha boas relações com os matemáticos soviéticos antes do início da guerra, visitando Moscou várias vezes, e foi bem tratado pela nova administração soviética. Ele foi autorizado a continuar a ocupar sua cadeira na universidade e se tornou o reitor da Faculdade de Ciências da universidade, agora rebatizada da Universidade Ivan Franko. Quando os alemães tomaram conta da cidade em 1941, a situação de Banach mudou drasticamente. Muitos professores de Lvov foram presos e enviados para campos de concentração. Embora Banach tenha sobrevivido a esta situação, sua saúde ficara extremamente abalada. Quando os soviéticos retornaram para Lvov em 1944, Banach retornou para a Matemática, aceitando uma posição na Universidade de Jagiellonian, Polônia, uma das mais antigas universidades da Europa, fundada em 1364. Porém, a saúde de Banach estava muito precária e ele veio a falecer no ano seguinte, mais precisamente em 31 de agosto de 1945 de câncer no pulmão.

Em sua tese de doutorado, escrita em 1920, definiu axiomaticamente o que hoje se chama de *espaços de Banach*. A ideia foi introduzida por outros matemáticos mais ou menos na mesma época, por exemplo, o matemático americano Norbert Wiener introduziu a noção, mas não desenvolveu a teoria. O nome "espaço de Banach" foi introduzido pelo matemático francês Maurice Fréchet pelo reconhecimento dos trabalhos de Banach. As "álgebras de Banach" também foram nomeadas em sua homenagem.

Finalizamos mencionando que atualmente tem-se o *Banach Center*, que faz parte do Instituto de Matemática da Academia Polonesa de Ciências, fundado em janeiro de 1972 em Varsóvia, Polônia.

Bibliografia

R. A. Adams e J. J. F. Fournier (2003). *Sobolev spaces*. 2ª ed. Vol. 140. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam). Amsterdam: Elsevier/Academic Press, pp. xiv+305. MR: 2424078. Zbl: 1098.46001 (ver pp. 67, 68).

J. J. Benedetto e W. Czaja (2009). *Integration and modern analysis*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. Boston, MA: Birkhäuser Boston, Ltd., pp. xx+575. MR: 2559803. Zbl: 1191.28001.

G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira (2023). *Fundamentos de Análise Funcional*. 3ª ed. Textos Universitários. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, p. 361.

P. J. Cohen (1974). "A counterexample to the closed graph theorem for bilinear maps". *J. Functional Analysis* 16, pp. 235–240. MR: 0343043. Zbl: 0279.46002 (ver p. 49).

J. B. Conway (1990). *A course in functional analysis*. 2ª ed. Vol. 96. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, pp. xvi+399. MR: 1070713. Zbl: 0706.46003.

D. V. Cruz-Uribe e A. Fiorenza (2013). *Variable Lebesgue spaces*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Foundations and harmonic analysis. Heidelberg: Birkhäuser/Springer, pp. x+312. MR: 3026953. Zbl: 1268.46002 (ver pp. 71, 81, 85, 93, 96, 98).

L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö e M. Ruzicka (2011). *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*. 1ª ed. Lecture Notes in Mathematics. New York: Springer Verlag, pp. ix+509. MR: 2790542 (ver pp. 71, 98).

J. Duoandikoetxea (2001). *Fourier analysis*. Vol. 29. Graduate Studies in Mathematics. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe. Providence, RI: American Mathematical Society, pp. xviii+222. MR: 1800316. Zbl: 0969.42001.

C. S. Fernandez (1996). "The closed graph theorem for multilinear mappings". *Internat. J. Math. Math. Sci.* 19.2, pp. 407–408. MR: 1376007. Zbl: 0855.46002 (ver p. 50).

C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr. (2019). *Introdução às Funções de uma Variável Complexa*. 5ª ed. Coleção Textos Universitário. Sociedade Brasileira de Matemática, p. 303 (ver pp. 5, 23).

G. B. Folland (1999). *Real analysis*. 2ª ed. Pure and Applied Mathematics. New York: John Wiley & Sons, Inc., pp. xvi+386. MR: 1681462. Zbl: 0924.28001.

L. Grafakos (2014). *Classical Fourier analysis*. 3ª ed. Vol. 249. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer Verlag, pp. xviii+638. MR: 3243734. Zbl: 1304.42001.

A. Hefez e C. S. Fernandez (2022). *Introdução à Álgebra Linear*. 3ª ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, p. 292 (ver pp. 3, 5).

C. Horowitz (1975). "An elementary counterexample to the open mapping principle for bilinear maps". *Proc. Amer. Math. Soc.* 53.2, pp. 293–294. MR: 0419813. Zbl: 0324.15015 (ver p. 47).

