Regularidade elíptica e problemas de fronteiras livres

João Vitor da Silva
Gleydson Ricarte

34º Colóquio Brasileiro de Matemática

impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Regularidade elíptica e problemas de fronteiras livres

Regularidade elíptica e problemas de fronteiras livres
Primeira impressão, setembro de 2023

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

ISBN 978-85-244-0532-7 (print)
ISBN 978-85-244-0533-4 (ebook)
MSC (2020) Primary: 35B65, Secondary: 35D40, 35J05, 35J15, 35J87, 35R35

Coordenação Geral Carolina Araujo

Produção Books in Bytes **Capa** IMPA

Realização da Editora do IMPA
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
www.impa.br
editora@impa.br

SI586r da Silva, João Vitor
Regularidade elíptica e problemas de fronteiras livres / João Vitor da Silva e Gleydson Ricarte. - 1.ed. -- Rio de Janeiro: IMPA, 2023.
34º Colóquio Brasileiro de Matemática; v. 8, 172p.: il.; 23cm
ISBN 978-85-244-0532-7 (print)
ISBN 978-85-244-0533-4 (ebook)
1. Regularidade elíptica para EDPs de segunda ordem. 2. Problemas de fronteira livre. 3. Modelos variacionais e não-variacionais. I. Ricarte, Gleydson. II. Série. III. Título
UDC: 517.9
Carolina Celano Lima/CRB-7: 2438

João Vitor da Silva gostaria de dedicar esta obra aos seus pais, Dona Maria Socorro e Seu João Galego.
Gleydson Ricarte gostaria de dedicar este livro a sua esposa Shirley e aos seus filhos, Matheus e Gabriel.

Sumário

Prefácio

A primeira parte desta obra foi inspirada em alguns cursos de pós-graduação (Tópicos de EDPs e Seminários de Análise e EDPs) ministrados pelo primeiro autor no IMECC-UNICAMP para estudantes de Mestrado e Doutorado em Matemática. Também serviu de material para a construção desta obra alguns minicursos ministrados em Escolas de verão e Colóquios regionais, dos quais podemos citar: VI Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste da Universidade de Brasília, XVI Encontro Científico de Pós-graduandos do IMECC (EnCPos) da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, V Colóquio da Região Sul – Universidade Estadual de Maringá – PMA, V Colóquio de Matemática da Região Nordeste (UFPB – João Pessoa) e 36^a edição do verão do PPGM-UFSCar. Agradecemos incomensuravelmente a tais instituições e departamentos pela oportunidade e apoio em fazermos divulgação científica sobre temas clássicos e modernos no contexto de EDPs elípticas e problemas de fronteira livre. Nesta direção, esta primeira parte se inspira nos livros Axler, Bourdon e Ramey (2001), Adams e Fournier (2003), de Figueiredo (1963), Evans (2010) e Ponce (2009).

O capítulo referente à Teoria de Schauder para o operador Laplaciano foi baseado em temas de pesquisa apresentados em disciplinas de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) ministradas pelo segundo autor para alunos do curso de Pós-Graduação em Matemática da UFC (PGMat-UFC). Como parte do programa, vários tópicos avançados foram abordado no decorrer dos cursos. Este Capítulo contém exposição do material abordado durante tais cursos. As notas destinaram-se exclusivamente a servir como guia de estudo para alunos de Pós-Graduação em Matemática. Como o título sugere, o objetivo dos cursos era lidar com tópicos selecionados em teoria de regularidade para equações diferenciais parciais de segunda ordem. Nesta versão, o texto se inspira no roteiro de apresentação de ideias dos seguintes autores clássicos e modernos Fernández-Real e Ros-Oton (2022), Evans (2010), Jost (2002), Teixeira (s.d.) e Gilbarg e Trudinger (2001) sobre tal tema de estudo.

Os capítulos 04, 06 e 07 são fortemente baseados em contribuições recentes dos autores publicadas em artigos científicos. Tais capítulos sintetizam as ideias centrais relativas aos temas de regularidade elíptica em modelos totalmente não lineares, bem como em estimativas de regularidade para soluções de problemas de fronteiras livres do tipo obstáculo e de Núcleos mortos. Nesta direção devemos citar as obras Caffarelli e Cabré (1995a), Díaz (1985), Katzourakis (2015), Petrosyan, Shahgholian e Ural'tseva (2012), Rodrigues (1987) e Wolanski (2007) como influências direta para a escrita desta parte do livro.

Finalmente, gostaríamos de agradecer à Universidade Federal do Ceará (UFC e PG-MAT) e Universidade Estadual de Campinas (IMECC-UNICAMP e FAEPEX) pelo apoio institucional e financeiro, ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA por organizar e patrocinar o 34° Colóquio Brasileiro de Matemática (CBM), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro, e ao pessoal administrativo e editorial do IMPA por trabalhar incansavelmente na produção desta obra e nos auxiliar em inúmeros detalhes e problemáticas no transcurso da execução deste livro. Por fim, agradecemos a todos os participantes pelo interesse no curso.

1 Conceitos básicos

Nesta primeira parte do livro, trataremos de apresentar algumas preliminares sobre Teoria da medida, Espaços funcionais e temas relacionados à Teoria de operadores.

1.1 Preliminares

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $1 \leqslant p < \infty$. Definimos o *Espaço* $L^p(\Omega)$ ou *Espaço de Lebesgue* da seguinte forma:

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ mensurável } \ : \ \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Verifica-se que $L^p(\Omega)$ é um Espaço de Banach munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, quando $p = \infty$, o espaço $L^\infty(\Omega)$ consiste (a menos de um conjunto de medida nula) das funções limitadas, munido com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{essup}_\Omega |u(x)| = \inf\{\mathrm{M} \in [0, \infty) : |u(x)| \leqslant \mathrm{M} \quad \text{q.t.p. em } \ \Omega\}.$$

Observação 1.1 (Notação). *Se $\Omega \subset \mathrm{X}$ e X é um espaço topológico, então*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in L^p(\mathrm{K}) \quad \textit{para qualquer conjunto compacto} \quad \mathrm{K} \subset \Omega\}.$$

A seguir, apresentaremos uma desigualdade clássica em Análise Matemática, a saber a *Desigualdade de Hölder* :

Teorema 1.1. *Sejam* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* f, g *funções tais que* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Então.*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |(fg)(x)|dx \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Como uma consequência da Desigualdade de Hölder, temos a seguinte *Desigualdade de Interpolação* :

Corolário 1.1. *Se* $0 < p < q < r \leqslant \infty$, *então,* $L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \|f\|^{\lambda}_{L^p(\Omega)}\|f\|^{1-\lambda}_{L^r(\Omega)}$$

onde $0 < \lambda < 1$ *é definido pela equação*

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \lambda\frac{q}{p} + (1-\lambda)\frac{q}{r}.$$

Finalmente, podemos enunciar a desigualdade triangular para a norma $L^p(\Omega)$, i.e., a Desigualdade de Minkowski :

Teorema 1.2. *Sejam* $f, g \in L^p(\Omega)$ *com* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Então*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Observação 1.2.

- ✓ *A Desigualdade de Minkowski assegura que* $\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\right)$ *constitui um espaço vetorial normado.*
- ✓ *Além disso, quando* $0 < p < 1$, *a função* $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ *não satisfaz à Desigualdade de Minkowski, portanto não define uma norma (e sim uma quase norma). De fato, neste contexto, temos a desigualdade triangular reversa:*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \geqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

A norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ induz uma métrica $\varrho : L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \to [0, \infty)$ se definirmos

$$\varrho(f, g) := \|f-g\|_{L^p(\Omega)}$$

para $f, g \in L^p(\Omega)$, onde devemos interpretar a relação "$f = g$" como $f = g$ q.t.p.

Definição 1.1 (Sequência de Cauchy)**.** Uma sequência $\{f_k\}_{k\geqslant 1}$ é dita de Cauchy em $L^p(\Omega)$ se dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N_0 tal que

$$\|f_k - f_m\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad k, m \geqslant \mathrm{N}_0.$$

Definição 1.2 (Espaço de Banach)**.** Um espaço vetorial (linear) normado $\mathcal{B}$, completo com respeito à métrica induzida pela norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, é chamado de *Espaço de Banach* .

Teorema 1.3 (L^p é um Espaço de Banach)**.** *Se $1 \leqslant p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é um espaço métrico completo sob a métrica ϱ, i.e., se $\{f_k\}_{k\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$, então existe $f \in L^p(\Omega)$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

A seguir, apresentaremos um resultado bem conhecido no contexto de espaços de Lebesgue e teoria da medida:

Teorema 1.4 (*Teorema da Diferenciação de Lebesgue*)**.** *Seja $u \in L^1(\Omega)$, então para quase todo ponto $x \in \Omega$ temos*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} |u(x) - u(y)|\, dy = 0.$$

Quando a sentença acima se verifica em um ponto $x \in \Omega$, diremos que x é um ponto de Lebesgue de u.

Uma consequência do Teorema 1.4 é o seguinte resultado fundamental conhecido como *Lema de Du Bois–Reymond* :

Corolário 1.2. *Assuma que $u \in L^1(\Omega)$, e*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx = 0 \quad \textit{para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Então $u = 0$ q.t.p. em Ω.

Agora recordemos uma identidade fundamental no estudo de EDP's:

Teorema 1.5 (Integração por partes)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ qualquer domínio limitado de classe C^{1}[1]. Então, para quaisquer $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, temos*

$$\int_\Omega \partial_i u(x) v(x)\, dx = -\int_\Omega u(x)\partial_i v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\,\nu_i\, dS, \tag{1.1}$$

[1] Um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de domínio de classe C^k (para $0 \leqslant k \leqslant \infty$) se:

1. Existe uma cobertura aberta finita de $\partial\Omega$, i.e., $\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{V}_j$, tal que a interseção $\partial\Omega \cap \mathrm{V}_j$ possa ser descrita como: $x_n = g_j(x')$, onde $\mathbb{R}^n \ni x = (x', x_n)$, $g_j \in C^k(\mathrm{Q}_a)$ e $\mathrm{Q}_{r_0} = \{|x_i| < r_0, i = 1, \ldots, n-1\}$ é um cubo.
2. Existe $\tau > 0$, tal que:
$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : g_j(x') - \tau < x_n < g_j(x') \ \text{com} \ x' \in \mathrm{Q}_{r_0}\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$$
e
$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : g_j(x') < x_n < g_j(x') + \tau, \ \text{com} \ x' \in \mathrm{Q}_{r_0}\} \subset \Omega.$$

sendo ν o vetor normal unitário exterior no bordo $\partial\Omega$, e $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Observamos que, como consequência imediata do Teorema 1.5, obtemos o Teorema da Divergência, também conhecido como Primeira Identidade de Green:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = -\int_{\Omega} u(x) \Delta v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial \nu}(x)\, dS.$$

Destacamos que a regularidade do domínio exigida no Teorema 1.5 pode ser relaxada. Por exemplo, o domínio Ω pode ser assumido apenas ter fronteira Lipschitz[2], enquanto que $u, v \in H^1(\Omega)$ é necessário em (1.1), onde $H^1(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$, o qual será definido a seguir.

A seguir, apresentaremos estimativas interior para derivadas de uma função harmônica u em termos de sua norma L^∞. Precisamente, se u é uma função harmônica em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então para cada $i = 1, \ldots, n$, a função $D_i u$ também será harmônica. Assim, aplicando o Teorema do Valor Médio à $D_i u$ combinado com integração por partes obtemos

$$D_i u(x) = \fint_{B_r(x)} D_i u(y) dy = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\partial B_r(x)} u(y) \nu(x) dS(y),$$

onde ν é o vetor unitário exterior à $\partial B_r(x)$ e $r \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$. Desta forma, podemos obter a seguinte estimativa interior para o gradiente:

$$|Du(x)| \leqslant \frac{n}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)} \sup_{\Omega} |u|$$

Mais geralmente podemos estabelecer as seguintes estimativas interiores para as derivadas de ordem mais elevadas de uma função harmônica u (veja Evans (2010) e Teixeira (s.d.) para uma demonstração):

Teorema 1.6 (*Estimativas interiores para derivadas de ordem superior*)**.** *Seja u uma função harmônica em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então para todo $x \in \Omega$ e para qualquer multi-índice $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ temos*

$$|D^\beta u(x)| \leqslant \frac{n^{|\beta|} e^{|\beta|-1} |\beta|!}{dist(x, \partial\Omega)^{|\beta|}} \sup_{\Omega} |u|$$

Devemos destacar que tais estimativas interiores serão úteis como uma das ferramenta para o estudo das estimativas de Schauder para a equação de Poisson no Capítulo 3.

O próximo resultado é um fato bem conhecido em Teoria Clássica do Potencial e nos ajudará a provar o Teorema de Zaremba no próximo Capítulo 2. Veja Ponce (2009, Proposição 4.12) para uma demonstração.

[2]Diremos que Ω tem uma fronteira localmente Lipschitz se cada ponto $x \in \partial\Omega$ possui uma vizinhança V_x tal que $\partial\Omega \cap V_x$ possa ser descrita como o gráfico de uma função Lipschitz contínua.

Teorema 1.7 (*Princípio da Singularidade Removível*)**.** *Seja u uma função harmônica e limitada em $\overline{B_r(x_0)} \setminus \{x_0\}$. Então, u pode ser estendida continuamente a $\overline{B_r(x_0)}$, e a extensão resultante é harmônica em $B_r(x_0)$.*

Como nosso último resultado preliminar, apresentaremos uma versão assintótica do bem conhecido Teorema de Arzelà-Ascoli. Usaremos tal resultado para assegurar a convergência de uma certa família discretizada de perfis harmônicos no Capítulo 2. Recomendamo ao leitor ver Manfredi, Parviainen e Rossi (2012) para uma demonstração de tal resultado.

Teorema 1.8 (*Teorema de Arzelà-Ascoli versão assintótica*)**.** *Seja $u_\varepsilon : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma conjunto de funções tais que*

1. $\exists\, C > 0\ \forall\, \varepsilon > 0\ \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leqslant C$;

2. $\forall\ \eta > 0\ \exists\, r_0, \varepsilon_0 > 0\ \forall\ \ \varepsilon < \varepsilon_0\ \forall\ x_0, y_0 \in \overline{\Omega}$

$$|x_0 - y_0| < r_0 \quad \Longrightarrow \quad |u_\varepsilon(x_0) - u_\varepsilon(y_0)| < \eta.$$

Então, uma subsequência de u_ε converge uniformemente em $\overline{\Omega}$, para uma função contínua u.

1.1.1 Espaços de Sobolev

Definição 1.3 (Multi-índice)**.** Um multi-índice β deve ser entendido como um vetor $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tendo componentes $\beta_i \in \mathbb{N}$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$. Definimos, então, $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$. Também definimos a derivada parcial de multi-índice β como

$$D^\beta \phi(x) = \frac{\partial^{|\beta|}\phi}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}(x).$$

Definição 1.4 (Derivada fraca)**.** Uma função $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é chamada de $\beta-$ésima derivada fraca de $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ se satisfaz

$$\int_\Omega v(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega u(x) D^\beta \phi(x) dx \quad \text{para toda } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Observe que o conceito de derivadas fracas estendem o conceito das derivadas clássicas, bem como o processo de integração por partes descrito no Teorema 1.4.

Invocando o Corolário 1.2, notamos que a derivada fraca é unicamente determinada (a menos de um conjunto de medida nula).

Chamamos uma função de fracamente diferenciável se todas as suas derivadas parciais de primeira ordem (fracas) existirem. Similarmente uma função é k vezes fracamente diferenciável se todas as suas derivadas fracas de ordem menor ou igual a k existirem.

Definição 1.5 (Espaços de Sobolev)**.** Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conjunto aberto, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p < \infty$, o *Espaços de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \; : \; D^\beta u \in L^p(\Omega) \quad \text{para} \;\; 0 \leqslant |\beta| \leqslant k \right\}.$$

Recomendamos como leitura complementar os livros clássicos de Adams e Fournier (2003), Evans (2010) e Leoni (2017) no que diz respeito ao estudo mais aprofundado sobre a Teoria de Espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$.

A seguir, listaremos algumas propriedades dos Espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$:

(S1) Os espaços $W^{1,p}(\Omega)$ são completos (i.e., Banach) munidos da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(S2) A inclusão $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ é compacta (Rellich–Kondrachov).

(S3) O Espaço $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ é um *espaço de Hilbert* com produto escalar

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx.$$

(S4) Toda sequência limitada $\{u_k\}_{k \geqslant 1}$ no espaço de Hilbert $H^1(\Omega)$ contém uma subsequência fracamente convergente $\{u_{k_j}\}_{j \geqslant 1}$, i.e., existe $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$(u_{k_j}, v)_{H^1(\Omega)} \to (u, v)_{H^1(\Omega)} \quad \text{para toda} \;\; v \in H^1(\Omega).$$

Além disso, u satisfaz

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \liminf_{j \to \infty} \|u_{k_j}\|_{H^1(\Omega)},$$

e dado que $H^1(\Omega)$ está compactamente contido em $L^2(\Omega)$, tem-se que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \liminf_{j \to \infty} \|u_{k_j}\|_{L^2(\Omega)}.$$

(S5) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ qualquer domínio Lipschitz, e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então existe uma operador contínuo (e compacto para $p > 1$) $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$, denominado Operador Traço, tal que, para toda $u \in C^1(\overline{\Omega})$, tem-se

$$Tu = u\Big|_{\partial\Omega}.$$

Com isso em mente, para toda função $u \in W^{1,p}(\Omega)$, vamos denotar por $u\Big|_{\partial\Omega}$ como sendo o Traço de u em $\partial\Omega$.

(S6) O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o subespaço das funções u tais que $u\Big|_{\partial\Omega} = 0$. Similarmente vamos denotar por $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

(S7) Assuma que $1 \leqslant p < \infty$. Então $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{1,p}(\Omega)$, e $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$, i.e.,

$$W^{1,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}} \quad \text{e} \quad W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$$

(S8) Dada qualquer função $u : \Omega \to \mathbb{R}$, definimos

$$\begin{cases} u^+(x) & = & \max\{u(x), 0\} \quad \text{(parte positiva)} \\ & \text{e} & \\ u^-(x) & = & \max\{-u(x), 0\} \quad \text{(parte negativa),} \end{cases}$$

de modo que $u(x) = u^+(x) - u^-(x)$. Então, para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad \nabla u(x) = \nabla u^+(x) - \nabla u^-(x) \quad \text{quase sempre em } \Omega.$$

Recordemos uma importante desigualdade neste contexto de Espaços de Sobolev, a saber a *Desigualdade de Gagliardo–Nirenberg–Sobolev* :

Teorema 1.9. *Se* $1 \leqslant p < n$*, então*

$$\|u\|_{L^{p_\star}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \mathrm{C}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

em que $\frac{1}{p_\star} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \;\Leftrightarrow\; p_\star = \frac{np}{n-p}$ *(conjugado de Sobolev de* p*) para alguma constante* $\mathrm{C} > 0$ *dependendo somente de* n *e* p*. Particularmente, temos a imersão contínua* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_\star}(\mathbb{R}^n)$.

Observe que, quando $p \nearrow n$, então $p_\star \nearrow \infty$. Não obstante, no caso limítrofe $p = n$, não é verdade que funções em $W^{1,n}$ sejam limitadas. Com efeito, isto pode ser visto tomando, por exemplo, $u(x) = \log\log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right) \in W^{1,n}(B_1)$.

Ademais, no caso $p > n$, ocorre a seguinte *Desigualdade de Morrey* :

Teorema 1.10. *Se* $p > n$*, então*

$$\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant \mathrm{C} \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

em que $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$*, para alguma constante* $\mathrm{C} > 0$*, dependendo somente de* n *e* p*.*

Particularmente, quando $p > n$, qualquer função em $W^{1,p}$ é contínua (após possivelmente ser redefinida em um conjunto de medida nula).

Finalmente também usaremos as seguintes desigualdades em domínios limitados.

De agora em diante, adotaremos a seguinte notação de média integral:

$$f_\Omega = \fint_\Omega f(x)dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx,$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ qualquer conjunto de medida positiva e finita, e $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue $n-$dimensional do conjunto Ω.

A seguir apresentaremos a *Desigualdade de Poincaré* .

Teorema 1.11. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e Lipschitz e $1 \leqslant p < \infty$. Então, para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$, temos*

$$\int_\Omega |u(x) - u_\Omega|^p \, dx \leqslant \mathrm{C} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx,$$

e

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \leqslant \mathrm{C}\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx + \int_{\partial\Omega} |u(x)|^p d\sigma\right)$$

para alguma constante $\mathrm{C} > 0$ *que depende apenas de Ω e p.*

1.1.2 Espaços de Hölder

Os espaços das funções contínuas desempenham um papel fundamental em várias áreas de Análise Funcional e EDPs tais como a Teoria de Operadores Lineares de Segunda Ordem. Para exemplificar tal relevância, podemos citar os resultados de regularidade na Teoria de De Giorgi–Moser e da Teoria de Schauder para operadores na forma divergente e não divergente.

Definição 1.6 (Espaços de funções Hölder contínuas)**.** Dado $\alpha \in (0, 1]$, o *Espaços de Hölder* $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é definido como o conjunto das funções contínuas $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que a seminorma Hölder é finita, i.e.,

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Assim, podemos definir a norma Hölder por

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Destacamos que, para $\alpha = 1$, o espaço $C^{0,1}(\Omega)$ é denominado espaço de funções Lipschitz contínuas. Desta forma, a norma Lipschitz será designada como

$$\|u\|_{\mathrm{Lip}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + [u]_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}.$$

Definição 1.7 (*Espaços de Hölder de ordem superior*)**.** Mais geralmente, dado $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in (0,1)$, o espaço $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ é o conjunto das funções $u \in C^k(\overline{\Omega})$ tal que a seguinte norma é finita, i.e.,

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C^k(\Omega)} + [D^k u]_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

em que

$$\|u\|_{C^k(\Omega)} := \sum_{j=1}^{k} \|D^j u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Vamos denotar $\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$ em vez de $\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}$.

Finalmente observamos que para um domínio limitado

$$C^\infty(\Omega) \subset \ldots \subset C^{2,\alpha}(\Omega) \subset C^{1,\alpha}(\Omega) \subset C^1(\Omega) \subset C^{0,1}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C^0(\Omega).$$

Tendo em vista a linguagem de Espaços de Hölder, podemos revisitar a Desigualdade de Morrey:

Teorema 1.12 (Desigualdade de Morrey - Bis)**.** *Sejam $p > n$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então*

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leqslant \mathrm{C} \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

em que $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, para alguma constante $\mathrm{C} > 0$, dependendo de n e p.

Interpolação em Espaços de Hölder: Para cada $0 \leqslant \gamma < \alpha < \beta \leqslant 1$ e todo $\epsilon > 0$, temos que

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant \mathrm{C}_\epsilon \|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} + \epsilon \|u\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})}, \tag{1.2}$$

sendo $\mathrm{C}_\epsilon > 0$ uma constante dependendo somente de n e ϵ (quando $\gamma = 0$, $C^{0,\gamma}$ deve ser trocado por L^∞). Isso decorre da desigualdade de interpolação

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant \|u\|^t_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \|u\|^{1-t}_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})}, \quad \text{onde } t = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma}.$$

Mais geralmente, (1.2) verifica-se para normas Hölder de ordens superior. Particularmente, para todo $\epsilon > 0$ e $\alpha \in (0,1)$, tem-se

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leqslant \mathrm{C}_\epsilon \|u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \epsilon [\nabla u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \tag{1.3}$$

e

$$\|u\|_{C^2(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^{1,1}(\overline{\Omega})} \leqslant \mathrm{C}_\epsilon \|u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \epsilon [D^2 u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \tag{1.4}$$

Para mais detalhes sobre espaços de interpolação, recomendamos a leitura do Lemma 6.35 em Gilbarg e Trudinger (2001).

1.1.3 Espaços de Dini–Campanato

Na Teoria de Espaços Funcionais, existe uma generalização natural para a caracterização dos Espaços de Hölder como veremos a seguir. Vamos agora caracterizar os Espaços de Hölder por uma visão alternativa:

De fato, para $k \geqslant 0$ um inteiro, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$ e $\lambda \geqslant 0$, denotando por

$$|||u|||_{k,q,\lambda,\Omega} := \sup_{\substack{x_0 \in \overline{\Omega} \\ 0<r\leqslant \operatorname{diam}(\Omega)}} \left[\frac{1}{r^\lambda} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega_r(x_0)} |u(x) - P(x)|^q \, dx \right]^{\frac{1}{q}}$$

define uma seminorma no espaço $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$, onde $\Omega_r(x_0) = \overline{B}_r(x_0) \cap \Omega$ e $\mathcal{P}_k$ representa o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a k.

Definição 1.8 (Espaços de Campanato)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio, $k \geqslant 0$ um inteiro, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$ e $\lambda \geqslant 0$. definimos o *Espaços de Campanato* , veja Kovats (1999) como sendo:

$$\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega) = \left\{ u \in L^q(\Omega) \ : \ |||u|||_{k,q,\lambda,\Omega} < +\infty \right\},$$

Podemos definir uma norma em $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ para torná-lo um Espaço de Banach, veja Kovats (ibid.), basta considerarmos

$$\|u\|_{\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)} = \left(\|u\|^q_{L^q(\Omega)} + |||u|||^q_{k,q,\lambda,\Omega} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercício 1.1. Prove que o Espaço de Campanato $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ é um Espaço de Banach.

Um resultado crucial para nossos objetivos é a inclusão (o mergulho de Campanato)

$$\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega) \subset C^{k,\alpha}(\Omega), \quad \text{para} \quad \alpha = \frac{\lambda - n - kq}{q},$$

provado em Kovats (ibid.). Mais precisamente:

Teorema 1.13 (Kovats (ibid., Teorema 5.1))**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado satisfazendo a seguinte propriedade: existe uma constante $\mathfrak{A} > 0$ tal que para todo $x_0 \in \Omega$ e todo $r \in [0, diam(\Omega)]$, vale que*

$$|\Omega_r(x_0)| \geqslant \mathfrak{A} r^n.$$

Se $u \in \mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ com $n + kq < \lambda \leqslant n + (k+1)q$, então $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, em que $\alpha = \frac{\lambda-n-kq}{q}$, e vale a seguinte estimativa

$$[u]_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}_0(n,k,q,\mathfrak{A}).|||u|||_{k,q,\lambda,\Omega}.$$

Mais recentemente, em Kovats (ibid.) o autor generaliza o resultado anterior para uma classe de módulos de continuidade mais gerais que Hölder ou Lipschitz.

Lembramos que um módulo de continuidade[3] é qualquer função crescente $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ satisfazendo

$$\lim_{t \to 0^+} \omega(t) = \omega(0) = 0.$$

Definição 1.9. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in \Omega$, com f limitada em vizinhança de x_0. O módulo de continuidade de f no ponto x_0 é definido por:

$$\omega_f(x_0)(t) := \sup_{|x - x_0| \leqslant t} |f(x) - f(x_0)|.$$

Vejamos alguns exemplos elucidativos:

Exemplo 1.1. • f é Hölder contínua com expoente $\alpha \in (0, 1)$ em x_0 se

$$\omega_f(x_0)(t) \leqslant c_0.t^{\alpha}.$$

Denotemos isso por $f \in C^{0,\alpha}(x_0)$. Ademais:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \omega_f(x_0)(|x - x_0|) \leqslant c_0.|x - x_0|^{\alpha}.$$

• Quando $\omega_f(x_0)(t) \leqslant c_0.t$, dizemos que f é Lipschitz em x_0. Nesse caso,

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \omega_f(x_0)(|x - x_0|) \leqslant c_0|x - x_0|.$$

Vamos denotar por $f \in \mathrm{Lip}(x_0)$.

Definição 1.10. Dizemos que f é Dini contínua em x_0 se existe $\eta > 0$ tal que

$$\int_0^{\eta} \frac{\omega_f(x_0)(t)}{t} dt < \infty.$$

Observação 1.3. *Note que*

$$\exists\, \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad \textit{tal que} \quad \int_0^{\eta} \frac{\omega_f(x_0)(t)}{t} dt < \infty \Leftrightarrow \int_0^{1} \frac{\omega_f(x_0)(t)}{t} dt < \infty.$$

De fato,

[3]Um módulo de continuidade $\omega_f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é utilizado para medir quantitativamente a continuidade uniforme da função f sob análise, pois

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(|x - y|).$$

Historicamente a definição de módulo de continuidade foi introduzida por H. Lebesgue (1909, p. 75), para funções de uma variável real (Em que ω se referia à oscilação de uma transformada de Fourier), embora em essência tal conceito fosse conhecido previamente por outros matemáticos contemporâneos.

(⇒) Temos que

$$\int_0^1 \frac{\omega_f(x_0)(t)}{t}dt = \underbrace{\int_0^\eta \frac{\omega_f(x_0)(t)}{t}dt}_{<\infty} + \int_\eta^1 \frac{\omega_f(x_0)(t)}{t}dt$$

Agora, se $t \in (\eta, 1) \Leftrightarrow \eta < t < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{t} < \frac{1}{\eta}$*. Portanto, em* $(\eta, 1)$*, temos:*

$$\frac{\omega_f(x_0)(t)}{t} \leqslant \frac{\omega_f(x_0)(t)}{\eta} \leqslant \frac{1}{\eta}.$$

Portanto

$$\int_\eta^1 \frac{\omega_f(x_0)(t)}{t}dt \leqslant \int_\eta^1 \frac{1}{\eta}dt = \frac{1-\eta}{\eta} < \infty.$$

(⇐) Imediato, pois

$$\int_0^\eta \frac{\omega_f(x_0)(t)}{t}dt \leqslant \int_0^1 \frac{\omega_f(x_0)(t)}{t}dt < +\infty.$$

Lema 1.1. *a) Se* $f \in C^{0,\alpha}(x_0)$ *para* $\alpha \in (0,1) \Rightarrow f$ *é Dini contínua em* x_0*;*

b) Se $f \in Lip(x_0) \Rightarrow f$ *é Dini contínua em* x_0*.*

Demonstração. a) De fato, como $\omega_f(x_0)(t) \leqslant c_0.t^\alpha$ para todo t, então:

$$\int_0^\eta \frac{\omega_f(x_0)(t)}{t}dt \leqslant \int_0^\eta \frac{c_0.t^\alpha}{t}dt = c_0\eta^\alpha < \infty.$$

b) Temos que $\omega_f(x_0)(t) \leqslant c_0.t$, daí:

$$\int_0^\eta \frac{\omega_f(x_0)(t)}{t}dt \leqslant \int_0^\eta \frac{c_0.t}{t}dt = c_0\eta < \infty.$$

□

Exemplo 1.2. A função $\omega(t) = \left|\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right|^\gamma$, com $\gamma < -1$, é Dini contínua em $(0, +\infty)$, porém não é Hölder contínua para qualquer expoente $\alpha \in (0,1)$.

Definição 1.11 (Espaços de Dini–Campanato)**.** Seja $1 \leqslant q \leqslant +\infty$ e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio. Para qualquer módulo de continuidade $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ e $u \in L^q(\Omega)$, definimos a seminorma

$$[u]'_{q,k,\omega;,\Omega} = \sup_{\substack{x_0 \in \overline{\Omega} \\ 0<r\leqslant \operatorname{diam}(\Omega)}} \left[\frac{1}{r^{kq+n}\omega(r)^q} \inf_{P\in\mathcal{P}_k} \int_{\Omega_r(x_0)} |u(x)-P(x)|^q\,dx\right]^{\frac{1}{q}},$$

onde $\Omega_r(x_0) = \overline{B}_r(x_0) \cap \Omega$ e $\mathcal{P}_k$ denota o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a k. Definimos o *Espaços de Dini–Campanato* $\mathcal{M}_q^{k,\omega}(\Omega)$ como o espaço das funções:

$$\mathcal{M}_q^{k,\omega}(\Omega) := \left\{ u \in L^q(\Omega) \ : \ [u]'_{q,k,\omega;\Omega} < \infty \right\}.$$

Vimos anteriormente no Teorema 1.13 que $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)} \subset C^{k,\alpha}(\Omega)$ para $\alpha = \frac{\lambda - n - kq}{q}$. Em contraste com tal resultado, em Kovats (1999) estabelece-se uma generalização do mergulho de Campanato provando a inclusão:

$$\mathcal{M}_k^{(q,\lambda)}(\Omega) \subset C^{k,\omega_1}(\Omega),$$

sob a hipótese que $t \mapsto \omega(t)$ é Dini contínua e $\omega_1(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\omega(r)}{r} dr$.

Definição 1.12. Lembrando que, se $t \mapsto \omega(t)$ é um módulo de continuidade, o espaço $C^{k,\omega}(\Omega)$ é definido como uma generalização dos espaços de Hölder, mais precisamente, o espaço de todas as funções $u \in C^k(\Omega)$ com a seminorma

$$[u]_{k,\omega;\Omega} := \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y \\ |\beta| = k}} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{\omega(|x-y|)} < +\infty.$$

Mais exatamente, em Kovats (ibid.) estabelece-se o seguinte resultado que é conhecido como Mergulho de Dini–Campanato:

Teorema 1.14. *Seja $1 \leqslant q \leqslant \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado satisfazendo a seguinte propriedade: existe uma constante $\mathfrak{A}_0 > 0$ tal que, para todo $x_0 \in \Omega$ e todo $r \in [0, diam(\Omega)]$, vale que*

$$|\Omega_r(x_0)| \geqslant \mathfrak{A}_0 r^n.$$

Logo se $u \in \mathcal{M}_q^{(k,\omega)}(\Omega)$, então $u \in C^{k,\omega_1}(\Omega)$, em que $\omega_1(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\omega(r)}{r} dr$. Em outras palavras, as k-ésimas derivadas de u satisfazem:

$$|D^k u(x) - D^k u(y)| \leqslant \mathrm{C}(n,k,q,\mathfrak{A}_0).\omega_1(|x-y|) \quad \forall\, x, y \in \Omega.$$

2 Um breve estudo sobre o Laplaciano

Pierre-Simon Laplace foi um físico, astrônomo e matemático francês, filho de um pequeno trabalhador rural e faleceu em Paris (1827). Nasceu em Beaumont-en-Auge, Normandia (1749), filho de um pequeno trabalhador rural e que faleceu em 1827 em Paris.

Laplace possuía um vasto conhecimento sobre todas as ciências. De forma única, Laplace via a matemática apenas como uma ferramenta para ser utilizada na investigação, bem como na averiguação prática ou científica dos fatos.

É até hoje recordado como um dos maiores cientistas de todos os tempos, muitas vezes chamado de Newton francês ou Newton da França, com uma excepcional capacidade matemática natural quando confrontado com os matemáticos de sua época.

Figura 2.1: Pierre-Simon Laplace – Retrato póstumo, por Madame Feytaud, 1842

2.1 Introdução

2.1.1 Laplaciano e algumas de suas origens

Inicialmente o que necessitamos para termos uma EDP (Equação Diferencial Parcial)?

1. Um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (Aqui consideraremos $n \geqslant 2$);
2. Um *Operador Diferencial* $\mathcal{L}[u]$ (Função que calcula/opera derivadas);
3. Dados do problema: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (termo de força) e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ (*condição de bordo*);
4. Candidato(s) à solução.

Em resumo, buscamos uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfazendo (em um sentido apropriado)

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u] & = & f(x) & \text{em } \Omega \\ u(x) & = & g(x) & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

em que

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u] & = & \mathcal{L}(x, u(x), \nabla u(x), D^2u(x)) & \text{(Operador Diferencial)} \\ \nabla u(x) & = & \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) & \text{Gradiente de } u \end{cases}$$

e a Matriz Hessiana de u:

$$D^2u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Agora, consideremos para $u \in C^2(\Omega)$ o *Operador Laplaciano* :

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x),$$

batizado em homenagem ao matemático francês *Pierre-Simon Laplace* .

Note que o Laplaciano $u \mapsto \Delta u(x)$ é:

1. Operador Diferencial de 2ª Ordem – (Envolve as derivadas segundas de u);

2. Linear
$$\Delta(u \pm cv)(x) = \Delta u(x) \pm c\Delta v(x) \quad \text{para} \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. Invariância por transformações ortogonais: Se U $\in \mathcal{O}(n)$, então
$$\Delta(u \circ \mathrm{U}) = \Delta u \circ \mathrm{U}.$$

Observemos que o Laplaciano possui duas naturezas como operador:

	Forma Divergente	Forma Não Divergente
$\Delta u(x)$	$\mathrm{div}(\nabla u(x))$	$\mathrm{tr}(D^2 u(x))$
Tipo de solução	Clássica/Fraca	Clássica/Viscosa

1. Variacional: Recordemos que se $\overrightarrow{F} = (F_1, \cdots, F_n)$ (campo vetorial), então
$$\mathrm{div}(\overrightarrow{F}) = \nabla \cdot \overrightarrow{F} = \frac{\partial}{\partial x_1} F_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} F_n.$$

2. Não variacional: Se $\mathbb{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ (matriz quadrada), então
$$\mathrm{tr}(\mathbb{A}(x)) = a_{11} + \cdots a_{NN} = \sum_{i=1}^n a_{ii}(x).$$

   Portanto,
$$\mathrm{div}(\nabla u(x)) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x) = \mathrm{tr}(D^2 u(x))$$

Definição 2.1 (*Solução Clássica* : Equação de Poisson)**.** Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio regular, diremos que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica do Problema de Dirichlet–Poisson se:
$$\begin{cases} -\Delta u(x) & = & f(x) & \text{em } \Omega \\ u(x) & = & g(x) & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

A *Equação de Poisson* é amplamente estudada em Teoria Clássica do Potencial, veja e.g. de Figueiredo (1963), a qual se preocupa em responder os seguintes questionamentos:

1. Existência de soluções;
2. Unicidade/Multiplicidade de soluções;
3. Estabilidade de soluções;
4. Regularidade de soluções.

Além disso, na Teoria Clássica do Potencial, obtemos em alguns contextos:

1. Fórmula de representação explícita de soluções em alguns domínios,
2. Regularidade explícita de soluções para alguns dados.

Definição 2.2 (Representação de soluções: Problema de Dirichlet)**.** Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio regular, seja u satisfazendo o Problema de Dirichlet–Poisson, veja Evans (2010):

$$\begin{cases} -\Delta u(x) & = & f(x) & \text{em } \Omega \\ u(x) & = & g(x) & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Então u satisfaz a seguinte representação integral

$$u(x_0) = \int_{\Omega} G(x,x_0) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \frac{\partial}{\partial\eta} G(x,x_0) d\mathrm{S} \qquad \text{(Integral de Poisson)}$$

onde

$$G(x,x_0) = \mathrm{H}(x) + \Phi(x) \qquad \text{(Função de Green)}$$

- ✓ Φ é a *Solução Fundamental do Laplaciano* ;
- ✓ H é uma função harmônica;
- ✓ $G(x,x_0) = 0$ sobre $\partial\Omega$;
- ✓ $\frac{\partial}{\partial\eta} G(x,x_0)$ é o Núcleo de Poisson.

Definição 2.3 (*Funções Harmônicas*)**.** Na equação de Poisson, quando $f = 0$, diremos que u é uma função Harmônica se

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{2.1}$$

Além disso, 2.1 é conhecida como Equação de Laplace.

Observação 2.1 (Propriedade da Média, veja Axler, Bourdon e Ramey (2001))**.**

$$-\Delta u(x) = 0 \; em \Omega \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = ⨍_{\partial B_r(x)} u(y) d\mathcal{S} = ⨍_{B_r(x)} u(y) dy \;\forall\; B_r(x) \subset \Omega.$$

A seguir apresentaremos uma série de exemplos ilustrativos em que o operador Laplaciano e a equação de Poisson desempenham um papel fundamental.

Exemplo 2.1 (Densidade de substâncias em equilíbrio)**.** Considere o modelo de uma determinada substância, cuja densidade u está confinada (em equilíbrio) em uma região sólida $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Assim a condição de equilíbrio implicará que, para qualquer sub-região $\mathrm{U} \subset \Omega$, o fluxo de u ao longo de $\partial\mathrm{U}$ é zero, i.e.,

$$\iint_{\partial\mathrm{U}} \overrightarrow{\mathrm{F}} \cdot \nu d\overrightarrow{S} = 0,$$

sendo $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ o fluxo de densidade e ν o vetor normal unitário exterior à superfície $\partial\mathrm{U}$.

Agora, em vista do *Teorema da Divergência* (Teorema de Gauss–Ostrogradski), temos que

$$\iiint_{\mathrm{U}} \operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{F}})dV = \iint_{\partial\mathrm{U}} \overrightarrow{\mathrm{F}} \cdot \nu d\overrightarrow{S} = 0.$$

Dado que U é arbitrário, concluímos (via Teorema da Diferenciação de Lebesgue) que

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{F}}) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Contudo, em muitas aplicações em física-matemática, é razoável que a densidade u flua da região de maior concentração para a região de menor concentração. Desta forma, o cálculo em várias variáveis nos assegura que

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = -c_{\Omega}\nabla u \qquad (\textit{Lei de Fourier}),$$

sendo $c_{\Omega} > 0$ uma constante que representa as propriedades de heterogeneidade do meio.

Portanto concluímos que

$$0 = \operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{F}}) = -\operatorname{div}(c_{\Omega}\nabla u) = -c_{\Omega}\Delta u, \quad \text{i.e.} \quad -\Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Exemplo 2.2 (Um pouco sobre Análise Complexa)**.** Consideremos os seguintes pares de funções:

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad v(x,y) = 2xy \quad \text{ou} \\ u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{e} \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3 \quad \text{ou} \\ u(x,y) = e^x \sin(y) \quad \text{e} \quad v(x,y) = -e^x cos(y) \quad \text{ou} \\ u(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad \text{e} \quad v(x,y) = -\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \quad \text{para} \quad x > 0. \end{cases}$$

Assim é de simples verificação que

$$-\Delta u(x,y) = 0 = -\Delta v(x,y).$$

Mas o que estaria realmente por trás desses exemplos de funções harmônicas?

Recordemos as *Equações de Cauchy–Riemann* em Análise Complexa

$$\text{Se} \quad h(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y), \quad \text{então} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Assim

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Logo, concluímos que

$$-\Delta u = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \text{(Teorema de Clairaut–Schwarz)}$$

e

$$-\Delta v = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \text{(Teorema de Clairaut–Schwarz)}$$

Resumidamente temos as seguinte implicações:

Teorema 2.1 (Analiticidade ⇒ Harmonicidade)**.** *Se uma função $h(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ é analítica, então u e v são funções harmônicas.*

A recíproca também se verifica:

Teorema 2.2 (Harmonicidade ⇒ Analiticidade)**.** *Se $u(x,y)$ é uma função harmônica, então existe uma $v(x,y)$ (conjugada harmônica) tal que $h(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ seja analítica.*

A seguir analisaremos o que atualmente é conhecido, no Cálculo de Variações, como Princípio de Dirichlet.

Exemplo 2.3 (*Princípio de Minimização de Energia*)**.** Sejam $f \in L^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ uma função satisfazendo

$$\mathcal{J}(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - f\,u \right) dx \leqslant \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla v|^2 - f\,v \right) dx = \mathcal{J}(v)$$

entre todas funções admissíveis $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfazendo $v = u = g$ em $\partial\Omega$.

Em outras palavras, u é um minimizante de um "funcional energia" sob um *espaço de funções admissíveis* .

Assim, para qualquer função teste $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ como aplicação da 2ª Identidade de Green, temos que

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla(u + t\varphi)|^2 - f(u + t\varphi) \right) dx \right)\Bigg|_{t=0} &= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\varphi - f\varphi) dx \\ 0 = D_\nu \mathcal{J}(u) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{J}(u + t\varphi) - \mathcal{J}(u)}{t} &= \int_\Omega (-\Delta u \varphi - f\varphi) dx \\ &= \int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi dx \end{aligned}$$

Neste ponto, invocarmos o seguinte *Lema Fundamental do Cálculo das Variações* :

Lema 2.1 (Lema de du Bois–Reymond)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $h \in C^0(\Omega)$ tal que* $\int_\Omega h\varphi dx = 0 \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Então $h = 0$ em Ω.*

Portanto, pelo Lema de du Bois–Reymond, podemos concluir que $-\Delta u = f(x)$ em Ω.

2.1.2 O que seria uma solução fraca?

Definição 2.4. Definimos o Espaço de Sobolev (ou *Espaço de Hilbert*) $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ dado por

$$H^1(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}; u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ \ \forall\ 1 \leqslant i \leqslant n \right\},$$

sendo $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ as derivadas fracas de u.

Definição 2.5 (*Soluções fracas* : Equação de Poisson)**.** Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio regular, diremos que $u \in H^1(\Omega)$ é dita uma solução fraca de

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega \tag{2.2}$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_\Omega f \phi dx \quad \forall\ \ \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Grosseiramente falando, deveria valer a integração por partes. De fato, se u é regular, multiplicando (2.2) por $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, integrando e usando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_\Omega f \phi dx = \int_\Omega (-\Delta u)\phi dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx - \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx$$

Isso assegura a consistência da Definição:

Solução Clássica $\Longrightarrow$ **Solução Fraca**

Vamos estabelecer os princípios do máximo para funções harmônicas. Para mais detalhes veja Gilbarg e Trudinger (2001).

Teorema 2.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma função harmônica. Então,*

1. $\max\limits_{\overline{\Omega}} u(x) = \max\limits_{\partial\Omega} u(x)$.

2. *Se existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u(x)$, então u é constante.*

Vale ressaltar que, o princípio do máximo também vale para funções sub-harmônicas.

Teorema 2.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma função sub-harmônica, isto é, $\Delta u \geqslant 0$. Então,*

1. $\max\limits_{\overline{\Omega}} u(x) = \max\limits_{\partial\Omega} u(x)$.

2. *Se existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u(x)$, então u é constante.*

Para funções super-harmônica, vale o princípio do mínimo.

Teorema 2.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma função super--harmônica, isto é, $\Delta u \leqslant 0$. Então,*

1. $\min\limits_{\overline{\Omega}} u(x) = \min\limits_{\partial\Omega} u(x)$.

2. *Se existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u(x)$, então u é constante.*

Exercício 2.1. Seja $p > 2$. Formule e prove o Princípio de Dirichlet para a integral variacional

$$\mathcal{J}_p(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega f u dx$$

Exercício 2.2. Seja $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ uma solução fraca para

$$-\Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Mostre que $w = D_i u$ é uma solução fraca para a mesma equação.

Exercício 2.3. Sejam $f \in L^2(\Omega)$, $g \in W^{1,2}(\Omega)$ e $u \in W^{1,2}(\Omega)$ uma solução fraca para

$$-\Delta u = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{com} \quad u - g \in W^{1,2}_0(\Omega).$$

Mostre a seguinte estimativa

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant C(n)\left(\|g\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Exercício 2.4 (Estabilidade)**.** . Sejam $u_1 \in H^1(\Omega)$ e $u_2 \in H^1(\Omega)$ soluções fracas de $\Delta u = u(x)$ em Ω satisfazendo $u_1 - g_1 \in H^1_0(\Omega)$ e $u_2 - g_2 \in H^1_0(\Omega)$, em que $g_1, g_2 \in H^1(\Omega)$. Mostre que

$$\|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|g_1 - g_2\|_{H^1(\Omega)}.$$

2.1.3 Problema de Dirichlet: *não existência de soluções* (clássicas)

Dadas as definições de soluções fraca e clássica, uma questão pertinente é se o Problema de Dirichlet é sempre solúvel. Os exemplos, a seguir, respondem tal questionamento.

Teorema 2.6 (*Teorema de Zaremba*'1911 – Ponce (2009))**.** *Sejam $\Omega = B_1(0)\setminus\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 0$ se $x \in \partial B_1(0)$ e $g(0) = 1$. Então, o Problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0 & \text{em } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

não admite uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Alguns anos depois, Lebesgue demonstra um resultado de não existência de soluções em um contexto mais geral.

Teorema 2.7 (*Teorema deLebesgue*'1913 – Ponce (ibid.))**.** *Existe um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ homeomorfo à bola $B_1(0)$ e $g \in C^0(\partial\Omega)$ tal que o Problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0 & \text{em } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

não admite uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Demonstração. (Prova do Teorema de Zaremba)

- Suponha que exista uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$;

- Então u é harmônica em Ω e contínua em B_1 com $u(0) = 1$;

- Como u é limitada em Ω (via Princípio do Máximo), pode-se estendê-la continuamente em toda B_1 de modo que a extensão, a saber $\bar{u}$, seja uma função harmônica em B_1 (Teorema da Singularidade Removível para perfis harmônicos).

- Pela unicidade de soluções do problema de Dirichlet em B_1, tal extensão deve ser identicamente igual a 0, pois $\bar{u} = u \equiv 0$ em ∂B_1.

- No entanto, isso contradiz o fato de que u é contínua em B_1 com $u(0) = 1$. Portanto não existe solução clássica para o problema original.

$\square$

A seguir, veremos um interessante resultado que assegura a existência de soluções (que não são clássicas, mas possuem Hessiana limitada) para o Problema de Dirichlet.

Teorema 2.8 (Pan e Yan (2022)). *Existe uma função contínua f tal que a única solução do Problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) &= f(x) \quad em \;\; B_1(0) \\ \quad u(x) &= 0 \qquad em \;\; \partial B_1(0) \end{cases}$$

não é $C^2(B_1(0))$, mas é duas vezes diferenciável em $\overline{B_1(0)}$ com Hessiana limitada.

Exemplo 2.4. A família de funções radialmente simétricas (para $\beta > 0$ e $\alpha = 2\beta + 1$) define perfis que são duas vezes diferenciáveis com Laplaciano limitado (porém descontínuo) e Hessiana limitada:

$$\omega(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^\beta}\right) & \text{em} \quad 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Exercício 2.5. Seja u solução fraca para $-\Delta u = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega$ com $f \in L^2(\Omega)$. Mostre qual deve ser a equação que u_ε (família regularizante canônica de u) deve satisfazer no sentido fraco em $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

Exercício 2.6. Seja u solução fraca para $-\Delta u = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega$ com $f \in L^2(\Omega)$. Estabeleça estimativas $W^{2,2}(\Omega)$ para u usando o resultado anterior.

2.2 Teoria de soluções no sentido da viscosidade

A seguir, exploraremos a natureza não variacional do Laplaciano. Para tanto, iremos tratar de um novo sentido de solução para a Equação de Poisson.

Soluções no sentido da viscosidade: o que seriam?

Definição 2.6. Diz-se que $u \in C^0(\Omega)$ é uma subsolução (respectivamente supersolução) no sentido da viscosidade da Equação de Poisson

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega$$

se sempre que $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que

$$u(x_0) = \varphi(x_0) \;\; \text{e} \;\; u(x) < \varphi(x) \;\; \text{(Máximo local)} \;\; \forall \; x \neq x_0$$

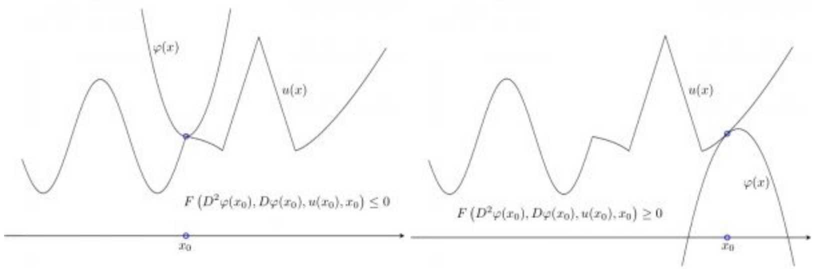
$$\text{(respectivamente } \; u(x) > \varphi(x) \;\; \text{(Mínimo local))}$$

então

$$-\Delta\varphi(x_0) \leqslant f(x_0) \qquad \text{(resp.} \;\; -\Delta\varphi(x_0) \geqslant f(x_0))$$

Em resumo, se u é subsolução e supersolução $\Rightarrow$ u é solução de viscosidade.

Representação geométrica da noção de solução de viscosidade



Aqui temos que

$$F(D^2u, Du, u, x) = -\Delta u(x) - f(x).$$

Permita-nos discutir a consistência da definição de soluções de viscosidade, veja Katzourakis (2015) para um ensaio sobre este tema.

Suponha que $u \in C^2(\Omega)$ é solução de $-\Delta u = f$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ é uma função teste tal que

$$u(x_0) = \varphi(x_0) \quad \text{e} \quad u(x) > \varphi(x) \qquad (\text{resp } \; u(x) < \varphi(x)) \quad \forall\; x \neq x_0$$

Considere agora $\omega(x) = u(x) - \varphi(x)$.

✓ Assim $\omega(x) \geqslant 0$ (respectivamente $\leqslant 0 \;\forall\; x$) e $\omega(x_0) = 0$ (ponto de mínimo/máximo local).

✓ Então

$$\nabla\omega(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad D^2\omega(x_0) \geqslant 0 \qquad (\text{respec. } \leqslant 0)$$

✓ Logo $\Delta u(x_0) - \Delta\varphi(x_0) = \Delta\omega(x_0) = \mathrm{tr}(D^2\omega(x_0)) \geqslant 0 \qquad (\text{respec. } \leqslant 0).$

✓ Portanto

$$-\Delta\varphi(x_0) \geqslant -\Delta u(x_0) = f(x_0) \qquad (\text{respec. } -\Delta\varphi(x_0) \leqslant f(x_0)).$$

✓ Solução Clássica $\Longrightarrow$ Solução de Viscosidade.

Soluções no sentido da viscosidade: Guia do Mochileiro das Galáxias, veja Crandall, Ishii e Lions (1992).

Similarmente a Teoria Clássica do Potencial, a teoria de soluções no sentido da viscosidade preocupa-se com:

$$\textit{Teoria de operadores na forma não divegentes} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Existência} \\ \text{Unicidade} \\ \text{Regularidade} \\ \text{Estabilidade} \end{cases}$$

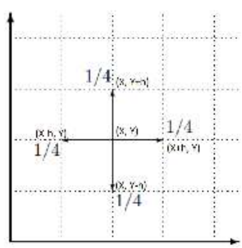
Para ilustramos este novo sentido de solução para a Equação de Poisson, vejamos o seguinte exemplo que mescla conceitos de probabilidade e equações diferenciais.

Exemplo 2.5 (Passeio aleatório: Probabilidade Versus EDPs)**.** Um turista desorientado em Maceió procura chegar à praia. Em cada esquina, ele decide aleatoriamente se segue para o quarteirão da frente, ou para o quarteirão de trás, ou se caminha para a esquina à sua direita ou se vai para a da esquerda. Dado que ele inicia em um ponto (x, y) da cidade, qual é a probabilidade dele chegar à praia antes de cruzar os limites de Maceió?

Para responder tal questionamento, devemos utilizar expectativa condicionada, ou seja, se o turista encontra-se em um ponto $(x, y) \in \mathrm{M}$ (cidade de Maceió), então

$$u_h(x, y) = \frac{1}{4}\left(u_h(x+h, y) + u_h(x-h, y) + u_h(x, y+h) + u_h(x, y-h)\right),$$

onde h é o tamanho da malha de quarteirões, $(x+h, y)$ é a esquina à direita, $(x-h, y)$ é a da esquerda, $(x, y+h)$ é a esquina da frente e $(x, y-h)$ a esquina de trás. Vide



Desta forma, podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \left(u_h(x+h, y) + u_h(x-h, y) - 2u_h(x, y)\right) + \\ & + \left(u_h(x, y+h) + u_h(x, y-h) - 2u_h(x, y)\right). \end{aligned}$$

Em contrapartida, como a cidade de Maceió é uma megalópole, devemos analisar o problema a nível contínuo limite (em uma escala micro/infinitesimal), i.e., fazer $h \to 0^+$.

Dessa forma, se dividirmos a expressão acima por h^2 e fazendo $h \to 0^+$, obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{u_h(x+h,y)+u_h(x-h,y)-2u_h(x,y)}{h^2}\right)+\\
&\qquad\qquad \left(\frac{u_h(x,y+h)+u_h(x,y-h)-2u_h(x,y)}{h^2}\right)\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}u(x,y) \quad (u_h \to u \text{ quado } h \to 0^+)\\
&= \mathrm{tr}(D^2u(x))\\
&= \Delta u(x,y).
\end{aligned}$$

Em conclusão, a probabilidade do turista chegar à praia antes de cruzar os limites de Maceió, dado que ele inicia no ponto (x, y), é $u(x, y)$, onde u satisfaz, em um sentido adequado, veja Rossi (s.d.),

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{em} \quad \mathrm{M} \\ u &= 1 \quad \text{em} \quad \mathrm{P} \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \mathrm{F}, \end{cases}$$

onde M representa a região (interior) da cidade de Maceió, $\mathrm{P} \subset \partial\mathrm{M}$ é a praia e $\mathrm{F} = \partial\mathrm{M} \setminus \mathrm{P}$.

É evidente que o procedimento acima carece de muitas justificações precisas, bem como assumimos que a estrutura de ruas e quarteirões da região analisada é perfeitamente cartesiana. A seguir, revisitaremos

Exemplo 2.6 (Passeio aleatório Bis - Justificação rigorosa). A rigor, a passagem ao limite, quando $h \to 0^+$ no passeio aleatório, não está bem justificada. Para tanto, utilizaremos a teoria de soluções no sentido da viscosidade. De fato, temos:

$$0 = \sum_{j=1}^{4} u_h(X_h + \Delta_h^j) - u_h(X_h) \tag{2.3}$$

em que

✓ u_h está definida em $\Omega_h \subset \Omega$ (malha interior de Ω);

✓ $X_h \in \Omega_h$ (ponto da malha);

✓ $\{\Delta_h^j\}_{j=1}^4 = \{(\pm h, 0), (0, \pm h)\}$ (deslocamentos verticais/horizontais).

Neste contexto, existe $u \in C^0(\Omega)$ tal que $u_h \to u$ uniformemente e

$$\sup_{\Omega_h} |u_h(x) - u(x)| \to 0 \ \ (h \to 0^+) \quad \text{(Ascoli–Arzelà assintótico).}$$

✓ Mostremos que $u = \lim_{h \to 0} u_h$ é uma solução de viscosidade da Equação de Laplace:

De fato, sejam $\varphi \in C^2(\Omega)$ e $X_0 \in \Omega$ tais que $(u - \varphi)(X_0)$ é um mínimo local estrito. Para $h > 0$ e $X_h \in \Omega_h$ tal que

$$0 \leqslant \|X_h - X_0\| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad (u - \varphi)(X_0) < (u - \varphi)(X_h + \Delta_h^j).$$

Particularmente, da convergência uniforme $u_h \to u$, temos que

$$0 < h \ll 1 \quad \Rightarrow \quad (u_h - \varphi)(X_h) \leqslant (u_h - \varphi)(X_h + \Delta_h^j)$$

Em consequência de (2.3), obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \sum_{j=1}^{4} (u_h - \varphi)(X_h + \Delta_h^j) - (u_h - \varphi)(X_h) \\ &= -\sum_{j=1}^{4} [\varphi(X_h + \Delta_h^j) - \varphi(X_h)] \end{aligned}$$

Por fim, dado que $\varphi \in C^2(\Omega)$, obtemos ao passar o limite em

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant -\frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^{4} [\varphi(X_h + \Delta_h^j) - \varphi(X_h)] \\ &= -\left[\left(\frac{\varphi(x_h + h, y_h) + \varphi(x_h - h, y_h) - 2\varphi(x_h, y_h)}{h^2}\right) + \right. \\ &\qquad \left. \left(\frac{\varphi(x_h, y_h + h) + \varphi(x_h, y_h - h) - 2\varphi(x_h, y_h)}{h^2}\right)\right] \end{aligned}$$

que

$$-\Delta\varphi(X_0) \geqslant 0.$$

Analogamente se $(u - \varphi)(X_0)$ tem um máximo local estrito, então

$$-\Delta\varphi(X_0) \leqslant 0.$$

Deixamos a verificação desse caso como exercício para o leitor interessado.

2.2.1 Equivalência das noções de soluções para a Equação de Laplace

Equação de Laplace: ***Distintas noções de soluções***

Portanto, podemos estabelecer a seguinte sequência de equivalência para soluções, veja Juutinen, Lindqvist e Manfredi (2001) e Medina e Ochoa (2019) de

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad (\textit{Domínio Regular})$$

Solução Clássica $\Leftrightarrow$ Solução Fraca $\Leftrightarrow$ Solução de Viscosidade.

A equivalência entre as noções de solução clássica e fraca é estabelecido em um curso de EDPs (veja por exemplo Evans (2010)). Portanto, trataremos de provar equivalência de noções de soluções clássica e viscosidade.

Proposição 2.1. *Seja $u \in C^2(\Omega)$. Então $\Delta u = 0$ em Ω no sentido da viscosidade se, e somente se, $\Delta u = 0$ em Ω no sentido clássico.*

Demonstração.

1. Clássica $\Rightarrow$ Viscosidade: Foi provada anteriormente.

2. Viscosidade $\Rightarrow$ Clássica:

   Dados $x_0 \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$, seja

   $$\varphi(x) = u(x) - \frac{\varepsilon}{2n}\|x - x_0\|^2 \quad \text{(Note que} \quad \varphi \in C^2(\Omega)).$$

   Assim x_0 é ponto de mínimo local de

   $$(u - \varphi)(x) = \frac{\varepsilon}{2n}\|x - x_0\|^2,$$

   então

   $$0 \geqslant \Delta\varphi(x_0) = \Delta u(x_0) - \varepsilon \qquad \text{(Definição de supersolução de viscosidade).}$$

   Logo, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

   $$\Delta u(x_0) \leqslant 0.$$

   Analogamente provamos que $\Delta u(x_0) \geqslant 0$ (o leitor pode facilmente verificar).

$\square$

A seguir estabeleceremos a validade do Princípio de Comparação para soluções no sentido da viscosidade para Equação de Laplace.

Lema 2.2 (*Princípio de Comparação*)**.** *Sejam $\mathrm{B} = \mathrm{B}_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^0(\overline{\mathrm{B}})$ e $\psi \in C^0(\overline{\mathrm{B}}) \cap C^2(\mathrm{B})$ função harmônica.*

(A) Se u é super-harmônica no sentido da viscosidade em B e $u \geqslant \psi$ em $\partial\mathrm{B}$, então $u \geqslant \psi$ em B;

(B) Se u é sub-harmônica no sentido da viscosidade em B e $u \leqslant \psi$ em $\partial\mathrm{B}$, então $u \leqslant \psi$ em B.

Prova (A). Para $\varepsilon > 0$ fixado, seja

$$\varphi(x) = \psi(x) + \frac{\varepsilon}{2n}\|x - x_0\|^2$$

Então, temos que

$$\min_{\overline{\mathrm{B}}}(u - \varphi) = \min_{\partial\mathrm{B}}(u - \varphi) \geqslant -\frac{\varepsilon}{2n}R^2 \quad (\text{pois } u \geqslant \psi \text{ em } \partial\mathrm{B})$$

Suponha que a identidade acima não se verifique, i.e., $u - \varphi$ atinge o mínimo em $\hat{x_0} \in \mathrm{B}$. Então, da definição de supersolução de viscosidade, temos que

$$0 \geqslant \Delta\varphi(\hat{x_0}) = \Delta\psi(\hat{x_0}) + \Delta\left(\frac{\varepsilon}{2n}\|x - x_0\|^2\right)(\hat{x_0}) = 0 + \varepsilon > 0,$$

o que claramente é uma contradição.

Logo a identidade acima se verifica. Assim,

$$(u - \varphi)(x) \geqslant \min_{\overline{\mathrm{B}}}(u - \varphi) = \min_{\partial\mathrm{B}}(u - \varphi) \geqslant -\frac{\varepsilon}{2n}R^2 \quad (\text{pois } u \geqslant \psi \text{ em } \partial\mathrm{B})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u(x) &\geqslant \varphi(x) - \frac{\varepsilon}{2n}R^2 \\ &= \psi(x) + \frac{\varepsilon}{2n}\|x - x_0\|^2 - \frac{\varepsilon}{2N}R^2 \\ &= \psi(x) - \frac{\varepsilon}{2n}\left(R^2 - \|x - x_0\|^2\right) \end{aligned}$$

Por fim, dado que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $u \geqslant \psi$ em B.

A prova do item (B) segue Mutatis Mutandis e deixamos como Exercício para o leitor.

□

Finalmente, podemos provar que soluções de viscosidade para a Equação de Laplace são de fato regulares.

Teorema 2.9. *Seja $u \in C^0(\Omega)$. Se $\Delta u = 0$ no sentido da viscosidade em Ω, então $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ no sentido clássico.*

Demonstração. Sabemos (veja fórmula de representação de Poisson) que a equação de Laplace em bolas com dados contínuos é unicamente solúvel, i.e.,

$$\psi_g(y) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |y - x_0|^2}{n\omega_n R}\displaystyle\int_{\partial\mathrm{B}_R(x_0)} \frac{g(z)}{|z - x_0|^n} & \text{em} \quad \mathrm{B}_R(x_0) \\ g(y) & \text{sobre} \quad \partial\mathrm{B}_R(x_0). \end{cases}$$

é de classe $C^2(\mathrm{B}_R(x_0)) \cap C^0(\overline{\mathrm{B}_R(x_0)})$ e satisfaz

$$\Delta\psi_g(y) = 0 \quad \text{em} \quad \mathrm{B}_R(x_0).$$

Sejam $x_0 \in \Omega$ e $0 < R \ll 1$ tais que $\mathrm{B} = \mathrm{B}_R(x_0) \Subset \Omega$. Considere agora

$$\begin{cases} \Delta\psi_u = 0 & \text{em} \quad \mathrm{B} \\ \psi_u = u & \text{sobre} \quad \partial\mathrm{B}. \end{cases}$$

Dado que u é super-harmônica (resp. sub-harmônica) no sentido da viscosidade e $u \geqslant \psi_u$ (resp. $u \leqslant \psi_u$) sobre ∂B, então do Princípio de Comparação, veja Lema 2.2, temos que

$$u \geqslant \psi_u \quad (\text{resp. } u \leqslant \psi_u) \quad \text{em} \quad \overline{\mathrm{B}}.$$

Portanto, pelo descrito acima $u = \psi_u$ em $\overline{\mathrm{B}}$, segue o resultado. □

Particularmente, como consequência do Teorema 2.9, concluímos que $u \in C^\infty(\Omega)$, veja Evans (2010).

3 Teoria de Schauder

3.1 Introdução

No estudo de Equações Diferenciais Parciais (EDPs), uma das áreas de bastante interesse consiste no estudo de regularidade de soluções de uma EDP. Neste Capítulo vamos estabelecer a *Teoria de Schauder* para equação de Poisson

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{em} \quad B_1, \tag{3.1}$$

onde $\Delta u(x) := \mathrm{Tr}(D^2 u(x)) = \sum_{i=1}^{n} D_{ii} u(x)$. Aqui $D^2 u$ representa a matriz Hessiana, ou seja,

$$D^2 u = \begin{bmatrix} D_{11}u & D_{12}u & \cdots & D_{1n}u \\ D_{21}u & D_{22}u & \cdots & D_{2n}u \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}u & D_{n2}u & \cdots & D_{nn}u \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

Vale ressaltar que se $u \in C^2(\Omega)$ então necessariamente $D^2 u \in C(\Omega)$. Porém a recíproca não é verdadeira, ou seja, a continuidade do Laplaciano Δu não implica que $u \in C^2(\Omega)$. Um exemplo disto pode ser construído tomando uma função suave $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\varphi = 1$ na bola B_1 com $\varphi = 0$ em $\mathbb{R}^2 \setminus B_2$, e considerar a função $f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \Delta\left[\varphi(x_1, x_2) x_1 x_2\right](2^k x_1 x_2)$. É possível verificar que f é contínua, porém não existe solução $u \in C^2$ do problema $-\Delta u = f$, para maiores detalhes veja Jost (2002).

Por outro lado, existe um módulo de continuidade para f que implica na regularidade requerida para u, o qual chamamos α-Hölder continuidade. A Teoria de Schauder, desenvolvida por Julius P. Schauder, nos garante que se f for uma função α-Hölder contínua, então as soluções da equação (3.1) possui Hessiana contínua e, além disso, a Hessiana D^2u admite um módulo de continuidade α-Hölder contínua. De fato, à teoria de regularidade para a equação de Poisson (3.1) é baseada na análise do Potencial Newtoniano, veja Gilbarg e Trudinger (2001), da função f:

$$w(x) := \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y) dy, \tag{3.3}$$

onde Γ denota a solução fundamental do Laplaciano. Recordamos o *Teorema de representação de Green* que garante que qualquer solução u da equação de Poisson (3.1) pode ser escrita da forma:

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \left(\varphi \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS(y) + \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y) dy.$$

O primeiro integrando é suave em função de x, então a suavidade de u é determinada pela última integral, ou seja, pelo Potencial Newtoniano de f. De modo mais geral, é razoável esperar que as segundas derivadas do potencial Newtoniano w tenham a mesma suavidade de f, uma vez que, grosso modo, resolver (3.1) equivale essencialmente a integrar f duas vezes. No entanto, o problema é que o operador Laplaciano é definido apenas como o traço da matriz Hessiana D^2u. De fato, como vimos acima, existem exemplo mostrando que se $\Delta u \in C^0(\Omega)$ não implica, necessariamente, que $u \in C^2(\Omega)$. Sendo assim, os espaços $C^2(\Omega)$ não são adequados para o estudo de regularidade de (3.1). Acontece que, de fato, ganhamos duas derivadas se medirmos a diferenciabilidade no tipo certo de espaço. O principal espaço são os chamados *Espaços de Hölder*. Mais precisamente, assumindo que $\partial\Omega$ é suave suficiente para que o Teorema da divergência vale, provamos que

$$D_i w(x) = \int_\Omega D_i \Gamma(x-y) f(y) dy, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.4}$$

e

$$\begin{aligned} D_{ij} w(x) = & \int_\Omega D_{ij} \Gamma(x-y)(f(y) - f(x)) dy \\ & - f(x) \int_{\partial\Omega} D_i \Gamma(x-y) \nu_j(y) dS_y, \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $\nu_j(y)$ representa a j-ésima coordenada do vetor normal unitário exterior à $\partial\Omega$. Posteriormente, verifica-se que o termo

$$f(x) \int_{\partial\Omega} D_i \Gamma(x-y) \nu_j(y) dS(y)$$

está bem definido e que a Hölder continuidade de $D^2 w$ seguirá de (3.5) depois de alguns cálculos direto.

3.2 Resultado principal

Vamos iniciar a seção enunciando nosso principal resultado do capítulo que consiste do seguinte Teorema.

Teorema 3.1 (Schauder)**.** *Seja $u : B_1 \to \mathbb{R}$ uma solução limitada para*

$$-\Delta u = f \quad \text{em} \quad B_1. \tag{3.6}$$

com $f \in C^{0,\alpha}(B_1)$, $\alpha \in (0,1)$. Então $u \in C^{2,\alpha}(B_1)$. Além disso, existe uma constante que depende apenas de n e α, $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n,\alpha)$, tal que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leqslant \mathrm{C}\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right)$$

O objetivo principal consiste em demonstrar o Teorema 3.1 por dois métodos: via *Princípio do Máximo* e pelo *Método de compacidade* . A mais elementar e geométrica é a abordagem via Princípio do Máximo. O segundo método consiste na chamada *Estimativa de Energia* para o problema (3.1). Veremos que esse último método é mais flexível e mais importante. Na verdade, esse método pode ser usado para operadores mais gerais da forma divergente

$$-\mathrm{div}(\mathbb{A}(x)\nabla u) = f$$

sendo $\mathbb{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ uma matriz uniformemente elíptica, ou seja, existem constantes $0 < \lambda \leqslant \Lambda$ tais que

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in B_1.$$

Exemplo 3.1 (Contraexemplo para $f \in L^\infty$)**.** Vejamos um simples exemplo de uma função u cujo Laplaciano é limitado (i.e., $\Delta u = f \in L^\infty$), porém algumas de suas segundas derivadas não são limitadas (i.e, $u \notin C^2$). Portanto vamos fornecer um contraexemplo para as estimativas de Schauder quando a hipótese de $\alpha-$Hölder continuidade de f é relaxada.

De fato, considere

$$u(x,y) = (x^2 - y^2)\ln(x^2 + y^2) \quad \text{em} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^2.$$

Então,

$$\begin{cases} \partial_{xx} u &= \quad 2\ln(x^2+y^2) + \frac{8x^2}{x^2+y^2} - 2\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y2}\right)^2, \\ \partial_{xx} u &= \quad -2\ln(x^2+y^2) + \frac{8y^2}{x^2+y^2} + 2\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y2}\right)^2 \end{cases}$$

Note que ambas $\partial_{xx}u$ e $\partial_{yy}u$ são ilimitados e, dessa forma, $u \notin C^2(B_1)$. Não obstante,

$$-\Delta u(x,y) = -\partial_{xx}u(x,y) - \partial_{yy}u(x,y) = -8\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \in L^\infty(B_1).$$

Exemplo 3.2 (Contraexemplo para $f \in C^0$)**.** Mostraremos que se $\Delta u = f$ com f somente contínua, então u pode não ser C^2_{loc} como pode ser mostrado pelo simples exemplo:

$$\begin{cases} u(x,y) & = & (x^2-y^2)\ln(-\ln(x^2+y^2)) & \text{se} & 0 < x^2+y^2 \leqslant \frac{1}{4} \\ u(0,0) & = & 0 & \text{se} & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Essa função tem Laplaciano contínuo, i.e., $f \in C^0$, mas $u \notin C^2$, pois não é diferenciável na origem. Nesse cenário temos que $u \in C^{1,1}$. Obtemos, assim, um contraexemplo às estimativas de Schauder para $\alpha = 0$.

3.3 Teorema de Schauder via Princípio do Máximo

Vamos iniciar a seção mostrando estimativas do tipo $L^\infty(B_1)$, utilizando o Princípio do Máximo.

Proposição 3.1. *Seja $u \in C^2(B_1) \cap C^0(\overline{B_1})$ solução de* (3.6)*, então*

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n}\|f\|_{L^\infty(B_1)}. \tag{3.7}$$

Demonstração. Nosso objetivo é construir uma função v satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{cases} \Delta u & \geqslant & \Delta v & \text{em} & B_1 \\ u & \leqslant & v & \text{em} & \partial B_1 \end{cases}$$

Portanto, pelo Princípio do Máximo, seguirá que $u \leqslant v$ em B_1.

Consideremos, então, a função auxiliar

$$v(x) := \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1-|x|^2}{2n}\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Note que $v \in C^2(B_1) \cap C^0(\overline{B_1})$. Além disso, para $x \in \partial B_1$, temos que

$$v(x) = \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} \geqslant u(x).$$

Ademais,

$$\Delta v(x) = -\|f\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant -f(x) = \Delta u(x) \quad \text{em} \quad B_1.$$

Assim, pelo *Princípio do Máximo Fraco* , $u \leqslant v$ em B_1, isto é,

$$u(x) \leqslant \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1-|x|^2}{2n}\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Repetindo o processo para a função

$$\widetilde{v}(x) := -\|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} - \frac{1-|x|^2}{2n}\|f\|_{L^\infty(B_1)},$$

concluímos que

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n}\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

□

Observe que a estimativa (3.7) revela-nos que se $\|f\|_{L^\infty(B_1)}$ for “pequeno”, então u está próximo, na norma L^∞, de uma função harmônica. De fato, seja $h : B_1 \to \mathbb{R}$ solução do Problema de Dirichlet (melhor aproximação harmônica):

$$\begin{cases} \Delta h &= 0 \quad \text{em} \quad B_1 \\ h &= u \quad \text{em} \quad \partial B_1 \end{cases} \tag{3.8}$$

Se $u : B_1 \to \mathbb{R}$ é solução da Equação de Poisson, então,

$$\begin{cases} \Delta(u-h) &= f \quad \text{em} \quad B_1 \\ u-h &= 0 \quad \text{em} \quad \partial B_1 \end{cases}$$

e pelo Proposição 3.1,

$$\|u-h\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \frac{1}{2n}\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Provamos, assim, o seguinte resultado:

Corolário 3.1. *Seja $u : B_1 \to \mathbb{R}$ solução da equação de Poisson* (3.6)*. Então existe $h : B_1 \to \mathbb{R}$ solução do problema de Dirichlet* (3.8)*, tal que*

$$\|u-h\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \frac{1}{2n}\|f\|_{L^\infty(B_1)}. \tag{3.9}$$

Conceitos Preliminares: Recordemos agora que uma função $f : B_1 \to \mathbb{R}$ é α-Hölder contínua em $x_0 \in B_1$ e escrevemos $f \in C^{0,\alpha}(x_0)$, se

$$[f]_{C^{0,\alpha}(x_0)} := \sup_{\substack{x \neq x_0 \\ x \in B_1}} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^\alpha} < +\infty.$$

Além disso, diremos que f é α-Hölder contínua em B_1 e denotaremos $f \in C^{0,\alpha}(B_1)$ se f é α-Hölder contínua para todo $x \in B_1$. Dessa forma, definimos a seminorma α-Hölder de f em B_1 por

$$[f]_{C^{0,\alpha}(B_1)} := \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in B_1}} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^\alpha}.$$

Além disso, diremos que uma função $u : B_1 \to \mathbb{R}$ é de classe $C^{2,\alpha}$ em x_0, quando $u \in C^2$ em alguma vizinhança de x_0 e $D_{ij}u(x_0) \in C^{0,\alpha}(x_0)$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Uma forma de abordar a estimativa $C^{0,\alpha}(x_0)$ é através da aproximação por funções constantes.

Definição 3.1. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Uma função u é de classe $C^{0,\alpha}(\Omega)$ se, e somente se, para todo $x_0 \in \Omega$, existir uma constante c_{x_0} e uma constante uniforme $C_0 > 0$ tal que

$$\|u - c_{x_0}\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leqslant C_0 \cdot r^\alpha.$$

Além disso, se $|c_{x_0}| + C_0 \leqslant M$ para todo $x_0 \in \Omega$, então $\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leqslant M$.

Isto é uma consequência imediata da definição de Hölder regularidade. Caso tal constante exista, então, necessariamente $c_{x_0} = u(x_0)$ e $\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} u \leqslant C_0 r^\alpha$, em que

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} u(x) := \sup_{B_r(x_0)} u(x) - \inf_{B_r(x_0)} u(x).$$

De forma equivalente, podemos abordar a estimativa $C^{1,\alpha}$ através da aproximação por planos (funções afins)

Definição 3.2. Uma função u é de classe $C^{1,\alpha}(\Omega)$ se, e somente se, para todo $x_0 \in \Omega$, existir uma função afim

$$\ell_{x_0}(x) := a_{x_0} + \vec{b}_{x_0} \cdot (x - x_0)$$

e uma constante uniforme $C_0 > 0$ tal que

$$\|u - \ell_{x_0}\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leqslant C_0 \cdot r^{1+\alpha}.$$

Além disso, se $|a_{x_0}| + \|\vec{b}_{x_0}\| + C_0 \leqslant M$ para todo $x_0 \in \Omega$, então $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Omega)} \leqslant M$. Adicionalmente, se tal polinômio linear existir, então, necessariamente $a_{x_0} = u(x_0)$ e $\vec{b}_{x_0} = \nabla u(x_0)$.

Devemos destacar que, se $u \in C^{1,\alpha}$ em $x_0 \in \Omega$ para algum $\alpha \in (0,1)$ e

$$\ell_{x_0}(x) := u(x_0) + \nabla u(x_0) \cdot (x - x_0)$$

temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$u(x) = u(x_0) + \int_0^1 \nabla u(tx + (1-t)x_0) \cdot (x - x_0)\, dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|u(x) - \ell_{x_0}(x)| &= |u(x) - (u(x_0) + \nabla u(x_0) \cdot (x - x_0))| \\
&= \left| \int_0^1 [\nabla u(tx + (1-t)x_0) - \nabla u(x_0)] \cdot (x - x_0)\, dt \right| \\
&\leqslant C_0 \cdot |(tx + (1-t)x_0) - x_0|^{\alpha} |x - x_0| \\
&\leqslant C_0 \cdot |x - x_0|^{1+\alpha}.
\end{aligned}$$

A recíproca segue devido ao Teorema 1.13.

De forma análoga, uma definição alternativa para abordarmos as estimativas $C^{2,\alpha}$ é através da aproximação por polinômios quadráticos.

Definição 3.3. Uma função u é de classe $C^{2,\alpha}(\Omega)$ se, e somente se, para todo $x_0 \in \Omega$, existir um polinômio quadrático

$$\mathfrak{p}_{x_0}(x) :\, = \frac{1}{2}(x - x_0)^T \cdot A_{x_0} \cdot (x - x_0) + \vec{b}_{x_0} \cdot (x - x_0) + a_{x_0} \tag{3.10}$$

e uma constante uniforme $C_0 > 0$ tal que

$$\|u - \mathfrak{p}_{x_0}\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leqslant C_0 \cdot r^{2+\alpha}.$$

Além disso, se $|a_{x_0}| + \|\vec{b}_{x_0}\| + \|A_{x_0}\|_{Sim(n)} + C_0 \leqslant M$ para todo $x_0 \in \Omega$ então $\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leqslant M$.

Exercício 3.1. Mostre que, se $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ para algum $\alpha \in (0,1)$, então u satisfaz (3.10) para toda bola $B_r(x_0) \Subset \Omega$.

Exercício 3.2. Assuma que $\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{2} z^T \cdot A \cdot z + \vec{b} \cdot x + c$ é uma polinômio quadrático satisfazendo $\|\mathfrak{p}\|_{L^\infty(B_r)} \leqslant \gamma$. Mostre que

$$\|A\|_{Sim(n)} \leqslant \frac{C \cdot \gamma}{r^2}, \quad \|\vec{b}\| \leqslant \frac{C \cdot \gamma}{r}, \quad |c| \leqslant C \cdot \gamma$$

para alguma constante $C = C(n) > 0$.

Observação 3.1. *É importante perceber que $\|u - \ell_{x_0}\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leqslant C_0 \cdot r$ implica uma estimativa $C^{0,1}$, não C^1. Da mesma forma, $\|u - \mathfrak{p}_{x_0}\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leqslant C_0 \cdot r^2$ implica uma estimativa $C^{1,1}$, não C^2. Ou seja, devemos tomar* $0 < \alpha < 1$.

Antes de enunciarmos o Teorema de Schauder, muitas vezes é mais fácil mostrar a regularidade Hölder produzindo sequências de polinômios que aproximam uma função u em torno de um ponto.

Proposição 3.2. *Seja $\rho_0 \in (0, 1/2)$. Assuma que, para todo $x_0 \in B_{1/2}$, exista uma sequência de polinômios quadráticos*

$$\mathfrak{p}_{x_0,k}(x) := \frac{1}{2}(x - x_0)^T \cdot A_{x_0,k} \cdot (x - x_0) + \vec{b}_{x_0,k} \cdot (x - x_0) + c_{x_0,k}$$

tais que

$$\|u - \mathfrak{p}_{x_0,k}\|_{L^\infty(B_{\rho_0^k}(x_0))} \leqslant C_0 \cdot \rho_0^{k(2+\alpha)}.$$

Então, $u \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$ com $\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leqslant \overline{D}$ para alguma constante $\overline{D} = \overline{D}(n, \alpha, \rho_0) > 0$.

Demonstração. Por translação, podemos assumir que $x_0 = 0$. Neste caso, denotaremos

$$\mathfrak{p}_{0,k}(x) = \mathfrak{p}_k(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot A \cdot x + \vec{b} \cdot x + c.$$

A ideia é mostrar que essa sequência de polinômios convirja para um polinômio quadráticos com as propriedades desejadas. Temos por hipótese que

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{p}_{k-1} - \mathfrak{p}_k\|_{L^\infty(B_{\rho_0^k}(x_0))} &\leqslant \|u - \mathfrak{p}_{k-1}\|_{L^\infty(B_{\rho_0^{k+1}}(x_0))} + \|u - \mathfrak{p}_k\|_{L^\infty(B_{\rho_0^k}(x_0))} \\ &\leqslant C \cdot C_0 \cdot \rho_0^{k(2+\alpha)}.\end{aligned}$$

Aplicando o Exercício 3.2 e limitação de $\mathfrak{p}_{k-1} - \mathfrak{p}_k$, deduzimos que

$$\begin{aligned}\|A_{k-1} - A_k\|_{Sim(n)} &\leqslant \overline{C}\rho_0^{k\alpha} \\ \|\vec{b}_{k-1} - \vec{b}_k\| &\leqslant \overline{C}\rho_0^{k(1+\alpha)} \\ |c_{k-1} - c_k| &\leqslant \overline{C}\rho_0^{k(2+\alpha)},\end{aligned}$$

em que $\overline{C} = C \cdot C_0$. Portanto, $\{A_k\} \subset Sim(n)$, $\{\vec{b}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$ são sequências de Cauchy (É importante perceber porque não podemos ter $\alpha = 0, 1$. Observe que para $\alpha = 0$, teríamos $\|A_{k-1} - A_k\|_{Sim(n)} \leqslant C \cdot C_0$, e a sequência $\{A_k\} \subset Sim(n)$ não seria de Cauchy. O caso para $\alpha = 1$ é deixado como exercício.) Considere os respectivos limites:

$$A_\infty : = \lim_{k\to+\infty} A_k, \quad \vec{b}_\infty : = \lim_{k\to+\infty} \vec{b}_k, \quad c_\infty : = \lim_{k\to+\infty} c_k.$$

Além disso, para todo $d \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|A_{k+d} - A_k\|_{Sim(n)} &\leqslant \sum_{j=1}^{d} \|A_{k+j} - A_{k+j+1}\|_{Sim(n)} \\
&\leqslant \overline{C}\left(\rho_0^{\alpha(k+d-1)} + \rho_0^{\alpha(k+d-2)} + \ldots + \rho_0^{\alpha k}\right) \\
&= \overline{C}\frac{\rho_0^{\alpha}(\rho_0^{\alpha})^{k-1}}{1-\rho_0^{\alpha}} \cdot (1 - \rho_0^{k\alpha}) \\
&\leqslant \overline{C}\frac{\rho_0^{\alpha k}}{1-\rho_0^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\|\vec{b}_{k+d} - \vec{b}_k\| \leqslant \overline{C} \cdot \frac{\rho_0^{(1+\alpha)k}}{1-\rho_0^{1+\alpha}} \quad \text{e} \quad |c_{k+d} - c_k| \leqslant \overline{C} \cdot \frac{\rho_0^{(2+\alpha)k}}{1-\rho_0^{2+\alpha}}$$

Daí, fazendo $d \to +\infty$, segue que

$$\|A_{\infty} - A_k\|_{Sim(n)} \leqslant \overline{C}\frac{\rho_0^{\alpha k}}{1-\rho_0^{\alpha}}, \ \|\vec{b}_{\infty} - \vec{b}_k\| \leqslant \overline{C} \cdot \frac{\rho_0^{(1+\alpha)k}}{1-\rho_0^{\alpha}}, \ |c_{\infty} - c_k| \leqslant \overline{C} \cdot \frac{\rho_0^{(2+\alpha)k}}{1-\rho_0^{\alpha}}$$

Finalmente, defina o polinômio quadrático

$$\mathfrak{p}_{\infty}(x) := \frac{1}{2}x^T \cdot A_{\infty} \cdot x + \vec{b}_{\infty} \cdot x + c_{\infty}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|u - \mathfrak{p}_{\infty}\|_{L^{\infty}(B_{\rho_0^k})} &\leqslant \|u - \mathfrak{p}_k\|_{L^{\infty}(B_{\rho_0^k})} + \|\mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_{\infty}\|_{L^{\infty}(B_{\rho_0^k})} \\
&\leqslant \overline{C}\rho_0^{k(2+\alpha)} + |c_k - c_{\infty}| + \rho_0^k\|\vec{b}_k - \vec{b}_{\infty}\| \\
&+ \rho^{2k}\|A_k - A_{\infty}\|_{Sim(n)} \\
&\leqslant \left(1 + \tfrac{3}{1-\rho_0^{\alpha}}\right) \cdot \overline{C}\rho_0^{k(2+\alpha)}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Vamos dividir em dois casos:

Caso 1: Dado $x \in B_{\rho_0}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho_0^{k+1} \leqslant \|x\| \leqslant \rho_0^k.$$

Daí

$$\begin{aligned}
|u(x) - \mathfrak{p}_\infty(x)| &\leqslant \left(1 + \frac{3}{1-\rho_0^\alpha}\right) \cdot \overline{C}\rho_0^{k(2+\alpha)} \\
&= \left(1 + \frac{3}{1-\rho_0^\alpha}\right) \cdot \overline{C}\frac{\rho_0^{k(2+\alpha)}}{\|x\|^{2+\alpha}} \cdot \|x\|^{2+\alpha} \\
&\leqslant \left(1 + \frac{3}{1-\rho_0^\alpha}\right) \cdot \overline{C}\frac{\rho_0^{k(2+\alpha)}}{(\rho_0^{k+1})^{2+\alpha}} \cdot \|x\|^{2+\alpha} \\
&\leqslant \left(1 + \frac{3}{1-\rho_0^\alpha}\right) \cdot \frac{\overline{C}}{\rho_0^{2+\alpha}} \cdot \|x\|^{2+\alpha} \\
&= D_1(n,\alpha,\rho_0) \cdot \|x\|^{2+\alpha}
\end{aligned}$$

em que $D_1(n,\alpha,\rho_0) :\,= \left(1 + \frac{3}{1-\rho_0^\alpha}\right) \cdot \frac{\overline{C}}{\rho_0^{2+\alpha}}$.

Caso 2: Se $\rho_0 \leqslant \|x\| \leqslant 1/2$ temos

$$\begin{aligned}
|u(x) - \mathfrak{p}_\infty(x)| &\leqslant \|u\|_{L^\infty(B_{1/2})} + \|\mathfrak{p}_\infty\|_{L^\infty(B_{1/2})} \\
&\leqslant 1 + \|A_\infty\|_{Sim(n)} + \|\vec{b}_\infty\| + |c_\infty| \\
&\leqslant 1 + 3\overline{C} = (1 + 3\overline{C}) \cdot \frac{\|x\|^{2+\alpha}}{\|x\|^{2+\alpha}} \\
&\leqslant (1 + 3\overline{C})\frac{1}{\rho_0^{2+\alpha}} \cdot \|x\|^{2+\alpha} \\
&= D_2(n,\alpha,\rho_0) \cdot \|x\|^{2+\alpha}
\end{aligned}$$

em que $D_2(n,\alpha,\rho_0) :\,= (1 + 3\overline{C})\frac{1}{\rho_0^{2+\alpha}}$. Aqui usamos o seguinte fato:

$$\begin{aligned}
\|A_k\|_{Sim(n)} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|A_j - A_{j-1}\|_{Sim(n)} &\leqslant \overline{C}\sum_{j=1}^{k}(\rho_0^\alpha)^{j-1} \\
\leqslant \overline{C}\sum_{j=0}^{k-1}(\rho_0^\alpha)^{j} &\leqslant \frac{\overline{C}}{1-\rho_0^\alpha}.
\end{aligned}$$

Fazendo $k \to +\infty$, temos que $\|A_\infty\|_{Sim(n)} \leqslant \frac{\overline{C}}{1-\rho_0^\alpha}$. De forma análoga, obtemos

$$\|\vec{b}_\infty\| \leqslant \frac{\overline{C}}{1-\rho_0^\alpha} \quad \text{e} \quad |c_\infty| \leqslant \frac{\overline{C}}{1-\rho_0^\alpha}.$$

Ou seja, vale a estimativa:

$$\|A_\infty\|_{Sim(n)} + \|\vec{b}_\infty\| + |c_\infty| \leqslant \frac{3\overline{C}}{1-\rho_0^\alpha}$$

Para finalizar, escolha $D(n,\alpha,\rho_0) := \max\{D_1, D_2\}$. Assim, para todo $r \in (0, 1/2)$

$$\|u - \mathfrak{p}_\infty\|_{L^\infty(B_r)} \leqslant D \cdot r^{2+\alpha}.$$

Segue que $u \in C^{2,\alpha}$ em $x_0 = 0$. □

Finalmente, podemos enunciar o Teorema de Schauder 3.1 da seguinte forma:

Teorema 3.2 (Schauder)**.** *Seja* $u \in C^2(B_1)$ *solução da Equação de Poisson* (3.6)*. Suponhamos que, para algum* $\alpha \in (0,1)$*,* f *seja* α*-Hölder contínua na origem com* $[f]_{C^{0,\alpha}(0)} < \infty$*. Então* $u \in C^{2,\alpha}$ *na origem. Mais precisamente, existe um polinômio quadrático*

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot \mathrm{A} \cdot x + \vec{b} \cdot x + \mathrm{c}$$

tal que $\Delta\mathfrak{p} = f(0)$ *e para alguma constante* $\mathrm{C}_0 = \mathrm{C}_0(n,\alpha)$*,*

$$|u(x) - \mathfrak{p}(x)| \leqslant \mathrm{C}_0 \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + [f]_{C^{0,\alpha}(0)} + |f(0)|\right) \cdot |x|^{2+\alpha}.$$

Além disso, os coeficientes do polinômio $\mathfrak{p}$ *estão sob controle universal:*

$$\|\mathrm{A}\| + |\vec{b}| + |\mathrm{c}| \leqslant \mathrm{C}_0 \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |f(0)| + [f]_{C^{0,\alpha}(0)}\right).$$

A estratégia da prova do Teorema de Schauder será baseada em um processo de iteração, o qual pode ser encontrado no seguinte Lema:

Lema 3.1. *Fixado* $\alpha \in (0,1)$*, existem constantes universais* $\mathrm{C}_0 > 0$*,* $0 < \rho_0(n,\alpha) < 1$ *e* $0 < \varepsilon_0(n,\alpha) < 1$ *tais que, para* $u \in C^2(B_1) \cap C^0(\overline{B_1})$ *satisfazendo* (3.6)*, com*

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1 \quad e \quad \|f\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \varepsilon_0,$$

então é possível encontrar um polinômio quadrático harmônico

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot \mathrm{A} \cdot x + \vec{b} \cdot x + \mathrm{c}$$

tal que

$$|u(x) - \mathfrak{p}(x)| \leqslant \rho_0^{2+\alpha} \quad \textit{para todo} \quad x \in B_{\rho_0}.$$

Além disso,

$$\|\mathrm{A}\|_{Sim(n)} + |\vec{b}|_\infty + |\mathrm{c}| \leqslant \mathrm{C}_0.$$

Demonstração. Considere $h : B_1 \to \mathbb{R}$ a solução para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h &= 0 \quad \text{em} \quad B_1 \\ h &= u \quad \text{sobre} \quad \partial B_1 \end{cases}$$

Dado que $h \in C^2(B_1) \cap C^0(B_1)$, podemos considerar o polinômio quadrático

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{2} x^T \cdot D^2 h(0) \cdot x + \nabla h(0) \cdot x + h(0).$$

Observe que $\Delta \mathfrak{p}(x) = 0$ em B_1. De fato, basta observa que

$$\Delta \left(\nabla h(0) \cdot x \right) = 0, \quad \Delta(h(0)) = 0$$

e

$$\begin{aligned} D_i \left(x^T \cdot D^2 h(0) \cdot x \right) &= D_i \left(D^2 h(0) x \cdot x \right) \\ &= D^2 h(0) e_i \cdot x + D^2 h(0) x \cdot e_i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_{ii} \left(\tfrac{1}{2} x^T \cdot D^2 h(0) \cdot x \right) &= D^2 h(0) e_i \cdot e_i + D^2 h(0) e_i \cdot e_i \\ &= 2 D_{ii} h(0). \end{aligned}$$

Portanto, $\Delta \mathfrak{p}(x) = \Delta h(0) = 0$.
Além disso, dado que $h = u$ em ∂B_1, segue que

$$\|h\|_{L^\infty(B_1)} = \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} \leqslant 1 \quad \text{em} \quad \partial B_1.$$

Portanto, pelo Princípio do Máximo Fraco, temos que $\|h\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1$. Assim, ao usarmos as estimativas das derivadas para funções harmônicas, concluímos que os coeficientes de $\mathfrak{p}$ estão uniformemente limitados em subdomínios compactos (uma vez que $\|h\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1$). Com efeito, temos que para todo multi-índice β com $|\beta| = k$ e $|x| \leqslant 1/2$

$$\begin{aligned} |D^\beta h(x)| &\leqslant \frac{2^{n+1} k}{|B_1|(1/2)^{n+k}} \|h\|_{L^1(B_{1/2}(x))} \\ &\leqslant \frac{2^{n+1} k}{|B_1|(1/2)^{n+k}} \cdot |B_1| \\ &= \mathrm{C}(n, k). \end{aligned}$$

Assim,

$$\|D^2 h(0)\|_{\mathrm{Sim}(n)} + \|\nabla h(0)\| + |h(0)| \leqslant \mathfrak{A}_0.$$

Agora afirmamos que existe uma constante universal $\mathrm{C}_0 \geqslant \mathfrak{A}_0$ tal que

$$|h(x) - \mathfrak{p}(x)| \leqslant \mathrm{C}_0 \|x\|^3, \quad \forall\, x \in B_{1/2}. \tag{3.12}$$

De fato, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, para cada $x \in B_{1/2}$, existe $\theta_x \in (0, 1)$ tal que

$$h(x) - \mathfrak{p}(x) = R_2(x) := \frac{1}{3!} D^2 h(\theta_x \cdot x) x^3.$$

Logo, usando as estimativas interiores para as derivadas,

$$
\begin{aligned}
|h(x)-\mathfrak{p}(x)| &= \left|\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial^3 h}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\theta_x \cdot x)x_i x_j x_k\right| \\
&\leqslant \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left|\frac{\partial^3 h}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\theta_x \cdot x)\right| \|x_i x_j x_k\| \\
&\leqslant \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{3n}{1/2}\right)^3 \|h\|_{L^\infty(B_1)}\|x\|^3 \\
&\leqslant \frac{1}{3!}(6n)^3 n^3 \mathfrak{A}_0 \|x\|^3 \\
&\leqslant \mathrm{C}_0\|x\|^3,
\end{aligned}
$$

em que $\|h\|_{L^\infty} \leqslant \mathfrak{A}_0$ e $\mathrm{C}_0 := \max\left\{\mathfrak{A}_0, \frac{1}{3!}(6n)^3 n^3\right\}$, o que prova (3.12). Logo, pelo Corolário 3.1, temos que

$$
\|u-h\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \frac{1}{2n}\|f\|_{L^\infty(B_1)}.
$$

Portanto, aplicando a desigualdade triangular,

$$
\begin{aligned}
|u(x)-\mathfrak{p}(x)| &\leqslant |u(x)-h(x)| + |h(x)-\mathfrak{p}(x)| \\
&\leqslant \frac{1}{2n}\|f\|_{L^\infty(B_1)} + \mathrm{C}_0\|x\|^3 \\
&\leqslant \frac{\varepsilon_0}{2n} + \mathrm{C}_0\|x\|^3, \quad \forall\ x \in B_{1/4}
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Agora observe que, fixado $\alpha \in (0,1)$, existe $\rho_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que

$$
\mathrm{C}_0\|x\|^3 \leqslant \frac{1}{2}\rho_0^{2+\alpha}, \quad \forall\, x \in B_{\rho_0}.
$$

De fato, como

$$
\mathrm{C}_0\|x\|^3 \leqslant \mathrm{C}_0\rho_0^3 = \mathrm{C}_0\rho_0^{1-\alpha}\rho_0^{2+\alpha},
$$

então basta escolher $\rho_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que $\mathrm{C}_0\rho_0^{1-\alpha} \leqslant \frac{1}{2}$, mais precisamente,

$$
\rho_0 := \min\left\{\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2\mathrm{C}_0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}.
$$

Com tal escolha de $\rho_0 > 0$, podemos selecionar $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tal que

$$
\frac{1}{2n}\varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{2}\rho_0^{2+\alpha},
$$

ou seja,

$$\varepsilon_0 := \min\left\{n\rho_0^{2+\alpha}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Com tais escolhas acima descritas, segue de (3.13) que

$$|u(x) - \mathfrak{p}(x)| \leqslant \frac{1}{2}\rho_0^{2+\alpha} + \frac{1}{2}\rho_0^{2+\alpha} = \rho_0^{2+\alpha}, \quad \forall\, x \in B_{\rho_0}.$$

□

O próximo resultado consiste em construir, de forma indutiva, uma sequência de polinômios quadráticos que convergirá para o polinômio procurado de modo que (3.10) seja válido.

Lema 3.2. *Nas hipóteses do Lema 3.1, existe sequência de polinômios harmônicos*

$$\mathfrak{p}_k(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot \mathrm{A}_k \cdot x + \vec{b}_k \cdot x + \mathrm{c}_k,$$

tais que

$$|u(x) - \mathfrak{p}_k(x)| \leqslant \rho_0^{(2+\alpha)k}, \quad \forall\, x \in B_{\rho_0^k}. \tag{3.14}$$

Além disso,

$$\begin{cases} \|\mathrm{A}_k - \mathrm{A}_{k-1}\|_{Sim(n)} & \leqslant & \mathrm{C}_0\rho_0^{(k-1)\alpha} \\ \|\vec{b}_k - \vec{b}_{k-1}\| & \leqslant & \mathrm{C}_0\rho_0^{(k-1)(1+\alpha)} \\ |\mathrm{c}_k - \mathrm{c}_{k-1}| & \leqslant & \mathrm{C}_0\rho_0^{(k-1)(2+\alpha)}. \end{cases} \tag{3.15}$$

Demonstração. Inicialmente observe que podemos supor, sem perda de generalidade, que $f(0) = 0$. De fato, caso contrário, defina

$$w(x) = u(x) - \frac{f(0)}{2n}\|x\|^2.$$

Assim

$$\Delta w(x) = f(x) - f(0) := g(x) \quad \text{em} \quad B_1.$$

Agora note que

$$g(0) = 0 \quad \text{e} \quad [g]_{C^{0,\alpha}(0)} \leqslant \varepsilon_0.$$

Além disso, observa-se que as estimativas obtidas para w são válidas para u. Vamos provar (3.14) e (3.15) por indução. Note que o caso $k = 1$ é precisamente o Lema 3.1. Prosseguindo por indução, suponha que tal afirmação seja verdadeira para $i = k$, e encontraremos um polinômio $\mathfrak{p}_{k+1}$ satisfazendo (3.14) e (3.15) para $i = k + 1$. Para esse fim, defina $v : B_1 \to \mathbb{R}$

$$v(x) := \frac{u(\rho_0^k x) - \mathfrak{p}_k(\rho_0^k x)}{\rho_0^{(2+\alpha)k}}.$$

Dado que $x \in B_1$, então $|\rho_0^k x| \leqslant \rho_0^k$. Assim, pela hipótese de indução,

$$|u(\rho_0^k x) - \mathfrak{p}_k(\rho_0^k x)| \leqslant \rho_0^{(2+\alpha)k} \quad \text{em} \quad B_1.$$

Logo $\|v\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1$. Além disso, visto que $|x| \leqslant 1$, então

$$\begin{aligned}\Delta v(x) &= \frac{\rho_0^{2k} \Delta u(\rho_0^k x) - \rho_0^{2k} \Delta \mathfrak{p}_k(\rho_0^k x)}{\rho_0^{(2+\alpha)k}} \\ &= \rho_0^{-\alpha k} f(\rho_0^k x) \\ &:= \widetilde{f}_k(x).\end{aligned}$$

Portanto, dado que $f(0) = 0$, então

$$\begin{aligned}|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)| &= \rho_0^{-\alpha k} |f(\rho_0^k x) - f(0)| \\ &\leqslant \rho_0^{-\alpha k} [f]_{C^{0,\alpha}(0)} |\rho_0^k x|^\alpha \\ &\leqslant [f]_{C^{0,\alpha}(0)} \|x\|^\alpha.\end{aligned}$$

Isto é,

$$[\widetilde{f}]_{C^{0,\alpha}(0)} = \sup_{\substack{x \in B_1 \\ x \neq 0}} \frac{|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)|}{\|x\|^\alpha} \leqslant [f]_{C^{0,\alpha}(0)} \leqslant \varepsilon_0.$$

Logo, v está sob hipóteses do Lema 3.1. Assim existe um polinômio quadrático harmônico da forma

$$\widetilde{\mathfrak{p}}(x) = \frac{1}{2} x^T \cdot \widetilde{\mathrm{A}} \cdot x + \overrightarrow{\widetilde{b}} \cdot x + \widetilde{\mathfrak{c}},$$

satisfazendo

$$\|\widetilde{\mathrm{A}}\|_{\mathrm{Sim}(n)} + \|\overrightarrow{\widetilde{b}}\| + |\widetilde{\mathfrak{c}}| \leqslant \mathrm{C}_0.$$

Além disso,

$$|v(x) - \widetilde{\mathfrak{p}}(x)| \leqslant \rho_0^{2+\alpha}, \quad \forall\ x \in B_{\rho_0}.$$

Agora, reescrevendo em termos de u, temos que

$$|u(\rho_0^k x) - \mathfrak{p}_k(\rho_0^k x) - \rho_0^{(2+\alpha)k} \mathfrak{p}(x)| \leqslant \rho_0^{(2+\alpha)(k+1)}, \quad \forall\ x \in B_{\rho_0},$$

i.e.,

$$\left| u(x) - \left(\mathfrak{p}_k(x) + \rho_0^{(2+\alpha)k} \widetilde{\mathfrak{p}}(\rho_0^{-k} x) \right) \right| \leqslant \rho_0^{(2+\alpha)(k+1)}, \quad x \in B_{\rho_0^{k+1}}.$$

Neste ponto, ao definirmos,

$$\mathfrak{p}_{k+1}(x) := \mathfrak{p}_k(x) + \rho_0^{(2+\alpha)k} \widetilde{\mathfrak{p}}(\rho_0^{-k} x),$$

então,

$$\mathrm{A}_{k+1} = A_k + \rho_0^{\alpha k}\widetilde{\mathrm{A}} \;\; \vec{b}_{k+1} = \vec{b}_k + \rho_0^{(1+\alpha)k}\overrightarrow{\widetilde{b}} \;\text{ e }\; \mathrm{c}_{k+1} = \mathrm{c}_k + \rho_0^{(2+\alpha)k}\widetilde{\mathrm{c}}.$$

Concluímos que existe polinômio harmônico $\mathfrak{p}_{k+1}$ satisfazendo:

$$|u(x) - \mathfrak{p}_{k+1}(x)| \leqslant \rho_0^{(2+\alpha)(k+1)}, \quad \forall\; x \in B_{\rho_0^{k+1}}$$

e

$$\begin{cases} \|\mathrm{A}_{k+1} - \mathrm{A}_k\|_{\mathrm{Sim}(n)} & \leqslant \;\; \mathrm{C}_0\rho_0^{\alpha k}, \\ \|\vec{b}_{k+1} - \vec{b}_k\| & \leqslant \;\; \mathrm{C}_0\rho_0^{(1+\alpha)k}, \\ |\mathrm{c}_{k+1} - \mathrm{c}_k| & \leqslant \;\; \mathrm{C}_0\rho_0^{(2+\alpha)k}, \end{cases}$$

o que encerra a prova do Lema. □

Finalmente estamos na posição de provarmos o Teorema de Schauder.

Prova do Teorema 3.2. Inicialmente vimos que sempre podemos supor que $f(0) = 0$. Além disso, podemos supor sem perda de generalidade que

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1 \quad \text{e} \quad [f]_{C^{0,\alpha}(0)} \leqslant \varepsilon_0,$$

sendo $\varepsilon_0 > 0$ como no Lema 3.1. De fato, seja $v(x) = \mathfrak{L}_0 \cdot u(x)$, onde

$$\mathfrak{L}_0 := \frac{\varepsilon_0}{[f]_{C^{0,\alpha}(0)} + \|u\|_{L^\infty(B_1)}}.$$

Assim

$$\Delta v(x) = \mathfrak{L}_0 f(x) := \tilde{f}(x) \quad \text{e} \quad \|v\|_{L^\infty(B_1)} = \mathfrak{L}_0\|u\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Segue daí que

$$\|v\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1 \quad \text{e} \quad [\tilde{f}]_{C^{0,\alpha}(0)} \leqslant \varepsilon_0.$$

Verifica-se que estimativas obtidas para v são traduzidas em estimativas para u. Agora, pelo Lema 3.2, existe uma sequência de polinômios quadráticos

$$\mathfrak{p}_k(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot \mathrm{A}_k \cdot x + \vec{b}_k \cdot x + \mathrm{c}_k \quad \text{com} \quad \Delta p_k = 0$$

satisfazendo (3.14) e (3.15). Portanto, aplicando a Proposição 3.2, segue que u é $C^{2,\alpha}(0)$. □

O próximo resultado mostra que estimativas pontuais implicam em estimativas locais como foi enunciado no Teorema 3.1.

Corolário 3.2. *Seja $u \in C^2(B_1)$ ua solução limitada para*

$$-\Delta u = f \quad em \quad B_1.$$

Assuma que $f \in C^\alpha(B_1)$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Então $u \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$ e

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leqslant C \cdot \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^\alpha(B_1)}\right)$$

para uma constante universal $C = C(n, \alpha) > 0$.

Demonstração. De fato, para cada $x_0 \in B_{1/2}$, defina $v : B_1 \to \mathbb{R}$ por

$$v(x) = 4 \cdot u\left(x_0 + \frac{1}{2}x\right).$$

Assim, $v \in C^2(B_1) \cap C^0(\overline{B_1})$ e satisfaz:

$$-\Delta v(x) = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Delta u(x_0 + rx) = f\left(x_0 + \frac{1}{2}x\right) := g(x).$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
[g]_{C^{0,\alpha}(0)} := \sup_{\substack{x \in B_1 \\ x \neq 0}} \frac{|g(x) - g(0)|}{\|x\|^\alpha} &= \sup_{\substack{x \in B_1 \\ x \neq 0}} \frac{|f\left(x_0 + \frac{1}{2}x\right) - f(x_0)}{\|x\|^\alpha} \\
&= \sup_{\substack{y \in B_r(x_0) \\ x \neq x_0}} \frac{\|f(y) - f(x_0)\|}{\|2(y - x_0}) \|^\alpha \\
&= \sup_{\substack{y \in B_r(x_0) \\ x \neq x_0}} \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \frac{|f(y) - f(x_0)|}{\|y - x_0\|^\alpha} \\
&= \tfrac{1}{2^\alpha}[f]_{C^{0,\alpha}(x_0)} < \infty.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 3.2, existe um polinômio quadrático

$$\tilde{\mathfrak{p}}(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot \mathrm{A} \cdot x + \overrightarrow{b} \cdot x + \mathrm{c},$$

com $\Delta \tilde{\mathfrak{p}} = g(0) = f(x_0)$, satisfazendo

$$|v(x) - \tilde{\mathfrak{p}}(x)| \leqslant \mathrm{C}_0 \left(\|v\|_{L^\infty(B_1)} + [g]_{C^{0,\alpha}(0)} + |g(0)|\right) \cdot \|x\|^{2+\alpha}, \quad \text{para } \|x\| \leqslant \frac{1}{2}$$

e

$$\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{Sim}(n)} + \|\overrightarrow{b}\| + |\mathrm{c}| \leqslant \mathrm{C}_0 \cdot \left(\|v\|_{L^\infty(B_1)} + [g]_{C^\alpha(0)} + |g(0)|\right)$$

Assim, usando a definição de v, obtemos para $\|x\| \leqslant \frac{1}{2}$

$$\left|4 \cdot u\left(x_0 + \frac{1}{2}x\right) - \widetilde{\mathfrak{p}}(x)\right| \leqslant \mathrm{C}_0\left(\|u\|_{L^\infty(B_{1/2}(x_0))} + \frac{1}{2^\alpha}[f]_{C^\alpha(x_0)} + |f(x_0)|\right) \cdot \|x\|^{2+\alpha}$$

ou equivalentemente, para $\|y - x_0\| \leqslant \frac{1}{4}$

$$|4 \cdot u(y) - \widetilde{\mathfrak{p}}\,(2(y - x_0))| \leqslant$$
$$2^\alpha \cdot \mathrm{C}_0\left(\|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + \frac{1}{2^\alpha}[f]_{C^{0,\alpha}(x_0)} + |f(x_0)|\right) \cdot |y - x_0|^{2+\alpha}.$$

Logo, ao definirmos o polinômio quadrático

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}(y) :&= \frac{1}{4}\widetilde{\mathfrak{p}}\,(2(y - x_0)) \\ &= \frac{1}{2}(y - x_0)^T \cdot A \cdot (y - x_0) + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot (y - x_0) + \frac{1}{4}c,\end{aligned}$$

então, para todo $y \in B_{\frac{1}{4}}(x_0)$ obtém-se que

$$\begin{aligned}|u(y) - \mathfrak{p}(y)| &\leqslant 2^\alpha \cdot \mathrm{C}_0\left(\|u\|_{L^\infty(B_{1/2}(x_0))} + \frac{1}{2^\alpha}[f]_{C^{0,\alpha}(x_0)} + |f(x_0)|\right) \cdot \|y - x_0\|^{2+\alpha}, \\ &\leqslant \mathrm{C} \cdot \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + [f]_{C^{0,\alpha}(x_0)} + |f(x_0)|\right) \cdot \|y - x_0\|^{2+\alpha}\end{aligned}$$

ou seja, $u \in C^{2,\alpha}(x_0)$, como desejávamos estabelecer. □

3.4 Teorema de Schauder via o Método de Energia

Nesta seção, estamos interessados na versão L^2 do Teorema de Schauder visto na seção anterior. Para obtermos a estimativa de Schauder no sentido L^2, veremos um resultado de aproximação por funções harmônicas para soluções fracas de $-\Delta u = f$, no contexto do Corolário 3.1 da seção anterior. Para este fim usaremos a chamada *Desigualdade de Caccioppoli* para soluções fracas, veja Lema 3.3. A grande vantagem do método de compacidade é a sua potencial aplicação em equações não lineares.

A demonstração do Teorema de Schauder seguirá os mesmos passos do Teorema da seção anterior. Lembramos aqui a definição de solução fraca.

Definição 3.4. Uma função $u \in H^1(B_1)$ é solução fraca para

$$-\Delta u = f(x) \quad \text{em} \quad B_1$$

com $f \in L^2(B_1)$ se

$$\int_{B_1} \nabla u \cdot \nabla \psi dx = \int_{B_1} f(x)\psi(x)dx$$

para toda $\psi \in H^1_0(B_1)$.

Uma outra definição importante que usaremos, nesta seção, é a seguinte:

Definição 3.5 (α-Hölder contínua no sentido L^2)**.** Seja $f : B_1 \to \mathbb{R}$ função, com $f \in L^2(B_1)$, e seja $\alpha \in (0,1)$. Dizemos que f é α-Hölder contínua na origem no sentido L^2 se

$$[f]_{C^{0,\alpha}_{L^2}(0)} := \sup_{0<r\leqslant 1} \frac{1}{r^\alpha} \left(\fint_{B_r} |f(x) - f_{B_r}|^2 dx \right)^{1/2} < +\infty,$$

em que $f_{B_r} : \ = \fint_{B_r} f(x)dx$.

O resultado principal desta seção é provar o seguinte Teorema:

Teorema 3.3 (Versão L^2 do Teorema de Schauder)**.** *Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca de*

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad em \quad B_1.$$

Suponha que f é α-Hölder contínua na origem no sentido L^2. Então existe um polinômio quadrático

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{2} x^T \cdot \mathrm{A} \cdot x + \vec{b} \cdot x + \mathrm{c}$$

com $\Delta \mathfrak{p} = f(0)$ e

$$\|\mathrm{A}\|_{Sim(n)} + \|\vec{b}\| + |\mathrm{c}| \leqslant \mathrm{C}_0 \left(|f(0)| + [f]_{C^{0,\alpha}_{L^2}(0)} + \|u\|_{L^2(B_1)} \right)$$

tal que

$$\fint_{B_r} |u(x) - \mathfrak{p}(x)|^2 dx \leqslant \mathrm{C}_0 \left(|f(0)| + [f]_{C^{0,\alpha}_{L^2}(0)} + \|u\|_{L^2(B_1)} \right) r^{2(2+\alpha)}$$

Observação 3.2. *Pelo Teorema anterior e pelo Mergulho de Dini–Campanato, concluímos que u é $C^{2,\alpha}$ na origem na seminorma H^1,*

$$\||u|\|_{2,2,2+\alpha} := \inf_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_2} \sup_{0<r\leqslant 1} \frac{1}{r^{1+\alpha}} \left(\fint_{B_r} |u(x) - \mathfrak{p}(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty$$

sendo $\mathfrak{P}_2$ tomado sobre todos polinômios de segunda ordem, veja Teorema 1.13. Além disso, os coeficientes de $\mathfrak{p}$ e $[u]_{H_0^{1,2+\alpha}(0)}$ são limitados por $[f]_{\mathfrak{L}^{2,\alpha}(0)}$ e $\|u\|_{L^2(B_1)}$ com a seguinte estimativa

$$\||u|\|_{2,2,2+\alpha} \leqslant C_0 \left(|f(0)| + [f]_{C^{0,\alpha}_{L^2}(0)} + \|u\|_{L^2(B_1)} \right)$$

sendo $\mathrm{C}_0 = \mathrm{C}_0(n, \alpha) > 0$.

A prova desse resultado baseia-se na seguinte desigualdade fundamental:

Lema 3.3 (Estimativa de Caccioppoli)**.** *Suponha que $u \in H^1(B_1)$ seja uma solução fraca de*

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad em \quad B_1.$$

Então, para qualquer função $\psi \in C_0^\infty(B_1)$, temos

$$\int_{B_1} \psi^2 |\nabla u|^2 dx \leqslant \int_{B_1} \psi^2 f^2 dx + \int_{B_1} \left(4|\nabla \psi|^2 + \psi^2\right) u^2 dx.$$

Demonstração. Seja $\phi = \psi^2 u \in H_0^1(B_1)$, a qual servirá de função teste. Usando a definição de solução fraca, temos que

$$\int_{B_1} \nabla u \cdot \nabla(\psi^2 u) dx = \int_{B_1} f(x)\psi^2 u dx.$$

Como $\nabla(\psi^2 u) = \psi^2 \nabla u + 2\psi u \nabla \psi$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \psi^2 |\nabla u|^2 dx &= \int_{B_1} f(x)\psi^2 u dx - \int_{B_1} 2\psi u \nabla u \cdot D\psi dx \\ &\leqslant \int_{B_1} |f|\psi^2 |u| dx + 2\int_{B_1} |\psi||u||\nabla u||\nabla \psi| dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{B_1} f^2 \psi^2 dx + \frac{1}{2}\int_{B_1} u^2 \psi^2 dx \\ &+ \int_{B_1} 2|\nabla \psi|^2 u^2 dx + \frac{1}{2}\int_{B_1} \psi^2 |\nabla u|^2 dx \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{B_1} \psi^2 |\nabla u|^2 dx \leqslant \int_{B_1} \psi^2 f^2 dx + \int_{B_1} \left(4|\nabla \psi|^2 + \psi^2\right) u^2 dx.$$

□

A seguir, introduziremos um resultado chave que nos permitirá aproximar (no sentido L^2) soluções fracas da Equação de Poisson por perfis harmônicos (em subdomínios compactos) sob hipóteses de normalização das soluções e controle universal da norma $\|f\|_{L^2(B_1)}$.

Lema 3.4 (Lema de Compacidade)**.** *Para cada $\delta > 0$ dado, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para toda solução fraca de*

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad em \quad B_1$$

com

$$⨍_{B_1} u^2 dx \leqslant 1 \quad e \quad ⨍_{B_1} f^2 dx \leqslant \epsilon_0^2$$

existe uma função $h : B_{1/2} \to \mathbb{R}$ *satisfazendo*

$$\Delta h = 0 \quad em \quad B_{1/2},$$

tal que

$$\int_{B_{1/2}} |u - h|^2 dx \leqslant \delta^2.$$

Demonstração. Suponha, por propósito de contradição, que exista $\delta_0 > 0$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existam $u_k \in H_0^1(B_1)$, f_k satisfazendo

$$-\Delta u_k = f_k \quad \text{em} \quad B_1$$

com

$$⨍_{B_1} u_k^2 dx \leqslant 1 \quad \text{e} \quad ⨍_{B_1} f_k^2 dx \leqslant \frac{1}{k}$$

porém

$$\int_{B_{1/2}} |u_k - \mathfrak{h}|^2 dx \geqslant \delta_0^2 \tag{3.16}$$

para toda $\mathfrak{h} : B_{1/2} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $\Delta\mathfrak{h} = 0$ em $B_{1/2}$.

Pelo Lema 3.3, a sequência $\{u_k\}_{k\geqslant 1}$ é limitada em $H^1(B_{1/2})$. De fato, considere $\psi \in C_0^\infty(B_1)$ tal que $\psi \equiv 1$ em $B_{1/2}$. Pelo Lema 3.3,

$$\begin{aligned}
\int_{B_{1/2}} |\nabla u_k|^2 dx &= \int_{B_{1/2}} \psi^2 |\nabla u_k|^2 dx \\
&\leqslant \int_{B_1} \psi^2 |\nabla u_k|^2 dx \\
&\leqslant \int_{B_1} \psi^2 f_k^2 dx + \int_{B_1} (4|\nabla\psi|^2 + \psi^2) u_k^2 dx \\
&\leqslant \mathrm{M}_0 \left(\int_{B_1} f_k^2 dx + \int_{B_1} u_k^2 dx \right) \\
&\leqslant \mathrm{M}_0 \left(\frac{|B_1|}{k} + |B_1| \right) \\
&\leqslant 2\mathrm{M}_0 |B_1|,
\end{aligned}$$

para todo $k \geqslant 1$, onde temos usado que

$$\mathrm{M}_0 = \max_{B_1} \left\{ \psi^2, 4|\nabla\psi|^2 + \psi^2 \right\}.$$

Além disso, como

$$\|u_k\|_{L^2(B_{1/2})} \leqslant \|u_k\|_{L^2(B_1)} \leqslant |B_1|^{1/2},$$

segue que

$$\|u_k\|^2_{H^1(B_{1/2})} := \|u_k\|^2_{L^2(B_{1/2})} + \|\nabla u_k\|^2_{L^2(B_{1/2})} \leqslant (2\mathrm{M}_0 + 1)|B_1|.$$

Isto é, $\{u_k\}_{k\geqslant 1}$ é limitada no espaço de Hilbert $H^1(B_{1/2})$ com seu produto interno usual,

$$\langle u, \phi \rangle_{H^1(B_{1/2})} = \int_{B_{1/2}} (u \cdot \phi + \nabla u \cdot \nabla \phi) \,.$$

Sabendo que toda sequência limitada em espaços de Hilbert convergem na topologia fraca (a menos de subsequência), podemos supor (passando a uma subsequência se necessário) que

$$u_k \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad H^1(B_{1/2}).$$

Por outro lado, usando a imersão compacta $H^1(B_{1/2}) \hookrightarrow L^2(B_{1/2})$, segue que $u_k \to u_0$ em $L^2(B_{1/2})$. Logo

$$\begin{aligned}
\int_{B_{1/2}} \nabla u_0 \cdot \nabla \phi dx &= \lim_{k\to\infty} \int_{B_{1/2}} \nabla u_k \cdot \nabla \phi dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(- \int_{B_{1/2}} f_k(x) \phi dx \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

uma vez que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_{1/2}} f_k(x) \phi dx \right| &\leqslant \|\phi\|_{L^2(B_{1/2})} \|f_k\|_{L^2(B_{1/2})} \\
&\leqslant \frac{\sqrt{|B_1|}}{k} \|\phi\|_{L^2(B_{1/2})} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty.
\end{aligned}$$

Concluímos que u_0 é solução fraca para $\Delta u_0 = 0$ em $B_{1/2}$. Por outro lado, tomando $\mathfrak{h} = u_0$ em (3.16), obtemos uma contradição. □

O próximo resultado será utilizado na prova da versão L^2 como o primeiro passo de um processo de indução.

Lema 3.5 (Lema central)**.** *Fixado o expoente* $\alpha \in (0,1)$*, existem constantes universais* $\mathrm{C}_0 > 0$*,* $0 < \rho_0 \leqslant \frac{1}{2}$ *e* $\epsilon_0 > 0$ *tais que, para toda solução fraca* $u \in H^1(B_1)$ *para*

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad em \quad B_1$$

satisfazendo

$$\fint_{B_1} u^2 dx \leqslant 1 \quad e \quad \fint_{B_1} f^2 dx \leqslant \epsilon_0,$$

então é possível obter um polinômio quadrático harmônico

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot A \cdot x + \vec{b} \cdot x + c,$$

com

$$\|\mathrm{A}\|_{Sim(n)} + \|\vec{b}\| + |\mathrm{c}| \leqslant \mathrm{C}_0$$

e

$$\fint_{B_{\rho_0}} |u(x) - \mathfrak{p}(x)|^2 dx \leqslant \rho_0^{2(2+\alpha)}.$$

Demonstração. Tome $\delta \in (0, 1)$ que será escolhido a posteriori. Pelo *Lema de compacidade* 3.4, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que se

$$\fint_{B_1} u^2 dx \leqslant 1 \quad \text{e} \quad \fint_{B_1} f^2 dx \leqslant \epsilon_0^2$$

então existe $h : B_{1/2} \to \mathbb{R}$ com $\Delta h = 0$ em $B_{1/2}$ tal que

$$\fint_{B_{1/2}} |u(x) - h(x)|^2 dx \leqslant \delta^2.$$

Agora, dado que $\|u - h\|_{L^2(B_{1/2})} \leqslant \delta |B_1|^{1/2}$, segue que

$$\begin{array}{rcl} \|h\|_{L^2(B_{1/2})} & \leqslant & \delta|B_1|^{1/2} + \|u\|_{L^2(B_1)} \\ & \leqslant & |B_1|^{1/2} + |B_1|^{1/2} \\ & = & 2|B_1|^{1/2} := \mathrm{M}. \end{array}$$

Pelas estimativas interiores para perfis harmônicos, temos que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \|D^2 h(0)\| & \leqslant & C_1(n) \cdot \|h\|_{L^1(B_{1/2})}, \\ \|Dh(0)\| & \leqslant & C_2(n) \cdot \|h\|_{L^1(B_{1/2})} \\ |h(0)| & \leqslant & C_3(n) \cdot \|h\|_{L^1(B_{1/2})}. \end{array} \right.$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\|h\|_{L^1(B_{1/2})} \leqslant |B_1|^{1/2} \|h\|_{L^2(B_{1/2})} \leqslant |B_1| \cdot \|h\|_{L^2(B_{1/2})}.$$

Portanto, garantimos a existência de uma constante universal $\mathfrak{A}_0 > 0$ tal que

$$\|D^2 h(0)\| + |Dh(0)| + |h(0)| \leqslant \mathfrak{A}_0.$$

Neste ponto, podemos definir

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot D^2 h(0) \cdot x + Dh(0) \cdot x + h(0).$$

Pelo mesmo argumento empregado em (3.12), existe uma constante universal $C_0 \geqslant \mathfrak{A}_0$ tal que

$$|h(x) - \mathfrak{p}(x)| \leqslant C_0 \|x\|^3, \quad \forall\, x \in B_{1/2}.$$

Fixado um raio $0 < \rho_0 \leqslant 1/2$ (a ser escolhido a seguir), temos:

$$\begin{aligned}
\fint_{B_{\rho_0}} |u(x) - \mathfrak{p}(x)|^2 dx &\leqslant 2\fint_{B_{\rho_0}} \left(|u-h|^2 + |h-\mathfrak{p}|^2\right) dx \\
&\leqslant \frac{2\delta}{|B_{\rho_0}|} + 2\fint_{B_{\rho_0}} C_0^2 (\|x\|^3)^2 dx \\
&= \frac{2\delta}{\rho_0^n |B_1|} + 2C_0^2 \fint_{B_{\rho_0}} \|x\|^6 dx \\
&= \tfrac{2\delta}{\rho_0^n |B_1|} + \tfrac{2C_0^2}{|B_{\rho_0}|} \rho_0^6 |B_{\rho_0}| \\
&= \tfrac{2\delta}{\rho_0^n |B_1|} + 2C_0^2 \rho_0^6.
\end{aligned}$$

Portanto, para obtermos o resultado esperado, é suficiente que

$$2C_0^2 \rho_0^6 \leqslant \frac{1}{2}\rho_0^{2(2+\alpha)} \quad \text{e} \quad \frac{2\delta}{|B_{\rho_0}|} \leqslant \frac{1}{2}\rho_0^{2(2+\alpha)}.$$

Com tais escolhas, obtemos que

$$\begin{aligned}
\fint_{B_{\rho_0}} |u(x) - \mathfrak{p}(x)|^2 dx &\leqslant \tfrac{1}{2}\rho_0^{2(2+\alpha)} + \tfrac{1}{2}\rho_0^{2(2+\alpha)} \\
&= \rho_0^{2(2+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Portanto pedimos as seguintes condições

$$\rho_0 \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \rho_0^{6-2(2+\alpha)} \leqslant \frac{1}{4C_0^2},$$

ou seja, devemos escolher

$$\rho_0 := \min\left\{\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{4C_0^2}\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\right\} \quad \text{e} \quad \delta = \frac{|B_1|}{4}\left(\frac{1}{4C_0^2}\right)^{\frac{n+4+2\alpha}{2+\alpha}}.$$

□

Lema 3.6. *Sob as hipóteses do Lema anterior, existe uma sequência de polinômios quadráticos*

$$\mathfrak{p}_k(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot A_k \cdot x + \vec{b}_k \cdot x + c_k$$

satisfazendo $\Delta \mathfrak{p}_k = f(0)$ *e*

$$\|\mathrm{A}_k - \mathrm{A}_{k-1}\|_{Sim(n)} \leqslant \mathrm{C}_0 \rho_0^{(k-1)\alpha} \tag{3.17}$$

$$\|\vec{b}_k - \vec{b}_{k-1}\| \leqslant \mathrm{C}_0 \rho_0^{(k-1)(1+\alpha)} \tag{3.18}$$

$$|\mathrm{c}_k - \mathrm{c}_{k-1}| \leqslant \mathrm{C}_0 \rho_0^{(k-1)(2+\alpha)} \tag{3.19}$$

tais que

$$⨍_{B_{\rho_0^k}} |u(x) - \mathfrak{p}_k(x)|^2 dx \leqslant \rho_0^{2k(2+\alpha)}. \tag{3.20}$$

Demonstração. A prova será feita via indução matemática. Note que o caso $k = 1$ é exatamente o Lema 3.5. De fato, neste caso

$$\mathfrak{p}_1(x) = \frac{1}{2} x^T \cdot \mathrm{A}_1 \cdot x + \vec{b}_1 \cdot x + \mathrm{c}_1$$

e, ao assumirmos que $\|\mathrm{A}_0\|_{\mathrm{Sim}(n)} = \|\vec{b}_0\| = |c_0| = 0$,

$$\begin{cases} \|\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_0\| = \|\mathrm{A}_1\| & \leqslant & \mathrm{C}_0 \rho_0^{\alpha(1-1)} = \mathrm{C}_0 \\ |\vec{b}_1 - \vec{b}_0| & \leqslant & \mathrm{C}_0 \rho_0^{(1+\alpha)(1-1)} = \mathrm{C}_0 \\ |\mathrm{c}_1 - \mathrm{c}_0| & \leqslant & \mathrm{C}_0 \rho_0^{(2+\alpha)(1-1)} = \mathrm{C}_0. \end{cases}$$

Suponha que o resultado seja válido para $j = k$. Provaremos a validade para $j = k + 1$. Para tanto, defina $v : B_1 \to \mathbb{R}$

$$v(x) = \frac{(u - \mathfrak{p}_k)(\rho_0^k x)}{\rho_0^{(2+\alpha)k}}.$$

Primeiramente notemos que

i)

$$\begin{aligned} ⨍_{B_1} v^2 dx &= \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} \frac{|(u - p_k)(\rho_0^k x)|^2}{\rho_0^{2(2+\alpha)k}} dx \\ &= \frac{1}{|B_1|} \int_{B_{\rho_0^k}} \frac{|(u - p_k)(x)|^2}{\rho_0^{2(2+\alpha)k}} \frac{dx}{\rho_0^{nk}} \\ &= ⨍_{B_{\rho_0^k}} \frac{|u(x) - p_k(x)|^2}{\rho_0^{2(2+\alpha)k}} dx \leqslant 1. \end{aligned}$$

ii) Observe que a função $v : B_1 \to \mathbb{R}$ satisfaz:

$$\Delta v(x) = \frac{f(\rho_0^k x)}{\rho_0^{\alpha k}} := g(x).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\fint_{B_1} g^2 dx &= \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} \frac{f(\rho_0^k x)^2}{\rho_0^{2k\alpha}} dx \\
&= \frac{1}{|B_1|}\int_{B_{\rho_0^k}} \frac{f(x)^2}{\rho_0^{2\alpha k}} \frac{dx}{\rho_0^{kn}} \\
&= \fint_{B_{\rho_0^k}} \frac{f(x)^2}{\rho_0^{2\alpha k}} dx \\
&= \frac{1}{(\rho_0^k)^{2\alpha}} \fint_{B_{\rho_0^k}} f(x)^2 dx \\
&\leqslant \epsilon_0^2.
\end{aligned}$$

Portanto, podemos aplicar o Lema 3.5. Assim, existe um polinômio harmônico

$$\widetilde{\mathfrak{p}}(x) = \frac{1}{2} x^T \cdot \widetilde{\mathrm{A}} \cdot x + \tilde{\vec{b}} \cdot x + \widetilde{\mathfrak{c}}$$

com

$$\|\widetilde{\mathrm{A}}\|_{\mathrm{Sim}(n)} + |\tilde{\vec{b}}| + |\widetilde{\mathfrak{c}}| \leqslant \mathfrak{A}_0$$

tal que

$$\fint_{B_{\rho_0}} \left| \frac{|(u - \mathfrak{p}_k)(\rho_0^k x)|^2}{\rho_0^{(2+\alpha)k}} - \widetilde{\mathfrak{p}}(x) \right| dx \leqslant \rho_0^{2(2+\alpha)},$$

ou seja,

$$\fint_{B_{\rho_0^{k+1}}} |u(x) - \mathfrak{p}_{k+1}(x)|^2 dx \leqslant \rho_0^{2(k+1)(2+\alpha)},$$

onde consideramos

$$\mathfrak{p}_{k+1}(x) = \mathfrak{p}_k(x) + \rho_0^{(2+\alpha)k} \widetilde{\mathfrak{p}}(\rho_0^{-k} x).$$

Além disso,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{A}_{k+1} &=& \mathrm{A}_k + \rho_0^{\alpha k} \widetilde{\mathrm{A}} \\ \vec{b}_{k+1} &=& \vec{b}_k + \rho_0^{(1+\alpha)k} \tilde{\vec{b}} \\ \mathfrak{c}_{k+1} &=& \mathfrak{c}_k + \rho_0^{(2+\alpha)k} \widetilde{\mathfrak{c}}. \end{array} \right. \tag{3.21}$$

Assim segue de (3.21) que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \|\mathrm{A}_{k+1} - \mathrm{A}_k\| &\leqslant& \mathrm{C}_0 \rho_0^{\alpha k} \\ \|\vec{b}_{k+1} - \vec{b}_k\| &\leqslant& \mathrm{C}_0 \rho_0^{(1+\alpha)k} \\ |\mathfrak{c}_{k+1} - \mathfrak{c}_k| &\leqslant& \mathrm{C}_0 \rho_0^{(2+\alpha)k}, \end{array} \right.$$

como queríamos demonstrar. □

Finalmente estamos em uma posição de provar o Teorema Principal.

Prova do Teorema Principal. Inicialmente podemos supor, sem perda de generalidade, para $\epsilon_0 > 0$, como no Lema 3.5, que

$$f(0) = 0, \quad [f]_{C^{0,\alpha}_{L^2}(0)} \leqslant \epsilon_0 \quad \text{e} \quad \fint_{B_1} u^2 dx \leqslant 1.$$

De fato,

i) Suponha que $-\Delta u(x) = f(x)$ em B_1, no sentido fraco. Então, defina

$$v(x) = u(x) - \frac{f(0)}{2n}|x|^2.$$

Segue que v é uma solução fraca para

$$-\Delta v(x) = f(x) - f(0) := g(x) \quad \text{em} \quad B_1.$$

Logo, $g(0) = 0$ e estimativas de regularidades obtidas para v , são automaticamente transportadas para u.

ii) Para $\mathfrak{L}_0 = \dfrac{1}{\frac{1}{\epsilon_0}[f]_{C^{0,\alpha}L^2(0)} + \sqrt{\fint_{B_1} u^2 dx}}$, defina

$$v(x) = \mathfrak{L}_0 u(x).$$

Assim v é solução fraca para $-\Delta v(x) = \mathfrak{L}_0 \cdot f(x) := g(x)$ em B_1, satisfazendo

$$[g]_{C^{0,\alpha}_{L^2}(0)} \leqslant \epsilon_0 \quad \text{e} \quad \fint_{B_1} g^2(x) dx \leqslant 1.$$

Além disso, todas as estimativas provadas para v são transportadas para u.

Dado que podemos supor que

$$\fint_{B_1} u^2(x) dx \leqslant 1 \quad \text{e} \quad [f]_{C^{0,\alpha}_{L^2}(0)} \leqslant \epsilon_0,$$

então, dado que $f(0) = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{B_1} f^2(x) dx\right)^{1/2} &= \left(\fint_{B_1} |f(x) - f(0)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leqslant \sup_{0<r\leqslant 1} \frac{1}{r^\alpha} \left(\fint_{B_r} |f(x) - f(0)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= [f]_{C^{0,\alpha}_{L^2}(0)} \leqslant \epsilon_0,
\end{aligned}$$

Portanto podemos aplicar o Lema 3.6 para garantir a existência de uma sequência de polinômios

$$\mathfrak{p}_k(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot \mathrm{A}_k \cdot x + \vec{b}_k \cdot x + \mathrm{c}_k,$$

satisfazendo (3.17)-(3.19) e (3.20). Segue que $\{\mathrm{A}_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathrm{Sim}(n)$, $\{\vec{b}_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathbb{R}^n$ e $\{\mathrm{c}_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$ são sequências de Cauchy e, portanto, convergentes. Assim consideremos

$$\mathrm{A}_\infty := \lim_{k\to\infty} \mathrm{A}_k, \quad \vec{b}_\infty := \lim_{k\to\infty} \vec{b}_k \quad \text{e} \quad \mathrm{c}_\infty := \lim_{k\to\infty} \mathrm{c}_k.$$

Podemos, também, considerar o polinômio

$$\mathfrak{p}_\infty(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot \mathrm{A}_\infty \cdot x + \vec{b}_\infty \cdot x + \mathrm{c}_\infty.$$

Dessa forma, utilizando o mesmo raciocínio feito em (3.11), obtemos a estimativa

$$|\mathfrak{p}_k(x) - \mathfrak{p}_\infty(x)| \leqslant \mathrm{C}\rho_0^{(2+\alpha)k} \quad \text{em} \quad B_{\rho_0^k},$$

em que $\mathrm{C} = \frac{3\mathrm{C}_0}{1-\rho_0^\alpha}$. Para finalizar, fixado $0 < r \leqslant \rho_0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho_0^{k+1} < r \leqslant \rho_0^k.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\fint_{B_r} |u(x) - \mathfrak{p}_\infty(x)|^2 dx &\leqslant 2\left(\fint_{B_r} |u - \mathfrak{p}_k|^2 dx + \fint_{B_r} |\mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_\infty|^2 dx\right) \\
&\leqslant \frac{2}{|B_r|}\left(\int_{B_{\rho_0^k}} |u - \mathfrak{p}_k|^2 dx + \int_{B_r} \mathrm{C}^2\rho_0^{2k(2+\alpha)} dx\right) \\
&\leqslant 2\left(\frac{|B_{\rho_0^k}|}{|B_{\rho_0^{k+1}}|}\rho_0^{2k(2+\alpha)} + \mathrm{C}^2\rho_0^{2k(2+\alpha)}\right) \\
&= 2\rho_0^{2k(2+\alpha)}\left[\frac{(\rho_0^k)^n}{(\rho_0^{k+1})^n} + \mathrm{C}^2\right] \\
&= 2\left(\frac{1}{\rho_0^n} + \mathrm{C}^2\right)\rho_0^{2k(2+\alpha)} \\
&= 2\left(\frac{1}{\rho_0^n} + \mathrm{C}^2\right)\frac{\rho_0^{2(k+1)(2+\alpha)}}{\rho^{2(2+\alpha)}} \\
&\leqslant \mathrm{C}_1^2 r^{2(2+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Além disso, quando $\rho_0 \leqslant r \leqslant 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\fint_{B_r} |u(x) - \mathfrak{p}(x)|^2 dx &\leqslant \frac{2}{r^n|B_1|}|B_1| + \frac{2}{r^n|B_1|}(\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{Sim}(n)} + \|\overrightarrow{b}\| + |\mathrm{c}|)^2 \int_{B_1} 1.dx \\
&\leqslant \tfrac{2}{r^n} + \tfrac{2}{r^n} \cdot \mathrm{C}^2 \\
&\leqslant \tfrac{2}{\rho_0^n} + \tfrac{2}{\rho_0^n} \cdot \mathrm{C}^2 \\
&\leqslant \tfrac{2}{\rho_0^n}(1 + \mathrm{C}^2) \cdot \tfrac{r^{2(2+\alpha)}}{r^{2(2+\alpha)}} \\
&\leqslant \frac{2(1+\mathrm{C}^2)}{\rho_0^n \cdot \rho_0^{2(2+\alpha)}} \cdot r^{2(2+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Portanto, tomando

$$\mathrm{C}_0 = \max\left\{\mathrm{C}_1^2, \frac{2(1+\mathrm{C}^2)}{\rho_0^n \cdot \rho_0^{2(2+\alpha)}}\right\}$$

concluímos que, para $r \in (0, 1]$, tem-se

$$\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}} \fint_{B_r} |u(x) - \mathfrak{p}_\infty(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{\mathrm{C}_0}.$$

como queríamos demonstrar.

A estimativa Hölder para as segundas derivadas de u seguirá pelo Mergulho de Dini–Campanato (Teorema 1.13).

□

Exercício 3.3. Seja $u \in L^2(B_1)$ uma função α-Hölder contínua no sentido L^2, isto é,

$$\int_{B_r(x)} |u(z) - f_{B_r(x)}|^2 dz \leqslant \mathrm{C}^2 r^{n+2\alpha} \quad \text{para toda} \quad B_r(x) \subset B_1.$$

Mostre que $u \in C^{0,\alpha}(B_1)$ e para todo subconjunto $K \Subset B_1$ vale

$$\sup_K |u| + \sup_{\substack{x,y \in K \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant c\left\{C + \|u\|_{L^2(B_1)}\right\}.$$

Exercício 3.4. Suponha $u \in H^1(B_1)$ uma solução fraca para

$$-\Delta u = f \quad \text{em} \quad B_1.$$

Mostre que, se $f \in C^{k,\alpha}(B_1)$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$ e para algum $\alpha \in (0, 1)$, então $u \in C^{k+2,\alpha}(B_{1/2})$ com estimativa

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(B_{1/2})} \leqslant \mathrm{C} \cdot \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{k,\alpha}(B_1)}\right)$$

em que $C = C(k, \alpha, n) > 0$.

Exercício 3.5. Seja $\alpha \in (0,1)$ e $u \in H^{(}B_1)$ solução fraca para

$$-\mathrm{div}\,(\mathbb{A}(x)\nabla u) = f(x) \quad \text{em} \quad B_1,$$

em que $\mathbb{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n \in L^\infty(B_1)$ satisfaz

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \langle \mathbb{A}(x)\xi, \xi\rangle \leqslant \Lambda|\xi|^2, \;\; \forall\, x \in B_1,\; \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

para constantes $0 < \lambda \leqslant \Lambda$. Mostre que, se $f \in C^{0,\alpha}(B_1)$, $a_{ij} \in C^\alpha(B_1)$ então $u \in C^{1,\alpha}(B_{1/2})$ com estimativa

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leqslant \mathrm{C}\cdot\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right)$$

4 EDPs totalmente não lineares

4.1 Introdução

Este capítulo é dedicado a entender a Teoria de Regularidade para modelos totalmente não lineares com dupla *Lei de degenerescência* na variável gradiente. Tais modelos devem ser entendidos como a contraparte não variacional de certos funcionais de dupla fase oriundos do cálculo de variações e que tem como equação de Euler–Lagrange o $(p\&q)-$Laplaciano com função moduladora variável.

4.2 EDPs na forma não divergente: Um guia de sobrevivência

Iniciaremos introduzindo alguns conceitos que culminarão no entendimento e na teoria suportada para EDPs com estrutura não variacional.

Definição 4.1. Uma função contínua

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathrm{Sim}(n) \to \mathbb{R}$$

é dita ser própria se satisfaz

$$F(x, s, p, \mathrm{A}) \leqslant F(x, r, p, \mathrm{B}) \quad \text{sempre que} \quad \mathrm{A} \leqslant \mathrm{B} \;\text{ e }\; s \leqslant r.$$

Dessa forma, somos capazes de definir soluções no sentido da viscosidade. Para tal classe de operadores, veja Katzourakis (2015), um ensaio recente sobre tal teoria:

Definição 4.2. Diz-se que $u \in C^0(\Omega)$ é uma subsolução (resp. supersolução) no sentido da viscosidade de

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega$$

se sempre que $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que

$$u(x_0) = \varphi(x_0) \quad \text{e} \quad u(x) < \varphi(x) \qquad \text{(respectivamente } u(x) > \varphi(x)) \quad \forall\ x \neq x_0,$$

então

$$F(x_0, \varphi(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leqslant f(x_0)$$

e respectivamente

$$F(x_0, \varphi(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geqslant f(x_0).$$

Portanto, se u é uma Subsolução e Supersolução de viscosidade $\Rightarrow$ u é solução de viscosidade.

Exemplo 4.1. Para ilustrarmos tal classe, temos os seguintes exemplos de operadores próprios:

1. Operadores de segunda ordem na forma não divergente

$$F[u(x)] = -\mathrm{tr}(\mathbb{A}(x)D^2u(x)) + \overrightarrow{b}(x) \cdot Du(x) + c(x)u(x)$$

2. Operador do tipo Bellman:

$$F[u(x)] = \inf_{\kappa \in \mathcal{A}} \{-\mathrm{tr}(\mathbb{A}^\kappa(x)D^2u(x)) + \overrightarrow{b}^\kappa(x) \cdot Du(x) + c^\kappa(x)u(x)\}$$

3. Operador do tipo Isaac:

$$F[u(x)] = \inf_{\kappa \in \mathcal{A}} \sup_{\tau \in \mathcal{B}} \{-\mathrm{tr}(\mathbb{A}^{\kappa,\tau}(x)D^2u(x)) + \overrightarrow{b}^{\kappa,\tau}(x) \cdot Du(x) + c^{\kappa,\tau}(x)u(x)\}$$

4. Operador de Monge–Ampère:

$$F[u(x)] = \det(\mathbb{A}(x)D^2u)$$

5. Operador Infinito-Laplaciano:

$$F_\infty[u(x)] = -\langle D^2uDu, Du\rangle = -\Delta_\infty u$$

6. Operador p-Laplaciano para $2 < p < \infty$:

$$F_p[u(x)] - \left[|Du|^{p-2}\Delta u + (p-2)|Du|^{p-4}\Delta_\infty u\right] = -\Delta_p u$$

O próximo resultado assegura que se o perfil já goza de suavidade (a priori) e o operador é próprio, então as noções clássica e viscosa para soluções coincidem.

Proposição 4.1. *Sejam F própria e $u \in C^2(\Omega)$, então u é solução de*

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad em \quad \Omega \tag{4.1}$$

se, e somente se, é solução no sentido da viscosidade.

Demonstração. Deixamos a prova como exercício para o leitor. Recomendamos revisitar o Capítulo 2 para um resultado similar estabelecido para o operador Laplaciano. □

Observação 4.1. *(Estimativas a priori para soluções)*

Uma pergunta pertinente na teoria de EDPs elípticas é o quão regulares podem ser soluções de viscosidade em geral de (4.1).

De fato, sejam $n = 1$, $\Omega = (-1, 1)$ e $F(x, r, p, \mathrm{A}) = p^2 - 1$. Então F é própria. Além disso, $u(x) = \|x\|$ é uma solução de viscosidade de

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x)) = 0 \quad em \quad \Omega.$$

Não obstante, u não é $C^2(\Omega)$. De fato, u é somente Lipschitz contínua.

4.2.1 Regularidade elíptica (caso uniformemente elíptico) - Estado da Arte

Permita-nos agora considerar $u \in C^0(B_1)$ solução no sentido da viscosidade de

$$\mathcal{L}[u] = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{ij}u = f(x) \quad \text{em} \quad B_1$$

sendo $\mathbb{A} \in \mathrm{Sim}(n)$ uma matriz uniformemente elíptica e mensurável, i.e.,

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \langle \mathbb{A}(x)\xi, \xi\rangle \leqslant \Lambda|\xi|^2 \quad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n \ \text{ e } \ x \in B_1$$

e $f \in L^p(B_1)$ para $p > \frac{n}{2}$ e constantes de elipticidade $0 < \lambda \leqslant \Lambda < \infty$.

Teorema 4.1 (*Teorema de Krylov–Safonov*)**.** *Seja $u \in C^0(B_1)$ solução no sentido da viscosidade de*

$$\mathcal{L}[u] = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{ij}u = f \quad em \quad B_1,$$

sendo $\mathbb{A}(x)$ *uma matriz uniformemente elíptica e mensurável e* $f \in L^p(B_1)$ *com* $p > \frac{n}{2}$*. Então,* $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(B_1)$ *para uma constante* $\alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda, p) \in (0,1)$*. Além disso,*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, p)\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^p(B_1)}\right).$$

Observação 4.2. *As estimativas devido a* Krylov–Safonov *são a contraparte não variacional da* Teoria de De Giorgi–Nash–Moser *para equações na forma divergente estabelecidas no final da década de 50 e início dos anos* 60*, veja Krylov e Safonov (1979).*

O conceito abaixo foi um ponto pivotal, o qual permitiu acessar as estimativas de regularidade para EDPs totalmente não lineares.

Definição 4.3 (Elipticidade uniforme)**.** Dizemos que uma função $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ é uniformemente elíptica se existirem constantes $\Lambda \geqslant \lambda > 0$, conhecidas como constantes de elipticidade de F tal que, para qualquer matriz positiva definida $\mathrm{A} \geqslant 0$ e qualquer $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, temos as desigualdades

$$\lambda \mathrm{tr}(\mathrm{A}) \leqslant F(\mathrm{X}+\mathrm{A}) - F(\mathrm{X}) \leqslant \Lambda \mathrm{tr}(\mathrm{A}).$$

Quando a função F é diferenciável, a definição acima é equivalente às desigualdades

$$\lambda \mathrm{Id}_n \leqslant \frac{\partial F}{\partial \mathrm{X}_{ij}} \leqslant \Lambda \mathrm{Id}_n,$$

em outras palavras, a matriz $\left(\frac{\partial F}{\partial \mathrm{X}_{ij}}\right)_{i,j=1}^{n}$ é uniformemente elíptica.

Agora nos concentramo em equações da forma

$$F(D^2u) = 0 \quad \text{em} \quad B_1. \tag{4.2}$$

Afirmamos que as estimativas Hölder descritas no Teorema de Krylov–Safonov podem ser utilizadas para obter estimativas de regularidade $C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}$ para soluções de equações uniformemente elípticas totalmente não lineares como (4.2).

De fato, fixada uma direção unitária $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ formalmente, podemos derivar a equação para obter:

$$\frac{\partial F(D^2u)}{\partial \mathrm{X}_{ij}} \partial_{ij} u_\nu = \partial_\nu F(D^2u) = 0 \quad \text{em} \quad B_1.$$

Agora, observe que a hipótese de elipticidade uniforme em F significa que

$$a_{ij}(x) := \frac{\partial F(D^2u)}{\partial \mathrm{X}_{ij}}$$

cumpre as hipóteses da estimativa Hölder do Teorema de Krylov–Safonov (Teorema 4.1).

Portanto, a derivada direcional u_ν deve ser $C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}$ para qualquer vetor $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$, i.e., $u \in C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(B_1)$.

Precisamente temos o seguinte resultado devido a Caffarelli e Trudinger:

Teorema 4.2 (Caffarelli (1989a) e Trudinger (1988))**.** *Seja* $u \in C^0(B_1)$ *uma solução de viscosidade limitada para* (4.2)*. Então* $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(B_1)$*. Além disso,*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda)\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |F(O)|\right).$$

Existe uma vasta literatura que trata de EDPs totalmente não lineares e suas teorias de regularidade. O próximo resultado (o qual é elegante) assegura que soluções clássicas para equações uniformemente elípticas em 2D têm sempre um módulo de continuidade universal (Hölder contínuo) para a Hessiana de soluções:

Teorema 4.3 (Nirenberg (1953))**.** *Suponha que* F *seja uniformemente elíptica. As soluções clássicas da equação*

$$F(D^2u) = 0 \quad em \quad B_1 \subset \mathbb{R}^2$$

são $C^{2,\alpha}_{loc}(B_1)$ *para algum* $\alpha = \alpha(\lambda, \Lambda) \in (0, 1)$*. Além disso,*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant \mathrm{C}(\lambda, \Lambda)\|u\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Recomendamos ao leitor interessado o Livro de Fernández-Real e Ros-Oton Fernández-Real e Ros-Oton (2022, Seção 4.2), para uma prova detalhada de tal resultado.

Em contraste com as hipóteses do *Teorema de Nirenberg* (Teorema 4.3), uma questão inquietava a comunidade matemática: quando uma solução de viscosidade, para um operador (de segunda ordem) uniformemente elíptico, pode ser clássica.

Uma resposta satisfatória somente surgiu no início da década de 80 em dois trabalhos (independentes) devido aos matemáticos Evans e Krylov, veja Evans (1982a), Krylov (1982) e Krylov (1983). Precisamente provaram que soluções para equações uniformemente elípticas são clássicas sempre que estejamos sob hipóteses de convexidade ou concavidade no operador. Tal condição estrutural também permitiu a Caffarelli desenvolver uma Teoria de Schauder para tais operadores totalmente não lineares via métodos perturbativos, veja Caffarelli e Cabré (1995a, Capítulo 6).

Teorema 4.4 (Evans (1982a) e Krylov (1982))**.** *Suponha que* F *seja uniformemente elíptica e convexa. As soluções da equação*

$$F(D^2u) = f \in C^{0,\alpha}(B_1)$$

são $C^{2,\alpha}_{loc}(B_1)$*. Além disso,*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant \mathrm{C}(\lambda, \Lambda)\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |F(O_{n\times n})| + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right).$$

Uma questão central em EDP lineares/não lineares é inferir qual a regularidade esperada (ou o módulo de continuidade) para suas soluções.

A título de motivação, permita-nos visitar a Teoria Uniformemente Elíptica: Seja u uma solução para:

$$\mathcal{G}[u] := \operatorname{tr}\left(\mathbb{A}(x)D^2u\right) = f(x) \ \text{ em } \quad B_1. \tag{4.3}$$

Existem dois aspectos importantes para considerar:

$$\begin{array}{ccc} \text{Estimativas a priori para a EDP homogênea} & & \text{Integrabilidade do} \\ & \& & \\ \text{com coeficientes "constantes"} & & \text{termo fonte} \end{array}$$

De fato, $v(x) := \frac{u(\rho x)}{\rho^\kappa}$ para $\kappa \in (0,2]$ verifica:

$$\mathcal{G}_\rho[v] = \operatorname{tr}\left(\mathbb{A}_\rho(x)D^2v\right) = \rho^{2-\kappa}f(\rho x) := f_\rho(x) \Rightarrow \|f_\rho\|_{L^r(B_1)} \leqslant \rho^{2-\kappa-\frac{N}{r}}\|f\|_{L^r(B_1)}.$$

Resumidamente:

Melhor integrabilidade/regularidade de f (resp. $\mathbb{A}$) $\Rightarrow$ Melhor regularidade de u

Podemos sintetizar tal fenômeno de regularidade no seguinte resultado de classificação do módulo de continuidade de soluções (cf. Daskalopoulos, Kuusi e Mingione (2014) para resultados relacionados):

Teorema 4.5 (da Silva e Nornberg (2021) e Teixeira (2014))**.** *Seja u uma solução de viscosidade limitada* [1] *para* (4.3)*, então*

$f \in L^r(B_1)$	*Regularidade precisa*
$\frac{n}{2} < r < n$	$C^{0,\varsigma}_{loc}(B_1)$
$r = n$	$C^{0,Log\text{–}Lip}_{loc}(B_1)$
$n < r < \infty$	$C^{1,\zeta}_{loc}(B_1)$
L^∞	$C^{1,Log\text{-}Lip}_{loc}(B_1)$,

em que temos os seguintes módulos (universais) de continuidade:

$$\varsigma := 2 - \frac{n}{r} \ \ e \ \ \zeta := 1 - \frac{n}{r}.$$

e, nos casos limítrofes, os módulos de continuidade do tipo Log–Lipschitz:

$$\tau(s) := s\log s^{-1} \quad e \quad \psi(s) := s^2\log s^{-1}$$

[1] $u \in C^0(B_1)$ é uma supersolução de viscosidade (resp. subsolução) para (4.3) se sempre que $\varphi \in C^2(B_1)$ e $x_0 \in B_1$ tal que $u - \varphi$ tem um mínimo local (resp. máximo local) em x_0, então

$$\operatorname{tr}\left(\mathbb{A}(x_0)D^2\varphi(x_0)\right) \leqslant f(x_0) \qquad \text{resp. } \operatorname{tr}\left(\mathbb{A}(x_0)D^2\varphi(x_0)\right) \geqslant f(x_0).$$

Permita-nos apresentar algumas ferramentas matemáticas úteis para nossos propósitos: Seja $u \in C^0(\Omega)$ uma solução no sentido da viscosidade de

$$F(D^2u) = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Então:

- Estimativas do tipo A.B.P. (*Aleksandrov–Bakelman–Pucci*):

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \mathrm{C}(n, \lambda, p) \cdot \mathrm{diam}(\Omega) \, \|f\|_{L^p(\Omega)} \, .$$

- Estimativas Hölder locais:

$$\|u\|_{C^{0,\alpha'}(\Omega')} \leqslant \mathrm{C}(\text{universal}) \cdot \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\right).$$

- Resultados de estabilidade de soluções:

  Se $F_k(D^2u_k) = f_k$ e $u_k \to u_0$, $f_k \to f_0$ e $F_k(\cdot) \to F_0$, então

$$F_0(D^2u_0) = f_0.$$

- Estimativas gradiente a priori:

$$F(D^2h) = 0 \quad \text{em} \quad B_1 \quad \Rightarrow \quad \|h\|_{C^{1,\gamma}(B_{1/2})} \leqslant \mathrm{C}(\text{universal}) \cdot \left[\|h\|_{L^\infty(B_1)} + 1\right]$$

Estratégia para obter tais módulos de continuidade

Seja $\rho_0 \in (0,1)$. Assuma que, para todo $x \in B_{\frac{1}{2}}$, exista uma sequência de polinômios $(P_j)_j$ (de grau $\lfloor \kappa \rfloor$) tal que

$$\|u - P_j\|_{L^\infty(B_{\rho_0^j}(x))} \leqslant \mathrm{C}_0 \rho_0^{j\kappa} \quad \forall \;\; j \in \mathbb{N}$$

com

$$\rho_0^{\lfloor \kappa \rfloor j} \|A_{j+1} - A_j\| + \rho_0^{(\lfloor \kappa \rfloor - 1)j} \|B_{j+1} - B_j\| + |C_{j+1} - C_j| \leqslant \mathrm{C}_0 \rho_0^{j\kappa}.$$

Então, pelo Mergulho de Dini–Campanato, veja Capítulo 2, $u \in C^{\lfloor \kappa \rfloor - 1, \omega}(B_{\frac{1}{2}})$ e

$$[u]_{C^{\lfloor \kappa \rfloor, \omega}(B_{\frac{1}{2}})} \leqslant \mathrm{C}(n, \kappa, p, \rho_0).\mathrm{C}_0.$$

4.2.2 Problemas com dupla lei de degenerescência

Antes de apresentar os resultados desta seção, permita-nos revisitar alguns modelos de EDPs elípticas:

Cenário	Forma Divergente
Uniformemente Elíptico	$\mathrm{div}(\mathbb{A}(x)\nabla u)$
Lei de Degenerescência Simples	$\Delta_p u \quad (p > 2)$
Lei de Degenerescência Dupla	$\mathrm{div}(\mathfrak{A}_{p,q}(x, \nabla u)\nabla u) \quad (2 < p \leqslant q)$

e

Cenário	Forma Não Divergente
Uniformemente Elíptico	$\mathrm{tr}(\mathbb{A}(x)D^2u)$
Lei de Degenerescência Simples	$\lvert Du\rvert^p \mathrm{tr}(\mathbb{A}(x)D^2u) \quad (p > 0)$
Lei de Degenerescência Dupla	Qual seria o protótipo?

em que

$$\mathfrak{A}_{p,q}(x, \nabla u) = |\nabla u|^{p-2} + \mathfrak{a}(x)|\nabla u|^{q-2}.$$

Neste ponto, será natural considerar o seguinte modelo não homogêneo:

$$\mathcal{L}[u] = [|Du|^p + \mathfrak{a}(x)|Du|^q]\,\mathrm{tr}(\mathbb{A}(x)D^2u) \text{ para } 0 < p < q < \infty \text{ e } 0 \leqslant \mathfrak{a} \in C^0(\Omega),$$

i.e., a contraparte de certos problemas variacionais do Cálculo das Variações com estrutura de dupla fase.

Devemos destacar que, nas últimas décadas, surgiram inúmeras pesquisas sobre problemas de dupla fase, veja Ural'tseva e Urdaletova (1983) e Zhikov (1993) para exemplos elucidativos e Mingione e Rădulescu (2021) para um compêndio moderno sobre esse tópico

$$\min \int_\Omega \left(\frac{1}{p}|\nabla w|^p + \frac{\mathfrak{a}(x)}{q}|\nabla w|^q - fw\right)dx \quad \Rightarrow$$
$$\mathcal{L}[w] = -\mathrm{div}\left(\left(|\nabla w|^{p-2} + \mathfrak{a}(x)|\nabla w|^{q-2}\right)\nabla u\right) = f(x)$$

Tais modelos de dupla fase desempenham um papel fundamental em:

- Ciência dos Materiais (comportamento de certos materiais fortemente anisotrópicos);
- Aplicações em Teoria de Elasticidade ;
- Fluxos Transônicos;
- Modelos de soluções estáticas para partículas elementares entre outros.

Estamos interessados em estudar propriedades quantitativas para modelos totalmente não lineares com dupla degenerescência da seguinte forma:

$$\mathcal{G}[u] := [|Du|^p + \alpha(x)|Du|^q]\, F\left(x, D^2u\right) = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N \;\; \text{(limitado)}, \quad (4.4)$$

em que suporemos as seguintes Condições Estruturais (CE):

✓ $f \in C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$;

✓ $F : \Omega \times \mathrm{Sim}(n) \to \mathbb{R}$ é um operador $(\lambda, \Lambda)-$elíptico com coeficientes $\omega-$contínuos:

$$\lambda\|\mathrm{X} - \mathrm{Y}\| \leqslant F(x, \mathrm{X}) - F(x, \mathrm{Y}) \leqslant \Lambda\|\mathrm{X} - \mathrm{Y}\|$$
$$\text{e}$$
$$\Theta_{\mathrm{F}}(x, y) := \sup_{\substack{\mathrm{X} \in Sym(n) \\ \mathrm{X} \neq 0}} \frac{|F(x,\mathrm{X}) - F(y,\mathrm{X})|}{\|\mathrm{X}\|} \leqslant \mathrm{C}_{\mathrm{F}}\omega(|x - y|).$$

✓ $0 < p < q < \infty$ e $0 \leqslant \alpha \in C^0(\overline{\Omega})$.

Neste ponto, levantamos o seguinte questionamento: o que devemos esperar do cenário duplamente degenerado?

Recentemente, combinando métodos geométricos e técnicas analíticas, foram abordadas por De Filippis (2021) estimativas de regularidade $C^{1,\gamma}_{\mathrm{loc}}$ (para algum γ(universal) $\in (0, 1)$) para equações da forma

$$[|Du|^p + \alpha(x)|Du|^q]\, F(D^2u) = f \in L^\infty(B_1) \cap C^0(B_1),$$

Também devemos citar as contribuições de Birindelli, Demengel e Leoni (2019) e Imbert e Silvestre (2013) para o caso com Lei de Degenerescência Simples.

Não obstante, o trabalho de De Filippis deixa algumas questões em aberto no que diz respeito ao cenário geral:

$$\mathcal{G}[u] := [|Du|^p + \alpha(x)|Du|^q]\, F\left(x, D^2u\right) = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

sob a condição estrutural (CE).

Ressaltamos que a Teoria da Regularidade para modelos uniformemente elípticos está disponível nos trabalhos de Caffarelli (1989a), Caffarelli e Cabré (1995a) e Trudinger (1983) para mais detalhes.

Forneceremos uma resposta afirmativa nos seguintes cenários:

Hipóteses	Regularidade precisa
(CE) em vigor	$C^{1,\min\left\{\frac{1}{p+1}, \alpha_{\mathrm{Hom}}^{-}\right\}}_{\mathrm{loc}}$
(CE) + F um operador côncavo/convexo	$C^{1,\frac{1}{p+1}}_{\mathrm{loc}}$

Outra questão central que devemos considerar:

Existem mudanças significativas entre a abordagem de De Filippis e a nossa?

1. Compacidade (Estimativas Hölder) via o Método de Ishii–Lions;

2. Regime $C^{1,\alpha}$ via esquema de aproximações afins (Desvio por Planos): $\mathrm{G}_\xi[u] = \mathcal{H}(x, \nabla u + \xi) F(D^2 u)$;

3. Caráter degenerado do operador: estimativas a priori estimativas para $\xi-$translações pequenas/grandes.

4.3 Estimativas para o gradiente

Portanto vamos estabelecer estimativas $C^{1,\alpha}$ (geométricas) para soluções de (4.4) usando uma abordagem sistemática e alternativa (cf. Araújo, Teixeira e Urbano (2017, 2018), Attouchi, Parviainen e Ruosteenoja (2017) e Lindgren e Lindqvist (2017) para resultados relacionados), bem como abordar algumas melhorias.

Nosso principal resultado pode ser descrito como:

Teorema 4.6 (da Silva e Ricarte (2020)). *Sejam $K \subset\subset B_1$, u uma solução limitada de* (4.4) *em B_1 e suponha que (CE) esteja em vigor. Então u é $C^{1,\alpha}_{loc}$, ou seja, existe uma constante (universal)* $\mathrm{M} > 0$ *tal que*

$$[u]^*_{C^{1,\alpha}(K)} \leqslant \mathrm{M}.\left[\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|^{\frac{1}{p+1}}_{L^\infty(B_1)} + 1\right],$$

em que

$$[u]^*_{C^{1,\alpha}(K)} := \sup_{0<\rho\leqslant\rho_0}\left(\inf_{x_0\in K} \frac{\|u - \mathfrak{l}_{x_0}(u)\|_{L^\infty(B_\rho(x_0)\cap K)}}{\rho^{1+\alpha}}\right)$$

e

$$\mathfrak{l}_{x_0}(u) := u(x_0) + Du(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Nossas estimativas de regularidade generalizam, em um certo ponto, as anteriores provadas em Araújo, Ricarte e Teixeira (2015) e De Filippis (2021), por meio de uma abordagem consideravelmente alternativa, flexível o bastante para ser utilizada em outros modelos de EDPs não lineares degeneradas.

Vale destacar que tais estimativas desempenham um papel essencial em estabelecer:

1. Resultados do tipo Liouville e Blow-up (classificação de perfis globais);

2. Propriedades geométricas fracas e estimativas de medida de Hausdorff;

3. Regularidade ótima em certos problemas de fronteira livre (PFL para abreviar - e.g. Bernoulli, obstáculo, singularmente perturbado, Núcleos Mortos etc.).

Recomendamos ao leitor consultar as seguintes referências Andersson, Lindgren e Shahgholian (2015), Bezerra Júnior, da Silva e Ricarte (2023), Caffarelli e Salsa (2005) e da Silva e Salort (2018) para alguns exemplos em que tais tópicos são provados.

4.3.1 Ferramentas auxiliares

Vamos apresentar algumas ferramentas matemáticas úteis para nossos propósitos, veja De Filippis (2021) e da Silva e Vivas (2021a):
Estimativa A.B.P.:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \mathrm{C}(n,\lambda,p,q)\cdot \operatorname{diam}(\Omega)\max\left\{\left\|\frac{f}{1+\mathfrak{a}}\right\|_{L^N(\Omega)}^{\frac{1}{p+1}}, \left\|\frac{f}{1+\mathfrak{a}}\right\|_{L^N(\Omega)}^{\frac{1}{q+1}}\right\}.$$

Estimativas Hölder:

$$\|u\|_{C^{0,\alpha'}(\Omega')} \leqslant \mathrm{C}(\text{universal})\cdot\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \max\left\{\left\|\frac{f}{1+\mathfrak{a}}\right\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{p+1}}, \left\|\frac{f}{1+\mathfrak{a}}\right\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{q+1}}\right\}\right)$$

Resultados de Estabilidade: Se $\mathcal{H}(x,Du_k)F_k(x,D^2u_k) = f_k$ e $u_k \to u_0$, $f_k \to f_0$ e $F_k(x,\cdot) \to F_0$, então

$$\mathcal{H}(x,Du_0)F_0(D^2u_0) = f_0.$$

Lema do Corte de Imbert–Silvestre:

$$\mathcal{H}(x,Du)F(D^2u) = 0 \quad \text{em} \quad B_1 \quad \Rightarrow \quad F(D^2u) = 0 \quad \text{em} \quad B_1.$$

Estimativa gradiente de De Filippis:

$$\|u\|_{C^{1,\gamma}(B_{1/2})} \leqslant \mathrm{C}(\text{universal})\cdot\left[\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)}^{\frac{1}{p+1}} + 1\right].$$

Um passo chave para acessar a Teoria da Regularidade disponível, para operadores homogêneos com coeficiente "constantes", é o seguinte.

Lema 4.1. *(Lema de Aproximação) Se u é uma solução de* (4.4) *em B_1 com $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1$, então $\forall\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(p,q,N,\lambda,\Lambda,\varepsilon) > 0$ tal que se* $\max\left\{\Theta_F(x), \|f\|_{L^\infty(B_1)}\right\} \leqslant \delta_\varepsilon$, *existe uma função $\mathfrak{F}$-harmônica $\phi : B_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}$, i.e., $F(D^2\phi) = 0$ tal que*

$$\max\left\{\|u-\phi\|_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}}\right)}, \|D(u-\phi)\|_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}}\right)}\right\} < \varepsilon$$

em que

$$\left(\|\phi\|_{C^{1,\alpha_{\mathrm{Hom}}}(\Omega')} \leqslant \mathrm{C}(n,\lambda,\Lambda)\cdot\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}\right).$$

Demonstração. A prova é baseada em um Reductio ad absurdum. De fato, suponha que o Lema não seja verdadeiro. Isto implica que para algum $\epsilon_0 \in (0,1)$, podemos encontrar sequência $\{u_k\}, \{\phi_k\}, \{F_k\}, \{\alpha_k\}$ e $\{f_k\}$ satisfazendo:

- $\mathcal{H}(x, D^2 u_k) F_k(x, D^2 u_k) = f_k(x)$ no sentido da viscosidade em $B_1(0)$;
- $\|u_k\|_{L^\infty(B_1(0))} \leqslant 1$ em $B_1(0)$;
- $\max\left\{\Theta_{F_k}(x), \|f_k\|_{L^\infty(B_1(0))}\right\} = o(1)$ quando k é suficientemente grande;
- ϕ_k satisfaz
$$\begin{cases} F_k(D^2\phi_k) = 0 & \text{em} \quad B_{1/2} \\ \phi_k = u_k & \text{em} \quad \partial B_{1/2} \end{cases}$$
no sentido da viscosidade.

Contudo
$$\max\left\{\|u_k - \phi_k\|_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}}\right)}, \|D(u_k - \phi_k)\|_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}}\right)}\right\} > \varepsilon_0$$
em que
$$\left(\|\phi_k\|_{C^{1,\alpha_{\text{Hom}}(\Omega')}} \leqslant C(n, \lambda, \Lambda) \cdot \|\phi_k\|_{L^\infty(\Omega)}\right).$$
Segue do princípio do máximo (A.B.P.) que
$$\|\phi_k\|_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant \|u_k\|_{L^\infty\left(\partial B_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant 1.$$

Ademais como
$$\mathcal{H}(x, Du_k) F_k(x, D^2 u_k) = f_k(x) \quad \text{e} \quad \|u_k\|_{L^\infty(B_1(0))} \leqslant 1,$$
segue da estimativa Hölder que, a menos de subsequência, podemos assumir que $\phi_k \to \phi_0$ e $u_k \to u_0$ uniformemente em $\overline{B_{1/2}(0)}$. Além disso, $\phi_k \to \phi_0$ localmente uniforme na topologia C^1. Agora segue da estimativa gradiente de De Filippis que
$$\|Du_k\|_{C^{1,\gamma}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)}, [u_k]_{C^{1,\gamma}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant \text{C(universal)} \cdot \left[\|u_k\|_{L^\infty(B_1)} + \|f_k\|_{L^\infty(B_1)}^{\frac{1}{p+1}} + 1\right]$$
para algum $\gamma \in (0,1)$. Portanto, a menos de subsequência, $Du_k \to Du_0$ uniforme em $\overline{B_{1/2}(0)}$. Em particular, concluímos que
$$\max\left\{\|u_0 - \phi_0\|_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}}\right)}, \|D(u_0 - \phi_0)\|_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}}\right)}\right\} \geqslant \varepsilon_0. \tag{4.5}$$

Por outro lado, segue do resultado de estabilidade que existe uma operador elíptico $\mathcal{F}_0$ satisfazendo as condições estruturais (CE) (com $\omega \equiv 0$) tal que $F_k \to \mathcal{F}_0$ localmente uniforme em $\text{Sim}(n)$ para todo $x \in B_1(0)$ fixado.

Agora, usando Lema do Corte de Imbert–Silvestre e fazendo uso do resultado de estabilidade para solução de viscosidade, concluímos que

$$\begin{cases} \mathcal{F}_0(D^2\phi_0) = 0 & \text{em} \quad B_{1/2} \\ \phi_0 = u_0 & \text{em} \quad \partial B_{1/2}(0) \\ \mathcal{F}(D^2 u_0) = 0 & \text{em} \quad B_{1/2}(0) \end{cases} \tag{4.6}$$

no sentido da viscosidade.

Finalmente segue da unicidade de solução para o problema (4.6) que $u_0 = \phi_0$, gerando uma contradição com (4.5). Isto conclui a prova. □

Observação 4.3. *(Normalização e "regime de pequeneza")*

As hipóteses do Lema 4.1 não são restritivas. De fato, fixado $\delta_\varepsilon > 0$, existe $\kappa, \tau > 0$ tal que a função

$$v(x) = \frac{u(\tau x + x_0)}{\kappa},$$

cumpre as condições do Lema 4.1, em que

$$\begin{cases} \kappa & := & \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + 1 + \delta_\varepsilon^{-1} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{p+1}} \\ \tau & := & \min\left\{\frac{1}{2}, \left(\frac{\delta_\varepsilon}{\|f\|_{L^\infty(\Omega)}+1}\right)^{\frac{1}{p+2}}, \omega^{-1}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\mathrm{C_F}+1}\right)\right\}. \end{cases}$$

4.3.2 Estimativas $C^{1,\alpha}$ via iteração geométrica

No que se segue, o objetivo será fazer uso de uma aproximação $\mathfrak{F}$−harmônica em um cenário C^1 (Lema de Aproximação) para garantir que as soluções de viscosidade sejam "geometricamente próximas" de seu plano tangente de maneira adequada, ou seja,

$$C^1 - \text{Aproximação – via estimativa geométrica} \quad \Rightarrow$$
$$\sup_{B_\rho(x_0)} \frac{|u(x) - u(x_0) - Du(x_0)\cdot(x - x_0)|}{\rho^{1+\alpha}} \leqslant 1,$$

obtendo assim uma estimativa geométrica.

Lema 4.2. *("Pseudo" primeiro passo de indução)* *Seja u uma solução de viscosidade de* (4.4) *em B_1 com $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1$. Existem $\delta_\varepsilon > 0$ e $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que se* $\max\left\{\Theta_F(x), \|f\|_{L^\infty(B_1)}\right\} \leqslant \delta_\varepsilon$, *então*

$$\sup_{B_\rho(x_0)} \left|u(x) - \mathfrak{l}_{x_0}(u)(x)\right| \leqslant \rho^{1+\alpha} \quad com \quad \rho \in \left(0, \min\left\{\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2\mathrm{C}(N,\lambda,\Lambda)}\right)^{\frac{1}{\alpha_{\mathrm{Hom}}-\alpha}}\right\}\right).$$

Observação 4.4. *(Prosseguindo com o processo de iteração) Diferentemente das estimativas de regularidade $C^{1,\alpha}$ do cenário linear, não podemos mais prosseguir com um esquema iterativo, ou seja,*

$$\sup_{B_{\rho^k}(x_0)} \frac{|u(x) - \mathfrak{l}_k(x)|}{\rho^{k(1+\alpha)}} \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad u \text{ é } C^{1,\alpha} \text{ em } x_0 \text{ (Mergulho de Dini–Campanato)},$$

dado que a priori não conhecemos a equação que é satisfeita para a transformação

$$B_1(0) \ni x \mapsto \frac{(u - \mathfrak{l}_k)(\rho^k x)}{\rho^{k(1+\alpha)}}, \text{ para } \{\mathfrak{l}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ perfis afins},$$

pois o operador

$$[|Dv|^p + \mathfrak{a}(x)|Dv|^q]\, F(x, D^2 v)$$

não é invariante por mapas afins.

Por tal razão, uma abordagem alternativa deve ser implementada: informações quantitativas sobre a oscilação de u:

$$\sup_{B_\rho(x_0)} \frac{\rho^{-1}|u(x) - u(x_0)|}{\rho^\alpha + |Du(x_0)|} \leqslant 1 \Longrightarrow \sup_{B_{\rho^k}(x_0)} \frac{\rho^{-k}|u(x) - u(x_0)|}{\rho^{k\alpha} + \frac{|Du(x_0)|(1-\rho^{(k-1)\alpha})}{1-\rho^\alpha}} \leqslant 1$$

(via iteração), que prova ser a estimativa adequada para continuar com um processo iterativo, desde que tenhamos um tipo de controle adequado sob a magnitude do gradiente (pontualmente).

Corolário 4.1. *(O primeiro passo (real) de indução) Suponha que as hipóteses do Lema anterior estejam em vigor. Então*

$$\sup_{B_\rho(x_0)} |u(x) - u(x_0)| \leqslant \rho^{1+\alpha} + \rho|Du(x_0)|.$$

Para obter um controle preciso sobre a influência da magnitude do gradiente de u, iteraremos soluções (usando o Corolário anterior) em bolas ρ-ádicos.

Lema 4.3. *(Processo Iterativo) Sob as hipóteses do Corolário anterior, tem-se*

$$\sup_{B_\rho^k(x_0)} |u(x) - u(x_0)| \leqslant \rho^{k(1+\alpha)} + |Du(x_0)| \sum_{j=0}^{k-1} \rho^{k+j\alpha}. \tag{4.7}$$

Demonstração. Via processo de indução – Aqui fazemos uso da suposição $\alpha \leqslant \frac{1}{p+1}$. Inicialmente podemos assumir que $x_0 = 0$ via translação no domínio de u. Para provar o resultado, vamos argumentar via indução.

(1) O caso $k = 1$ é precisamente o Corolário 4.1.

(2) Suponha agora que (4.7) seja verdadeiro para valores de $\ell = 1, 2, \ldots, k$.

(3) O objetivo é mostrar para $\ell = k+1$. Para esse fim, defina $v_k : B_1(0) \to \mathbb{R}$ por

$$v_k(x) := \frac{u(\rho^k x) - u(0)}{\mathcal{A}_k}$$

em que $\mathcal{A}_k := \rho^{k(1+\alpha)} + |Du(x_0)| \sum_{j=0}^{k-1} \rho^{k+j\alpha}$. Temos que v_k satisfaz a seguinte equação

$$\mathcal{H}_k(x, Du_k) F_k(x, D^2 u_k) = f_k(x) \quad \text{em} \quad B_1(0),$$

sendo

- $F_k(x, M) = \frac{\rho^{2k}}{\mathcal{A}_k} F\left(\rho^k, \left(\frac{\rho^{2k}}{\mathcal{A}_k}\right)^{-1} M\right);$
- $f_k(x) := \frac{\rho^{k(p+2)}}{\mathcal{A}_k^{p+1}} f(\rho^k x);$
- $\mathfrak{a}_k(x) := \left(\frac{\mathcal{A}_k}{\rho^k}\right)^{q-p} \mathfrak{a}(\rho^k x);$
- $\mathcal{H}_k(x, \xi) := \left(\frac{\rho^k}{\mathcal{A}_k}\right)^p \mathcal{H}\left(\rho^k x, \left(\frac{\rho^k}{\mathcal{A}_k}\right)^{-1} \xi\right)$

Note que, por hipótese de indução, $\|v_k\|_{L^\infty(B_1(0))} \leqslant 1$ e para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_k(0) & = & 0 \\ \Theta_{F_k}(x) \leqslant \Theta_F(x) & \ll & 1 \\ \|f_k\|_{L^\infty(B_1(0))} \leqslant \rho^{k[1-\alpha\cdot(p+1)]} \|f\|_{L^\infty(B_1(0))} & \ll & 1 \end{array} \right. \tag{4.8}$$

no qual usamos o fato de que $\alpha \leqslant \frac{1}{1+p}$ e a normalização. Logo, F_k, f_k e u_k satisfazem as hipóteses do Lema de Aproximação. Portanto, podemos aplicar o Corolário 4.1 para v_k e obter que

$$\sup_{B_\rho(0)} |v_k(x) - v_k(0)| \leqslant \rho^{1+\alpha} + \rho |Dv_k(0)|,$$

implicando que

$$\sup_{B_\rho(0)} \frac{|u(\rho^k x) - u(0)|}{\mathcal{A}_k} \leqslant \rho^{1+\alpha} + \frac{\rho^{k+1}|Du(0)|}{\mathcal{A}_k}.$$

Finalmente, reescalonando a expressão acima, temos que

$$\sup_{B_{\rho^{k+1}}(0)} |u(x) - u(0)| \leqslant \rho^{(k+1)(1+\alpha)} + |Du(0)| \sum_{j=0}^{k} \rho^{k+1+j\alpha}$$

que corresponde ao passo $\ell = k+1$.

□

Nosso próximo resultado fornece uma estimativa de regularidade geométrica no interior da zona singular:

$$\mathcal{S}_\rho^\alpha(B_{1/2}) := \left\{ x \in B_{1/2};\ |Du(x)| \leqslant \rho^\alpha \right\}.$$

Lema 4.4. *(Estimativa dentro da zona singular) Suponha que as hipóteses do Lema anterior estejam em vigor. Então existe* M(*universal*) > 1 *tal que*

$$\sup_{B_{\rho_0}(x_0)} |u(x) - u(x_0)| \leqslant \mathrm{M}{\rho_0}^{1+\alpha}\left(1 + |Du(x_0)|{\rho_0}^{-\alpha}\right), \ \ \forall\ \rho_0 \in (0, \rho).$$

Finalmente podemos estabelecer a prova do Teorema 4.6.

Prova do Teorema 4.6. Sem Perda de generalidade, podemos assumir que $\mathrm{K} = B_{\frac{1}{2}}$ e $x_0 = 0 \in \mathcal{S}_{\rho_0}^\alpha(\mathrm{K})$. Usando o Lema anterior, estimamos

$$\begin{aligned}
\sup_{B_{\rho_0}} \frac{|u(x) - \mathfrak{l}_0 u(x)|}{\rho_0^{1+\alpha}} &\leqslant \sup_{B_{\rho_0}} \frac{|u(x) - u(0)|}{\rho_0^{1+\alpha}} + \frac{|Du(0)|\rho_0}{\rho_0^{1+\alpha}} \\
&\leqslant \mathrm{M}\left(1 + |Du(0)|\rho_0^{-\alpha}\right) + 1 \\
&\leqslant 3\mathrm{M}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se o gradiente tiver uma cota inferior uniforme, ou seja, $|Du| \geqslant L_0 > 0$, então as estimativas clássicas de Caffarelli–Trudinger podem ser aplicadas uma vez que o operador se torne uniformemente elíptico:

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(D^2u) & \leqslant & \mathrm{C}_0\left(L_0^{-1}, p, q, \|\mathfrak{a}\|_{L^\infty(B_1)}, \|f\|_{L^\infty(B_1)}\right) \\
 & \mathrm{e} & \\
\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(D^2u) & \geqslant & -\mathrm{C}_0\left(L_0^{-1}, p, q, \|\mathfrak{a}\|_{L^\infty(B_1)}, \|f\|_{L^\infty(B_1)}\right).
\end{array} \right.$$

□

4.4 Aplicações em modelos elípticos não lineares

4.4.1 Regularidade para *Funções* $(p\&q)-$*Harmônicas*

Retornando aos problemas de dupla fase sob as hipóteses $1 < \frac{q}{p} < 1 + \frac{\beta}{n}$ para $0 \leqslant \mathfrak{a} \in C^{0,\beta}(\Omega)$, Colombo–Mingione em Colombo e Mingione (2015) mostram que minimizantes d o funcional

$$\min \int_\Omega \left(\frac{1}{p}|\nabla w|^p + \frac{\mathfrak{a}(x)}{q}|\nabla w|^q \right) dx,$$

são soluções da seguinte equação de Euler–Lagrange

$$\mathcal{L}[w] = -\mathrm{div}\left(\left(|\nabla w|^{p-2} + \mathfrak{a}(x)|\nabla w|^{q-2}\right)\nabla w\right) = 0$$

e satisfazem localmente $w \in C^{1,\alpha_0}_{\mathrm{loc}}$ para algum expoente $\alpha_0 \in (0,1)$.

Nesse ponto, podemos considerar a seguinte decomposição (cf. Colombo e Mingione (2015) e Fang e Zhang (2022)) via equivalência de soluções:

$$-\mathcal{L}w(x) = \mathcal{J}_1(\nabla w, D^2 w) + \mathcal{J}_2(\nabla w, D^2 w) = 0$$

em que

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1 & = & \left[|\nabla w|^{p-2} + \mathfrak{a}(x)|\nabla w|^{q-2}\right]\Delta w(x) \\ & \text{e} & \\ \mathcal{J}_2 & = & \left[(p-2)\,|\nabla w|^{p-2} + (q-2)\,\mathfrak{a}(x)|\nabla w|^{q-2}\right]\Delta_\infty^N w(x) + |\nabla w|^{q-2}\nabla w\cdot\nabla\mathfrak{a}. \end{cases}$$

Portanto podemos concluir (ao aplicarmos o Teorema 4.6) a seguinte implicação

$$\Delta_\infty^N w, \nabla\mathfrak{a}, \nabla w \in L^\infty(B_1) \quad \Rightarrow$$
$$[w]_{C^{1,\frac{1}{(p-2)+1}}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant \mathrm{C}\cdot\left[\|w\|_{L^\infty(B_1)} + \|\mathcal{J}_2\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^\infty(B_1)} + 1\right].$$

Por outro lado, para problemas de dupla fase sob as hipóteses $1 < \frac{q}{p} < 1 + \frac{\beta}{N}$ para $0 \leqslant \mathfrak{a} \in C^{0,\beta}(\Omega)$, sabemos pelos resultados de Colombo e Mingione (2015) que:

$$\begin{gathered} \min \int_\Omega \left(\frac{1}{p}|\nabla w|^p + \frac{\mathfrak{a}(x)}{q}|\nabla w|^q\right)dx \\ \Downarrow \\ \mathcal{L}[w] = -\mathrm{div}\left(\left(|\nabla w|^{p-2} + \mathfrak{a}(x)|\nabla w|^{q-2}\right)\nabla w\right) = 0 \\ \Downarrow \\ w \in C^{1,\alpha_0}_{\mathrm{loc}}. \end{gathered}$$

Assim, via a equivalência de soluções, veja Fang e Zhang (2022), podemos considerar:

$$-\mathcal{L}w(x) = \mathcal{G}_1(\nabla w, D^2 w) + \mathcal{G}_2(\nabla w, D^2 w) = 0,$$

com

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1 & = & \left[|\nabla w|^2 + \mathfrak{a}(x)|\nabla w|^2\right]\Delta w(x) \\ & \text{e} & \\ \mathcal{G}_2 & = & [(p-2) + (q-2)\,\mathfrak{a}(x)|\nabla w|^{q-p}]\,\Delta_\infty w(x) + |\nabla w|^{q-p}\nabla w\cdot\nabla\mathfrak{a}. \end{cases}$$

Portanto, ao aplicarmos o Teorema 4.6), obtemos a seguinte implicação:

$$\Delta_\infty w, \nabla\mathfrak{a}, \nabla w \in L^\infty(B_1) \quad \Rightarrow$$
$$[w]_{C^{1,\frac{1}{3}}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant \mathrm{C}\cdot\left[\|w\|_{L^\infty(B_1)} + \sqrt[3]{\|\mathcal{G}_2\|_{L^\infty(B_1)}} + 1\right].$$

4.4.2 Regularidade para o *Strong* $p(x)$−*Laplaciano*

Substituindo p por $p(x)$ na definição de $p-$Laplaciano, produz uma certa generalização, i.e. o Strong $p(x)-$Laplaciano:

$$-\Delta^S_{p(x)}u = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + |\nabla u|^{p(x)-2}\log(|\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla p.$$

Precisamente Siltakoski (2018) considerou a noção de viscosidade para a equação do $p(x)-$Laplaciano normalizado dada por

$$-\Delta^N_{p(x)}u := -\Delta u - \frac{p(x)-2}{|Du|^2}\Delta_\infty u = 0, \tag{4.9}$$

cujo interesse em tal classe de equações decorre de sua conexão entre EDPs e a Teoria da Probabilidade (jogos estocásticos de cabo de guerra com probabilidades espacialmente variadas).

Formalmente, tem-se

$$-|\nabla u|^{p(x)-2}\Delta^N_{p(x)}u = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + |\nabla u|^{p(x)-2}\log(|\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla p.$$

Consequentemente, as noções de soluções fraca e viscosidade podem ser baseadas na equação do Strong $p(x)-$Laplaciano:

$$-\Delta^S_{p(x)}u = 0. \tag{4.10}$$

De fato, Siltakoski provou que soluções de viscosidade de (4.9) são equivalentes às soluções de viscosidade de (4.10), desde que $p \in C^{0,1}(\Omega)$ e $\inf\limits_{\Omega} p(x) > 1$. Particularmente, soluções de viscosidade de (4.9) são $C^{1,\alpha'}_{\mathrm{loc}}$ para algum $\alpha' \in (0,1)$. Além disso, Siltakoski provou o seguinte resultado:

Lema 4.5. *Uma função u é uma solução de viscosidade de Equação* (4.9) *se, e somente se, for uma solução de viscosidade de*

$$-|\nabla u|^2\Delta u - (p(x)-2)\Delta_\infty u = -tr\left((|\nabla u|^2\mathrm{Id}_n + (p(x)-2)\nabla u \otimes \nabla u)D^2u\right) = 0, \tag{4.11}$$

Como uma consequência do Lema 4.5 e nossos resultados, provamos a seguinte estimativa precisa:

Teorema 4.7. *Seja u uma solução fraca limitada de* (4.10)*. Assuma também que as hipóteses do artigo de Siltakoski e o Lema 4.5 estão em vigor, e $\mathcal{G}[u] = (p(x)-2)\Delta_\infty u \in L^\infty(B_1)$. Então $u \in C^{1,\frac{1}{3}}_{loc}(B_1)$ e a seguinte estimativa se verifica:*

$$[u]_{C^{1,\frac{1}{3}}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant \mathrm{C}(universal)\cdot\left[\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \sqrt[3]{\|\mathcal{G}[u]\|_{L^\infty(B_1)}}\right].$$

Observação 4.5. *O Teorema 4.7 deve ser interpretado como uma espécie de forma fraca da conjectura $C^{1,\frac{1}{3}}$ para o $\infty-$Laplaciano não homogêneo, que afirma que se v é uma solução de viscosidade limitada de*

$$\Delta_\infty v = f \in L^\infty(B_1) \qquad \Rightarrow \qquad v \in C^{1,\frac{1}{3}}_{loc}(B_1).$$

5 Análise tangencial geométrica

5.1 Introdução

A Análise Tangencial Geométrica em EDPs refere-se a uma abordagem matemática sistemática baseada no conceito de que um problema que goza de boa regularidade, em geral estimativas elevadas, pode ser acessado "tangencialmente" ou de maneira "limite" por certas classes de EDPs, e.g., via certos processos de convergência/estabilidade ou Blow-up. Desta forma, via argumentos iterativos, o método, então, transporta, em uma certa medida, tais estimativas de regularidade para a classe original de EDPs pelas ferramentas analíticas/quantitativas como a *Desigualdade de Harnack* , estimativas a priori oriundas do Princípio do Máximo ou estimativas das derivadas, para citar alguns exemplos. Recomendamos a leitura dos seguintes ensaios de Teixeira (2016) e Teixeira e Urbano (2021), que descrevem com maestria alguns interessantes exemplos, em que tal maquinário de estudo possa ser empregada no contexto de EDPs elípticas e parabólicas.

5.2 EDPs totalmente não lineares e suas teorias de regularidade

O objetivo deste Capítulo é ilustrar o *Método Tangencial Geométrico* (ou a Análise Tangencial Geométrica), obtendo estimativas $C^{2,\alpha}$ locais para soluções de viscosidade de equações de segunda ordem, totalmente não lineares, da forma[1]

$$F(D^2u) = 0 \quad \text{in} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^n, \tag{5.1}$$

sob uma condição de pequenez apropriada em $e := 1 - \frac{\lambda}{\Lambda}$ (respectivamente $e_0 := \frac{\Lambda}{\lambda} - 1$), a qual mede a "abertura do grau de elipticidade" da classe que F pertence. Tais estimativas foram estabelecidas em da Silva (2019, Cap. 5) na Tese de Doutorado de J.V. da Silva.

Historicamente, se sabe que as soluções de viscosidade para equações elípticas totalmente não lineares como (5.1) são localmente de classe $C^{1,\alpha}$, para uma constante $\alpha \in (0,1]$, que dependa apenas da dimensão e das constantes de elipticidade, veja o trabalho original de Krylov e Safonov (1979), bem como o trabalho posterior devido a Caffarelli e Cabré (1995a, Seção 5.3).

Teorema 5.1 (Krylov e Safonov (1979)). *Seja F um operador uniformemente elíptico, $F(0) = 0$, e $u \in C^0(B_1)$ qualquer solução de viscosidade de* (5.1)*, então*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant \mathrm{C}\|u\|_{L^\infty(B_1)}$$

para algum $\alpha \in (0,1)$ (pequeno) e $\mathrm{C} > 0$ dependendo de n, λ e Λ.

Por meio da jornada de encontrar soluções clássicas, ou seja, C^2, para equações totalmente não lineares, os resultados de Evans (1982a) e Krylov (1983) são dignos de nota e inovadores. Tais resultados afirmam que, sob hipótese de concavidade ou convexidade em F, as soluções de (5.1) são $C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(B_1)$, para algum $\alpha \in (0,1)$, veja também Caffarelli e Cabré (1995a, Cap. 6). Recomendamos ao leitor o trabalho de Caffarelli e Silvestre (2010) para uma prova moderna e mais simplificada de tal resultado.

Teorema 5.2 (Evans (1982a) e Krylov (1983)). *Seja F qualquer operador uniformemente elíptico e convexo (ou côncavo) com $F(0) = 0$. Seja $u \in C^0(B_1)$ qualquer solução de viscosidade de* (5.1)*, então*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant \mathrm{C}\|u\|_{L^\infty(B_1)}$$

para algum $\alpha \in (0,1)$ e $\mathrm{C} > 0$ dependendo de n, λ e Λ.

---

[1] Uma função $u \in C^0(B_1)$ é dita uma subsolução (respectivamente supersolução) no sentido da viscosidade de $F(D^2u) = 0$ em B_1 se para toda função teste $\phi \in C^2(B_1)$ tal que ϕ toca u por cima (respectivamente por baixo) em $x_0 \in B_1$ (i.e., $u \leqslant \phi$ (resp. $u \geqslant \phi$) em B_1 e $u(x_0) = \phi(x_0)$), então temos que $F(D^2\phi(x_0)) \geqslant 0$ (resp. $F(D^2\phi(x_0)) \leqslant 0$).

Assim, $u \in C^0(B_1)$ é solução de viscosidade se ela for simultaneamente uma subsolução e uma supersolução no sentido da viscosidade.

Uma das maiores importâncias do *Teorema de Evans–Krylov* é que nos permite resolver o Problema de Dirichlet para EDPs totalmente não lineares via o método de continuidade, fornecendo assim soluções clássicas - veja Caffarelli e Cabré (1995a, Cap. 9).

No cenário bidimensional, Nirenberg prova, em Nirenberg (1953), que soluções são de fato C^2.

Teorema 5.3 (Nirenberg'53)**.** *Seja* $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ *um operador uniformemente elíptico e suave. Seja* $u \in C^0(B_1)$ *qualquer solução para* (5.1). *Então* $u \in C^\infty_{loc}(B_1)$.

Recentemente Yuan (2001) provou uma estimativa $C^{2,\alpha}$ para a equação Lagrangiana especial em $\mathbb{R}^3$:

$$F(D^2u) := \big(\arctan(e_1(D^2u)) + \arctan(e_2(D^2u)) + \arctan(e_3(D^2u))\big) - c = 0$$

em que $c \in \mathbb{R}$ e $(e_i)_{i=1}^n$ são os autovalores de D^2u. Além disso, essa é a equação para aqueles gráficos Lagrangianos $\{(x, \nabla u(x))\}$ que são mínimos em $\mathbb{R}^6$.

Também devemos destacar o trabalho Bhattacharya e Warren (2021), devido a Bhattacharya e Warren, que obtiveram estimativas $C^{2,\alpha}$ interiores para soluções de viscosidade de $F(D^2u) = f \in C^{0,\alpha}(B_1)$ sob a hipótese que F é uniformemente diferenciável e DF se encontra em um conjunto de diâmetro $\varepsilon_0 > 0$.

A questão de saber se qualquer operador elíptico totalmente não linear desfrutaria de uma Teoria de Regularidade C^2 a priori atraiu a comunidade matemática por três décadas. Nessa direção, os contraexemplos para regularidade abaixo de $C^{1,1}$, devidos a Nadirashvili e Vlăduţ (2007, 2008, 2013), põem um ponto final no caso.

Teorema 5.4 (Nadirashvili e Vlăduţ (2007, 2008, 2013))**.** *Existem soluções para* (5.1) *que não são* C^2. *Tais contraexemplos existem em dimensão* $n \geqslant 5$. *Além disso, para todo* $\tau \in (0, 1)$*, existe uma dimensão* n *e constantes de elipticidade* λ *e* Λ*, de modo que existem soluções* u *de* (5.1) *com* $u \notin C^{1,\tau}$

Não é sabido o que ocorre nas dimensões $n = 3$ e $n = 4$, sendo provavelmente um dos problemas em aberto mais proeminentes em Teoria de Regularidade de EDPs Elípticas Moderna.

Por outro lado, os resultados de Nadirashvili–Vlăduţ abrem uma linha de investigação ainda mais ampla e desafiadora. De fato, em vista da impossibilidade de uma Teoria de Existência Geral para soluções clássicas para equações totalmente não lineares, torna-se um tema central de pesquisa obter condições adicionais em F e/ou em u a fim de estabelecer estimativas de classe C^2.

Nesse ponto, devemos parafrasear Cabré e Caffarelli em Cabré e Caffarelli (2003, pag. 2):

"Quais hipóteses sobre F, entre a convexidade de F e nenhuma suposição, e talvez dependendo da dimensão n, garantem que as soluções de (5.1) são clássicas?"

Para respondermos o questionamento levantado por Cabré e Caffarelli, permita-nos considerar qualquer par de constantes de elipticidade $0 < \lambda \leqslant \Lambda < \infty$. Então podemos com a linguagem das soluções de viscosidade interpretar a equação (5.1) (para algum operador uniformemente (λ, Λ)-elíptico) como

$$\mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(D^2u) \leqslant 0 \leqslant \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(D^2u),$$

em que $\mathcal{M}^{\pm}_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X})$ representam os Operadores Extremais de Pucci definidos por

$$\mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}) = \lambda \sum_{e_i>0} e_i(\mathrm{X}) + \Lambda \sum_{e_i<0} e_i(\mathrm{X}) \quad \text{e} \quad \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}) = \Lambda \sum_{e_i>0} e_i(\mathrm{X}) + \lambda \sum_{e_i<0} e_i(\mathrm{X})$$

e $(e_i(\mathrm{X}))_{i=1}^n$ são os autovalores da matriz simétrica $\mathrm{X} \in \mathrm{Sim}(n)$.

Neste ponto, podemos averiguar que se $\frac{\lambda}{\Lambda} \to 1$, então o modelo converge para perfis harmônicos. Dessa forma, pode-se interpretar a equação de Laplace $\Delta\mathfrak{h} = 0$ como a equação geométrica tangencial ou equação limite da "variedade" formada por aqueles operadores elípticos totalmente não lineares F que cumprem $\mathfrak{e} := 1 - \frac{\lambda}{\Lambda} = \mathrm{o}(1)$. Por conseguinte, em qualquer subescala, é possível encontrar um perfil harmônico próximo a u, desde que a abertura de elipticidade seja suficiente pequena. Finalmente, ao iterarmos tal argumento, obtemos que o gráfico de u pode ser aproximado por um polinômio quadrático, cujo erro é da ordem $\mathrm{O}\left(\varrho^{2+\alpha}\right)$ para qualquer $\alpha \in (0,1)$ e $\varrho \in (0, 1/2)$ dados. Tal argumentação estabelece a prova do seguinte Teorema do 5.5.

Portanto daremos a seguinte contribuição teórica nesta linha de pesquisa.

Teorema 5.5. *Seja $u \in C^0(B_1)$ uma solução de viscosidade limitada para* (5.1)*. Dado $\alpha \in (0,1)$, existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(n, \alpha) > 0$ tal que, se*

$$1 - \frac{\lambda}{\Lambda} < \epsilon_0 \quad \left(\textit{ou respectivamente } \frac{\Lambda}{\lambda} - 1 < \epsilon_0\right),$$

então u é $C^{2,\alpha}$ na origem, i.e.,

$$\left| u(x) - \left[u(0) + Du(0)\cdot x + \frac{1}{2}x^T \cdot D^2u(0)\cdot x \right] \right| \leqslant \mathfrak{C}.\|u\|_{L^\infty(B_1)}.\|x\|^{2+\alpha} \qquad (5.2)$$

para uma constante $\mathfrak{C} > 0$, dependendo de parâmetros universais e α.

Uma vez estabelecida tal estimativa, segue-se, então, pela Teoria de Regularidade $C^{2,\alpha}$ de Caffarelli (1989a), veja também Caffarelli e Cabré (1995a), que a mesma classe de estimativas de regularidade pode ser estabelecida para equações homogêneas com coeficientes Hölder contínuas. De particular interesse, o Teorema 5.5 cobre *Equações do Tipo de Isaac* , que aparecem no controle estocástico e na Teoria de Jogos Diferenciais:

$$F(x, D^2u) = \sup_{\beta\in\mathcal{B}} \inf_{\gamma\in\mathcal{A}} (L_{\gamma\beta}u(x) - f_{\gamma\beta}(x)) = 0 \quad \text{em} \quad B_1, \tag{5.3}$$

sendo $f_{\gamma\beta} : B_1 \to \mathbb{R}$ Hölder contínuos e $L_{\gamma\beta}u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{\gamma\beta}^{ij}(x)\partial_{ij}u(x)$ uma família de operadores elípticos com coeficientes Hölder contínuos e constantes de elipticidade λ e Λ, satisfazendo $1 - \frac{\lambda}{\Lambda} < \epsilon_0$ (ou respectivamente $\frac{\Lambda}{\lambda} - 1 < \epsilon_0$), em que ϵ_0 é dado pelo Teorema 5.5.

Corolário 5.1. *Sejam* $\alpha \in (0,1)$ *e* $u \in C^0(B_1)$ *solução de viscosidade de* (5.3) *com* $f_{\gamma\beta} \in C^{0,\alpha}(B_1)$ *e* $(a_{\gamma\beta}^{ij} - \delta_{ij}) \in C^{0,\alpha}(B_1)$*. Então, existe* $\epsilon_0' = \epsilon_0'(n,\alpha) \ll 1$ *tal que se* $\left\| \frac{a_{\gamma\beta}^{ij}}{\lambda} - \delta_{ij} \right\|_{L^\infty(B_1)} < \epsilon_0'$*, então* $u \in C^{2,\alpha}$ *na origem. Além disso, a estimativa* (5.2) *se verifica.*

Observe que o Corolário 5.1 pode ser concebido como uma espécie de estimativas do tipo Cordes–Nirenberg[2] para esse contexto de EDPs totalmente não lineares (cf. Teixeira (2016) para outras introspecções sobre o Método Tangencial Geométrico).

5.3 Método Tangencial Geométrico: Compacidade de operadores próximos ao Laplaciano

Afirmamos que se o operador F estiver "próximo ao operador de Laplace", e u for uma solução de viscosidade normalizada para $F(D^2u) = 0$ em B_1, então podemos encontrar uma função harmônica próxima a u (em um sentido adequado) em um subdomínio interior.

[2] Estimativas de Cordes–Nirenberg Cordes (1956, Satz 8, página 303), Cordes (1961, Theorem 2) e Nirenberg (1954, Lemma 3): Suponha que u é um solução limitada de uma equação linear uniformemente elíptica na forma de não divergente

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) = f(x) \quad \text{em} \quad B_1.$$

Seja $\alpha \in (0,1)$ e suponha que $\|a_{ij} - \delta_{ij}\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \delta = \delta(\alpha)$ para um $\delta > 0$ pequeno. Então, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B_{1/2}})$ e

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B_{1/2}})} \leqslant \mathrm{C}\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)}\right).$$

Portanto usamos um método da compacidade para provar a regularidade $C^{2,\alpha}$ para (5.1), em que a convexidade/concavidade ou suavidade para F não serão necessárias.

Lema 5.1 (Lema de Aproximação 1)**.** *Seja $u \in C^0(B_1)$ uma solução de viscosidade para (5.1) com $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1$. Dado $\alpha \in (0,1)$, existem constantes universais $\varepsilon_0 > 0$ e $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ tais que se*

$$1 - \frac{\lambda}{\Lambda} < \varepsilon_0 \quad (\textit{ou respectivamente } \frac{\Lambda}{\lambda} - 1 < \epsilon_0), \tag{5.4}$$

então podemos encontrar um polinômio quadrático

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{2} x^T \cdot \mathfrak{a} \cdot x + \mathfrak{b} \cdot x + \mathfrak{c}$$

satisfazendo

$$F(D^2\mathfrak{p}) = 0 \tag{5.5}$$

$$\|\mathfrak{a}\|_{Sim(n)} + \|\mathfrak{b}\| + |\mathfrak{c}| \leqslant \mathfrak{C}(n, \lambda, \Lambda) \tag{5.6}$$

tal que

$$\sup_{B_\rho} |u(x) - \mathfrak{p}(x)| \leqslant \rho^{2+\alpha}.$$

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que o Lema não seja válido. Isso significa que existem sequências, F_k, λ_k, Λ_k e u_k, satisfazendo

$$\mathrm{X} \mapsto F_k(\mathrm{X}) \text{ é } (\lambda_k, \Lambda_k)\text{-elíptico}, \tag{5.7}$$

$$\mathrm{e}_k := 1 - \frac{\lambda_k}{\Lambda_k} = \mathrm{o}(1), \tag{5.8}$$

$$\|u_k\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1 \text{ e } F_k(D^2 u_k) = 0, \tag{5.9}$$

no sentido da viscosidade, no entanto

$$\sup_{B_{\rho_0}} |u_k(x) - \mathfrak{p}(x)| > \rho_0^{2+\alpha} \tag{5.10}$$

para algum $\rho_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, que será determinado a posteriori, e todo polinômio quadrático $\mathfrak{p}$ satisfazendo

$$F_k(D^2\mathfrak{p}) = 0.$$

A prova será dividida em três casos:

Caso 1: Existem constantes λ_0 e Λ_0 tais que

$$0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_k \leqslant \Lambda_k \leqslant \Lambda_0 < \infty; \tag{5.11}$$

Nesse caso, todos os F_k são $(\lambda_0, \Lambda_0)-$elípticos; assim, pelo Teorema de Hölder regularidade de Krylov–Safonov[3] [4], módulo uma subsequência, podemos assumir que $u_k \to u_\infty$ local uniformemente. Além disso, módulo uma subsequência, $\lambda_k \to \lambda_\infty$ e $\Lambda_k \to \Lambda_\infty$. No entanto, de (5.8), temos a igualdade

$$\lambda_\infty = \Lambda_\infty = \mu_0. \tag{5.12}$$

Além disso, pela elipticidade uniforme de $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$, passando uma vez mais para uma subsequência se necessário $F_k \to F_\infty$ localmente uniformemente em $\mathrm{Sim}(n)$. Claramente, de (5.12), temos que

$$F_\infty(\mathrm{M}) = \mu_0.\mathrm{tr}(\mathrm{M}),$$

Por estabilidade da noção de soluções de viscosidade[5], concluímos que

$$\Delta u_\infty = 0 \quad \text{em } B_{\frac{1}{2}}.$$

Como u_∞ é suave, pela equivalência entre harmonicidade no sentido clássico e de viscosidade, veja Capítulo 2, definimos

$$\mathfrak{P}(x) := \frac{1}{2}x^T \cdot D^2u_\infty(0)\cdot x + Du_\infty(0)\cdot x + u_\infty(0).$$

Além disso, dado que $\|u_\infty\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1$, seguem das estimativas C^3 para u_∞ que

$$\sup_{B_r} |u_\infty(x) - \mathfrak{P}(x)| \leqslant \mathrm{c}_0 r^3,$$

---

[3]Krylov e Safonov (1979): Sejam $0 < \lambda \leqslant \Lambda < \infty$ constantes de elipticidade e $v \in C^0(B_1)$ qualquer solução para

$$\mathcal{M}^-_{\Lambda,\Lambda}(D^2v) \leqslant 0 \leqslant \mathcal{M}^+_{\Lambda,\Lambda}(D^2v) \quad \text{em} \quad B_1$$

no sentido da viscosidade. Então

$$\|v\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leqslant \mathrm{C}(n,\lambda,\Lambda)\|v\|_{L^\infty(B_1)}$$

para algum $\alpha \in (0,1)$ (pequeno).

Em outras palavras, soluções para qualquer equação na forma não divergente com coeficientes mensuráveis e limitados gozam de um módulo de continuidade Hölder universal.

[4]Veja também o manuscrito recente de Mooney (2019) para uma prova simplificada do Teorema de Krylov–Safonov.

[5]Estabilidade: Seja $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de operadores $(\lambda,\Lambda)-$uniformemente elípticos e seja $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^0(B_1)$ tal que $F_k(D^2u_k) = 0$ em B_1 no sentido da viscosidade. Assuma que $F_k \to F$ uniformemente em conjuntos compactos e $u_k \to u$ uniformemente em conjuntos compactos de B_1. Então $F(D^2u) = 0$ em B_1 no sentido da viscosidade.

para uma constante universal $c_0 = c_0(n)$. Assim, se escolhermos

$$\rho_0 := \min\left\{ \sqrt[1-\alpha]{\frac{1}{4c_0}}, \frac{1}{2} \right\}$$

temos que tal escolha dependa apenas de n e α. Logo temos que

$$\sup_{B_{\rho_0}} |u_\infty(x) - \mathfrak{P}(x)| \leqslant \frac{1}{4}\rho_0^{2+\alpha}.$$

Observação 5.1. *Como F_k são (λ_k, Λ_k)-elípticos e*

$$\lim_{k\to\infty} F_k(D^2\mathfrak{P}) = \Delta\mathfrak{P} = 0,$$

é possível encontrar uma sequência de números reais $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ com $\delta_k = o(1)$, para a qual o polinômio quadrático

$$\mathfrak{P}_k(x) := \mathfrak{P}(x) + \frac{1}{2}\delta_k\|x\|^2 \quad \textit{satisfaz} \quad F_k(D^2\mathfrak{P}_k) = 0 \quad \textit{em} \quad B_{\frac{1}{2}}.$$

De fato, se $F_k(D^2\mathfrak{P}) = 0$, então escolhemos $\delta_k = 0$. Suponha, então, que $F_k(D^2\mathfrak{P}) \neq 0$ e considere o operador uniformemente elíptico:

$$G_{\delta_k}(D^2\mathfrak{P}) := F_k(D^2\mathfrak{P} + \delta_k \mathrm{Id}_n) = F_k(D^2\mathfrak{P}_k).$$

Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, devemos encontrar $\delta_k \in \mathbb{R}$ tal que $G_{\delta_k}(D^2\mathfrak{P}) = 0$. De fato, se $F_k(D^2\mathfrak{P}) > 0$, pela condição de (λ_k, Λ_k)-elipticidade uniforme de F_k, temos que

$$\begin{array}{rcl} G_{\delta_k}(D^2\mathfrak{P}) & = & F_k(D^2\mathfrak{P} + \delta_k \mathrm{Id}_n) \\ & \leqslant & \mathcal{M}^+_{\lambda_k,\Lambda_k}(\delta_k \mathrm{Id}) + F_k(D^2\mathfrak{P}) \\ & = & n\delta_k\lambda_k + F_k(D^2\mathfrak{P}) \\ & < & 0, \end{array}$$

desde que $\delta_k \in \left(-\infty, -\frac{F_k(D^2\mathfrak{P})}{n\lambda_k}\right)$. Além disso, observe que

$$G_0(D^2\mathfrak{P}) = F_k(D^2\mathfrak{P}) > 0.$$

Assim, segue da continuidade do operador $\delta_k \mapsto G_{\delta_k}(D^2\mathfrak{P})$ que existe $\delta_k \in \left[-\frac{F_k(D^2\mathfrak{P})}{n\lambda_k}, 0\right)$ tal que $G_{\delta_k}(D^2\mathfrak{P}) = 0$.

Para o caso em que $F_k(D^2\mathfrak{P}) < 0$, obtemos, então, $\delta_k \in \left(0, -\frac{F_k(D^2\mathfrak{P})}{n\lambda_k}\right]$. Dessa forma, podemos concluir que

$$|\delta_k| \in \left(0, \frac{|F_k(D^2\mathfrak{P})|}{n\lambda_k}\right] = \left(0, \frac{|F_k(D^2\mathfrak{P})|}{n\Lambda_k(1-e_k)}\right] \quad \text{e} \quad \delta_k \to 0.$$

Finalmente concluímos que

$$\begin{aligned}\sup_{B_{\rho_0}} |u_k(x) - \mathfrak{P}_k(x)| &\leqslant \sup_{B_{\rho_0}} |u_k(x) - u_\infty(x)| + \sup_{B_{\rho_0}} |u_\infty(x) - \mathfrak{P}(x)| \\ &+ \sup_{B_{\rho_0}} |\mathfrak{P}_k(x) - \mathfrak{P}(x)| \\ &\leqslant \frac{1}{4}\rho_0^{2+\alpha} + \frac{1}{4}\rho_0^{2+\alpha} + \frac{1}{2}|\delta_k|\rho_0^2 \\ &\leqslant \rho_0^{2+\alpha},\end{aligned}$$

desde que $|\delta_k| \in \left(0, \min\left\{\rho_0^\alpha, \frac{|F_k(D^2\mathfrak{P})|}{n\Lambda_k(1-e_k)}\right\}\right]$, o que claramente contradiz (5.10).

Caso 2: A sequência $\lambda_k \to 0$.

Nesse caso, definimos $\mathcal{G}_k := \frac{1}{\lambda_k} \cdot F_k$. Claramente $\mathcal{G}_k$ é $\left(1, \dfrac{\Lambda_k}{\lambda_k}\right)$-elíptico. Assim repetimos a mesma demonstração do Caso 1.

Caso 3: A sequência $\Lambda_k \to \infty$.

Nesse caso, definimos $\mathcal{G}_k := \frac{1}{\Lambda_k} \cdot F_k$. É facilmente verificado que $\mathcal{G}_k$ é $\left(\dfrac{\lambda_k}{\Lambda_k}, 1\right)$-elíptico e voltamos ao Caso 1.

□

5.3.1 Processo de iteração geométrica

Na sequência, iremos iterar o Lema 5.1 em bolas diádicas apropriadas para obter o decaimento preciso da oscilação da diferença entre u e uma sequência convergente de polinômios quadráticos $\mathfrak{p}_k$.

Lema 5.2 (Processo iterativo)**.** *Sob as hipóteses do Lema* (5.1)*, podemos encontrar uma sequência de polinômios quadráticos*

$$\mathfrak{p}_k(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot \mathfrak{a}_k \cdot x + \mathfrak{b}_k \cdot x + \mathfrak{c}_k$$

satisfazendo

$$F(\mathfrak{a}_k) = 0 \tag{5.13}$$

$$\|\mathfrak{a}_k\|_{Sim(n)} + \|\mathfrak{b}_k\| + |\mathfrak{c}_k| \leqslant \mathfrak{C}(n, \lambda, \Lambda) \tag{5.14}$$

$$\rho^{2k}|\mathfrak{a}_{k+1} - \mathfrak{a}_k| + \rho^k|\mathfrak{b}_{k+1} - \mathfrak{b}_k| + |\mathfrak{c}_{k+1} - \mathfrak{c}_k| \leqslant \mathfrak{C}\rho^{k(2+\alpha)} \tag{5.15}$$

tal que

$$\sup_{B_{\rho^k}} |u(x) - \mathfrak{p}_k(x)| \leqslant \rho^{(2+\alpha)k}. \tag{5.16}$$

Demonstração. A prova é dada via processo de indução. O caso $k = 1$ é justamente o enunciado do Equação (5.4). Suponha agora que verificamos o k-ésimo passo da indução, ou seja, existe um polinômio quadrático $\mathfrak{p}_k$ satisfazendo (5.13), (5.14), (5.15) e (5.16). Assim definimos

$$F_k(\mathrm{M}) := \frac{F(\rho^{\alpha k}\mathrm{M} + \mathfrak{a}_k)}{\rho^{\alpha k}} \quad \text{e} \quad v_k(x) := \frac{(u - \mathfrak{p}_k)(\rho^k x)}{\rho^{(2+\alpha)k}}.$$

Pela hipótese de indução, $\|v_k\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1$. Além disso, é fácil verificar que F_k é (λ, Λ)-elíptico e

$$F_k(D^2 v_k) = 0 \quad \text{em} \quad B_1.$$

no sentido da viscosidade, bem como $F_k(0) = 0$. Assim, podemos aplicar o Lema (5.2) a v_k e obter um polinômio quadrático

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_k(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot \widetilde{\mathfrak{a}}_k \cdot x + \widetilde{\mathfrak{b}}_k \cdot x + \widetilde{\mathfrak{c}}_k \tag{5.17}$$

$$F_k(D^2\widetilde{\mathfrak{p}}_k) = 0 \tag{5.18}$$

com $\|\widetilde{\mathfrak{a}}_k\|_{\mathrm{Sim}(n)} + \|\widetilde{\mathfrak{b}}_k\| + |\widetilde{\mathfrak{c}}_k| \leqslant \mathfrak{C}$, para o qual

$$\sup_{B_\rho} |v_k(x) - \widetilde{\mathfrak{p}}_k(x)| \leqslant \rho^{2+\alpha}. \tag{5.19}$$

Agora se definirmos

$$\mathfrak{p}_{k+1}(x) := \mathfrak{p}_k(x) + \rho_0^{k(2+\alpha)}\widetilde{p}_k(\rho^{-k}x)$$

temos que

$$\mathfrak{a}_{k+1} := \mathfrak{a}_k + \rho^{k\alpha}\widetilde{\mathfrak{a}}_k, \quad \mathfrak{b}_{k+1} := \mathfrak{b}_k + \rho^{k(1+\alpha)}\widetilde{\mathfrak{b}}_k \quad \text{e} \quad \mathfrak{c}_{k+1} := \mathfrak{c}_k + \rho^{k(2+\alpha)}\widetilde{\mathfrak{c}}_k. \tag{5.20}$$

Por fim, fazendo o reescalonamento em (5.19) com

$$\mathfrak{p}_{k+1}(x) := \frac{1}{2}x^T \mathfrak{a}_{k+1} \cdot x + \mathfrak{b}_{k+1} \cdot x + \mathfrak{c}_{k+1}$$

obtemos que

$$\sup_{B_{\rho^{k+1}}} |u(x) - \mathfrak{p}_{k+1}(x)| \leqslant \rho^{(k+1)(2+\alpha)}$$

e, pela sentença (5.18), temos que $F(\mathfrak{a}_{k+1}) = 0$, e a prova do Lema está completa. $\square$

5.3.2 Estimativas de regularidade $C^{2,\alpha}$ locais

Finalmente somos capazes de finalizar a demonstração do Teorema 5.5.

Prova do Teorema 5.5. Note que, da estimativa obtida no Lema 5.2, a sequência $(\mathfrak{p}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para um polinômio quadrático

$$\mathfrak{p}_\infty(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot \mathfrak{a}_\infty \cdot x + \mathfrak{b}_\infty \cdot x + \mathfrak{c}_\infty.$$

De fato, da sentença (5.15), existe uma constante universal $\mathfrak{C} > 0$ tal que

$$\|\mathfrak{a}_{k+1} - \mathfrak{a}_k\|_{\mathrm{Sim}(n)} \leqslant \mathfrak{C}\rho^{k\alpha}, \quad \|\mathfrak{b}_{k+1} - \mathfrak{b}_k\| \leqslant \mathfrak{C}\rho^{k(1+\alpha)} \quad \text{e} \quad |\mathfrak{c}_{k+1} - \mathfrak{c}_k| \leqslant \mathfrak{C}\rho^{k(2+\alpha)}.$$

Assim tais sequências são sequências de Cauchy e dessa forma

$$\mathfrak{a}_\infty = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{a}_k, \quad \mathfrak{b}_\infty = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{b}_k, \quad \text{e} \quad \mathfrak{c}_\infty = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{c}_k.$$

Além disso, obtemos os seguintes controles do módulo de convergência:

$$|\mathfrak{c}_\infty - \mathfrak{c}_k| \leqslant \frac{\mathfrak{C}\rho^{k(2+\alpha)}}{1-\rho^{2+\alpha}}, \quad \|\mathfrak{b}_\infty - \mathfrak{b}_k\| \leqslant \frac{\mathfrak{C}\rho^{k(1+\alpha)}}{1-\rho^{1+\alpha}} \quad \text{e} \quad \|\mathfrak{a}_\infty - \mathfrak{a}_k\|_{\mathrm{Sim}(n)} \leqslant \frac{\mathfrak{C}\rho^{k\alpha}}{1-\rho^{\alpha}}. \tag{5.21}$$

Finalmente, dado $r \in (0, \rho)$, seja k um inteiro tal que $\rho^{k+1} < r \leqslant \rho^k$. Assim, utilizando as sentenças (5.16) e (5.21), obtemos que

$$\begin{aligned} \sup_{B_r} |u(x) - \mathfrak{p}_\infty(x)| &\leqslant \sup_{B_{\rho^k}} |u(x) - \mathfrak{p}_\infty(x)| \\ &\leqslant \sup_{B_{\rho^k}} |u(x) - \mathfrak{p}_k(x)| + \sup_{B_{\rho^k}} |\mathfrak{p}_k(x) - \mathfrak{p}_\infty(x)| \\ &\leqslant \mathfrak{C}_0\rho^{k(2+\alpha)} \\ &\leqslant \hat{\mathfrak{C}}_0 r^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

e a prova do Teorema 5.5 está completa devido ao mergulho de Dini-Campanato, veja Capítulo 1 para detalhes. Além disso, um argumento de recobrimento assegura que podemos provar o resultado para qualquer ponto $x_0 \in B_{1/2}$. □

Gostaríamos de deixar para que o leitor medite o seguinte resultado, cuja prova segue uma estratégia similar àquela empregada na prova do Teorema 5.5 e do Teorema de Schauder para o Laplaciano, cf. Wu e Niu (2023) para um resultado relacionado.

Teorema 5.6. *Seja $u \in C^0(B_1)$ uma solução de viscosidade limitada para*

$$F(D^2u) = f(x) \quad em \quad B_1.$$

Para todo $\alpha \in (0,1)$ *tal que* $f \in C^{0,\alpha}(B_1)$, *existe* $\epsilon_0 = \epsilon_0(n,\alpha) > 0$ *tal que, se*

$$1 - \frac{\lambda}{\Lambda} < \epsilon_0,$$

então u *é* $C^{2,\alpha}_{loc}(B_1)$, *i.e., existe uma constante* $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(n,\lambda,\Lambda,\alpha)$ *tal que*

$$[u]_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leqslant \mathfrak{C}.\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1)}\right). \tag{5.22}$$

Em conclusão, vamos dar uma ideia heurística do porquê o Corolário 5.1 funciona.

Prova do Corolário 5.1. Observe que se

$$L_{\gamma\beta}u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}_{\gamma\beta}(x)\partial_{ij}u(x)$$

para uma matriz simétrica e (λ,Λ)-uniformemente elíptica $\mathbb{A}(x) = (a^{ij}_{\gamma\beta}(x))^n_{i,j=1}$, então

$$L_{\gamma\beta}u(x) = \Delta u(x) + \sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}_{\gamma\beta}(x) - \delta_{ij})\partial_{ij}u(x).$$

Logo, devemos assegurar que $L_{\gamma\beta}u(x) \simeq \Delta u(x)$ quando, por exemplo, $\frac{\Lambda}{\lambda} - 1 = \mathrm{o}(1)$. De fato, afirmamos que dado $\epsilon_0' > 0$, então

$$\frac{\Lambda}{\lambda} - 1 < \frac{1}{2}\epsilon_0' \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{a^{ij}_{\gamma\beta}}{\lambda} - \delta_{ij} \right\|_{L^\infty(B_1)} < \epsilon_0'$$

logo podemos implementar a estratégia da prova do Teorema 5.5.

De fato, sejam $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$. Agora, para $x_0 \in B_1$, pela condição de elipticidade uniforme da matriz $\mathbb{A}$, temos que

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \langle a^{ij}_{\gamma\beta}(x_0)\xi,\xi\rangle \leqslant \Lambda|\xi|^2 \quad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{5.23}$$

Agora, escolhendo $\xi = e_k$ (para $1 \leqslant k \leqslant n$) em (5.23), temos que $\lambda \leqslant a^{kk}_{\gamma\beta}(x_0) \leqslant \Lambda$. Logo obtemos a seguinte conclusão:

$$\left|\frac{a^{kk}_{\gamma\beta}(x_0)}{\lambda} - 1\right| \leqslant \frac{\Lambda}{\lambda} - 1 < \frac{1}{2}\epsilon_0'. \tag{5.24}$$

Por outro lado, ao tomarmos $\xi = e_i + e_j$ em (5.23), temos que

$$2\lambda \leqslant a^{ii}_{\gamma\beta}(x_0) + a^{jj}_{\gamma\beta}(x_0) + a^{ij}_{\gamma\beta}(x_0) + a^{ji}_{\gamma\beta}(x_0) \leqslant 2\Lambda,$$

o qual implica que

$$0 \leqslant \left(\frac{a^{ii}_{\gamma\beta}(x_0)}{\lambda} - 1\right) + \left(\frac{a^{jj}_{\gamma\beta}(x_0)}{\lambda} - 1\right) + 2\frac{a^{ij}_{\gamma\beta}(x_0)}{\lambda} \leqslant 2\left(\frac{\Lambda}{\lambda} - 1\right).$$

Desta forma, pela desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned} \left|\frac{a^{ij}_{\gamma\beta}(x_0)}{\lambda} - 0\right| &\leqslant \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{\Lambda}{\lambda} - 1\right) + \left|\frac{a^{ii}_{\gamma\beta}(x_0)}{\lambda} - 1\right| + \left|\frac{a^{jj}_{\gamma\beta}(x_0)}{\lambda} - 1\right|\right] \\ &< \epsilon_0'. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Portanto, pelas sentenças (5.24) e (5.25) concluímos que

$$\frac{\Lambda}{\lambda} - 1 < \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \left\|\frac{a^{ij}_{\gamma\beta}}{\lambda} - \delta_{ij}\right\|_{L^\infty(B_1)} < \epsilon_0'$$

e, consequentemente, podemos aplicar a estratégia empregada no Teorema 5.5 para $\epsilon_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0'$. □

Observação 5.2. *Devemos destacar que Cordes (1956) estabelece estimativas $C^{1,\alpha}$ locais para*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) = 0 \quad em \quad B_1,$$

bem como um Teorema de Existência para o Problema de Dirichlet, sob uma hipótese a qual ele denotou de condição K_ε'. A saber, para $n \geqslant 2$, devemos impor que

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - \delta_{ij})^2 < \frac{n^2 + n}{2n^2 - 2n - 1}.$$

Além disso, é interessante observar que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n}{2n^2 - 2n - 1} = \frac{1}{2}$.

5.4 Método tangencial geométrico (Bis): Soluções "Flat" são clássicas

Nesta parte, estabelecemos estimativas do tipo Schauder para soluções flat, ou seja, com magnitude/norma suficientemente pequena, para equações totalmente não lineares, não convexas/côncavas, da seguinte forma:

$$F(D^2u) = f(x) \quad \text{em} \quad B_1 \tag{5.26}$$

desde que o termo fonte f goze de um módulo de continuidade do tipo Hölder e F seja diferenciável.

Levando em consideração a impossibilidade de uma Teoria de Existência Geral para soluções clássicas para equações totalmente não lineares, obter condições adicionais em F, f e u para estabelecer estimativas $C^{2,\alpha}_{\text{loc}}$ tornou-se um tema central de pesquisa nos últimos anos. Nesse sentido, o monumental artigo de Savin em Savin (2007, Teorema 1.3) é o trabalho pioneiro no que diz respeito à suavidade de soluções de viscosidade "flat" no caso elíptico e não convexo (ou não côncavo).

Teorema 5.7 (Savin'07)**.** *Seja $u \in C^0(B_1)$ uma solução de viscosidade de* (5.26) *(com $f \equiv 0$). Suponha que F é um operador de classe C^2, na vizinhança da origem de Sim(n), uniformemente (λ, Λ)-elíptico tal que $|D^2 F| \leqslant \mathrm{K}_F$. Existe uma constante $0 < \kappa = \kappa(\lambda, \Lambda, \mathrm{K}_F) \ll 1$ tal que se*

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \kappa,$$

então $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(B_1)$. Além disso, tal solução satisfaz

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leqslant \mathrm{C}(universal)\|u\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Posteriormente Armstrong, Silvestre e Smart, bem como dos Prazeres e Teixeira em Armstrong, Silvestre e Smart (2012, Proposição 4.1) e dos Prazeres e Teixeira (2016, Teorema 2.2), veja também da Silva e dos Prazeres em da Silva e dos Prazeres (2019) para a contraparte parabólica com dados Dini contínuos, surgem com uma abordagem sistemática remodelada para soluções "flat" de (5.26) baseada na Análise Tangencial Geométrica para dados Hölder contínuos e F não necessariamente C^2. Em termos mais precisos, eles assumem que

(H1) F é uniformemente (λ, Λ)-elíptico e $\mathrm{M} \mapsto F(\mathrm{M})$ é diferenciável, i.e., existe um módulo de continuidade $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que

$$|D_{\mathrm{M}} F(\mathrm{X}) - D_{\mathrm{M}} F(\mathrm{Y})| \leqslant \omega(\|\mathrm{X} - \mathrm{Y}\|) \quad \text{para toda} \quad \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{Sim}(n).$$

(H2) Para outro módulo de continuidade $\tau : [0, \infty) \to [0, \infty)$ segue que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \tau(|x - y|) \quad \text{para todo} \quad x, y \in B_1.$$

Em outras palavras,

$$[f]_{C^{0,\alpha}(B_1)} = \sup_{\substack{x,y \in B_1 \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\tau(|x - y|)} < \infty.$$

(H3) Condição de redutibilidade[6]: Podemos sempre supor que

$$F(0) = f(0) = 0.$$

Teorema 5.8 (Armstrong, Silvestre e Smart (2012) e dos Prazeres e Teixeira (2016))**.** *Seja $u \in C^0(B_1)$ uma solução de viscosidade de* (5.26)*. Suponha que as hipóteses 5.4-5.4 sejam satisfeitas com $\tau(t) = \mathrm{C}t^\alpha$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Existe uma constante $0 < \delta_0 = \delta_0(n, \lambda, \Lambda, \omega, \alpha, \tau(1)) \ll 1$ tal que se*

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \delta_0,$$

então $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(B_1)$. Além disso, a seguinte estimativa se verifica

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leqslant \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \omega, 1-\alpha)\delta_0.$$

Permita-nos concluir esta parte explicando as ideias e mecanismos por trás da prova do principal resultado desta seção, a saber Teorema 5.8. De fato, dado um operador F totalmente não linear, recorde que F satisfaz $F(0) = 0$, pode-se associar a ele uma família de operadores da seguinte forma

$$\mathcal{G}_\iota(\mathrm{M}) := \frac{F(\iota \mathrm{M})}{\iota}, \quad \iota > 0.$$

Observe que $(\mathcal{G}_\iota)_{\iota>0}$ define uma "curva" contínua de operadores preservando os parâmetros de elipticidade $\Lambda \geqslant \lambda > 0$. Agora se F for diferenciável na origem, verifica-se que

$$\mathcal{G}_\iota(\mathrm{M}) \longrightarrow \frac{\partial F}{\mathrm{M}_{ij}}(0) \cdot \mathrm{M}_{ij}, \quad \text{quando} \quad \iota \longrightarrow 0^+, \tag{5.27}$$

o qual é um operador de segunda ordem, linear e com coeficientes constantes. Portanto, a menos de uma mudança de coordenadas, podemos assumir que seja o operador Laplaciano.

Assim o operador (linear) $\mathfrak{L}_F[\mathrm{M}] := \frac{\partial F}{\mathrm{M}_{ij}}(0) \cdot \mathrm{M}_{ij}$ é a equação limite (ou tangencial) de $\mathcal{G}_\iota$ quando $\iota \longrightarrow 0^+$, a qual goza de estimativas de regularidade elevada pela *Teoria Elíptica Clássica* , veja Evans (2010). Portanto devemos interpretar a Equação de Laplace

[6]Se $F(0) \neq 0$, então, ao considerarmos o operador auxiliar $F_t(X) = (X + t\mathrm{Id}_n)$ e procedendo como na Observação Observação 5.1, podemos escolher $|t| \in \left(0, \frac{|F(0)|}{n\lambda}\right]$ tal que $F_t(0) = 0$
Se $f(0) \neq 0$, então, ao considerarmos o operador auxiliar $G(\mathrm{X}) = F(\mathrm{X}) - f(x)$, vemos que

$$G(D^2u) = F(D^2u) - f(0) = f(x) - f(0) = g(x),$$

com g(0) = 0, como desejávamos. Além disso, g possui o mesmo módulo de continuidade que f.

como a *Equação tangencial geométrica* do limite formado seja "curva" dos operadores totalmente não lineares $\mathcal{G}_\iota$, desde que o grau de planicidade de u suficientemente pequeno.

Por outro lado, se u é uma solução para a equação relacionada a F, então $v := \frac{u}{\iota}$ é uma solução para uma equação semelhante, relacionada a $\mathcal{G}_\iota$, ou seja,

$$\mathcal{G}_\iota(D^2 v) = g_\iota(x) := \frac{1}{\iota} f(x). \tag{5.28}$$

Em outras palavras, se a norma de u é controlada por ι (o grau de planicidade) e $|g_\iota| = \mathrm{o}(1)$ quando $\iota \ll 1$, então v é uma solução normalizada para a correspondente ι-equação (5.28). Por essa razão, podemos acessar a regularidade disponível para o perfil limite (harmônico) por meio do dispositivo tangencial geométrico de (5.27) combinado com os métodos de compacidade e estabilidade disponíveis para operadores totalmente não lineares, cf. Caffarelli (1989a) e Caffarelli e Cabré (1995a).

Finalmente, usando tal ferramenta tangencial, demonstramos que o gráfico de uma solução para (5.26) pode ser aproximado em B_σ (para um certo $\sigma \ll 1$) por um polinômio quadrático, cujo erro é da ordem $\sim \mathrm{O}\left(\iota\sigma^{2+\alpha}\right)$. Tal estimativa fornecerá que as soluções "flat" são clássicas com módulo de continuidade Hölder para suas segundas derivadas.

Permita-nos agora apresentar alguns operadores satisfazendo as hipóteses 5.4-5.4:

Exemplo 5.1. A título de exemplificação, consideremos perturbações de operadores do tipo Bellman da forma:

$$F(\mathrm{X}) := \mathrm{tr}(\mathbb{A}\mathrm{X}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\cos(e_i(\mathrm{X})) - 1\right),$$

em que $(e_i(\mathrm{X}))_{i=1}^n$ são os autovalores da matriz $\mathrm{X} \in \mathrm{Sim}(n)$ e $\mathbb{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n \in \mathrm{Sim}(n)$ com coeficientes reais e autovalores no intervalo $[\lambda, \Lambda]$.

Assim podemos constatar que tais operadores não são côncavos nem convexos. Não obstante, sua diferencial na origem adquire boas propriedades estruturais. De fato,

$$\mathfrak{L}_F[\mathrm{X}] = \lim_{\mu\to 0+} \mu^{-1}(F(\mu\mathrm{M}) - F(0)) = \mathrm{tr}(\mathbb{A}\mathrm{X}),$$

ou seja, o operador em análise refere-se a uma perturbação do Laplaciano, que goza de estimativas de regularidade apropriadas em face da teoria de regularidade elíptica clássica (veja o livro de EDPs do Evans (2010) para tais estimativas).

Exemplo 5.2. Consideremos o operador Lagrangiano especial

$$F(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} \left(2\arctan(1 + e_i(\mathrm{M})) - \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i(\mathrm{M}).$$

para constantes $(a_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ e $(e_i(\mathrm{M}))_{i=1}^n$ os autovalores de M.

Assim podemos constatar que $F \in C^{\infty}(\mathrm{Sim}(n))$ com $F(0) = 0$. Além disso, o mesmo é um operador que não é côncavo e nem convexo.

Por fim,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_F[\mathrm{M}] &= \lim_{\mu \to 0^+} \mu^{-1}(F(\mu\mathrm{M}) - F(0)) \\
&= \lim_{\mu \to 0^+} \sum_{i=1}^{n} \mu^{-1}\left(2\arctan(1 + \mu e_i(\mathrm{M})) - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1) e_i(\mathrm{M}) \\
&= \mathrm{tr}(\mathbb{A}\mathrm{M}),
\end{aligned}$$

em que $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ satisfaça $a_{ii} = \alpha_i + 1$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Exemplo 5.3. Agora considere perturbações de operadores do tipo Monge–Ampère (cf. Ampère (1819) e Monge (1784))

$$F(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{Id}_n + \mathrm{X}) - 1 + \sum_{i=1}^{n}\left(-2^{e_i^2(\mathrm{X})} + 1\right).$$

em que $e_i(\mathrm{X})$ são os autovalores de $0 \leqslant \mathrm{X} \in \mathrm{Sim}(n)$.

Então podemos verificar que $F \in C^{\infty}(\mathrm{Sim}(n))$ com $F(0) = 0$, que não é um operador côncavo e nem convexo. Além disso[7],

$$\mathfrak{L}_F[\mathrm{X}] = \lim_{\mu \to 0^+} \mu^{-1}(F(\mu\mathrm{X}) - F(0)) = \mathrm{tr}(\mathrm{X}).$$

Em conclusão, enunciamos uma interessante aplicação do Teorema 5.8 o qual assegura regularidade parcial para soluções de modelos como (5.26).

---

[7] Aqui invocamos o seguinte fato bem conhecido (Fórmula de Jacobi): $D_{(\cdot)}\det(\mathrm{Id}) = \mathrm{tr}(\cdot)$, sendo $D_{(\cdot)}\det$ a derivada direcional de det.

De fato, temos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\det(\mathrm{Id} + \varepsilon\mathrm{B}) - 1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\det(\mathrm{Id} + \varepsilon\mathrm{X}) - \det(\mathrm{Id})}{\varepsilon} = D_{\mathrm{X}}\det(\mathrm{Id}) = \mathrm{tr}(\mathrm{X}).$$

A seguinte identidade também poderia ser utilizada:

$$\det(\mathrm{A} + \varepsilon\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A})(1 + \varepsilon\mathrm{tr}(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}) + \mathrm{O}(\varepsilon^2))$$

para $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}(n)$ (matrizes quadradas de ordem n) com A invertível.

Corolário 5.2 (Regularidade Parcial - Armstrong, Silvestre e Smart (2012, Teorema 1.1) e dos Prazeres e Teixeira (2016, Corolário 5.3)). *Seja* $u \in C^0(B_1)$ *uma solução de viscosidade de* (5.26)*, em que* $F \in C^1(Sim(n))$ *satisfaz* $c \leqslant D_{M_{ij}} F(\mathrm{M}) \leqslant c^{-1}$ *para alguma constante* $c > 0$ *e um termo fonte* f *Lipschitz contínuo. Então* $u \in C^{2,\alpha}(B_1 \setminus \Xi)$ *(para todo* $\alpha \in (0,1)$*) para um conjunto fechado* $\Xi \subset B_1$ *com* $\mathcal{H}^{n-\epsilon}(\Xi) < \infty$ *para uma constante universal* $\epsilon > 0$.

Destacamos que a constante $\epsilon > 0$ depende somente da dimensão e parâmetros de elipticidade de F. Além disso, ela é a mesma que aparece nas estimativas $W^{2,\epsilon}$ estabelecidas por Lin (1986). Nessa direção, Armstrong–Silvestre–Smart conjecturaram que

$$\epsilon = 2\left(\frac{\Lambda}{\lambda} + 1\right)^{-1}.$$

Não obstante, em um trabalho recente, Nascimento e Teixeira, veja Nascimento e Teixeira (2023, Teorema 1), mostram que tal conjectura não se verifica e estabelecem uma nova cota universal melhorada para $n \geqslant 3$:

$$\frac{\left(1 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{n-1}\right)}{\ln(n^4)} \cdot \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^{n-1} \leqslant \epsilon \leqslant \frac{n\lambda}{(n-1)\Lambda + \lambda}$$

5.4.1 Mecanismo de aproximação polinomial

A seguir, implementaremos uma prova rigorosa do argumento heurístico descrito na seção anterior que envolve o cerne da Análise Tangencial Geométrica para esse contexto de soluções "flat".

Lema 5.3 (Lema de Aproximação 2). *Seja* $F : Sim(n) \to \mathbb{R}$ *um operador satisfazendo as hipóteses 5.4-5.4. Dado* $\alpha \in (0,1)$*, existe* $\eta = \eta(n, \lambda, \Lambda, \omega, \alpha) > 0$ *tal que se* $u \in C^0(B_1)$ *é uma solução de viscosidade normalizada (i.e., com* $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1$*) para*

$$\mu^{-1} F(\mu D^2 u) = f(x) \quad em \quad B_1$$

para

$$\max\{\mu,\ \|f\|_{L^\infty(B_1)}\} \leqslant \eta,$$

então podemos encontrar $\sigma = \sigma(n, \lambda, \Lambda) \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ *e um polinômio quadrático*

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{2} x^T \cdot \mathfrak{a} \cdot x + \mathfrak{b} \cdot x + \mathfrak{c}$$

satisfazendo

$$\mu^{-1}F(\mu D^2\mathfrak{p}) = 0 \tag{5.29}$$
$$\|\mathfrak{a}\|_{Sim(n)} + \|\mathfrak{b}\| + |\mathfrak{c}| \leqslant \mathfrak{C}(n,\lambda,\Lambda) \tag{5.30}$$

tal que

$$\sup_{B_\rho} |u(x) - \mathfrak{p}(x)| \leqslant \rho^{2+\alpha}.$$

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que a tese do Lema falhe. Então, para um $0 < \sigma_0 \leqslant \frac{1}{2}$ a ser escolhido a posteriori, podemos encontrar sequências $(u_k)_{k\geqslant 1} \subset C^0(B_1)$, $(f_k)_{k\geqslant 1} \subset L^\infty(B_1)$, $(\mu_k > 0)_{k\geqslant 1}$ e $(F_k)_{k\geqslant 1}$ satisfazendo 5.4-5.4 e conectadas pela equação

$$\mu_k^{-1}F_k(\mu_k D^2 u_k) = f_k(x) \quad \text{em} \quad B_1 \tag{5.31}$$

no sentido da viscosidade tal que

$$\|u_k\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1 \quad \text{e} \quad \max\left\{\mu_k,\ \|f_k\|_{L^\infty(B_1)}\right\} \leqslant \frac{1}{k}. \tag{5.32}$$

Contudo

$$\sup_{B_{\sigma_0}} |u_k - \mathfrak{p}| > \sigma_0^{2+\alpha} \tag{5.33}$$

para todo polinômio quadrático $\mathfrak{p}$ satisfazendo no sentido da viscosidade

$$\mu^{-1}F_k(\mu D^2\mathfrak{p}) = 0 \quad \text{in} \quad B_{\sigma_0}$$

Pela condição 5.4, passando para uma subsequência, se necessário, temos que $F_k(\mathrm{M}) \longrightarrow F_0(\mathrm{M})$ localmente uniformemente em $\mathrm{Sim}(n)$. Além disso, pelas estimativas Hölder devido a Krylov e Safonov (1979) para a equação (5.31), temos que

$$u_k \longrightarrow u_0 \tag{5.34}$$

localmente uniformemente em B_1. Agora, das hipóteses 5.4, 5.4 e (5.32), deduzimos que

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k^{-1}F_k(\mu_k\mathrm{M}) = D_\mathrm{M}F_0(0)\mathrm{M} \tag{5.35}$$

localmente uniformemente em $\mathrm{Sim}(n)$. De fato, temos

$$F_k(\mu_k\mathrm{M}) = F_k(\mu_k\mathrm{M}) - F_k(0) = \frac{d}{ds}\int_0^{\mu_k} F_k(s\mathrm{M})ds = \int_0^{\mu_k} D_\mathrm{M}F_k(s\mathrm{M})\mathrm{M}ds.$$

Assim, usando a hipótese 5.4, temos que

$$F_k(\mu_k\mathrm{M}) \geqslant \mu_k D_\mathrm{M}F_k(0)\mathrm{M} - \mu_k\omega(\|\mu_k\mathrm{M}\|)$$

Finalmente, ao dividirmos por μ_k, obtemos quando $\mu_k \to 0$

$$D_{\mathrm{M}} F_0(0).\mathrm{M} \leqslant \lim_{k\to\infty} \mu_k^{-1} F_k(\mu_k \mathrm{M})$$

Analogamente podemos obter que

$$D_{\mathrm{M}} F_0(0).\mathrm{M} \geqslant \lim_{k\to\infty} \mu_k^{-1} F_k(\mu_k \mathrm{M})$$

e, assim, segue a afirmação. Portanto, das sentenças (5.32), (5.34) e (5.35) e usando resultados de estabilidade (ou seja, continuidade em relação à equação), temos que

$$D_{\mathrm{M}} F_0(0) D^2 u_0 = 0 \quad \text{em} \quad B_{\frac{3}{4}}. \tag{5.36}$$

Dado que u_0 é uma solução de uma equação elíptica linear com coeficientes constantes, ela é suave pela teoria de regularidade elíptica, veja Evans (2010). Então podemos definir

$$\mathfrak{p}(x) := u_0(0) + Du_0(0).x + \frac{1}{2} x^T \cdot D^2 u_0(0) \cdot x.$$

Como $\|u_0\|_{L^\infty(B_{3/4})} \leqslant 1$, seguem das estimativas para derivadas disponíveis para u_0 (cf. Evans (ibid.)) que

$$\sup_{B_r} |u_0(x) - \mathfrak{p}(x)| \leqslant \mathrm{C}_0(n).r^3 \quad \text{para todo } 0 < r < \frac{3}{4} \tag{5.37}$$

sendo $\mathrm{C}_0 > 0$ uma constante universal. Agora, podemos selecionar $0 < \sigma_0 \leqslant \frac{1}{2}$ tal que

$$\sigma_0 := \min\left\{ \sqrt[1-\alpha]{\frac{1}{7\mathrm{C}_0}}, \frac{1}{2} \right\}$$

Assim, temos que

$$\sup_{B_{\sigma_0}} |u_0 - \mathfrak{p}| \leqslant \frac{1}{7} \sigma_0^{2+\alpha}. \tag{5.38}$$

Também da equação (5.36)

$$D_{\mathrm{M}} F_0(0) D^2 \mathfrak{p} = 0 \quad \text{em} \quad B_{\frac{1}{2}}$$

que implica que

$$\left|\mu_k^{-1} F_k(\mu_k D^2 \mathfrak{p})\right| = o(1).$$

Agora, como na Observação (5.1), podemos encontrar uma sequência $(a_k)_{k\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$ com $|a_k| = \mathrm{o}(1)$ tal que o polinômio quadrático

$$\mathfrak{p}_k(x) := \mathfrak{p}(x) + \frac{1}{2} a_k \|x\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \sup_{B_{\sigma_0}} |\mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}| \leqslant \frac{1}{2} \sigma_0^2 |a_k|, \tag{5.39}$$

satisfaz no sentido de viscosidade

$$\mu_k^{-1} F(\mu_k D^2 \mathfrak{p}_k) = 0 \quad \text{em} \quad B_{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, em B_{σ_0} usando as sentenças anteriores (5.34), (5.38) e (5.39), temos para k suficiente grande

$$\begin{aligned} \sup_{B_{\sigma_0}} |u_k - \mathfrak{p}_k| &\leqslant \sup_{B_{\sigma_0}} |u_k - u_0| + \sup_{B_{\sigma_0}} |u_0 - \mathfrak{p}| + \sup_{B_{\sigma_0}} |\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_k| \\ &\leqslant \tfrac{1}{5}\sigma_0^{2+\alpha} + \tfrac{1}{7}\sigma_0^{2+\alpha} + \tfrac{1}{2}\sigma_0^2 |a_k| \\ &< \sigma_0^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

o qual contradiz (5.33). □

Nosso próximo passo é transportar a informação obtida na equação tangencial geométrica para (5.26) por uma condição de pequenez universal na norma L^∞ da solução.

Lema 5.4. *Seja F satisfazendo 5.4-5.4. Existe uma constante $\delta_0 > 0$ (pequena) dependendo de $n, \lambda, \Lambda, \omega$ e uma constante $\sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ dependendo de n, λ, Λ e $1-\alpha$ tal que se u é uma solução de* (5.26) *e*

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \delta_0 \quad e \quad \|f\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \sqrt[3]{\delta_0^4}, \tag{5.40}$$

então podemos encontrar um polinômio quadrático $\mathfrak{p}$ satisfazendo

$$F(D^2\mathfrak{p}) = 0 \quad em \quad B_{1/2} \quad e \quad \|\mathfrak{p}\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leqslant \delta_0 \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda) \tag{5.41}$$

tal que

$$\sup_{B_\sigma} |u(x) - \mathfrak{p}(x)| \leqslant \delta_0 . \sigma^{2+\alpha}. \tag{5.42}$$

Demonstração. Definindo a função normalizada $v(x) := \delta_0^{-1} u(x)$, que satisfaz no sentido da viscosidade

$$\delta_0^{-1} F(\delta_0 D^2 v) = \delta_0^{-1} f(x) \quad \text{em} \quad B_1.$$

Portanto se η é como no Lema 5.3, então, escolhendo $\eta = \sqrt[4]{\delta_0}$, o Lema é válido. □

5.4.2 Estimativas $C^{2,\alpha}_{\text{loc}}$ para soluções "flat"

Nesta seção, mostramos que se o termo fonte é α-Hölder contínuo, então soluções "flat" são localmente de classe $C^{2,\alpha}$, ou seja, assumimos para $t \in (0, 1)$ que

$$\tau(t) \lesssim \mathrm{C}_0 t^\alpha = \tau(1) t^\alpha \tag{5.43}$$

para algum $\alpha \in (0,1)$ e $C_0 > 0$, em que τ é o módulo de continuidade do termo fonte aparecendo em 5.4.

Obteremos a estimativa $C^{2,\alpha}(B_{1/2})$ iterando, por meio de um processo indutivo, o Lema 5.4 sob um regime de pequenez apropriado do termo fonte.

Lema 5.5. *Sejam F e f satisfazendo 5.4-5.4. Então existe uma constante $\delta_0 = \delta_0(n, \lambda, \Lambda, \omega) > 0$ tal que se*

$$\sup_{B_1} |u| \leqslant \delta_0 \quad e \quad \tau(1) \leqslant \sqrt[3]{\delta_0^4},$$

então $u \in C^{2,\alpha}$ na origem, i.e.,

$$\sup_{B_r} \frac{\left|u(x) - \left[u(0) + Du(0)\cdot x + \frac{1}{2}x^T \cdot D^2u(0)\cdot x\right]\right|}{r^{2+\alpha}} \leqslant \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, 1-\alpha).\delta_0.$$

Demonstração. Afirmamos que existe uma sequência de polinômios quadráticos

$$\mathfrak{p}_k(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot \mathfrak{a}_k \cdot x + \mathfrak{b}_k \cdot x + \mathfrak{c}_k \quad \text{com} \quad F(D^2\mathfrak{p}_k) = 0, \tag{5.44}$$

que aproxima u em um cenário $C^{2,\alpha}$, i.e.,

$$\sup_{B_{\sigma^k}} |u(x) - \mathfrak{p}_k(x)| \leqslant \delta_0 \sigma^{(2+\alpha)k}, \tag{5.45}$$

Além disso, temos o seguinte controle sobre a oscilação dos coeficientes de $\mathfrak{p}_k$:

$$\begin{cases} \|\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_{k-1}\|_{\mathrm{Sim}(n)} & \leqslant \mathrm{C}\delta_0\sigma^{\alpha(k-1)} \\ \|\mathfrak{b}_k - \mathfrak{b}_{k-1}\| & \leqslant \mathrm{C}\delta_0\sigma^{(1+\alpha)(k-1)} \\ |\mathfrak{c}_k - \mathfrak{c}_{k-1}| & \leqslant \mathrm{C}\delta_0\sigma^{(2+\alpha)(k-1)} \end{cases} \tag{5.46}$$

sendo $\mathrm{C} > 0$ uma constante universal e σ e δ_0 são os parâmetros do Lema 5.4.

Provaremos tal afirmação via processo de indução. O caso $k = 1$ é justamente o enunciado do Lema 5.4.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $k \in \mathbb{N}$ (genérico), i.e.,

$$\sup_{B_{\sigma^k}} |u(x) - \mathfrak{p}_k(x)| \leqslant \delta_0 \sigma^{(2+\alpha)k},$$

então devemos provar o $(k+1)$-ésimo passo de indução. De fato, definimos

$$v_k(x) := \frac{(u - \mathfrak{p}_k)(\sigma^k x)}{\sigma^{(2+\alpha)k}} \tag{5.47}$$

e podemos observar que v_k satisfaz no sentido da viscosidade

$$\mathcal{G}_k(D^2 v_k) = \frac{f(\sigma^k x)}{\sigma^{\alpha k}} := f_k(x) \quad \text{em} \quad B_1,$$

em que

$$\mathcal{G}_k(\mathrm{M}) := \frac{1}{\sigma^{\alpha k}} F(\sigma^{\alpha k}\mathrm{M} + \mathfrak{a}_k). \tag{5.48}$$

Agora, observe que

$$|D_{\mathrm{M}}\mathcal{G}_k(\mathrm{X}) - D_{\mathrm{M}}\mathcal{G}_k(\mathrm{Y})| \leqslant \omega(\sigma^{\alpha k}\|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\|) \leqslant \omega(\|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\|) \quad \text{para toda} \quad \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{Sim}(n),$$

isto é, $\mathcal{G}_k$ satisfaz a hipótese 5.4. Além disso, claramente $\mathcal{G}_k(0) = f_k(0) = 0$, logo 5.4 é satisfeita. Por fim,

$$\begin{aligned}
[f_k]_{C^{0,\tau}(B_1)} &= \sup_{\substack{x,y\in B_1\\ x\neq y}} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \\
&= \sup_{\substack{x,y\in B_1\\ x\neq y}} \frac{|f(\sigma^k x) - f(\sigma^k y)|}{|\sigma^k(x-y)|^{\alpha}} \\
&= [f]_{C^{0,\alpha}(B_{\sigma^k})} \\
&\leqslant [f]_{C^{0,\alpha}(B_1)} < \infty,
\end{aligned}$$

i.e., a hipótese 5.4 é satisfeita.

Além disso, da hipótese de indução, temos que

$$\|v_k\|_{L^\infty(B_1)} = \sup_{B_1} \frac{|(u - \mathfrak{p}_k)(\sigma^k x)|}{\sigma^{(2+\alpha)k}} \leqslant \delta_0,$$

e, devido ao regime de pequenez sobre $\tau(1)$, obtemos que

$$\|f_k\|_{L^\infty(B_1)} = \sup_{B_1} \frac{|f(\sigma^k x) - f(0)|}{\sigma^{\alpha k}} \leqslant \frac{\tau(\sigma^k)}{\sigma^{\alpha k}} \leqslant \tau(1) \leqslant \sqrt[3]{\delta_0^4}.$$

Portanto estamos sob as hipóteses do Lema 5.4 (aplicado a v_k, $\mathcal{G}_k$ e f_k). Assim encontramos um polinômio quadrático $\widetilde{\mathfrak{p}}$ com coeficientes universalmente limitados tal que

$$\sup_{B_\sigma} |v_k - \widetilde{\mathfrak{p}}| \leqslant \delta_0.\sigma^{2+\alpha} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_k(D^2\widetilde{\mathfrak{p}}) = 0.$$

Além disso, ao definirmos

$$\mathfrak{p}_{k+1}(x) := \mathfrak{p}_k(x) + \sigma^{(2+\alpha)k}\widetilde{\mathfrak{p}}_k\left(\frac{x}{\sigma^k}\right),$$

então, usando a definição de v_k e uma mudança de variáveis, obtemos

$$\sup_{B_{\sigma^{k+1}}} |u - \mathfrak{p}_{k+1}| \leqslant \delta_0 . \sigma^{(2+\alpha)(k+1)}.$$

e isto completa o processo de indução.

Para finalizarmos a prova, observamos que (5.46) implica que $(\mathfrak{a}_k)_{k\geqslant 1} \subset \mathrm{Sim}(n)$, $(\mathfrak{b}_k)_{k\geqslant 1} \subset \mathbb{R}^n$ e $(\mathfrak{c}_k)_{k\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$ são sequências de Cauchy. Portanto podemos definir o polinômio quadrático limite

$$\mathfrak{p}_\infty(x) := \frac{1}{2} x^T \cdot \mathfrak{a}_\infty \cdot x + \mathfrak{b}_\infty \cdot x + \mathfrak{c}_\infty,$$

em que $\mathfrak{a}_k \longrightarrow \mathfrak{a}_\infty$, $\mathfrak{b}_k \longrightarrow \mathfrak{b}_\infty$ e $\mathfrak{c}_k \longrightarrow \mathfrak{c}_\infty$. Além disso, temos por (5.46) que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \|\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_\infty\|_{\mathrm{Sim}(n)} & \leqslant & \frac{\mathrm{C}\delta_0 \sigma^{\alpha k}}{1-\sigma^\alpha} \\ \|\mathfrak{b}_k - \mathfrak{b}_\infty\| & \leqslant & \frac{\mathrm{C}\delta_0 \sigma^{(1+\alpha)k}}{1-\sigma^{1+\alpha}} \\ |\mathfrak{c}_k - \mathfrak{c}_\infty| & \leqslant & \frac{\mathrm{C}\delta_0 \sigma^{(2+\alpha)k}}{1-\sigma^{2+\alpha}} \end{array} \right. \tag{5.49}$$

Portanto,

$$\sup_{B_{\sigma^k}} |\mathfrak{p}_k(x) - \mathfrak{p}_\infty(x)| \leqslant \mathrm{C}_0 \delta_0 \sigma^{(2+\alpha)k}. \tag{5.50}$$

Finalmente, fixado $0 < r \ll \frac{1}{2}$, escolhemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^{k+1} < r \leqslant \sigma^k$ e concluímos, usando (5.45) e (5.50), que

$$\sup_{B_r} |u(x) - \mathfrak{p}_\infty(x)| \leqslant \mathrm{C}\delta_0 \sigma^{(2+\alpha)k} \leqslant \mathrm{C}_\sharp(n, \lambda, \Lambda, \alpha)\delta_0 r^{2+\alpha},$$

finalizando, assim, a prova Lema. □

Prova do Teorema 5.8. A fim de concluirmos a prova do Teorema 5.8, devemos verificar que se $\tau(t) \leqslant \tau(1)t^\alpha$, então a condição de pequenez do Lema 5.5, ou seja, $\tau(1) \leqslant \sqrt[3]{\delta_0^4}$ não é restritiva. De fato, se $u \in C^0(B_1)$ é uma solução de viscosidade de

$$F(D^2 u) = f(x) \quad \text{em} \quad B_1, \tag{5.51}$$

então o perfil auxiliar

$$w(x) = \frac{u(\kappa x)}{\kappa^2}$$

satisfaz no sentido da viscosidade

$$F_\kappa(D^2 w) = f_\kappa(x) \quad \text{em} \quad B_1$$

em que temos que

$$F_\kappa(\mathrm{X}) = F(\mathrm{X}) \quad \text{e} \quad f_\kappa(x) = f(\kappa x)$$

Observe que F_κ também satisfaz as hipóteses 5.4-5.4 com os mesmos parâmetros universais λ, λ e ω. Não obstante, note que

$$|f_\kappa(x) - f_\kappa(x)| \leqslant \tau(1)\kappa^\alpha |x-y|^\alpha.$$

Desta forma, se $(0,1] \ni t \mapsto \tau_\kappa(t)$ é o módulo de continuidade de f_κ, então devemos ter

$$\tau_\kappa(1) = \tau(1)\kappa^\alpha$$

Assim, ao fazermos

$$\kappa := \min\left\{1, \frac{\sqrt[3\alpha]{\delta_0^4}}{\sqrt[\alpha]{\tau(1)}}\right\},$$

em que $\delta_0 > 0$ é a constante universal do Lema 5.4. Portanto, se u satisfaz no sentido da viscosidade (5.51) e cumpre a condição de planicidade

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \delta_\sharp := \delta_0 \kappa^2,$$

então o Lema 5.5 aplicado a w fornece estimativas $C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(B_1)$ para w, que são naturalmente transportadas para u. Isso completa a prova do Teorema. $\square$

Como uma aplicação da Equação (5.26), mostraremos uma melhora da regularidade para soluções clássicas com dados Hölder contínuos. De fato, dada uma solução clássica (i.e., $u \in C^2(B_1)$) para (5.26), o Teorema 5.8 nos permitirá determinar um módulo de continuidade universal para D^2u. Esse resultado é uma espécie de versão estendida do Teorema de Evans–Krylov (cf. Caffarelli e Cabré (1995a, Cap. 6), Evans (1982a) e Krylov (1983)). Nos últimos anos, esse tipo de resultado tem sido usado para derivar regularidade elevada em problemas de Análise Geométrica, veja Sheng e Wang (2010) e Tian e Wang (2013) para alguns importantes exemplos.

Teorema 5.9 (Teorema do tipo Evans–Krylov)**.** *Seja $u \in C^2(B_1)$ uma solução clássica de* (5.26)*. Assume que as hipótese 5.4-5.4 são satisfeitas. Então $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(B_1)$ e*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \omega, \tau(1), \|u\|_{C^2(B_1)}).$$

Demonstração. Defina para uma constante $0 < \mu \leqslant 1$ (a ser escolhida a posteriori) $v : B_1 \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) := \frac{u(\mu x) - \left[u(0) + \mu Du(0)\cdot x + \mu^2 2^{-1} x^T \cdot D^2u(0)\cdot x\right]}{\mu^2}$$

Assim, temos que $v(0) = \|Dv(0)\| = 0$ e

$$\|D^2v(x)\|_{\mathrm{Sim}(n)} = \|D^2u(\mu x) - D^2u(0)\|_{\mathrm{Sim}(n)} \leqslant \zeta(\mu\|x\|) \leqslant \zeta(\mu),$$

sendo ζ é o modulo de continuidade de D^2u. Neste ponto, podemos escolher $\mu \ll 1$ (suficientemente pequeno) da seguinte forma

$$\mu := \min\left\{1, \zeta^{-1}(c_n\delta_0)\right\}$$

em que $c_n > 0$ é uma constante dimensional e $\delta_0 \ll 1$ é o fator do nível de planicidade no Teorema 5.8. Com tal escolha, v está sob as hipóteses do Teorema 5.8 com

$$\mathcal{G}(\mathrm{M}) := F(\mathrm{M} + D^2u(0)) \quad \text{e} \quad g(x) := f(sx).$$

Portanto $v \in C^{2,\alpha}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)$ e, consequentemente, $u \in C^{2,\alpha}\left(B_{\frac{\mu}{2}}\right)$. □

5.4.3 Estimativas de regularidade limítrofe: O caso C^1–Log-Lipschitz

Devemos destacar que o expoente de α-Hölder continuidade obtido no Teorema (5.8) é ótimo, pois é o mesmo do caráter α-Hölder do termo fonte f, como pregam as estimativas de Schauder clássicas. Não obstante, se f é meramente contínua, i.e., assumindo que $\alpha = 0$ na condição (5.43), então mesmo para a equação de Poisson

$$\Delta u = f(x) \quad \text{em} \quad B_1$$

soluções podem falhar de ser da classe $C^2_{\mathrm{loc}}(B_1)$.

Nesta direção, mostramos que soluções de nível planar – “flat” – são localmente de classe $C^{1,\mathrm{Log-Lip}}_{\mathrm{loc}}(B_1)$, o qual corresponde à estimativa de Regularidade ótima sob tais condições mais fracas, veja dos Prazeres e Teixeira (2016, Teorema 2.3).

Teorema 5.10 (dos Prazeres e Teixeira (ibid.))**.** *Seja $u \in C^0(B_1)$ uma solução de viscosidade de* (5.26)*. Suponha que as hipóteses 5.4-5.4 sejam satisfeitas com $f \in C^0(B_1)$. Existe uma constante $0 < \delta_0 = \delta_0(n, \lambda, \Lambda, \omega, \tau(1)) \ll 1$ tal que se*

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \delta_0,$$

então $u \in C^{1,Log\text{–}Lip}_{loc}(B_1)$. Além disso, a seguinte estimativa se verifica

$$|u(x) - [u(0) + Du(0) \cdot x]| \leqslant -\mathrm{M}(n, \lambda, \Lambda, \omega, \tau)\delta_0\|x\|^2 \ln(\|x\|).$$

Demonstração. Primeiramente mostraremos que sob a hipótese de continuidade no termo fonte f, após um argumento de escala adequado, as soluções estão sob o regime de pequenez do Lema 5.4. Para um $\kappa > 0$ a ser determinado a posteriori, defina

$$v_\kappa(x) := \frac{u(\kappa x)}{\kappa^2}.$$

Assim, temos que
$$F_\kappa(D^2 v) = f_\kappa(x) \quad \text{in} \quad B_1$$
no sentido da viscosidade, sendo
$$F_\kappa(\mathrm{M}) := F(\mathrm{M}) \quad \text{e} \quad f_\kappa(x) := f(\kappa x).$$
Agora, se fizermos a seguinte escolha
$$\kappa := \min\left\{1, \tau^{-1}\left(\sqrt[4]{\delta_0^4}\right)\right\}$$
com a seguinte definição
$$\tau_\kappa(t) := \tau(\kappa t).$$
Agora, note que
$$|f_\kappa(x) - f_\kappa(y)| \leqslant \tau_\kappa(|x-y|)$$
Logo,
$$\|f_\kappa\|_{L^\infty(B_1)}, \leqslant \sqrt[3]{\delta_0^4} \tag{5.52}$$
Finalmente, se tomarmos
$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \hat{\delta_0} := \delta_0\kappa^2,$$
então
$$\|v_\kappa\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \delta_0.$$
Portanto as estimativas provadas para v são transportadas para u.

Agora se f é apenas limitada, então podemos revisitar a prova do Lema 5.5 e, sob as hipóteses usuais, podemos encontrar uma constante universal $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ e uma função quadrática $\mathfrak{p}_1$ tal que
$$\sup_{B_\sigma} |u - \mathfrak{p}_1| \leqslant \delta_0\sigma^2. \tag{5.53}$$

Procedendo indutivamente, podemos encontrar uma sequência de funções quadráticas
$$\mathfrak{p}_k(x) := \frac{1}{2}x^T \cdot \mathfrak{a}_k \cdot x + \mathfrak{b}_k \cdot x + \mathfrak{c}_k$$
tal que
$$F(\mathfrak{a}_k) = 0 \quad \text{e} \quad \sup_{B_{\sigma^k}} |u - \mathfrak{p}_k| \leqslant \delta_0\sigma^{2k}. \tag{5.54}$$

Além disso, temos o seguinte controle sob a oscilação dos coeficientes:
$$\left\{\begin{array}{rcl} \|\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_{k+1}\|_{\mathrm{Sim}(n)} & \leqslant & C\delta_0 \\ \|\mathfrak{b}_k - \mathfrak{b}_{k+1}\| & \leqslant & C\delta_0\sigma^k \\ |\mathfrak{c}_k - \mathfrak{c}_{k+1}| & \leqslant & C\delta_0\sigma^{2k} \end{array}\right. \tag{5.55}$$

Provaremos a existência de tais polinômios via indução em k. O primeiro passo da indução, a saber $k = 1$, é exatamente a afirmação anterior (5.53). Suponha agora que verificamos a tese da indução para $k = 1, \ldots, i$. Agora, definindo a função auxiliar $v : B_1 \to \mathbb{R}$ dada por

$$v_k(x) = \frac{(u - \mathfrak{p}_k)(\sigma^k x,)}{\delta_0 \sigma^{2k}},$$

temos, pela hipótese de indução, que $\|v_k\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant 1$ e resolve

$$F_k(D^2 v_k) = f(\sigma^k x) := f_k(x)$$

no sentido da viscosidade, sendo $F_k(\mathrm{M}) := F(\mathrm{M} + \mathfrak{a}_k)$.

Agora, dadas as condições (5.52), podemos aplicar o primeiro passo da indução. Assim, obtemos a existência um polinômio quadrático $\mathfrak{p}$ tal que

$$\sup_{B_\sigma} |v_k - \mathfrak{p}| \leqslant \delta_0 \sigma^2. \tag{5.56}$$

Assim, ao reescalonarmos a sentença (5.56) ao domínio unitário, obtemos

$$\sup_{B_{\sigma^{k+1}}} \left| u(x) - \left[\mathfrak{p}_k(x) + \delta_0 \sigma^{2k} \mathfrak{p}\left(\frac{x}{\sigma^k}\right) \right] \right| \leqslant \delta_0 \sigma^{2(k+1)}. \tag{5.57}$$

Portanto, ao definirmos

$$\mathfrak{p}_{k+1}(x) := \mathfrak{p}_k(x) + \delta_0 \sigma^{2k} \mathfrak{p}\left(\frac{x}{\sigma^k}\right),$$

verificamos o $(k+1)-$ésimo passo de indução e, claramente, as condições (5.54) e (5.55) são satisfeitas.

Note que, em vista de (5.55), temos que $\mathfrak{b}_k \to \mathfrak{b}_\infty$ e $\mathfrak{c}_k \to \mathfrak{c}_\infty$, bem como satisfazem as seguintes estimativas:

$$|\mathfrak{c}_k - \mathfrak{c}_\infty| \leqslant \mathrm{C}\delta_0 \sigma^{2k} \quad \text{e} \quad \|\mathfrak{b}_k - \mathfrak{b}_\infty\| \leqslant \mathrm{C}\delta_0 \sigma^k. \tag{5.58}$$

Além disso, observe que por (5.55) $(\mathfrak{a}_k)_{k \geqslant 1}$ pode não convergir. Não obstante, para $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{-1} = 0$, concluímos (para todo $k \geqslant 1$) que

$$\|\mathfrak{a}_k\|_{\mathrm{Sim}(n)} \leqslant \sum_{j=0}^{k} \|\mathfrak{a}_{k-j} - \mathfrak{a}_{k-(j+1)}\|_{\mathrm{Sim}(n)} \leqslant k\mathrm{C}\delta_0. \tag{5.59}$$

Tendo em vista as estimativas (5.54), (5.58) e (5.59) para $\|x\| \leqslant \sigma^k$, obtemos

$$\begin{array}{rcl} |u(x) - [\mathfrak{c}_\infty + \mathfrak{b}_\infty \cdot x]| & \leqslant & |u(x) - \mathfrak{p}_k(x)| + |\mathfrak{c}_k - \mathfrak{c}_\infty| + \|\mathfrak{b}_k - \mathfrak{b}_\infty\| \|x\| \\ & + & \|\mathfrak{a}_k\|_{\mathrm{Sim}(n)} \|x\|^2 \\ & \leqslant & \delta_0 \sigma^{2k} + 2\mathrm{C}\delta_0 \sigma^{2k} + k\mathrm{C}\delta_0 \sigma^{2k} \\ & \leqslant & \mathrm{C}_0 \delta_0 (k\sigma^{2k}) \end{array} \tag{5.60}$$

Finalmente, para $\overleftarrow{0} \neq x \in B_\sigma$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^{k+1} < \|x\| \leqslant \sigma^k$. Assim, utilizando (5.60), concluímos que

$$|u(x) - [\mathfrak{c}_\infty + \mathfrak{b}_\infty \cdot x]| \leqslant -\mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \tau)\delta_0 \|x\|^2 \ln(\|x\|),$$

provando, assim, a estimativa almejada. $\square$

6 Problema de obstáculo: estimativas $W^{2,p}$

6.1 Introdução

Nesta seção, iremos analisar um problema de fronteira livre bastante conhecido no contexto da Física-Matemática: o Problema de Obstáculo. Nesse contexto, introduziremos a análise de tal problema de fronteira livre no cenário de operadores totalmente não lineares com termos de ”drift” e provaremos existência e *Estimativas de Calderón–Zygmund* para soluções no sentido da viscosidade. Devemos destacar que os resultados contidos nesta seção foram baseados substancialmente no primeiro trabalho de tese do estudante Romário Tomilhero Frias do IMECC-UNICAMP (veja da Silva e Frias (2023)).

6.1.1 Estimativas de Calderón–Zygmund: Estado-da-Arte

As bem conhecidas estimativas de Calderón–Zygmund, veja Evans (2010) remontam a resultados de regularidade em espaços de Sobolev para soluções fracas da equação de Poisson

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

as quais asseguram as seguintes estimativas locais

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leqslant \mathrm{C}(n, p, \Omega')\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\right) \quad \text{para} \quad \Omega' \subset\subset \Omega,$$

desde que $1 < p < \infty$, em que as mesmas falham nos casos limítrofes, i.e., $p = 1$ e $p = \infty$.

No que diz respeito às equações na forma não divergente, Chiarenza, Frasca e Longo (1991) estudaram o problema

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega$$

(para coeficientes $\mathbb{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$ simétricos e meramente mensuráveis satisfazendo $\lambda|\xi|^2 \leqslant \langle \mathbb{A}(x)\xi, \xi\rangle \leqslant \Lambda|\xi|^2$ e $0 < \lambda \leqslant \Lambda < \infty$) provando, assim, resultados de regularidade, a saber $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ com $f \in L^p(\Omega)$ (para $1 < p < \infty$). Além disso, eles obtêm a seguinte *estimativa local*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leqslant \mathrm{C}(n, p, \lambda, \Lambda, \Omega') \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\right) \quad \text{para} \quad \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Para o cenário totalmente não linear (uniformemente elíptico), i.e. para operadores de segunda ordem satisfazendo

$$\mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) \leqslant F(x,\mathrm{X}) - F(x,\mathrm{Y}) \leqslant \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}),$$

historicamente os fundamentos dessa teoria remontam ao final dos anos 80 ao trabalho pioneiro devido a Caffarelli (cf. Caffarelli e Cabré (1995b, Capítulo 7)). Resumidamente, sob hipóteses de continuidade nos dados, um controle apropriado de oscilação dos coeficientes do operador e estimativas $C^{1,1}$ a priori para a equação homogênea com coeficientes constantes ($F(D^2\mathfrak{h}, x_0) = 0$), Caffarelli provou, em Caffarelli (1989b, Theorem 7.1), que C^0-soluções de viscosidade da equação

$$F(D^2u, x) = f(x) \quad \text{em} \quad B_1 \tag{6.1}$$

satisfazem (localmente) estimativas de regularidade $W^{2,p}_{loc}$ (para $n < p < \infty$):

$$\|u\|_{W^{2,p}\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leqslant C \cdot \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^p(B_1)}\right), \tag{6.2}$$

onde a constante $C = \mathrm{C}(n, p, \lambda, \Lambda)$

Apenas alguns anos depois, as estimativas interior $W^{2,p}$ de Caffarelli foram generalizadas por Escauriaza (cf. Escauriaza (1993, Teorema 1)) para o contexto de L^n-soluções de viscosidade para o intervalo $p_0 < p < \infty$, em que $p_0 = p_0\left(\frac{\Lambda}{\lambda}, n\right) \in \left[\frac{n}{2}, n\right)$ ficou conhecida como a constante de Escauriaza, que também fornece o intervalo mínimo para o qual a desigualdade de Harnack (resp. regularidade Hölder) vale para soluções de viscosidade para equações elípticas totalmente não lineares como (6.1). Além disso, uma estimativa do tipo (6.2) é satisfeita.

Completando essa jornada matemática, a extensão correspondente até o bordo dos resultados $W^{2,p}$ de Caffarelli/Escauriaza, foi estabelecida por Winter (2009). Para um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira regular e sob estimativas $C^{1,1}$ a priori para o problema homogêneo com coeficientes constantes, Winter provou que L^p-soluções de viscosidade de

$$\begin{cases} F(D^2u, Du, u, x) & = & f(x) & \text{em} & \Omega \\ u(x) & = & g(x) & \text{em} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.3}$$

com a seguinte condição estrutural

$$\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) - \mu|\xi-\eta| \leqslant F(x,\xi,\mathrm{X}) - F(x,\eta,\mathrm{Y}) \leqslant \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) + \mu|\xi-\eta|$$

e $f \in L^p(\Omega)$, $g \in W^{2,p}(\Omega)$ (com $p_0 < p < \infty$ e $\mu > 0$) cumpre uma estimativa de regularidade $W^{2,p}$ com a seguinte estimativa

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}\left(n, p, \lambda, \Lambda, \|\partial\Omega\|_{C^{1,1}}\right)\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\right).$$

Por fim, recentemente em da Silva e Nornberg (2021) da Silva e Nornberg estudam equações diferencias na forma

$$F(x, Du(x), D^2u(x)) = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{6.4}$$

sendo F um *Operador totalmente não linear* uniformemente elíptico com dependência do gradiente e com Hamiltonianos com crescimento superlinear e ingredientes ilimitados. Neste capítulo, são obtidas estimativas $W^{2,p}_{\text{loc}}$ para L^p-soluções no sentido da viscosidade de (6.4). Precisamente a equação $F(x,\xi,\mathrm{X}) = G(x,\mathrm{X}) + b(x)\cdot\xi + \mu(x)|\xi|^m = f(x)$ possui estimativas $W^{2,p}_{loc}$ sempre que $\mathrm{X} \mapsto G(x,\mathrm{X})$ é convexo (ou côncavo) (para $p > n$ e $m \in (1,2]$) com a seguinte estimativa se verificando:

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leqslant \mathrm{C}\left(n, p, m, \lambda, \Lambda, \|b\|_{L^\varrho(\Omega)}, \|\mu\|_{L^q(\Omega)}, \Omega'\right)(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}),$$

para todo subdomínio $\Omega' \subset\subset \Omega$.

6.1.2 O problema de obstáculo: uma introdução compreensiva

Fisicamente o problema de obstáculo consiste em encontrar a posição de equilíbrio de uma membrana elástica, a qual pode ser pensada como o gráfico de uma função $x \mapsto u(x)$ em um domínio regular $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com uma condição de bordo fixa $u(x) = g(x)$ para $x \in \partial\Omega$ e sujeita à ação de uma força transversal $f(x)$ para $x \in \Omega$. Tal posição de equilíbrio resultará àquela que minimiza a energia potencial envolvida em tal processo.

Além daquela relacionada à força transversal, existe outro componente da energia potencial da membrana: o trabalho necessário para esticá-la. Como consideramos uma membrana perfeitamente elástica, esse trabalho é proporcional à diferença de área entre a superfície esticada e a parte que não está deformada. A constante de proporcionalidade é a tensão, a qual tomaremos (por simplificação) igual a 1. Portanto a energia potencial da membrana é

$$\mathrm{E} = \int_\Omega \left(\sqrt{1+|\nabla u(x)|^2} - 1\right)dx + \int_\Omega f(x)u(x)dx.$$

Nesse ponto, se supomos que $|\nabla u(x)|$ "é pequeno" e dado que $\sqrt{1+s} = 1+\frac{1}{2}s+\cdots$, uma boa aproximação será

$$\sqrt{1+|\nabla u(x)|^2} \approx 1+\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2.$$

Assim, substituindo a expressão acima na energia potencial, obtemos

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega f(x)u(x)dx.$$

Agora, devemos procurar um minimizante da energia potencial no espaço de Sobolev $H^1(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R} : v, |\nabla v| \in L^2(\Omega)\}$.

Se a membrana estiver sobre um obstáculo definido, como o gráfico de uma função $\varphi \in C^2(\Omega)$, o problema se reduz a minimizar o funcional:

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega f v dx$$

com $v \in \mathcal{K} = \{v \in H^1(\Omega) : v - g \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad v \geqslant \varphi \quad \text{em} \quad \Omega\}$. Chamaremos tais funções de admissíveis. Além disso, assumiremos que $g > \varphi$ em $\partial\Omega$ de modo que $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

A seguir, faremos duas reduções equivalentes do problema de minimização que usaremos posteriormente para garantir a existência de uma solução, veja Rodrigues (1987) e Wolanski (2007).

Para a primeira redução, suponha que exista um minimizante u para o funcional $\mathcal{J}(v)$. Então, dado $0 \leqslant \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$, a função $v := u + \varepsilon\phi$ é admissível e, portanto, satisfaz

$$\mathcal{J}(u) \leqslant \mathcal{J}(u+\varepsilon\phi).$$

Assim

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \mathcal{J}(u+\varepsilon\phi) - \mathcal{J}(u) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + \varepsilon\nabla\phi|^2 dx + \int_\Omega f(u+\varepsilon\phi)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx + \varepsilon\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\phi dx + \varepsilon\int_\Omega f\phi dx. \end{aligned}$$

Logo se dividirmos por ε e o fizermos tender a 0^+, obtemos que

$$0 \leqslant \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\phi dx + \int_\Omega f\phi dx \quad \forall\ 0 \leqslant \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Dizemos, então, que uma solução para o problema de obstáculo satisfaz

$$\Delta u(x) \leqslant f(x) \quad \text{no sentido fraco em} \quad \Omega.$$

Com um raciocínio análogo, podemos mostrar para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ com suporte no domínio $\{u > \varphi\}$ que o minimizante do funcional satisfaz

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{no sentido fraco em} \quad \{u > \varphi\}.$$

Para mostrar tal afirmação iremos precisar do seguinte fato:

Exercício 6.1. Seja u um minimizante do funcional $\mathcal{J}(v)$ sobre $\mathcal{K}$. Então, u é semicontínuo inferiormente, em outras palavras, para cada constante $k \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in \Omega : u(x) > k\}$ é aberto.

Como uma consequência do Exercício acima temos que o conjunto $\{x \in \Omega : u(x) > \varphi\}$ é aberto.

Suponha agora que $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ satisfaz

$$\overline{\{x \in \Omega : \phi \neq 0\}} := \operatorname{spt}(\phi) \subset \{x \in \Omega : u(x) > \varphi\}.$$

e seja $\mathrm{L}_0 = \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} + 1$. Dado que $\operatorname{spt}(\phi)$ é compacto, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\operatorname{spt}(\phi) \subset \{x \in \Omega : u(x) > \varphi(x) + \delta\}.$$

Logo, segue que para $\varepsilon \in (0, \frac{\delta}{\mathrm{L}_0})$, a função $v = u - \varepsilon\phi$ está acima do obstáculo, pois

$$u(x) - \varepsilon\phi(x) \geqslant \varphi(x) + \delta - \delta = \varphi(x) \quad \forall\ x \in \{u(x) > \varphi + \delta\},$$

logo v é um perfil admissível como competidor para o problema de minimização.

Assim,

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant & \mathcal{J}(u - \varepsilon\phi) - \mathcal{J}(u) \\ & = & \dfrac{\varepsilon^2}{2} \displaystyle\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx + \varepsilon \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi dx + \varepsilon \int_\Omega f\phi dx. \end{array}$$

Portanto se dividirmos por ε e o fazendo $\varepsilon \to 0^+$, obtemos

$$0 \geqslant \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi dx + \int_\Omega f\phi dx \quad \forall\ 0 \leqslant \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

em outras palavras

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{no sentido fraco em} \quad \{u > \varphi\}.$$

Consequentemente uma proposta para entendermos no sentido fraco o "problema do obstáculo" será:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u(x) & \leqslant & f(x) & \text{no sentido fraco em} \quad \Omega \\ \Delta u(x) & = & f(x) & \text{no sentido fraco em} \quad \{u > \varphi\} \\ u(x) & \geqslant & \varphi(x) & \text{em} \quad \Omega \end{array} \right.$$

com $u - g \in H_0^1(\Omega)$ no sentido do traço.

Destacamos que a formulação acima permite a seguinte forma equivalente bastante presente na literatura:

$$\min\{-\Delta u + f, u - \phi\} = 0 \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega.$$

Além disso, na linguagem do problema de obstáculo temos

✓ $\mathcal{C} = \{u = \phi\}$ é denotado conjunto de coincidência;

✓ $\mathcal{C}_+ = \{u > \phi\}$ é denotado região de não coincidência;

✓ $\Gamma(u) = \partial\mathcal{C}_+$ é conhecida como fronteira livre;

✓ Além disso, $u = \phi$ e $\nabla u = \nabla \phi$ sobre $\Gamma(u)$ é conhecida como *condição de fronteira livre* .

Vamos agora fazer a segunda e última redução do problema. Pensemos no funcional $\mathcal{J}$ como a soma de uma forma bilinear simétrica e outra linear:

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}\mathfrak{a}(v, v) - \mathfrak{l}(v),$$

sendo

$$\mathfrak{a}(w, v) := \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v dx \quad \text{e} \quad \mathfrak{l}(v) := -\int_\Omega f v dx$$

Assim, uma vez que $\mathcal{K}$ é um conjunto convexo, se u for um minimizante do funcional, teremos

$$\mathcal{J}(u) \leqslant \mathcal{J}((1-\varepsilon)u + \varepsilon v) \quad \forall\ \varepsilon \in (0, 1) \quad \text{e} \quad w \in \mathcal{K}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \mathcal{J}((1-\varepsilon)u + \varepsilon w) - \mathcal{J}(u) \\
&= \mathcal{J}(u + \varepsilon(w - u)) - \mathcal{J}(u) \\
&= \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}(u + \varepsilon(w-u), u + \varepsilon(w-u)) - \mathfrak{l}(u + \varepsilon(w-u)) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}(u, u) + \mathfrak{l}(u) \\
&= \tfrac{\varepsilon^2}{2}\mathfrak{a}(w-u, w-u) + \varepsilon\mathfrak{a}(u, w-u) - \varepsilon\mathfrak{l}(w-u).
\end{aligned}$$

Portanto, se dividirmos por ε e fizermos com que tenda a 0^+, obtemos que o minimizante $u \in \mathcal{K}$ deve satisfazer a seguinte desigualdade variacional:

$$0 \leqslant \mathfrak{a}(u, w-u) - \mathfrak{l}(w-u) \quad \forall\ \ w \in \mathcal{K},$$

equivalente à primeira formulação que fizemos do problema. O que nos leva ao seguinte teorema:

Teorema 6.1. *(Wolanski (2007, Corolário A1.1.1)) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $g \in H^1(\Omega)$ e $\varphi \in L^2(\Omega)$. Dado $f \in L^2(\Omega)$ existe uma única $u \in \mathcal{K} = \{v \in H^1(\Omega) : v - g \in H_0^1(\Omega) \quad e \quad v \geqslant \varphi \quad em \quad \Omega\}$ tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u)dx \geqslant \int_\Omega f.(v-u)dx \quad \forall \ v \in \mathcal{K}.$$

Além disso, existe $\mathrm{C} > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

A demonstração do Teorema acima é uma consequência direta do seguinte resultado mais geral:

Teorema 6.2 (*Teorema de Stampacchia e Lax-Milgram*)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert, $K \subset H$ um subconjunto convexo, fechado e não vazio. Consideremos uma forma bilinear contínua e coerciva $\mathfrak{a} : H \times H \to \mathbb{R}$, i.e., existem constantes $C, \alpha > 0$ tais que*

1. $\mathfrak{a}(u,v) \leqslant C\|u\|_H\|v\|_H$ *para quaisquer* $u, v \in H$;

2. $\mathfrak{a}(u,v) \geqslant \alpha\|u\|_H^2$ *para quaisquer* $u \in H$

Então, fixado $\mathfrak{l} \in H'$, existe um único $u \in K$ tal que

$$\mathfrak{a}(u, v-u) \geqslant \mathfrak{l}(v-u) \quad \textit{para qualquer} \quad v \in K.$$

Além disso, existe uma constante $\mathrm{c}_0 > 0$ *tal que*

$$\|u\|_H\|v\|_H \leqslant \mathrm{c}_0\|\mathfrak{l}\|_{H'}.$$

Adicionalmente, se $\mathfrak{a}$ é simétrica, então u será um mínimo do funcional

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\mathfrak{a}(u,u) - \mathfrak{l}(u) \quad em \quad K.$$

Devemos destacar que o Teorema 6.2 é uma consequência do seguinte resultado mais geral, cuja prova pode ser encontrada em Rodrigues (1987)

Teorema 6.3 (*Teorema de Lions-Stampacchia*)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert, $K \subset H$ um subconjunto convexo, fechado e não vazio e $\mathfrak{A} : K \times H'$ uma aplicação satisfazendo: Existem constantes* $\mathrm{M}_0, \gamma_0 > 0$ *tais que*

1. $\|\mathfrak{A}u - \mathfrak{A}v\|_{H'} \leqslant \mathrm{M}_0\|u-v\|_H$ *para quaisquer* $u, v \in K$;

2. $\langle \mathfrak{A}u - \mathfrak{A}v, u-v\rangle \geqslant \gamma_0\|u-v\|_H^2$ *para quaisquer* $u, v \in K$.

Então, para cada $\mathfrak{L} \in H'$, existe um único $u \in K$ tal que

$$\langle \mathfrak{A}u - \mathfrak{L}(u), v-u\rangle \geqslant 0 \quad \textit{para qualquer} \quad v \in K. \tag{6.5}$$

Além disso, se $u_1, u_2 \in K$ são as soluções de Equação (6.5) *associadas aos funcionais $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \in H'$ respectivamente, então*

$$\|u_1 - u_2\|_H \leqslant \frac{1}{\gamma_0}\|\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2\|_{H'}.$$

6.1.3 O problema de obstáculo para operadores não variacionais

Na sequência, faremos um passeio pelos desenvolvimentos recentes sobre problemas de obstáculos elípticos não homogêneos na forma não divergente. Nessa direção, devemos citar Byun et al. (2018), que estudam os seguintes problemas de obstáculos:

$$\begin{cases} a^{ij}(x)D_{ij}u & \leqslant & f(x) & \text{em} & \Omega \\ (a^{ij}(x)D_{ij}u - f)(u-\psi) & = & 0 & \text{em} & \Omega \\ u(x) & \geqslant & \psi(x) & \text{em} & \Omega \\ u(x) & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} F(x, D^2u) & \leqslant & f(x) & \text{em} & \Omega \\ (F(x, D^2u) - f)(u-\psi) & = & 0 & \text{em} & \Omega \\ u(x) & \geqslant & \psi(x) & \text{em} & \Omega \\ u(x) & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

em que os coeficientes da matriz $(a^{ij}(x))_{i,j=1}^n$ e o operador totalmente não linear $F : \Omega \times \text{Sim}(n) \to \mathbb{R}$ devem ser uniformemente elípticos (com $\mathrm{X} \to F(x, \mathrm{X})$ uma aplicação convexa). Em tal cenário, eles investigam existência/unicidade e propriedades de regularidade das soluções. Especificamente, provam estimativas de Calderón–Zygmund ponderadas para soluções de problemas elípticos com coeficientes descontínuos e obstáculos irregulares (i.e. $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$).

Dando prosseguimento, Koike e Tateyama (2020), investigam estimativas globais para L^p-soluções de viscosidade do problema de obstáculos bilateral com ingredientes ilimitados quando os obstáculos são meramente contínuos.

$$\begin{cases} F(x, Du, D^2u) \leqslant f(x) & \text{em} & \{x \in \Omega : u(x) > \varphi(x)\} \\ F(x, Du, D^2u) \geqslant f(x) & \text{em} & \{x \in \Omega : u(x) < \psi(x)\} \\ \varphi(x) \leqslant u(x) \leqslant \psi(x) & \text{em} & \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $f \in L^p(\Omega)$ (para $p > \frac{n}{2}$) e $\mu \in L^q(\Omega)$ (com $q > n$)

$$\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) - \mu(x)|\xi - \eta| \leqslant F(x, \xi, \mathrm{X}) - F(x, \eta, \mathrm{Y}) \leqslant \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) + \mu(x)|\xi - \eta|.$$

Eles estabelecem a existência de L^p-soluções de viscosidade via aproximação dos dados. Além disso, eles também investigam a Hölder continuidade local da primeira derivada de L^p-soluções de viscosidade, desde que os obstáculos sejam suficientemente regulares.

Inspirados nas contribuições descritas acima, estudaremos neste capítulo o seguinte problema de obstáculo:

$$\begin{cases} F(x, Du, D^2u) & \leqslant & f(x) & \text{em} & \Omega \\ (F(x, Du, D^2u) - f)(u-\varphi) & = & 0 & \text{em} & \Omega \\ u(x) & \geqslant & \varphi(x) & \text{em} & \Omega \\ u(x) & = & g(x) & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.6}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave, aberto e limitado e $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{Sim}(n) \to \mathbb{R}$ um operador uniformemente elíptico, que satisfaz determinadas condições de crescimento superlinear e subquadrático na entrada do gradiente (tais condições serão especificadas mais adiante). O termo não homogêneo $f \in L^p(\Omega)$ é dado, assim, como o obstáculo $\varphi \in W^{2,2p}(\Omega)$ (ou $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$) e o dado de bordo $g \in W^{2,p}(\Omega)$, sendo $p > n$.

Combinando estimativas $W^{2,p}_{\mathrm{loc}}$ de da Silva e Nornberg (2021) com um *Método de penalização* , mostraremos a existência, unicidade e estimativas $W^{2,p}_{loc}$ para L^p-soluções no sentido da viscosidade de 6.6 (desde que $p > n$). Além disso, para o cenário em que $\mu \equiv 0$ e $p \in (p_0, n]$, mostraremos que estimativas $W^{1,\mathrm{Q}}$ (o intervalo onde $\mathrm{Q} > 1$ se encontra será especificado mais adiante) juntamente com o método de penalização e resultados obtidos em Escauriaza (1993), vão nos permitir mostrar existência, unicidade e estimativas $W^{2,p}_{loc}$ para L^p-soluções no sentido da viscosidade de (6.6).

Nosso trabalho é uma natural extensão dos resultados de Byun et al. (2018) (e em certa medida se relacionam com Koike e Tateyama (2020)) no sentido que estudamos um problema de obstáculo, considerando obstáculos irregulares e governado por um operador superlinear e com ingredientes ilimitados. Particularmente nossos resultados são novos inclusive para o modelo mais simplificado:

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}(\mathbb{A}(x)D^2u) + b(x)\cdot Du + \mu(x)|Du|^m & = & f(x) & \text{em} & \{u > \varphi\} \cap \Omega \\ \mathrm{Tr}(\mathbb{A}(x)D^2u) + b(x)\cdot Du + \mu(x)|Du|^m & \leqslant & f(x) & \text{em} & \Omega \\ u(x) & \geqslant & \varphi(x) & \text{em} & \Omega \\ u(x) & = & g(x) & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

para $f \in L^p(\Omega)$, $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$, se $m = 1$, $\varphi \in W^{2,2p}(\Omega)$ e se $m \in (1,2]$, para $p_0 < p < \infty$, $b \in L^{\varrho}(\Omega)$ e $\mu \in L^q(\Omega)$ (em intervalos de integrabilidade adequados - veja C3).

6.2 Estimativas $W^{2,p}$ para $n < p < \infty$

A seguir, introduziremos as principais hipóteses de nosso trabalho. Para tal propósito, relembremos a definição dos Operadores Extremais de Pucci:

Definição 6.1. Definimos os Operadores Extremais de Pucci $\mathcal{M}^{\pm}_{\lambda,\Lambda} : Sym(n) \to \mathbb{R}$ com constantes de elipticidade $0 < \lambda \leqslant \Lambda < \infty$, da seguinte forma:

$$\mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}) = \inf_{\lambda \mathrm{Id} \leqslant \mathrm{A} \leqslant \Lambda \mathrm{Id}} \mathrm{Tr}(\mathrm{AX}) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}) = \sup_{\lambda \mathrm{Id} \leqslant \mathrm{A} \leqslant \Lambda \mathrm{Id}} \mathrm{Tr}(\mathrm{AX}),$$

em que $Sym(n)$ denota o conjunto das matrizes simétricas $n \times n$ com entradas reais.

Ao longo deste texto, assumimos que

$$F(x, \xi, \mathrm{X}) = G(x, \mathrm{X}) + b(x)\cdot\xi + \mu(x)|\xi|^m,$$

sendo $\mathrm{X} \mapsto G(x, \mathrm{X})$ convexo (ou côncavo), $b \in L^{\varrho}(\Omega)$, $\mu \in L^{q}(\Omega)$, com $\varrho, q \in (n, \infty]$ e $m \in [1, 2]$.

Além disso, assumiremos as seguintes condições estruturais:

(C1) $F(\cdot, 0, 0) \equiv 0$ e para todos $x \in \Omega, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{Sim}(n)$,

$$\mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})-H(x,\xi,\eta) \leqslant F(x,\xi,\mathrm{X})-F(x,\eta,\mathrm{Y}) \leqslant \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})+H(x,\xi,\eta)$$

sendo
$$H(x,\xi,\eta) = b(x)|\xi-\eta| + \mu(x)|\xi-\eta|(|\xi|^{m-1}+|\eta|^{m-1}).$$

Além disso, no regime linear i.e. $m = 1$, simplesmente escreveremos

$$H(x,\xi,\eta) = b(x)|\xi-\eta|,$$

para $b \in L^{\varrho}_{+}(\Omega) = \{b \in L^{\varrho}(\Omega) : b \geqslant 0 \text{ q.t.p em } \Omega\}$, com $\varrho > n$.

(C2) Existem $r_0 > 0$ e $\theta > 0$ tais que

$$\sup_{x_0\in\Omega}\left(\fint_{B_r(x_0)\cap\Omega} \beta(x,x_0)^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \theta, \quad \forall r \leqslant r_0. \tag{6.7}$$

sendo
$$\beta(x,x_0) = \sup_{\mathrm{X}\in\mathrm{Sim}(n)\setminus\{0\}} \frac{|F(x,0,X)-F(x_0,0,\mathrm{X})|}{||\mathrm{X}||}$$

mede a oscilação dos coeficientes de F ao redor de $x_0 \in \Omega$.

(C3) (Dados e relação entre os expoentes) Sejam $f \in L^p(\Omega)$, $\varphi \in W^{2,2p}(\Omega)$, $g \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $b \in L^{\varrho}(\Omega)$ e $\mu \in L^q(\Omega)$, em que $p > p_0$ com $p_0 = p_0(n,\lambda,\Lambda) \in \left[\frac{n}{2}, n\right)$, sendo a constante de Escauriaza, veja Escauriaza (1993, Teorema 1) para mais detalhes. Então

1. Se $1 < m < 2$, assumiremos que

$$\varrho > \max\{n, 2p\} \quad \text{e} \quad q > \max\left\{n, \frac{n}{2-m}, \frac{2p}{2-m}\right\},$$

2. Se $m = 1$, tomamos $\varrho = +\infty$, $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ e $\mu \equiv 0$, e, se $m = 2$, tomamos $q = +\infty$.

Observação 6.1. *Como $g \in C^0(\overline{\Omega})$ (é uniformemente contínua, pois $g \in W^{2,p}(\Omega) \subset C^{0,2-\frac{n}{p}}(\Omega)$), então para $p > \frac{n}{2}$ temos pela* Desigualdade de Morrey *que*

$$\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leqslant \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|g\|_{C^{0,2-\frac{n}{p}}(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}(n,p,\Omega)\|g\|_{W^{2,p}(\Omega)}.$$

Exemplo 6.1 (Operadores de Bellman com Hamiltoniano superlinear)**.** Para conjuntos de índices enumeráveis $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, consideramos

$$F_{\alpha,\beta} : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{Sim}(n) \to \mathbb{R}$$

para $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ definida (para $1 < m \leqslant 2$) por

$$F_{\alpha,\beta}(x, \xi, \mathrm{X}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{A}^{\alpha,\beta}(x)\mathrm{X}) + \langle \mathrm{B}^{\alpha,\beta}(x)\xi, \xi\rangle^{\frac{m}{2}} + \langle \mathrm{b}^{\alpha,\beta}(x), \xi\rangle,$$

sendo as funções mensuráveis $\mathbb{A}^{\alpha,\beta}(x), \mathrm{B}^{\alpha,\beta} : \Omega \to \mathrm{Sim}_+(n)$, que cumprem as condições estruturais:

$$\begin{cases} \lambda \mathrm{Id} \leqslant \mathbb{A}^{\alpha,\beta}(x) \leqslant \Lambda \mathrm{Id} \quad \text{para} \quad (\alpha, \beta) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \\ \sup\limits_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} \|\mu^{\alpha,\beta}\|_{L^{\frac{2q}{m}}(\Omega)} < \infty \quad \text{com} \ \mu^{\alpha,\beta}(x) = \|\mathrm{B}^{\alpha,\beta}(x)\|^{\frac{m}{2}} \\ \sup\limits_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} \|\mathrm{b}^{\alpha,\beta}\|_{L^{\varrho}(\Omega)} < \infty, \end{cases}$$

então

$$F(x, \xi, \mathrm{X}) = \sup_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} F_{\alpha,\beta}(x, \xi, \mathrm{X}) \quad \text{e} \quad F(x, \xi, \mathrm{X}) = \inf_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} F_{\alpha,\beta}(x, \xi, \mathrm{X})$$

são típicos exemplos de operadores, em que nossos resultados podem ser aplicados.

A seguir, apresentamos os principais resultados obtidos neste trabalho.

Teorema 6.4. *Assuma que as hipóteses (C1)-(C3) estão em vigor. Além disso, para* $m \in (1, 2]$ *assuma que exista uma constante* $\delta = \delta(n, \lambda, \Lambda, m, p, q, \|b\|_{\varrho}) > 0$ *tal que* $\|f\|_p^{m-1}||\mu||_q < \delta$. *Se* $p > n$, *então existe uma única* L^p*-solução* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *no sentido da viscosidade para (6.6). Além disso, a seguinte estimativa se verifica:*

1. *Para* $m \in (1, 2]$

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}\left(\mathfrak{A}_0(\delta + 1) + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right)$$

sendo

$$\mathfrak{A}_0 = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,2p}(\Omega)}\left(1 + \|b\|^2_{L^{\varrho}(\Omega)}\right) + \|\mu\|_{L^q(\Omega)}\|\varphi\|^m_{W^{2,2p}(\Omega)}$$

2. *Para* $m = 1$,

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{C}\left(\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,p}(\Omega)}\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\right)e^{\mathrm{C}\|b\|^n_{L^\infty(\Omega)}} + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right)$$

em que $\mathrm{C} > 0$ *é uma constante universal.*

6.3 Resultados e ferramentas auxiliares

Primeiramente relembraremos a definição de L^p-solução no sentido da viscosidade de uma EDP na forma não divergente.

Definição 6.2. Seja $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ com $p > p_0$. Diremos que $u \in C^0(\Omega)$ é uma L^p-subsolução no sentido da viscosidade (resp. L^p-supersolução) de

$$F(x, Du(x), D^2u(x)) = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega$$

se sempre que $u - \eta$ atinge seu máximo local (resp. mínimo) em $x_0 \in \Omega$ com $\eta \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$, segue que

$$\lim_{r\to 0} ess \inf_{B_r(x_0)} \{F(x, u(x), D\eta(x), D^2\eta(x)) - f(x)\} \leqslant 0.$$

$$\left(\text{resp., } \lim_{r\to 0} ess \sup_{B_r(x_0)} \{F(x, u(x), D\eta(x), D^2\eta(x)) - f(x)\} \geqslant 0\right),$$

acima temos que, para todos $\varepsilon, r > 0$, existe um conjunto $\mathfrak{A} \subset B_r(x_0)$ de medida positiva tal que

$$F(x, u(x), D\eta(x), D^2\eta(x)) - f(x) \leqslant \varepsilon \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{A}$$

$$\left(\text{resp. } F(x, u(x), D\eta(x), D^2\eta(x)) - f(x) \geqslant -\varepsilon \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{A}\right).$$

Se u é uma L^p-subsolução e uma L^p-supersolução no sentido da viscosidade, dizemos que u é uma L^p-solução no sentido da viscosidade.

Observação 6.2. *Observamos que se $p > p' > p_0$ e $u \in C^0(\Omega)$ é uma L^p-solução (L^p-sub ou L^p-super) no sentido da viscosidade de*

$$F(x, Du(x), D^2u(x)) = f(x) \quad em \quad \Omega,$$

então u é uma $L^{p'}$-solução ($L^{p'}$-sub ou $L^{p'}$-super) no sentido da viscosidade da mesma equação.

Observação 6.3. *Diremos que u é uma C^0-subsolução (resp. C^0-supersolução, C^0-solução) no sentido da viscosidade se trocarmos $W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ por $C^2(\Omega)$ acima (no conjunto de funções testes), quando G, b e μ são contínuos.*

Observação 6.4. *Dizemos que $u \in C^0(\Omega)$ é uma L^p-subsolução forte (resp. L^p-supersolução forte) de*

$$F(x, Du, D^2u) = f(x) \quad em \quad \Omega$$

se $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ e u satisfaz as desigualdades diferenciais $F(x, Du, D^2u) \leqslant f(x)$ ($\geqslant f(x)$) em quase todo ponto $x \in \Omega$.

Finalmente observe que toda L^p-solução forte é naturalmente uma L^p-solução no sentido da viscosidade.

A seguir, apresentaremos a equivalência da noção de soluções de viscosidade, veja Koike e Święch (2009b, Teorema 3.1 e Proposição 9.1).

Proposição 6.1. *Assuma que F satisfaz $(C1)$ e $(C3)$, $m \geqslant 1$ e que $f \in L^p(\Omega)$. Se uma das condições sob os expoentes são satisfeitas:*

$$\begin{cases} (1) \quad q > n, \ q \geqslant p \geqslant n; \\ (2) \quad q > n > p > p_0, \ p(mq-n) > nq(m-1), \end{cases}$$

então $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ é uma L^p-subsolução (resp. L^p-supersolução) forte de

$$F(x, Du(x), D^2u(x)) = f(x) \quad em \quad \Omega,$$

se, e somente se, é uma L^p-subsolução (resp. L^p-supersolução) no sentido da viscosidade dessa equação.

Os próximos dois resultados são os Princípios do Máximo de Aleksandrov–Bakelman–Pucci (A.B.P., por simplicidade) para operadores com crescimento (linear) superlinear, veja Koike e Święch (2007, Proposição 2.8 e Teorema 2.9).

Proposição 6.2 (A.B.P. regime linear)**.** *Assuma que $q \geqslant p > p_0$ e $q > n$. Então existem constantes $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda) > 0$ e $\mathrm{C}' = \mathrm{C}'(n, \lambda, \Lambda, p, \varrho) > 0$ tais que se $f \in L^p_+(\Omega)$, $b \in L^\varrho_+(\Omega)$ e $u \in C^0(\overline{\Omega})$ é uma L^p-subsolução no sentido da viscosidade de*

$$\mathcal{M}^-(D^2u) - b(x)|Du| \leqslant f(x) \quad em\ \Omega_0 := \{x \in \Omega | u(x) > \sup_{\partial\Omega} u^+\},$$

então segue que

1. *quando $\varrho \geqslant p \geqslant n$ e $\varrho > n$, temos*

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + \mathrm{C}e^{\mathrm{C}\|b\|^n_n}\|f\|_{L^n(\Omega_0)},$$

2. *quando $\varrho > n > p > p_0$, temos*

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + \mathrm{C}'\left\{e^{\mathrm{C}\|b\|^n_n}||b||^N_\varrho + \sum_{k=0}^{N-1}\|b\|^k_\varrho\right\}\|f\|_{L^p(\Omega_0)},$$

onde $N = N(n, p, q) \in \mathbb{N}$ é universal.

Proposição 6.3 (A.B.P. regime superlinear - Koike e Święch (2009b, Teorema 2.6))**.** *Sejam $m \in (1, 2]$, $f \in L^p(\Omega)$, $b \in L^\varrho_+(\Omega)$ e $\mu \in L^q_+(\Omega)$. Seja $u \in C^0(\overline{\Omega})$ uma L^p-subsolução no sentido da viscosidade de*

$$\mathcal{M}^+(D^2u) + b(x)|Du| + \mu(x)|Du|^m \geqslant f(x) \quad em \quad \Omega.$$

Para $q \geqslant p > n$, *existem constantes* $\delta = \delta(n, \varrho, \lambda, \Lambda, m, p, q, \|b\|_\varrho) > 0$ *e* $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \varrho, \lambda, \Lambda, m, p, q, \|b\|_\varrho, diam(\Omega)) > 0$ *tais que*

$$\text{se} \quad \|f\|_p^{m-1}||\mu||_q, \leqslant \delta \quad \text{então} \quad \sup_{\overline{\Omega}} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + \mathrm{C}(\|f\|_n + ||f||_p^m \|\mu\|_q).$$

A seguir, enunciamos um resultado sobre estimativas Hölder globais para soluções de viscosidade.

Teorema 6.5 (Estimativa Hölder global - Koike e Święch (2009a, Teorema 4.5))**.** *Assuma que as hipóteses* $(C1)-(C3)$ *estão em vigor e que* $2 - \frac{n}{q} > m > 1$. *Assuma também que uma das seguintes condições se verificam*

$$\begin{cases} q = \infty, \ p_0 < p, \ n > m(n-p); \\ n < p \leqslant q < \infty; \\ p_0 < p \leqslant n < q < \infty, \ mq(n-p) < n(q-p). \end{cases}$$

Assuma a seguinte condição geométrica

$$|\mathrm{Q}_t(x) \setminus \Omega| \geqslant \Theta t^n \quad \text{para} \quad x \in \partial\Omega \quad \text{e} \quad 0 < t \leqslant t_0,$$

em que $\mathrm{Q}_t(x) = \mathrm{Q}_t(0) + x$ *é o cubo fechado de centro em* x *e lado* $t > 0$.

Para $\mathrm{M}_0 \geqslant 1$ $\sigma \in (0,1)$ *e* $g \in C^{0,\sigma}(\partial\Omega)$, *existe* $\alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda, p, q, m, \sigma, \Theta) \in (0,1)$ *e* $\widetilde{\mathrm{C}} = \widetilde{\mathrm{C}}(n, \lambda, \Lambda, p, q, m, \mathrm{M}_0, \|f\|_p, \|\mu\|_q, diam(\Omega), \Theta, t_0) > 0$ *tal que se* $u \in C^0(\overline{\Omega})$ *é uma* L^p*-solução de viscosidade de*

$$\begin{cases} F(x, Du, D^2u) = f(x) & \text{em} \quad \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

tal que $\|u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leqslant \mathrm{M}_0$, *então*

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}|x-y|^\alpha \quad \text{para} \quad x, y \in \overline{\Omega}.$$

Observação 6.5. *As correspondentes estimativas globais para o caso linear, i.e.* $m = 1$ *e com crescimento quadrático, i.e.* $m = 2$, *podem ser encontrados em Koike e Święch (2009b, Teorema 6.2), Nornberg (2019, Teorema 2), Koike e Święch (2004) e Święch (2020) e referências ali encontradas.*

Observação 6.6. *Devemos destacar que a condição geométrica*

$$|\mathrm{Q}_t(x) \setminus \Omega| \geqslant \Theta t^n \quad \text{para} \quad x \in \partial\Omega \quad \text{e} \quad 0 < t \leqslant t_0,$$

é satisfeita para domínios que cumprem a condição do cone exterior uniforme, os quais incluem domínios com fronteira Lipschitz satisfazendo a condição da esfera exterior para citar alguns exemplos.

Agora apresentamos um *Princípio de Comparação* para L^p-soluções de viscosidade, cf. Nornberg (2019).

Proposição 6.4 (Princípio de Comparação). *Assuma que F_0 satisfaz $(C1)-(C3)$. Suponha que $u \in C^0(\overline{\Omega})$ é uma L^p-subsolução no sentido da viscosidade de*

$$-F_0(x, Du(x), D^2u(x)) = f_0(x) \quad \text{em } \Omega, \tag{6.8}$$

em que $v \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é uma L^p-supersolução forte de (6.8). Se $u \leqslant v$ sobre $\partial\Omega$, então $u \leqslant v$ em Ω.

Demonstração. Defina $w := u - v$ em Ω. Assuma que $\max\limits_{\overline{\Omega}} w = w(x_0) > 0$. Mostraremos que tal afirmação produzirá uma contradição. Como $w \leqslant 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que $x_0 \in \Omega$. Considere $\widetilde{\Omega} := \{w > 0 \text{ em } \Omega\}$, um conjunto não vazio, pois $x_0 \in \widetilde{\Omega}$. Sejam $\eta \in W^{2,p}_{loc}(\widetilde{\Omega})$ e $\widetilde{x} \in \widetilde{\Omega}$ tais que $w - \eta$ atinge máximo local em $\widetilde{x}$. Dessa forma, $u - (v + \eta)$ atinge máximo local em $\widetilde{x}$ e, como $v + \eta \in W^{2,p}_{loc}(\widetilde{\Omega})$, segue do fato de u ser uma L^p-subsolução no sentido da viscosidade que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que para quase todo $x \in B_r(\widetilde{x}) \cap \widetilde{\Omega}$

$$-F_0(x, Dv + D\eta, D^2v + D^2\eta) - f_0(x) \leqslant \varepsilon$$

e

$$-F_0(x, Dv, D^2v) - f_0(x) \geqslant 0$$

do fato de v ser L^p-supersolução forte.

Além disso, por (C1)

$$\begin{aligned}
-\varepsilon &\leqslant F_0(x, Dv + D\eta, D^2v + D^2\eta) - F_0(x, Dv, D^2v) \\
&\leqslant \mathcal{M}^+(D^2\eta) + b(x)|D\eta| + \mu|D\eta|\left(|Dv + D\eta|^{m-1} + |Dv|^{m-1}\right) \\
&\leqslant \mathcal{M}^+(D^2\eta) + b(x)|D\eta| + \mu|D\eta|^m + 2\mu|D\eta||Dv|^{m-1}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $\widetilde{b} = b + 2\mu|Dv|^{m-1} \in L^p(\Omega)$, pois $\varrho > 2p$ e $q > \frac{p}{2-m}$, então w é uma L^p-subsolução no sentido da viscosidade de

$$\mathcal{M}^+(D^2w) + \widetilde{b}(x)|Dw| + \mu(x)|Dw|^m \geqslant 0 \quad \text{em} \quad \widetilde{\Omega}$$

Portanto, pelas estimativas A.B.P (Proposição 6.3), segue que $w \leqslant 0$ em $\widetilde{\Omega}$, contradizendo a definição de $\widetilde{\Omega}$, provando assim o resultado. $\square$

Observação 6.7. *Uma prova similar pode ser dada para o caso linear (i.e., $m = 1$), usando a Proposição 6.2.*

Com o resultado acima somos capazes de provar a existência de L^p-soluções para o problema de Dirichlet.

Proposição 6.5 (*Método de Perron*). *Assuma que F satisfaz (C1) e (C3). Sejam $\underline{u} \in C^0(\overline{\Omega})$ uma L^p-subsolução no sentido da viscosidade de $F(x.Du, D^2u) = f(x)$ em Ω e $\overline{u} \in C^0(\overline{\Omega})$ uma L^p-supersolução no sentido da viscosidade de $F(x.Du, D^2u) = f(x)$ em Ω com $\underline{u} \leqslant \overline{u}$ em Ω. Então a função $u \in C^0(\overline{\Omega})$, definida como $u(x) := \sup_{v \in \mathcal{K}} v(x)$ para $x \in \Omega$, tendo subsolução*

$$\mathcal{K} := \left\{ v \in C^0(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} v \text{ é uma } L^p-\text{subsolução no sentido da viscosidade de} \\ \\ F(x, Du(x), D^2u(x)) = f(x) \text{ em } \Omega, \;\; \underline{u} \leqslant v \leqslant \overline{u}, \\ \\ \underline{u} = v = \overline{u} \text{ sobre } \partial\Omega. \end{array} \right\},$$

é uma L^p-solução no sentido da viscosidade de

$$\begin{cases} F(x, Du(x), D^2u(x)) = f(x) & \text{em} \quad \Omega \\ \qquad\qquad\qquad u(x) = g(x) & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

A proposição acima pode ser obtida com argumentos similares aos utilizados em Koike (2005).

Proposição 6.6 (Ponto fixo de Schauder – Gilbarg e Trudinger (2001, Theorem 11.1)). *Seja E um conjunto convexo e compacto em um espaço de Banach e seja $\mathrm{T} : E \to E$ uma aplicação contínua. Então T tem um ponto fixo, isto é, $\mathrm{T}(x) = x$ para algum $x \in E$.*

O próximo resultado assegura a estabilidade do sentido de L^p-solução de viscosidade.

Proposição 6.7 (Estabilidade – da Silva e Nornberg (2021, Proposition 2.5)). *Sejam F, F_k satisfazendo (C1) e (C3), $b \in L^{\varrho}_{+}(\Omega), \mu \in L^q_{+}(\Omega)$, $f, f_k \in L^p(\Omega)$. Seja $u_k \in C(\Omega)$ uma L^p-subsolução (resp. L^p-supersolução) no sentido da viscosidade de*

$$F_k(x, Du_k, D^2u_k) \geqslant f_k(x) \text{ em } \Omega \text{ (resp. } \leqslant f_k(x)) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Suponha que $u_k \to u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$ quando $k \to \infty$ e para cada bola $B \subset\subset \Omega$ e $\eta \in W^{2,p}(B)$, tomando

$$g_k[\eta] := F_k(x, D\eta, D^2\eta) - f_k(x) \quad e \quad g[\eta] := F(x, D\eta, D^2\eta) - f(x),$$

temos que $||(g_k[\eta] - g[\eta])^+||_{L^p(B)}, (||(g_k[\eta] - g[\eta])^-||_{L^p(B)}) \to 0$ quando $k \to \infty$. Então u é uma L^p-subsolução (resp. L^p-supersolução) no sentido da viscosidade de

$$F(x, Du, D^2u) \geqslant f(x) \quad (\text{resp.} \leqslant f(x)) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Mais ainda: se F for contínuo em x, então é suficiente que aconteça para toda $\varphi \in C^2(B)$; caso em que u é uma C^0-subsolução (resp. C^0-supersolução) no sentido da viscosidade.

Nossa última estimativa em Espaços de Sobolev estabelece regularidade $W^{2,p}$ locais.

Proposição 6.8 (*Estimativas* $W^{2,p}$ – da Silva e Nornberg (ibid., Proposição 6.7))**.** *Assuma que (C1)-(C3) são satisfeitas. Então a equação* $F(x,\xi,\mathrm{X}) = G(x,\mathrm{X}) + b(x)\cdot\xi + \mu(x)|\xi|^m = f(x)$ *com* $u = g$ *no bordo possui estimativas* $W^{2,p}_{loc}$ *sempre que* $\mathrm{X} \mapsto G(x,\mathrm{X})$ *é convexo ou côncavo,* $f \in L^p(\Omega)$ *para* $p > n$*, e* u *é uma* L^p*-solução no sentido da viscosidade (limitada) da equação acima. Isto é, a seguinte estimativa se verifica:*

$$\|u|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)}).$$

sendo $\mathrm{C} > 0$ *uma constante universal.*

Finalmente temos a estimativa $W^{2,p}$ para operadores convexos/côncavos sem termos de "ordem baixa".

Teorema 6.6. *(Escauriaza (1993, Theorem 1)) Seja* F *um operador totalmente não linear uniformemente elíptico. Assuma que soluções* $\mathfrak{h}$ *do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} F(y, D^2\mathfrak{h}(x)) &= 0 \quad \text{em } B_r(y) \\ \mathfrak{h} &= w \quad \text{sobre } \partial B_r(y) \end{cases} \tag{6.9}$$

satisfazem as estimativas a priori $C^{1,1}$ *interiores, i.e.,*

$$\|\mathfrak{h}\|_{C^{1,1}(B_{r/2}(y)))} \leqslant \mathrm{C}_0 r^{-2}\|\mathfrak{h}\|_{L^\infty(B_r(y))} \quad \text{para todo} \quad y \in B_1.$$

Então, existe $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\theta, p, \lambda, \Lambda, n, \mathrm{C}_0)$ *tal que se* u *é uma* L^p*-solução de* $F(D^2u, x) = f(x)$ *em* B_1*,* $p > p_0$*,* $f \in L^p$ *e*

$$\fint_{B_r(y)} \beta(x,y)^n \, dx \leqslant \theta, \forall y \in B_1 \text{ e } r \leqslant 2,$$

então a seguinte estimativa se verifica

$$\|u\|_{W^{2,p}(B_{1/2})} \leqslant \mathrm{C}(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^p(B_1)}).$$

Observação 6.8. *É um fato bastante conhecido da Teoria de Evans–Krylov–Trudinger que operadores côncavos ou convexos satisfazem as estimativas acima descritas para o problema* (6.9)*, veja o Livro de Caffarelli e Cabré (1995b), Evans (1982b), Krylov (1982) e Trudinger (1983) para mais detalhes.*

6.4 Prova do Teorema 6.4

Apresentaremos agora a demonstração do Teorema 6.4 (Seguiremos a estratégia de Byun et al. (2018) adaptada ao nosso contexto). Ressaltamos que todas as constantes que aparecerem são universais, isto é, podem depender de n, p, ϱ, q, λ, Λ, $\|b\|_{L^\varrho(\Omega)}$, $\|\mu\|_{L^q(\Omega)}$, $\mathrm{diam}(\Omega)$ e serão denotadas simplesmente por $\mathrm{C} > 0$.

Prova do Teorema 6.4. Vamos considerar o seguinte problema penalizado

$$\begin{cases} F(x, Du_\varepsilon(x), D^2u_\varepsilon(x)) = h^+(x)\beta_\varepsilon(u_\varepsilon - \varphi) + f(x) - h^+(x) & \text{em } \Omega \\ u_\varepsilon(x) = g(x) & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.10}$$

em que

$$h(x) = f(x) - F(x, D\varphi(x), D^2\varphi(x))$$

e, para $\varepsilon \in (0,1)$, consideramos $\beta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leqslant \beta_\varepsilon(s) \leqslant 1$ $\forall s \in \mathbb{R}$ e

$$\beta_\varepsilon(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \leqslant 0 \\ 1, & \text{se } s \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

Definindo $\widehat{p} := \dfrac{q}{p}$ e $\widehat{q} := \dfrac{q}{q-p}$, temos que $\dfrac{1}{\widehat{p}} + \dfrac{1}{\widehat{q}} = 1$ e, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \|\mu(x)|D\varphi|^m\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |\mu(x)|^p |D\varphi|^{mp}\, dx \\ &\leqslant \left(\int_\Omega |\mu(x)|^{p\widehat{p}}\, dx\right)^{1/\widehat{p}} \left(\int_\Omega |D\varphi|^{mp\widehat{q}}\, dx\right)^{1/\widehat{q}} \\ &\leqslant \|\mu\|^p_{L^q(\Omega)} \|D\varphi\|^{mp}_{L^{mp\widehat{q}}(\Omega)} \\ &\leqslant \mathrm{C}\|\mu\|^p_{L^q(\Omega)} \|D\varphi\|^{mp}_{L^{2p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Similarmente, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\||b||D\varphi|\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \begin{cases} \mathrm{C}\|b\|^2_{L^\varrho(\Omega)}\|D\varphi\|_{L^{2p}(\Omega)} & \text{se} \quad 1 < m \leqslant 2 \\ \mathrm{C}\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\|D\varphi\|_{L^p(\Omega)} & \text{se} \quad m = 1 \end{cases}$$

Portanto, obtemos
Para $m = 1$

$$\|F(x, D\varphi(x), D^2\varphi(x))\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}\|\varphi\|_{W^{2,p}(\Omega)}\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)$$

Para $1 < m \leqslant 2$

$$\begin{aligned} &\|F(x, D\varphi(x), D^2\varphi(x))\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \\ &\qquad \leqslant \mathrm{C}\left(\|\varphi\|_{W^{2,2p}(\Omega)} + \|b\|^2_{L^\varrho(\Omega)}\|D\varphi\|_{L^{2p}(\Omega)} + ||\mu|D\varphi|^m||_{L^p(\Omega)}\right) \\ &\qquad \leqslant \mathrm{C}\left(\|\varphi\|_{W^{2,2p}(\Omega)} + \|b\|^2_{L^\varrho(\Omega)}\|D\varphi\|_{L^{2p}(\Omega)} + \|\mu\|_{L^q(\Omega)}\|D\varphi\|^m_{L^{2p}(\Omega)}\right) \\ &\qquad \leqslant \mathrm{C}\left(\|\varphi\|_{W^{2,2p}(\Omega)}\left(1 + \|b\|^2_{L^\varrho(\Omega)}\right) + \|\mu\|_{L^q(\Omega)}\|\varphi\|^m_{W^{2,2p}(\Omega)}\right) \end{aligned}$$

Com isso é possível estimar h da seguinte forma:
Para $m = 1$

$$\|h\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,p}(\Omega)}\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\right).$$

Para $1 < m \leqslant 2$

$$\begin{aligned}\|h\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|F(x, D\varphi(x), D^2\varphi(x))\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leqslant \mathrm{C}\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,2p}(\Omega)}\left(1 + \|b\|^2_{L^\varrho(\Omega)}\right) + \|\mu\|_{L^q(\Omega)}\|\varphi\|^m_{W^{2,2p}(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Logo, definindo $\widetilde{f}_{u_\varepsilon}(x) := h^+(x)\beta_\varepsilon(u_\varepsilon - \varphi) + f(x) - h^+(x)$, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{f}_{u_\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \\ &\quad\leqslant \mathrm{C}\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,2p}(\Omega)}\left(1 + \|b\|^2_{L^\varrho(\Omega)}\right) + \|\mu\|_{L^q(\Omega)}\|\varphi\|^m_{W^{2,2p}(\Omega)}\right)\end{aligned}$$

se $1 < m \leqslant 2$, e

$$\|\widetilde{f}_{u_\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,p}(\Omega)}\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\right) \quad \text{se} \quad m = 1.$$

Então, para cada $v_0 \in L^p(\Omega)$ fixado, utilizando as Proposições 6.3, 6.5 e 6.8 para $m \in (1, 2]$ e (6.2) para $m = 1$, existe uma única L^p-solução $u_\varepsilon \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ no sentido da viscosidade de

$$\begin{cases} F(x, Du_\varepsilon(x), D^2u_\varepsilon(x)) = \widetilde{f}_{v_0}(x) & \text{em } \Omega \\ u_\varepsilon(x) = g(x) & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

com a seguinte estimativa para $m \in (1, 2]$

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}\left(\mathfrak{A}_0(\delta + 1) + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right) := \Xi_0,$$

sendo

$$\mathfrak{A}_0 := \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)}\|\varphi\|_{W^{2,2p}(\Omega)}\left(1 + \|b\|^2_{L^\varrho(\Omega)}\right) + \|\mu\|_{L^q(\Omega)}\|\varphi\|^m_{W^{2,2p}(\Omega)},$$

respectivamente a seguinte estimativa para $m = 1$

$$\begin{aligned}&\|u_\varepsilon\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant \mathrm{C}\left(\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)}\|\varphi\|_{W^{2,p}(\Omega)}\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\right)e^{\mathrm{C}\|b\|^n_{L^n(\Omega)}} + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right) \\ &\qquad := \Xi_1.\end{aligned}$$

Logo $\|u_\varepsilon\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant C_* := \max\{\Xi_0, \Xi_1\}$, sendo $C_* > 0$ uma constante universal que não depende de ε.

Definimos, então, o operador $T : L^p(\Omega) \to W^{2,p}(\Omega)$ dado por $T(v_0) = u_\varepsilon$.

Temos que T mapeia a bola de raio C_* em $L^p(\Omega)$ nela mesma, i.e., $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, em que

$$\mathcal{B} := \left\{v \in L^p(\Omega);\ \|v\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_*\right\}.$$

Além disso, T é um operador contínuo e compacto. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder (Proposição (6.6)), existe $u_\varepsilon \in L^p(\Omega)$ tal que $T(u_\varepsilon) = u_\varepsilon$, mostrando a existência de uma solução u_ε para (6.10).

Como vimos anteriormente, $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é uniformemente limitada. Logo, por compacidade, passando para uma subsequência, temos que existe uma função $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que $u_{\varepsilon_j} \rightharpoonup u$ em $W^{2,p}(\Omega)$. Além disso, $u_{\varepsilon_j} \to u$ em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ (pelo Teorema 6.5).

Agora, dado que $u_{\varepsilon_j}(x) = g(x)$ sobre $\partial\Omega$ e como $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, temos que $u(x) = g(x)$ sobre $\partial\Omega$.

Agora, como $\beta_{\varepsilon_j}(\cdot) \leqslant 1$, temos que

$$\begin{aligned} F(x, Du_{\varepsilon_j}(x), D^2u_{\varepsilon_j}(x)) &= h^+(x)\beta_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j} - \varphi) + f(x) - h^+(x) \\ &\leqslant f(x) \quad \text{em } \Omega \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Logo, pela Estabilidade da Noção de L^p-solução de viscosidade (Proposição 6.7), segue que

$$F(x, Du(x), D^2u(x)) \leqslant f(x) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Mostraremos agora que

$$F(x, Du(x), D^2u(x)) = f(x) \quad \text{em} \quad \{u > \varphi\}.$$

Para isso, observe que, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$h^+(x)\beta_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j} - \varphi) + f(x) - h^+(x) \to f(x) \text{ q.t.p. quando } k \to \infty \quad \text{em} \left\{\varphi + \frac{1}{k} < u\right\}.$$

Novamente, pela Estabilidade de L^p-soluções, concluímos que

$$F(x, Du(x), D^2u(x)) = f(x) \text{ em } \{\varphi < u\} = \bigcup_{k\geqslant 1} \left\{\varphi + \frac{1}{k} < u\right\} \text{ quando } k \to \infty.$$

Portanto, para mostrar que u é solução de (6.6), falta apenas mostrar que $u \geqslant \varphi$ em Ω.

Note que $\beta_{\varepsilon_j}(u_{\varepsilon_j} - \varphi) \equiv 0$ em $\mathcal{O}_j = \{u_{\varepsilon_j} < \varphi\}$. Se $\mathcal{O}_j = \emptyset$, não temos nada a mostrar. Suponha que $\mathcal{O}_j \neq \emptyset$, então u_{ε_j} é uma L^p-solução no sentido da viscosidade de

$$-F(x, Du_{\varepsilon_j}, D^2u_{\varepsilon_j}) = h^+(x) - f(x) \quad \text{em } \mathcal{O}. \tag{6.11}$$

Logo $u_{\varepsilon_j} \in W^{2,p}(\Omega)$ é uma L^p-supersolução forte de (6.11) (pela Proposição 6.1). Além disso, observe que

$$-F(x, D\varphi, D^2\varphi) = h(x) - f(x) \leqslant h^+(x) - f(x) \quad \text{em} \quad \mathcal{O}_j,$$

o que implica que φ é uma L^{2p}-subsolução (logo uma L^p-subsolução pela Observação 6.2) no sentido da viscosidade de (6.11). Como $u_{\varepsilon_j} = \varphi$ sobre $\partial\mathcal{O}_j$, temos do Princípio da Comparação (Proposição 6.4) que $u_{\varepsilon_j} \geqslant \varphi$ em $\mathcal{O}_j$, o que é uma contradição. Usando novamente a estabilidade, obtemos o resultado.
Mais ainda: observe que, para $1 < m \leqslant 2$, temos que

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} &\leqslant \liminf_{j\to\infty} \|u_{\varepsilon_j}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \\ &\leqslant \mathrm{C}\left(\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,2p}(\Omega)}\left(1 + \|b\|^2_{L^\varrho(\Omega)}\right) + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. \|\mu\|_{L^q(\Omega)}\|\varphi\|^m_{W^{2,2p}(\Omega)}\right)(\delta + 1) + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right)\end{aligned}$$

bem como para $m = 1$ obtemos que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant$$
$$\mathrm{C}\left(\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)}\|\varphi\|_{W^{2,p}(\Omega)}\left(1 + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\right)e^{\mathrm{C}\|b\|^n_{L^n(\Omega)}} + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right)$$

$\square$

A seguir, apresentamos a demonstração da unicidade de L^p-soluções de viscosidade.

Prova da Unicidade. Suponha que existam duas L^p-soluções u e v no sentido da viscosidade de 6.6. Note que por $u, v \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, então u, v serão L^p-soluções fortes pela Proposição 6.1. Assuma que $u \neq v$. Então podemos supor que

$$\mathcal{O} = \{v > u\} \neq \emptyset$$

e temos que $\mathcal{O}$ é relativamente aberto.

Agora notemos que $v > u \geqslant \varphi$ em $\mathcal{O}$, logo

$$F(x, Du, D^2u) \leqslant f(x) \leqslant F(x, Dv, D^2v) \quad \text{em} \quad \mathcal{O}.$$

no sentido da viscosidade. Como $u = v$ sobre $\partial\mathcal{O}$, então pelo Princípio de Comparação (Equação (6.11)) concluímos que $u \geqslant v$ em $\mathcal{O}$, o que é uma contradição. Logo $u = v$. $\square$

Para os interessados na regularidade de soluções e suas *fronteiras livres*, recomendamos assistir a palestra do Medalhista Fields *Alessio Figalli* sobre o Problema de Obstáculo no International Congress of Mathematicians de 2018, no Rio de Janeiro, veja Figalli (2018).


ICM 2018
RIO DE JANEIRO
Alessio
Figalli
ETH Zürich
FIELDS MEDAL
SBM
BNDES

7 Problemas de Núcleos Mortos

Estudaremos a regularidade para problemas de reação de difusão conduzidos por operadores elípticos totalmente não lineares degenerados/singulares sob *condição de absorção forte* da forma geral:

$$F(x, Du, D^2u) = f(u) \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{7.1}$$

A função $u \mapsto f(u)$ falha em ser Lipschitz contínuo na origem, portanto as soluções podem criar regiões de platô, isto é, subconjuntos em que uma dada solução não negativa é identicamente nula. Vamos estabelecer a existência de soluções adequadas e provamos regularidade ótima C^{ϑ} ao longo do conjunto $\mathfrak{F}_0 = \partial\{u > 0\}$. O valor preciso $\vartheta \geqslant 1 + \varepsilon_F$ é obtido explicitamente e depende apenas de parâmetros estruturais. Vamos provar também a não e a finitude da medida $(n-1)$-Hausdorff da fronteira livre.

7.1 O Problema de Núcleos Mortos: Uma introdução

As equações elípticas de reação-difusão têm sido utilizadas em diversos modelos em Matemática Pura e Aplicada. Alguns exemplos notáveis vêm de reações químicas, fenômenos físico-matemáticos, processos biológicos e dinâmica populacional. Processos de reação-difusão com transição de fase, ou seja, com restrição de sinal, costumam ser mais relevantes do ponto de vista das ciências aplicadas. Um exemplo prototípico é

$$\begin{cases} \Delta u(x) &= f(u) & \text{em} & \Omega \\ u(x) &= g(x) & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.2}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio regular e limitado, f é um termo de reação não linear, contínuo e crescente, com $f(0) \geqslant 0$ e g é uma função contínua e não negativa. Quando $f \in C^{0,1}(\Omega)$, segue do Princípio do Máximo que soluções não negativas devem ser estritamente positivas. No entanto, se f falha em ser Lipschitz na origem, digamos no caso $f(t) = t^{\mu}$ com $0 < \mu < 1$, então soluções não negativas podem exibir um platô, também conhecido como *Núcleo Morto*, ou seja, uma região de medida positiva $\Omega' \subset \Omega$ onde as soluções são identicamente nulas.

Como ilustração, certos processos de reações catalíticas isotérmicas (estacionárias) e irreversíveis podem ser modelados matematicamente por problemas de fronteira do tipo reação-difusão da forma

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda_0(x) u_+^q(x) &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u(x) &= 1 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.3}$$

em que nesse contexto u representa a densidade de um reagente químico (ou gás) e a cinética não Lipschitz u_+^q corresponde à isotérmica de ordem q de Freundlich. Além disso, $\lambda_0 > 0$ é conhecido como Thiele Modulus e controla a razão entre a taxa de reação e a taxa de difusão. Quando $q \in (0,1)$, o termo de absorção forte devido à reação química pode ser mais rápida do que o suprimento causado pela difusão através da fronteira, o que pode levar ao reagente químico a desaparecer em algumas sub-regiões (os Núcleos mortos), ou seja, $\Omega' = \{x \in \Omega : u(x) = 0\} \subset \Omega$. Em tais zonas, não ocorre nenhuma reação química. Por essa razão, o conhecimento do comportamento qualitativo/quantitativo das soluções desempenha um papel fundamental na Engenharia Química e em outras áreas aplicadas.

Essa classe de problemas de fronteira livre tem recebido grande atenção desde o início dos anos 80. Alguns dos principais temas de pesquisa na área são a existência de núcleo morto, as propriedades de localização, o comportamento assintótico de soluções e o "fator de efetividade", veja Díaz (1985) para um levantamento completo sobre este tópico (cf. também Alt e Phillips (1986), Friedman e Phillips (1984) e Phillips (1983) para outras considerações).

7.2 Resultados e ferramentas auxiliares

Inspirados nas contribuições descritas acima, estudaremos Problemas de Reação de Difusão regidos por equações elípticas totalmente não lineares de segunda ordem de tipo degenerado ou singular para as quais um Princípio do Mínimo não está disponível:

$$\begin{cases} F(x, Du, D^2u) &= \lambda_0(x) \cdot u_+^{\mu}(x) \quad \text{in} \quad \Omega \\ u(x) &= g(x) \qquad\qquad\quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.4}$$

sendo Ω é uma domínio regular e limitado, $0 \leqslant g \in C^0(\partial\Omega)$, $0 < c_0 \leqslant \lambda_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ e f é uma função contínua e crescente com $f(0) = 0$. Aqui $F : \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times Sym(n) \to \mathbb{R}$ é um operador elíptico totalmente não linear degenerado ou singular satisfazendo:

(F1) [γ-Condição de Elipticidade] Existem constantes $\Lambda \geqslant \lambda > 0$ tais que, para todo $(x, \overrightarrow{p}) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e $M, P \in \mathrm{Sim}(n)$, com $P \geqslant 0$ e $\gamma > -1$, vale

$$|\overrightarrow{p}|^{\gamma} \mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(P) \leqslant F(x, \overrightarrow{p}, M + P,) - F(x, \overrightarrow{p}, M) \leqslant |\overrightarrow{p}|^{\gamma} \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(P), \quad (7.5)$$

em que $\mathcal{M}^{\pm}_{\lambda,\Lambda}$ denota o operador extremal de Pucci:

$$\mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(M) := \lambda \cdot \sum_{e_i<0} e_i + \Lambda \cdot \sum_{e_i>0} e_i \quad \text{e} \quad \mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(M) := \lambda \cdot \sum_{e_i>0} e_i + \Lambda \cdot \sum_{e_i<0} e_i$$

e $\{e_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ são os autovalores M.

(F2) [γ-Condição de Homogeneidade] Para todo $s \in \mathbb{R}^*$, $t \geqslant 0$ e $(x, \overrightarrow{p}, M) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times Sym(n)$,

$$F(x, s\overrightarrow{p}, tM) = |s|^{\gamma} t F(x, \overrightarrow{p}, M), \quad (7.6)$$

(F3) [Continuidade] Existe função contínua $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ com $\omega(0) = 0$ tal que, para todo $(x, y, \overrightarrow{p}, M) \in \Omega \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times Sym(n)$

$$|F(x, \overrightarrow{p}, M) - F(y, \overrightarrow{p}, M)| \leqslant \omega(|x - y|)|\overrightarrow{p}|^{\gamma} \|M\|.$$

A seguir, apresentamos alguns resultados obtidos em da Silva, Leitão Júnior e Ricarte (2021).

Definição 7.1 (*Soluções de viscosidade*). $u \in C^0(\Omega)$ é dito uma supersolução de viscosidade (resp. subsolução) para

$$F(x, Du, D^2u) = g(x, u) \quad \text{in} \quad \Omega$$

se, para cada $x_0 \in \Omega$, temos o seguinte

(a) Ou $\forall\ \phi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \phi$ tenha um mínimo local em x_0 e $|D\phi(x_0)| \neq 0$, então

$$F(x_0, D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leqslant g(x_0, \phi(x_0)) \quad (resp. \ \geqslant g(x_0, \phi(x_0)))$$

(b) Ou existe uma bola aberta $B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$, $\varepsilon > 0$ sendo u constante, $u = K$, que contém

$$g(x, K) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in B(x_0, \varepsilon) \quad (\text{resp. } g(x, K) \leqslant 0)$$

Finalmente u é dito ser uma solução de viscosidade se é simultaneamente uma supersolução de viscosidade e uma subsolução de viscosidade.

O próximo resultado é fundamental para provar a existência de soluções de viscosidade para o nosso problema de Núcleo Morto, bem como para provar algumas propriedades geométricas fracas em breve.

Lema 7.1 (*Princípio de Comparação II*). *Sejam u_1 e u_2 funções contínuas em $\overline{\Omega}$ cumprindo*

$$F(x, Du_1, D^2u_1) - \lambda_0(x) \cdot (u_1)_+^{\mu}(x) \leqslant 0 \leqslant F(x, Du_2, D^2u_2) - \lambda_0(x) \cdot (u_2)_+^{\mu}(x)$$

em Ω no sentido da viscosidade. Se $u_1 \geqslant u_2$ em $\partial\Omega$, então $u_1 \geqslant u_2$ em Ω.

Demonstração. Recomendamos da Silva, Leitão Júnior e Ricarte (2021) para prova. □

Agora vamos comentar a existência de uma solução de viscosidade para o Problema de Dirichlet (7.4). Normalmente segue-se uma aplicação do Método de Perron, uma vez que uma versão do Princípio da Comparação está disponível. Para mais detalhes, veja da Silva, Leitão Júnior e Ricarte (ibid.).

Teorema 7.1. *Seja $f \in C([0, \infty))$ função limitada, crescente com $f(0) = 0$. Suponha que exista uma subsolução de viscosidade $u_\flat \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{0,1}(\Omega)$ e uma supersolução de viscosidade $u^\sharp \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{0,1}(\Omega)$ para $\mathcal{F}(x, Du, D^2u) = f(u)$ satisfazendo $u_\flat = u^\sharp = g \in C(\partial\Omega)$. Defina a classe de funções*

$$\mathfrak{S}_g^f[F](\Omega) := \left\{ \omega^* \in C(\overline{\Omega}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \omega^* \text{ é uma supersolução de viscosidade para} \\ F(x, Du, D^2u) = f(u) \text{ em } \Omega \text{ tal que} \\ u_\flat \leqslant \omega^* \leqslant u^\sharp \\ \text{e } \omega^* = g \text{ sobre } \partial\Omega \end{array} \right\}.$$

Então

$$u(x) := \inf_{\omega^* \in \mathfrak{S}_g^f[F](\Omega)} \omega^*(x) \quad \text{para } x \in \overline{\Omega} \tag{7.7}$$

é uma solução de viscosidade contínua para $F(x, Du, D^2u) = f(u)$ em Ω com $u = g$ continuamente sobre $\partial\Omega$.

Além disso, a unicidade é uma consequência imediata do Princípio da Comparação (Lema 7.1).

Teorema 7.2 (Existência e Unicidade). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e suave e $g \in C(\partial\Omega)$ uma dada função não negativa. Então existe uma função não negativa $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, cumprindo* (7.4) *no sentido da viscosidade. Além disso, essa solução é única.*

7.3 Regularidade ao longo da fronteira livre

Conforme discutido anteriormente, a ausência do Princípio do Mínimo, ou seja, quando $0 < \mu < \gamma + 1$, dá a possibilidade de regiões de platô.

Exemplo 7.1. A título de exemplo, fixada uma direção $i = 1, \cdots, n$, o perfil unidimensional

$$u(x_1, \cdots, x_n) := (\pm x_i)_+^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}$$

é uma solução no sentido da viscosidade para

$$|Du|^\gamma \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^{\pm}(D^2u) = \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)^{\gamma+1}}{(\gamma+1-\mu)^{\gamma+2}} \cdot u_+^\mu(x) \quad \text{em} \quad B_!.$$

Uma característica que vale a pena comentar sobre esse exemplo é que, em geral, as soluções para (7.4) são localmente da classe $C^{1,\frac{1}{\gamma+1}}$, um resultado comprovado por Araújo, Ricarte e Teixeira (2015) e Imbert e Silvestre (2013), para o caso $\gamma > 0$. Veja também os trabalhos de Birindelli e Demengel (2004, 2015, 2016) para o caso singular correspondente. Para o exemplo acima, fixado $\gamma > -1$, observa-se que $\alpha(\gamma, \mu) := \frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu} > 2$ desde que $\mu > \max\left\{0, \frac{\gamma}{2}\right\}$, o que significa que u é uma solução clássica, mesmo ao longo da fronteira livre. Nesta seção, vamos abordar que qualquer solução para (7.4) se comporta perto de sua fronteira livre como no exemplo anterior.

Mais precisamente, podemos estabelecer o seguinte resultado de regularidade melhorada ao longo da fronteira livre:

Teorema 7.3 (Regularidade melhorada ao longo da fronteira livre)**.** *Seja u uma solução limitada e não negativa no sentido da viscosidade para*

$$F(x, Du, D^2u) = \lambda_0(x) \cdot u_+^\mu(x) \quad em \quad \Omega, \tag{7.8}$$

e considere $Y_0 \in \partial\{u > 0\} \setminus \partial\Omega$ um ponto da fronteira livre. Então, para $r_0 := \frac{1}{2}\min\{1, dist(Y_0, \partial\Omega)\}$ e todo $X \in B_{r_0}(Y_0) \cap \{u > 0\}$, vale:

$$u(X) \leqslant C \cdot \|u\|_{L^\infty} |X - Y_0|^{\frac{2+\gamma}{1+\gamma-\mu}},$$

em que C depende somente de $n, \lambda, \Lambda, \gamma, \mu, \|\lambda_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ e $dist(Y_0, \partial\Omega)$.

Antes da demonstração do resultado, o próximo lema é um dispositivo poderoso na Teoria da Regularidade e desempenha um papel fundamental em nossa abordagem, porque nos permite obter acesso ao regime de regularidade desejado usando as propriedades de escalonamento da equação.

Lema 7.2. *Dado $\tau > 0$, existe $\sigma = \sigma(\tau, n, \lambda, \Lambda, \gamma) > 0$ tal que para $0 < \delta_\tau \leqslant \sigma$, se ς é uma solução de viscosidade para*

$$F(x, D\varsigma, D^2\varsigma) = \delta_\tau^{\gamma+2}\lambda_0(x) \cdot f(\varsigma) \quad em \quad B_{2r_0}(x_0) \quad com\ \ 0 \leqslant \varsigma \leqslant 1\ \ e\ \ \varsigma(x_0) = 0$$

Então

$$\sup_{B_{r_0}(x_0)} \varsigma(x) \leqslant \tau$$

Demonstração. Suponha que a tese do Lema não seja verdadeira. Então, para algum $\tau_0 > 0$, existe a sequência $(\varsigma_k)_{k\geqslant 1}$ tal que $0 \leqslant \varsigma_k \leqslant 1$, $\varsigma_k(x_0) = 0$ e $(\lambda_0^k)_{k\geqslant 1}, (f_k)_{k\geqslant 1}$ funções localmente limitada, satisfazendo

$$F(x, D\varsigma_k, D^2\varsigma_k) = \frac{1}{k^{\gamma+2}}\lambda_0^k(x).f_k(\varsigma_k) \quad \text{em} \quad B_{2r_0}(x_0)$$

no sentido da viscosidade. Contudo,

$$\sup_{B_{r_0}(x_0)} \varsigma_k(x) > \tau_0 \tag{7.9}$$

para todo $k \geqslant 1$. Por compacidade, veja Dávila, Felmer e Quaas (2009, 2010) e Imbert (2011), a menos de subsequência $\varsigma_k \to \varsigma_0$, é localmente limitado em $B_{r_0}(x_0)$. Portanto, por estabilidade de solução, veja Dávila, Felmer e Quaas (2009) e Imbert (2011),

$$|D\varsigma_0|^\gamma \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\varsigma_0) \leqslant 0 \leqslant |D\varsigma_0|^\gamma \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2\varsigma_0) \quad \text{em} \quad B_{r_0}(x_0). \tag{7.10}$$

Como

$$0 \leqslant \varsigma_0(x) \leqslant 1 \quad \text{em} \quad B_{r_0}(x_0) \quad \text{e} \quad \varsigma_0(x_0) = 0$$

então, aplicando a *Desigualdade de Harnack* ou o Princípio do Máximo (cf. Dávila, Felmer e Quaas (2009, 2010) e Imbert (2011)), $\varsigma_0 = 0$ em $B_{r_0}(x_0)$. No entanto, isso nos leva a uma contradição com (7.9) ao considerar $k \gg 1$ grande o suficiente. □

Prova do Teorema 7.3. Sem perda de generalidade, é suficiente provar o Teorema para $Y_0 = 0$ e $B_{2r_0}(Y_0) \subset\subset \Omega$. Portanto defina, para $\kappa, \theta > 0$, constantes que serão determinadas a posteriori,

$$\Phi_1(x) \colon = \kappa u(\theta x) \quad \text{em} \quad B_{2r_0}.$$

Logo Φ satisfaz

$$\mathcal{G}(x, D\Phi_1(x), D^2\Phi_1(x)) = \kappa^{\gamma+1-\mu}\theta^{\gamma+2}\lambda_0(\theta x)((\Phi_1)_+(x))^\mu,$$

no sentido da viscosidade, em que

$$\mathcal{G}(x, \vec{p}, M) := F(\theta x, \vec{p}, M).$$

É padrão verificar que $\mathcal{G}$ satisfaz (F1)-(F3) com $\overline{\omega}_1(t) := \overline{\omega}(\theta.t)$. Para a constante universal δ_τ do Lema 7.2 com $\tau : = r_0^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}$, podemos escolher

$$\kappa := \frac{1}{\|u\|_{L^\infty(\Omega)}} \quad \text{e} \quad \theta := \min\left\{\frac{1}{2}, \left(\frac{\delta_\tau}{\|\lambda_0\|}\right)^{\frac{1}{\gamma+2}} . \left(\frac{1}{\kappa}\right)^{\frac{\gamma+1-\mu}{\gamma+2}}\right\}.$$

Portanto Φ_1 satisfaz as hipóteses do Lema 7.2. Consequentemente temos

$$\sup_{B_{r_0}} \Phi_1(x) \leqslant r_0^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}.$$

Agora, seja

$$\Phi_2(x) : = \frac{\Phi_1(r_0 x)}{r_0^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}} \quad \text{em} \quad B_2.$$

Como $0 \leqslant \Phi_1 \leqslant 1$, $\Phi_1(0) = 0$ e satisfaz

$$\mathcal{G}(x, D\Phi_2(x), D^2\Phi_2(x)) = \delta_\tau^*((\Phi_1)_+(x))^\mu, \quad (\text{for } \delta_\tau^* \leqslant \delta_\tau)$$

no sentido da viscosidade. Então podemos aplicar novamente o Lema 7.2 para Φ_2 e obter, depois de reescalar o domínio,

$$\sup_{B_{r_0^2}} \Phi_1(x) \leqslant r_0^{2\left(\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}\right)}.$$

Ao iterar indutivamente como anteriormente, obtemos as seguintes estimativas de decaimento geométrico

$$\sup_{B_{r_0^j}} \Phi_1(x) \leqslant r_0^{j\left(\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}\right)}. \tag{7.11}$$

Para finalizar, fixado $0 < r \leqslant \frac{\theta}{2}$, escolha $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$r_0^{j+1} < \frac{r}{\theta} \leqslant r_0^j.$$

Por tal razão, podemos estimar

$$\sup_{B_r} u(x) \leqslant \frac{1}{\kappa}. \sup_{B_{r_0^j}} \Phi_1(x).$$

Consequentemente, devido à estimativa (7.11), podemos concluir que

$$\begin{aligned} \sup_{B_r} u(x) &\leqslant \left(\frac{1}{r_0\theta}\right)^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}} \frac{1}{\kappa}.r^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}} \\ &= \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \gamma, \mu, \operatorname{dist}(Y_0, \partial\Omega), \|\lambda_0\|)\|u\|.r^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}. \end{aligned}$$

□

Destaquemos que, quando $\mathfrak{n} = \frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu} \in \mathbb{N}$, nossa estimativa nos fornece precisamente $C^{\mathfrak{n}-1,1}$, isto é, $|D^{|\mathfrak{n}|}u| \in L^{\infty}$ no seguinte sentido: $u(x_0) = |Du(x_0)| = \cdots = |D^{\mathfrak{n}-1}u(x_0)| = 0$ e

$$\frac{|u(x)|}{|x - x_0|^{\mathfrak{n}}} \leqslant \mathrm{C}.$$

O próximo resultado é uma informação quantitativa sobre a estimativa de regularidade ao longo de pontos da fronteira livre e mostra que uma solução de viscosidade limitada para (7.8) se desprende de seu conjunto de Núcleo Morto com uma velocidade da ordem da distância à fronteira livre, dada precisamente pela potência $\Upsilon(\gamma, \mu) \colon = \frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}$. Note que, para qualquer $\gamma > -1$ fixo, temos $\lim\limits_{\mu \to \gamma+1} \Upsilon(\gamma, \mu) = +\infty$. Portanto o problema do Núcleo Morto apresenta um fenômeno interessante: a existência de soluções não constantes com pontos de suavidade de ordem arbitrariamente grande, mas finitos ainda.

Corolário 7.1. *Seja u solução no sentido da viscosidade não negativa e limitada para* (7.8)*. Se $Y_0 \in \partial\{u > 0\} \cap B_{\frac{1}{2}}$ é um ponto da fronteira livre, então*

$$\sup_{B_r(Y_0)} u(x) \leqslant \mathrm{C}(n, \lambda, \Lambda, \mu, \gamma, \|\lambda_0\|_{L^\infty(\Omega)}, dist(Y_0, \partial\Omega)).\|u\|_{L^\infty(\Omega)}.r^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}.$$

Observação 7.1. *Devemos destacar que as estimativas de regularidade do Corolário 7.1 podem ser estendidas para pontos ao longo da fronteira livre: Para qualquer solução de viscosidade não negativa e limitada u para* (7.8)*, vale*

$$\sup_{B_r(x_0)} u(x) \leqslant \mathrm{C} \cdot \max\left\{\inf_{B_r(x_0)} u(x),\ r^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}\right\},$$

para alguma constante $C = C(n, \lambda, \Lambda, \mu, \gamma, \|\lambda_0\|_{L^\infty(\Omega)}, dist(Y_0, \partial\Omega), \|u\|_{L^\infty(\Omega)})$ e para qualquer ponto $x_0 \in \{u > 0\}$ e $r \ll 1$ como no Teorema 7.3. A prova é baseada no raciocínio iterativo similar aplicado ao Teorema 7.3 combinado com a desigualdade de Harnack de Dávila, Felmer e Quaas (2010) e Imbert (2011).

7.4 Propriedade de não degenerescência

Nesta seção, vamos provar algumas propriedades geométricas e de medida que desempenham um papel essencial na descrição de soluções para problemas de fronteira livre do tipo Núcleo Morto. O próximo resultado fornece precisamente a taxa de crescimento na qual as soluções de viscosidade não negativas deixam seus conjuntos de Núcleo Morto.

Teorema 7.4 (Não degenerescência)**.** *Seja u uma solução de viscosidade limitada não negativa para* (7.8) *em B_1 e seja $x_0 \in \overline{\{u > 0\}} \cap B_{\frac{1}{2}}$ um ponto genérico no fecho do conjunto não coincidente. Então, para qualquer $0 < r < \frac{1}{2}$, vale*

$$\sup_{B_r(x_0)} u(x) \geqslant c_0(n, \lambda.\Lambda, \gamma, \mu).r^{\frac{2+\gamma}{\gamma+1-\mu}}. \tag{7.12}$$

Demonstração. Devido à continuidade das soluções, precisamos provar (7.12) apenas para pontos dentro do conjunto $\{u > 0\} \cap B_{\frac{1}{2}}$. Inicialmente vamos definir

$$\zeta(x) := \mathrm{c} \cdot |x - x_0|^{\alpha},$$

para $\alpha := \frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}$ e $\mathrm{c} > 0$, uma constante que será especificada a posteriori. Por um cálculo direto

$$D\zeta(x) = c\alpha|x - x_0|^{\alpha-1} \cdot \frac{x - x_0}{|x - x_0|}$$

e

$$D^2\zeta(x) = \mathrm{c}\alpha|x - x_0|^{\alpha-2}\left[(\alpha - 2) \cdot \frac{(x - x_0) \otimes (x - x_0)}{|x - x_0|^2} + \mathrm{Id}_{n\times n}\right]$$

Pela γ-condição de elipticidade, obtemos

$$\begin{aligned} F(x, D\zeta, D^2\zeta) &\leqslant |D\zeta|^{\gamma}\mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(D^2\zeta) \\ &= (\mathrm{c}\alpha)^{\gamma}\,|x - x_0|^{\gamma(\alpha-1)}\mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(D^2\zeta) \\ &\leqslant \Lambda n\,(\alpha - 1)\,\mathrm{c}^{\gamma+1}\alpha^{\gamma+1}|x - x_0|^{\gamma(\alpha-1)+(\alpha-2)}. \end{aligned}$$

Portanto, selecionando e fixando c cumprindo,

$$0 < \mathrm{c} < \left[\frac{(\gamma + 1 - \mu)^{\gamma+2}}{\Lambda n\,(\mu + 1)\,(\gamma + 2)^{\gamma+1}}\right]^{\frac{1}{\gamma+1-\mu}}$$

concluímos que

$$F(x, D\zeta, D^2\zeta) - \lambda_0(x)\,.\zeta_{+}^{\mu}(x) < 0 = F(x, Du, D^2u) - \lambda_0(x)\,.u_{+}^{\mu}(x).$$

Finalmente, para toda bola $B_r(x_0) \subset B_{\frac{1}{2}}$, temos

$$\zeta(Y) < u(Y) \;\text{ para algum } Y \in \partial B_r(x_0).$$

Caso contrário, $\zeta \geqslant u$ em $B_r(x_0)$ devido ao Princípio da Comparação (Lema 7.1). No entanto,

$$0 = \zeta(x_0) < u(x_0).$$

Portanto podemos estimar

$$\sup_{B_r(x_0)} u(X) \geqslant u(Y) \geqslant \zeta(Y) = \mathrm{c} \cdot r^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}.$$

□

Observação 7.2 (Comportamento local próximo à fronteira livre). *Combinando a estimativa, o Teorema 7.3 e a propriedade de não degeneração, Teorema 7.4, obtemos uma descrição completa das soluções ao longo de pontos da fronteira livre. Mais precisamente, dado $x_0 \in \partial\{u > 0\}$, existem $0 < \mathrm{c}_0 \leqslant \mathrm{C}_0 < \infty$, dependendo apenas de parâmetros estruturais tais que*

$$\mathrm{c}_0 . r^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}} \leqslant \sup_{B_r(x_0)} u(x) \leqslant \mathrm{C}_0 . r^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}$$

Tal comportamento produz propriedades geométricas fracas importantes para a fronteira livre $\partial\{u > 0\}$ como veremos a seguir.

Corolário 7.2 (Densidade positiva uniforme). *Seja u uma solução de viscosidade limitada e não negativa para* (7.8) *em B_1 e $x_0 \in \partial\{u > 0\} \cap B_{\frac{1}{2}}$ um ponto da fronteira livre. Então, para qualquer $0 < \rho < \frac{1}{2}$,*

$$\mathcal{L}^n(B_\rho(x_0) \cap \{u > 0\}) \geqslant \theta . \rho^n,$$

para uma constante $\theta > 0$ que depende apenas de parâmetros universais, $\|u\|_{L^\infty}$, γ e μ.

Demonstração. Devido à Equação (7.12), para qualquer $0 < r < \frac{1}{2}$ fixo, é possível selecionar um ponto $Y_0 \in \overline{B_r(x_0)}$ tal que,

$$u(Y_0) = \sup_{B_r(x_0)} u(x) \geqslant \mathrm{c}_0 \cdot r^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}. \tag{7.13}$$

Para completar a prova, vale a seguinte inclusão

$$B_{\kappa \cdot r}(Y_0) \subset \{u > 0\}, \tag{7.14}$$

para algum $\kappa > 0$ pequeno o suficiente com dependência universal. De fato, do Teorema 7.3, para $Z_0 \in \partial\{u > 0\}$, obtemos

$$u(Y_0) \leqslant \mathrm{C}_0 \cdot |Y_0 - Z_0|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}. \tag{7.15}$$

Assim, pelas sentenças (7.13) e (7.15), obtemos

$$\mathrm{c}_0 \cdot r^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}} \leqslant \mathrm{C}_0 \cdot |Y_0 - Z_0|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}$$

e, consequentemente,

$$\left(\frac{\mathrm{c}_0}{\mathrm{C}_0}\right)^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}} \cdot r \leqslant |\,Y_0 - Z_0|.$$

Por tal razão, tomando $0 < \kappa \ll 1$ pequeno o suficiente, a inclusão correspondente em (7.14) é cumprida, portanto

$$\mathcal{L}^n(B_\rho(x_0) \cap \{u > 0\}) \geqslant \mathcal{L}^n(B_\rho(X_0) \cap B_{\kappa r}(Z_0)) \geqslant \theta . r^n,$$

□

Definição 7.2 (Porosidade). Um conjunto $\mathfrak{S} \in \mathbb{R}^n$ é dito ser poroso com constante de porosidade $0 < \zeta \leqslant 1$ se existe um $\mathfrak{R}_0 > 0$ tal que, para cada $x \in \mathfrak{S}$ e $0 < r < \mathfrak{R}_0$, existe um ponto y tal que $B_{\varrho r}(y) \subset B_r(x) \setminus \mathfrak{S}$.

Corolário 7.3 (Porosidade da fronteira livre). *Existe uma constante*

$$0 < \varsigma = \varsigma(n, \lambda, \Lambda, \gamma, \mu) \leqslant 1$$

tal que

$$\mathcal{H}^{n-\varsigma}\left(\partial\{u > 0\} \cap B_{\frac{1}{2}}\right) < \infty.$$

Demonstração. Seja $X_0 \in \partial\{u > 0\}$ um ponto (interior) da fronteira livre. Seguindo o raciocínio da prova do Corolário 7.2, podemos selecionar

$$Y_0 = \varsigma Z_0 + (1 - \varsigma) X_0.$$

com ς próximo o suficiente de 1 tal que

$$B_{\varsigma \frac{r}{2}}(Y_0) \subset B_\varsigma(Z_0) \cap B_r(X_0) \subset B_r(X_0) \setminus \partial\{u > 0\}.$$

Por essa razão, $\partial\{u > 0\} \cap B_{\frac{1}{2}}$ é um conjunto poroso com constante de porosidade $\zeta = \frac{\varsigma}{2}$. Portanto, pelo Koskela e Rohde (1997, Teorema 2.1), sua dimensão de Hausdorff é no máximo $n - \hat{c}\varsigma^n$ para alguma constante dimensional $\hat{c} > 0$. □

7.5 Resultados do tipo Liouville

Os teoremas do tipo Liouville são bem conhecidos no contexto de EDPs elípticas e nos dizem, por exemplo, que uma solução inteira e limitada para um operador uniformemente elíptico $\mathcal{L}[u](x) = 0$ deve ser constante em qualquer dimensão!. Além disso, os resultados do tipo Liouville têm desempenhado um papel importante na teoria moderna de EDPs elípticas e na análise matemática devido às suas aplicações em equações não lineares, em problemas de fronteira livre e geometria diferencial, apenas para mencionar alguns.

O principal objetivo, desta seção, é provar que uma solução global para (7.8) deve crescer mais rápido que $|x|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}$ como $|x| \to \infty$, a menos que seja identicamente zero.

A seguir, apresentaremos nosso Teorema do Tipo de Liouville. Além disso, uma versão melhorada para esse Teorema será provada em breve, após uma análise adequada para soluções radialmente simétricas.

Teorema 7.5 (Teorema do Tipo Liouville, Parte I). *Seja $u \in C^0(B_1)$ solução de viscosidade de*

$$F(x, Du, D^2u) = \lambda_0(x).u_+^{\mu}(x) \quad em \quad \mathbb{R}^n.$$

tal que $u(0) = 0$. Assuma que $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} \frac{u(x)}{|x|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}} = 0$. *Então $u \equiv 0$.*

Demonstração. Seja $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $r_j \to \infty$ as $j \to \infty$. Defina

$$u_{r_j}(x) :\, = \frac{u(r_j x)}{r_j^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}}.$$

Portanto podemos verificar que

$$\mathcal{F}(r_j x, Du_{r_j}, D^2 u_{r_j}) = \lambda_0(r_j x)(u^+)^{\mu}(r_j x) \text{ em } B_1,$$

bem como $u_{r_j}(0) = 0$. Afirmamos que

$$\|u_{r_j}\|_{L^\infty(B_1)} = \mathrm{o}\,(1).$$

De fato, considerando para cada $j \in \mathbb{N}$, $x_j \in \overline{B_1}$ um ponto no qual atinge seu máximo, isto é, $u_{r_j}(x_j) = \sup\limits_{B_1} u_{r_j}(x)$. Vamos considerar duas possibilidades:

1. Se $\lim\limits_{j\to\infty} r_j x_j = \infty$, então, de acordo com nossa hipótese, temos que

$$u_{r_j}(x_j) \leqslant 1. \frac{u(r_j x_j)}{|r_j x_j|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}} \to 0, \quad \text{quando } j \to \infty.$$

2. Caso contrário, se $(r_j x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada, então obtemos diretamente a mesma conclusão anterior para $u_j(x_j)$, já que u é uma função contínua.

Portanto, aplicando o Teorema 7.3, temos

$$u_{r_j}(x) \leqslant \mathrm{o}\,(1)\cdot|x|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}} \quad \text{in} \quad B_{\frac{1}{2}}. \tag{7.16}$$

Agora vamos supor por contradição que existe um $p_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $u(p_0) > 0$. Devido a (7.16), obtemos $r_j \gg 1$,

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} \frac{u_{r_j}(x)}{|x|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}} \leqslant \frac{u(p_0)}{7|p_0|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}},$$

Finalmente, para $r_j \gg \frac{5}{2}|p_0|$, temos

$$\frac{u(p_0)}{|p_0|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}} \leqslant \sup_{B_{|p_0|}} \frac{u(x)}{|x|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}} \leqslant \sup_{B_{\frac{2r_j}{5}}} \frac{u(x)}{|x|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}} \leqslant \sup_{B_{\frac{1}{2}}} \frac{u_{r_j}(x)}{|x|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}} \leqslant \frac{u(p_0)}{7|p_0|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}},$$

e essa contradição prova que $\sup\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) = 0$. $\square$

Nosso próximo resultado é o aprimoramento do Teorema anterior 7.5 no sentido de medir a magnitude de $\limsup_{|x|\to\infty} \dfrac{u(x)}{|x|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}}$. Em primeiro lugar, vamos estudar o seguinte problema

$$\begin{cases} F(x, Du, D^2u) & = & \lambda_0 u_+^{\mu}(x) & \text{em} & B_R(x_0) \\ u(x) & = & \Xi & \text{sobre} & \partial B_R(x_0), \end{cases} \tag{7.17}$$

em que λ_0 e Ξ são constantes positivas. Além disso, vamos assumir, devido aos nossos propósitos de análise radial, a seguinte propriedade em F

(F4) [Invariante sob rotações] F é um operador Hessiano, isto é,

$$F(Ox, O^t\overrightarrow{p}, O^tMO) = F(x, \overrightarrow{p}, M)$$

para todo $(x, \overrightarrow{p}, M) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n/\{0\}) \times Sym(n)$ e $O \in \mathcal{O}(n)$ (espaço das matrizes ortogonais).

Agora, vamos enfatizar que via unicidade do problema de Dirichlet e invariância sob $\mathcal{O}(n)$ de F, é natural esperar que solução de tal problema seja radialmente simétricos. De fato, dado $\mathcal{R} \in \mathcal{O}(n)$, a seguinte função $w(x - x_0) : = u(\mathcal{R}(x - x_0))$ satisfaz a mesmo EDP. Consequentemente, por unicidade do problema correspondente, $w(x) = u(x)$. Como $\mathcal{R} \in \mathcal{O}(n)$ é arbitrário, concluímos que u é uma função radialmente simétrica.

Vamos tratar a EDO unidimensional correspondente a (7.17), ou seja

$$|v'(t)|^{\gamma}.v''(t) = \lambda_0.v_+^{\mu}(t) \quad \text{em } , (0, \mathfrak{T}) \tag{7.18}$$

cumprindo as seguintes condições iniciais de contorno: $v(0) = 0$ e $v(\mathfrak{T}) = \Xi$. O cálculo direto mostra que $v(t) = \theta(\lambda_0, \gamma, \mu).t^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}$ é uma solução para (7.18), sendo

$$\theta(\lambda_0, \gamma, \mu) : = \left[\lambda_0 \cdot \frac{(\gamma + 1 - \mu)^{\gamma+2}}{(\gamma + 2)^{\gamma+1}(\gamma + 1)}\right]^{\frac{1}{\gamma+1-\mu}} \quad \text{e} \quad \mathfrak{T} : = \left(\frac{\Xi}{\theta(\lambda_0, \gamma, \mu)}\right)^{\frac{\gamma+1-\mu}{\gamma+2}}. \tag{7.19}$$

De agora em diante, fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $0 < \mathrm{r}_0 < \mathfrak{R}_0$. É natural assumir a *condição de compatibilidade* para o problema de Núcleo Morto, ou seja, $\mathfrak{R}_0 > \mathfrak{T}$. Para $\mathrm{r}_0 = \mathfrak{R}_0 - \mathfrak{T}$, a função radialmente simétrica dada por

$$u(x) : = \theta(\lambda_0, \gamma, \mu)\left[|x - x_0| - \mathfrak{R}_0 + \left(\frac{\Xi}{\theta(\lambda_0, \gamma, \mu)}\right)^{\frac{\gamma+1-\mu}{\gamma+2}}\right]_+^{\frac{\gamma+1}{\gamma+1-\mu}}$$

satisfaz (7.17) no sentido da viscosidade. Além disso, o *Núcleo Morto* é dado por $B_{\mathrm{r}_0}(x_0)$.

Finalmente seja u uma solução de viscosidade para

$$F(x, Du, D^2u) = \lambda_0.u_+^{\gamma}(x), \quad \text{em} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

e $x_0 \in \Omega$ um ponto interior. Se para algum $0 < s < \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$, temos

$$\sup_{B_s(x_0)} u(x) < \Theta(\lambda_0, \gamma, \mu).s^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}},$$

então x_0 deve ser um ponto do Núcleo Morto. Particularmente podemos melhorar o Teorema 7.5 da seguinte forma:

Teorema 7.6 (Teorema do Tipo Liouville, Parte II). *Seja u uma solução de viscosidade para*

$$F(x, Du, D^2u) = \lambda_0 u_+^{\mu}(x) \quad em \quad \mathbb{R}^n. \tag{7.20}$$

Então $u \equiv 0$, quando

$$\limsup_{|x|\to\infty} \frac{u(x)}{|x|^{\frac{2+\gamma}{1+\gamma-\mu}}} < \theta(\lambda_0, \gamma, \mu). \tag{7.21}$$

Demonstração. Para $\mathfrak{R}_0 > 0$ fixado, considere $\omega^\sharp \colon \overline{B_{\mathfrak{R}_0}} \to \mathbb{R}$ a única solução de viscosidade para o seguinte problema

$$\begin{cases} F(x, D\omega^\sharp, D^2\omega^\sharp) &= \lambda_0.(\omega_+^\sharp)^\mu & \text{em} & B_{\mathfrak{R}_0} \\ \omega^\sharp(x) &= \sup\limits_{\partial B_{\mathfrak{R}_0}} u(x) & \text{sobre} & \partial B_{\mathfrak{R}_0}. \end{cases}$$

De acordo com o princípio de comparação (Lema 7.1), $u \leqslant \omega^\sharp$ em $B_{\mathfrak{R}_0}$. Além disso, pela hipótese (7.21),

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_0^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}}.\sup_{\partial B_{\mathfrak{R}_0}} u(x) \leqslant \frac{1}{\mathfrak{R}_0^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}}.\sup_{B_{\mathfrak{R}_0}} u(x) \leqslant \varsigma_{\mathfrak{R}_0} \cdot \theta(\lambda_0, \gamma, \mu) \tag{7.22}$$

para constantes $\varsigma_{\mathfrak{R}_0} \ll 1$ e $\mathfrak{R}_0 \gg 1$ suficientemente grandes. Portanto, sob as hipóteses anteriores, a correspondente solução $\omega^\sharp = \omega^\sharp_{\mathfrak{R}_0}$ é dada por

$$\omega^\sharp(x) = \theta(\lambda_0, \gamma, \mu)\left[|x| - \mathfrak{R}_0 + \left(\frac{\sup\limits_{\partial B_{\mathfrak{R}_0}} u(x)}{\theta(\lambda_0, \gamma, \mu)}\right)^{\frac{\gamma+1-\mu}{\gamma+2}}\right]_+^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}}. \tag{7.23}$$

Portanto, devido à (7.22) e (7.23), concluímos que

$$u(x) \leqslant \theta(\lambda_0, \gamma, \mu)\left[|x| - \left(1 - \varsigma_{\mathfrak{R}_0}^{\frac{\gamma+1-\mu}{\gamma+2}}\right)\mathfrak{R}_0\right]_+^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1-\mu}} \to 0 \quad \text{quando} \quad \mathfrak{R}_0 \to \infty,$$

e isto finaliza a prova. □

Bibliografia

R. A. Adams e J. J. F. Fournier (2003). *Sobolev spaces*. Second. Vol. 140. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam). Elsevier/Academic Press, Amsterdam, pp. xiv+305. MR: 2424078 (ver pp. iv, 6).

H. W. Alt e D. Phillips (1986). "A free boundary problem for semilinear elliptic equations". *J. Reine Angew. Math.* 368, pp. 63–107. MR: 850615 (ver p. 132).

A.-M. Ampère (1819). *Mémoire contenant l'application de la théorie exposée dans le XVII^e Cahier du Journal de l'École polytechnique, à l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier et du second ordre*. Paris: l'Imprimerie royale, p. 188 (ver p. 96).

J. Andersson, E. Lindgren e H. Shahgholian (2015). "Optimal regularity for the obstacle problem for the p-Laplacian". *J. Differential Equations* 259.6, pp. 2167–2179. MR: 3353643 (ver p. 70).

D. J. Araújo, G. C. Ricarte e E. V. Teixeira (2015). "Geometric gradient estimates for solutions to degenerate elliptic equations". *Calc. Var. Partial Differential Equations* 53.3-4, pp. 605–625. MR: 3347473 (ver pp. 70, 135).

D. J. Araújo, E. V. Teixeira e J. M. Urbano (2017). "A proof of the $C^{p'}$-regularity conjecture in the plane". *Adv. Math.* 316, pp. 541–553. MR: 3672912 (ver p. 70).

— (2018). "Towards the $C^{p'}$-regularity conjecture in higher dimensions". *Int. Math. Res. Not. IMRN* 20, pp. 6481–6495. MR: 3872330 (ver p. 70).

S. N. Armstrong, L. E. Silvestre e C. K. Smart (2012). "Partial regularity of solutions of fully nonlinear, uniformly elliptic equations". *Comm. Pure Appl. Math.* 65.8, pp. 1169–1184. MR: 2928094 (ver pp. 93, 94, 97).

A. Attouchi, M. Parviainen e E. Ruosteenoja (2017). "$C^{1,\alpha}$ regularity for the normalized p-Poisson problem". *J. Math. Pures Appl. (9)* 108.4, pp. 553–591. MR: 3698169 (ver p. 70).

S. Axler, P. Bourdon e W. Ramey (2001). *Harmonic function theory*. Second. Vol. 137. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, pp. xii+259. MR: 1805196 (ver pp. iv, 17).

E. C. Bezerra Júnior, J. V. da Silva, G. C. Rampasso, G. C. Ricarte e H. Vivas (2022). "Recent developments on fully nonlinear PDEs with unbalanced degeneracy". *Mat. Contemp.* 51, pp. 123–161. MR: 4505868.

E. C. Bezerra Júnior, J. V. da Silva e G. C. Ricarte (2023). "Fully nonlinear singularly perturbed models with non-homogeneous degeneracy". *Rev. Mat. Iberoam.* 39.1, pp. 123–164. MR: 4571601 (ver p. 70).

A. Bhattacharya e M. Warren (2021). "$C^{2,\alpha}$ estimates for solutions to almost linear elliptic equations". *Commun. Pure Appl. Anal.* 20.4, pp. 1363–1383. MR: 4251799 (ver p. 82).

I. Birindelli e F. Demengel (2002). "Some Liouville theorems for the p-Laplacian". Em: *Proceedings of the 2001 Luminy Conference on Quasilinear Elliptic and Parabolic Equations and System*. Vol. 8. Electron. J. Differ. Equ. Conf. Southwest Texas State Univ., San Marcos, TX, pp. 35–46. MR: 1990294.

— (2004). "Comparison principle and Liouville type results for singular fully nonlinear operators". *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* 13.2, pp. 261–287. MR: 2126744 (ver p. 135).

— (2015). "Hölder regularity of the gradient for solutions of fully nonlinear equations with sub linear first order term". Em: *Geometric methods in PDE's*. Vol. 13. Springer INdAM Ser. Springer, Cham, pp. 257–268. MR: 3617224 (ver p. 135).

— (2016). "Fully nonlinear operators with Hamiltonian: Hölder regularity of the gradient". *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 23.4, Art. 41, 17. MR: 3513874 (ver p. 135).

I. Birindelli, F. Demengel e F. Leoni (2019). "$\mathcal{C}^{1,\gamma}$ regularity for singular or degenerate fully nonlinear equations and applications". *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 26.5, Paper No. 40, 13. MR: 4010655 (ver p. 69).

P. Blanc e J. D. Rossi (2019). *Game theory and partial differential equations*. Vol. 31. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. De Gruyter, Berlin, pp. xvii+211. MR: 4316246.

S.-S. Byun, K.-A. Lee, J. Oh e J. Park (2018). "Nondivergence elliptic and parabolic problems with irregular obstacles". *Math. Z.* 290.3-4, pp. 973–990. MR: 3856840 (ver pp. 116, 117, 125).

X. Cabré e L. A. Caffarelli (2003). "Interior $C^{2,\alpha}$ regularity theory for a class of nonconvex fully nonlinear elliptic equations". *J. Math. Pures Appl. (9)* 82.5, pp. 573–612. MR: 1995493 (ver p. 82).

L. A. Caffarelli (1989a). "Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations". *Ann. of Math. (2)* 130.1, pp. 189–213. MR: 1005611 (ver pp. 65, 69, 84, 95).

— (1989b). "Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations". *Ann. of Math. (2)* 130.1, pp. 189–213. MR: 1005611 (ver p. 110).

L. A. Caffarelli e X. Cabré (1995a). *Fully nonlinear elliptic equations*. Vol. 43. American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. vi+104. MR: 1351007 (ver pp. v, 65, 69, 81, 82, 84, 95, 104).

— (1995b). *Fully nonlinear elliptic equations*. Vol. 43. American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. vi+104. MR: 1351007 (ver pp. 110, 125).

L. A. Caffarelli e S. Salsa (2005). *A geometric approach to free boundary problems*. Vol. 68. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. x+270. MR: 2145284 (ver p. 70).

L. A. Caffarelli e L. E. Silvestre (2010). "On the Evans-Krylov theorem". *Proc. Amer. Math. Soc.* 138.1, pp. 263–265. MR: 2550191 (ver p. 81).

F. Chiarenza, M. Frasca e P. Longo (1991). "Interior $W^{2,p}$ estimates for nondivergence elliptic equations with discontinuous coefficients". *Ricerche Mat.* 40.1, pp. 149–168. MR: 1191890 (ver p. 110).

M. Colombo e G. Mingione (2015). "Regularity for double phase variational problems". *Arch. Ration. Mech. Anal.* 215.2, pp. 443–496. MR: 3294408 (ver pp. 76, 77).

H. O. Cordes (1956). "Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen". *Math. Ann.* 131, pp. 278–312. MR: 91400 (ver pp. 84, 92).

— (1961). "Zero order a priori estimates for solutions of elliptic differential equations". Em: *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. IV*. American Mathematical Society, Providence, R.I., pp. 157–166. MR: 0146511 (ver p. 84).

M. G. Crandall, H. Ishii e P.-L. Lions (1992). "User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations". *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 27.1, pp. 1–67. MR: 1118699 (ver p. 24).

P. Daskalopoulos, T. Kuusi e G. Mingione (2014). "Borderline estimates for fully nonlinear elliptic equations". *Comm. Partial Differential Equations* 39.3, pp. 574–590. MR: 3169795 (ver p. 66).

G. Dávila, P. Felmer e A. Quaas (2009). "Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate for singular or degenerate fully nonlinear elliptic equations". *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 347.19-20, pp. 1165–1168. MR: 2566996 (ver p. 136).

— (2010). "Harnack inequality for singular fully nonlinear operators and some existence results". *Calc. Var. Partial Differential Equations* 39.3-4, pp. 557–578. MR: 2729313 (ver pp. 136, 138).

C. De Filippis (2021). "Regularity for solutions of fully nonlinear elliptic equations with nonhomogeneous degeneracy". *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 151.1, pp. 110–132. MR: 4202634 (ver pp. 69–71).

J. I. Díaz (1985). *Nonlinear partial differential equations and free boundaries. Vol. I – Elliptic equations*. Vol. 106. Research Notes in Mathematics. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, pp. vii+323. MR: 853732 (ver pp. v, 132).

E. DiBenedetto (1995). *Partial differential equations*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, pp. xiv+416. MR: 1306729.

L. Escauriaza (1993). "$W^{2,n}$ a priori estimates for solutions to fully nonlinear equations". *Indiana Univ. Math. J.* 42.2, pp. 413–423. MR: 1237053 (ver pp. 110, 117, 118, 125).

L. C. Evans (1982a). "Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations". *Comm. Pure Appl. Math.* 35.3, pp. 333–363. MR: 649348 (ver pp. 65, 81, 104).

— (1982b). "Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations". *Comm. Pure Appl. Math.* 35.3, pp. 333–363. MR: 649348 (ver p. 125).

— (2010). *Partial differential equations*. Second. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. xxii+749. MR: 2597943 (ver pp. iv, 4, 6, 17, 28, 30, 94, 95, 99, 109).

— (2013). *An introduction to stochastic differential equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. viii+151. MR: 3154922.

Y. Fang e C. Zhang (2022). "Equivalence between distributional and viscosity solutions for the double-phase equation". *Adv. Calc. Var.* 15.4, pp. 811–829. MR: 4489604 (ver p. 77).

X. Fernández-Real e X. Ros-Oton (2022). *Regularity theory for elliptic PDE*. Vol. 28. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. EMS Press, Berlin, pp. viii+228. MR: 4560756 (ver pp. iv, 65).

A. Figalli (2018). "Regularity of interfaces in phase transitions via obstacle problems—Fields Medal lecture". Em: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. I. Plenary lectures*. Ed. por B. Sirakov, P. N. de Souza e M. Viana. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro e World Sci. Publ., Hackensack, NJ, pp. 225–247. MR: 3966728 (ver p. 129).

D. G. de Figueiredo (1963). *Teoria classica do potencial*. Editôra Universidade de Brasília, Rio de Janeiro, pp. iv+166. MR: 0190355 (ver pp. iv, 16).

— (1985). "O Princípio de Dirichlet". *Matemática Universitária* 1, pp. 63–84.

— (1988). "Métodos Variacionais em Equações Diferenciais". *Matemática Universitária* 7, pp. 21–47.

A. Friedman e D. Phillips (1984). "The free boundary of a semilinear elliptic equation". *Trans. Amer. Math. Soc.* 282.1, pp. 153–182. MR: 728708 (ver p. 132).

D. Gilbarg e N. S. Trudinger (2001). *Elliptic partial differential equations of second order*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 224. Reimpressão da edição de 1998. Springer-Verlag, Berlin, pp. xiv+517. MR: 1814364 (ver pp. iv, 9, 20, 32, 124).

C. Imbert (2011). "Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and Harnack inequality for degenerate/singular fully non-linear elliptic equations". *J. Differential Equations* 250.3, pp. 1553–1574. MR: 2737217 (ver pp. 136, 138).

C. Imbert e L. E. Silvestre (2013). "$C^{1,\alpha}$ regularity of solutions of some degenerate fully non-linear elliptic equations". *Adv. Math.* 233, pp. 196–206. MR: 2995669 (ver pp. 69, 135).

F. John (1982). *Partial differential equations*. Fourth. Vol. 1. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, pp. x+249. MR: 831655.

J. Jost (2002). *Partial differential equations*. Vol. 214. Graduate Texts in Mathematics. Traduzido e revisto pelo autor da edição original em alemão de 1998. Springer-Verlag, New York, pp. xii+325. MR: 1919991 (ver pp. iv, 32).

P. Juutinen, P. Lindqvist e J. J. Manfredi (2001). "On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasi-linear equation". *SIAM J. Math. Anal.* 33.3, pp. 699–717. MR: 1871417 (ver p. 27).

N. Katzourakis (2015). *An introduction to viscosity solutions for fully nonlinear PDE with applications to calculus of variations in L^∞*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, Cham, pp. xii+123. MR: 3289084 (ver pp. v, 24, 62).

S. Koike (2005). "Perron's method for L^p-viscosity solutions". *Saitama Math. J.* 23, 9–28 (2006). MR: 2251850 (ver p. 124).

S. Koike e A. Święch (2004). "Maximum principle and existence of L^p-viscosity solutions for fully nonlinear uniformly elliptic equations with measurable and quadratic terms". *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 11.4, pp. 491–509. MR: 2211297 (ver p. 122).

— (2007). "Maximum principle for fully nonlinear equations via the iterated comparison function method". *Math. Ann.* 339.2, pp. 461–484. MR: 2324727 (ver p. 121).

— (2009a). "Existence of strong solutions of Pucci extremal equations with superlinear growth in Du". *J. Fixed Point Theory Appl.* 5.2, pp. 291–304. MR: 2529502 (ver p. 122).

— (2009b). "Weak Harnack inequality for fully nonlinear uniformly elliptic PDE with unbounded ingredients". *J. Math. Soc. Japan* 61.3, pp. 723–755. MR: 2552914 (ver pp. 121, 122).

— (2022). "Aleksandrov-Bakelman-Pucci maximum principle for L^p-viscosity solutions of equations with unbounded terms". *J. Math. Pures Appl. (9)* 168, pp. 192–212. MR: 4515258.

S. Koike e S. Tateyama (2020). "On L^p-viscosity solutions of bilateral obstacle problems with unbounded ingredients". *Math. Ann.* 377.3-4, pp. 883–910. MR: 4126883 (ver pp. 116, 117).

P. Koskela e S. Rohde (1997). "Hausdorff dimension and mean porosity". *Math. Ann.* 309.4, pp. 593–609. MR: 1483825 (ver p. 141).

J. Kovats (1999). "Dini-Campanato spaces and applications to nonlinear elliptic equations". *Electron. J. Differential Equations* 37, p. 20. MR: 1713596 (ver pp. 10, 11, 13).

N. V. Krylov (1982). "Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations". *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 46.3, pp. 487–523, 670. MR: 661144 (ver pp. 65, 125).

— (1983). "Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain". *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 47.1, pp. 75–108. MR: 688919 (ver pp. 65, 81, 104).

— (2020). "Linear and fully nonlinear elliptic equations with L_d-drift". *Comm. Partial Differential Equations* 45.12, pp. 1778–1798. MR: 4176916.

— (2021a). "A review of some new results in the theory of linear elliptic equations with drift in L_d". *Anal. Math. Phys.* 11.2, Paper No. 73, 13. MR: 4227813.

— (2021b). "On stochastic equations with drift in L_d". *Ann. Probab.* 49.5, pp. 2371–2398. MR: 4317707.

N. V. Krylov e M. V. Safonov (1979). "An estimate for the probability of a diffusion process hitting a set of positive measure". *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 245.1, pp. 18–20. MR: 525227 (ver pp. 64, 81, 86, 98).

H. Lebesgue (1909). "Sur les intégrales singulières". *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. (3)* 1, pp. 25–117. MR: 1508308 (ver p. 11).

G. Leoni (2017). *A first course in Sobolev spaces*. Second. Vol. 181. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. xxii+734. MR: 3726909 (ver p. 6).

H. Lewy e G. Stampacchia (1969). "On the regularity of the solution of a variational inequality". *Comm. Pure Appl. Math.* 22, pp. 153–188. MR: 247551.

F.-H. Lin (1986). "Second derivative L^p-estimates for elliptic equations of nondivergent type". *Proc. Amer. Math. Soc.* 96.3, pp. 447–451. MR: 822437 (ver p. 97).

E. Lindgren e P. Lindqvist (2017). "Regularity of the p-Poisson equation in the plane". *J. Anal. Math.* 132, pp. 217–228. MR: 3666811 (ver p. 70).

J.-L. Lions e G. Stampacchia (1967). "Variational inequalities". *Comm. Pure Appl. Math.* 20, pp. 493–519. MR: 216344.

J. J. Manfredi, M. Parviainen e J. D. Rossi (2012). "On the definition and properties of p-harmonious functions". *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* 11.2, pp. 215–241. MR: 3011990 (ver p. 5).

M. Medina e P. Ochoa (2019). "On viscosity and weak solutions for non-homogeneous p-Laplace equations". *Adv. Nonlinear Anal.* 8.1, pp. 468–481. MR: 3918385 (ver p. 27).

G. Mingione e V. Rădulescu (2021). "Recent developments in problems with nonstandard growth and nonuniform ellipticity". *J. Math. Anal. Appl.* 501.1, Paper No. 125197, 41. MR: 4258810 (ver p. 68).

G. Monge (1784). "Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles". *Mémoires de l'Académie des Sciences. Paris, France: Imprimerie Royale*, pp. 118–192 (ver p. 96).

C. Mooney (2019). "A proof of the Krylov-Safonov theorem without localization". *Comm. Partial Differential Equations* 44.8, pp. 681–690. MR: 3952774 (ver p. 86).

N. Nadirashvili e S. Vlăduţ (2007). "Nonclassical solutions of fully nonlinear elliptic equations". *Geom. Funct. Anal.* 17.4, pp. 1283–1296. MR: 2373018 (ver p. 82).

— (2008). "Singular viscosity solutions to fully nonlinear elliptic equations". *J. Math. Pures Appl. (9)* 89.2, pp. 107–113. MR: 2391642 (ver p. 82).

— (2013). "Singular solutions of Hessian elliptic equations in five dimensions". *J. Math. Pures Appl. (9)* 100.6, pp. 769–784. MR: 3125267 (ver p. 82).

T. M. Nascimento e E. V. Teixeira (2023). "New regularity estimates for fully nonlinear elliptic equations". *J. Math. Pures Appl. (9)* 171, pp. 1–25. MR: 4545167 (ver p. 97).

L. Nirenberg (1953). "On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity". *Comm. Pure Appl. Math.* 6, 103–156, addendum, 395. MR: 64986 (ver pp. 65, 82).

— (1954). "On a generalization of quasi-conformal mappings and its application to elliptic partial differential equations". Em: *Contributions to the theory of partial differential equations*. Annals of Mathematics Studies, no. 33. Princeton University Press, Princeton, N.J., pp. 95–100. MR: 0066532 (ver p. 84).

G. Nornberg (2019). "$C^{1,\alpha}$ regularity for fully nonlinear elliptic equations with superlinear growth in the gradient". *J. Math. Pures Appl. (9)* 128, pp. 297–329. MR: 3980853 (ver pp. 122, 123).

Y. Pan e Y. Yan (out. de 2022). "Examples of Twice Differentiable Functions II: Continuous Laplacian and Bounded Hessian". arXiv: 2210.10099 (ver p. 23).

— (2023). "Examples of twice differentiable functions with continuous Laplacian and unbounded Hessian". *Collectanea Mathematica*.

A. Petrosyan, H. Shahgholian e N. N. Ural'tseva (2012). *Regularity of free boundaries in obstacle-type problems*. Vol. 136. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. x+221. MR: 2962060 (ver p. v).

D. Phillips (1983). "Hausdorff measure estimates of a free boundary for a minimum problem". *Comm. Partial Differential Equations* 8.13, pp. 1409–1454. MR: 714047 (ver p. 132).

A. Ponce (2009). *Métodos Clássicos em Teoria do Potencial*. Publicações Matemáticas. IMPA (ver pp. iv, 4, 22).

D. dos Prazeres e E. V. Teixeira (2016). "Asymptotics and regularity of flat solutions to fully nonlinear elliptic problems". *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* 15, pp. 485–500. MR: 3495436 (ver pp. 93, 94, 97, 105).

J.-F. Rodrigues (1987). *Obstacle problems in mathematical physics*. Vol. 114. North-Holland Mathematics Studies. Notas de Matemática. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, pp. xvi+352. MR: 880369 (ver pp. v, 112, 115).

J. D. Rossi (2016). "On the interplay between nonlinear partial differential equations and game theory". Em: *Advanced courses of mathematical analysis V*. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, pp. 253–280. MR: 3586575.

— (s.d.). "Tug-of-War games and PDEs". Curso ministrado no Maxwell Centre for Analysis and Nonlinear PDEs em Edimburgo, Escócia em maio de 2010 (ver p. 26).

O. Savin (2007). "Small perturbation solutions for elliptic equations". *Comm. Partial Differential Equations* 32.4-6, pp. 557–578. MR: 2334822 (ver p. 93).

W. Sheng e X.-J. Wang (2010). "Regularity and singularity in the mean curvature flow". Em: *Trends in partial differential equations*. Vol. 10. Adv. Lect. Math. (ALM). Int. Press, Somerville, MA, pp. 399–436. MR: 2648289 (ver p. 104).

J. Siltakoski (2018). "Equivalence of viscosity and weak solutions for the normalized $p(x)$-Laplacian". *Calc. Var. Partial Differential Equations* 57.4, Paper No. 95, 20. MR: 3812913 (ver p. 78).

J. V. da Silva e G. C. Ricarte (2019). "An asymptotic treatment for non-convex fully nonlinear elliptic equations: global Sobolev and BMO type estimates". *Commun. Contemp. Math.* 21.7, pp. 1850053, 28. MR: 4017779.

J. V. da Silva (2019). "Sharp and improved regularity estimates to fully nonlinear equations and free boundary problems". Tese de dout. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, p. 105 (ver p. 81).

J. V. da Silva e R. T. Frias (jan. de 2023). "Calderón–Zygmund estimates for the fully nonlinear obstacle problem with super-linear Hamiltonian terms and unbounded ingredients". Submetido (ver p. 109).

J. V. da Silva, E. C. B. Júnior, G. C. Rampasso e G. C. Ricarte (2023). "Global regularity for a class of fully nonlinear PDEs with unbalanced variable degeneracy". To appear in J. London Math. Soc. in 2023.

J. V. da Silva, R. A. Leitão Júnior e G. C. Ricarte (2021). "Geometric regularity estimates for fully nonlinear elliptic equations with free boundaries". *Math. Nachr.* 294.1, pp. 38–55. MR: 4245565 (ver pp. 133, 134).

J. V. da Silva e G. Nornberg (2021). "Regularity estimates for fully nonlinear elliptic PDEs with general Hamiltonian terms and unbounded ingredients". *Calc. Var. Partial Differential Equations* 60.6, Paper No. 202, 40. MR: 4304555 (ver pp. 66, 111, 117, 124, 125).

J. V. da Silva e D. dos Prazeres (2019). "Schauder type estimates for "flat" viscosity solutions to non-convex fully nonlinear parabolic equations and applications". *Potential Anal.* 50.2, pp. 149–170. MR: 3905526 (ver p. 93).

J. V. da Silva e G. C. Ricarte (2020). "Geometric gradient estimates for fully nonlinear models with non-homogeneous degeneracy and applications". *Calc. Var. Partial Differential Equations* 59.5, Paper No. 161, 33. MR: 4148407 (ver p. 70).

J. V. da Silva e A. M. Salort (2018). "Sharp regularity estimates for quasi-linear elliptic dead core problems and applications