E. Jakimowicz (2011). *A Remarkable Life of Stefan Banach*. Zbl: 1236.01023. URL: http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/e-biography.html (acesso em 19/05/2023).

E. Kreyszig (1978). *Introductory functional analysis with applications*. New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, pp. xiv+688. MR: 0467220. Zbl: 0706.46001.

E. H. Lieb e M. Loss (2001). *Analysis*. 2ª ed. Vol. 14. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, pp. xxii+346. MR: 1817225. Zbl: 0966.26002 (ver pp. 67, 68).

E. L. Lima (2019). *Curso de Análise*. 15ª ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, pp. x11+308. MR: 0654862 (ver pp. 9, 11).

Mac Tutor (2000). *Stefan Banach*. URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banach/ (acesso em 19/05/2023).

V. G. Maz'ja (1985). *Sobolev spaces*. Springer Series in Soviet Mathematics. Translated from the Russian by T. O. Shaposhnikova. Berlin: Springer-Verlag, pp. xix+486. MR: 0817985. Zbl: 0692.46023 (ver p. 67).

J. R. Munkres (2000). *Topology*. 2ª ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., pp. xvi+537. MR: 3728284. Zbl: 0951.54001 (ver p. 38).

Polish Academy of Sciences (1972). *Banach Center*. URL: https://www.impan.pl/en/activities/banach-center (acesso em 19/05/2023).

W. Rudin (1969). *Function theory in polydiscs*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, pp. vii+188. MR: 0255841 (ver p. 47).

E. M. Stein (1993). *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*. Vol. 43. Princeton Mathematical Series. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, pp. xiv+695. MR: 1232192. Zbl: 0821.42001.

E. M. Stein e R. Shakarchi (2011). *Functional analysis*. Vol. 4. Princeton Lectures in Analysis. Introduction to further topics in analysis. Princeton University Press, Princeton, NJ, pp. xviii+423. MR: 2827930. Zbl: 1235.46001.

E. Zeidler (1995a). *Applied functional analysis*. Vol. 108. Applied Mathematical Sciences. Applications to mathematical physics. Springer-Verlag, New York, pp. xxx+479. MR: 1347691. Zbl: 0834.46002.

— (1995b). *Applied functional analysis*. Vol. 109. Applied Mathematical Sciences. Main principles and their applications. Springer-Verlag, New York, pp. xvi+404. MR: 1347692. Zbl: 0834.46003.

Índice Remissivo

Títulos Publicados — 34º Colóquio Brasileiro de Matemática

Uma introdução à convexidade em grafos – *Júlio Araújo, Mitre Dourado, Fábio Protti e Rudini Sampaio*

Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos – *Lucas Backes, Alexandre Tavares Baraviera e Flávia Malta Branco*

Introdução aos espaços de Banach – *Aldo Bazán, Alex Farah Pereira e Cecília de Souza Fernandez*

Contando retas em superfícies no espaço projetivo – *Jacqueline Rojas, Sally Andria e Wállace Mangueira*

Paths and connectivity in temporal graphs – *Andrea Marino e Ana Silva*

Geometry of Painlevé equations – *Frank Loray*

Implementação computacional da tomografia por impedância elétrica – *Fábio Margotti, Eduardo Hafemann e Lucas Marcilio Santana*

Regularidade elíptica e problemas de fronteiras livres – *João Vitor da Silva e Gleydson Ricarte*

The ∞-Laplacian: from AMLEs to Machine Learning – *Damião Araújo e José Miguel Urbano*

Homotopical dynamics for gradient-like flows – *Guido G. E. Ledesma, Dahisy V. S. Lima, Margarida Mello, Ketty A. de Rezende e Mariana R. da Silveira*

impa

Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

Aldo Bazán

Aldo concluiu sua graduação na Universidad Nacional del Callao, em Lima, Peru, doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Suas áreas de interesse são Análise Funcional e Desigualdades Funcionais.

Alex Farah Pereira

Alex, carioca e torcedor do Flamengo, é doutor em Matemática pela UFRJ. Sua área de interesse é Análise Funcional e Holomorfia. Além de ser professor da UFF é faixa preta de Taekwondo. Gosta muito de ler livros de Matemática e livros policiais como dos autores Agatha Christie e Sidney Sheldon. O cinema também é uma de suas paixões.

Cecília de Souza Fernandez

Cecília é professora Titular da UFF. Em setembro de 1994 foi para Kent State University, onde obteve seu Ph.D. em janeiro de 1998. Realizou pós doutorado no INCA em colaboração com a Fiocruz. Colabora com diversas pós graduações. Publicou vários artigos científicos e livros-texto adotados em muitas universidades brasileiras.

Introdução aos espaços de Banach

ISBN 978-85-244-0544-0

9 788524 405440

impa

Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada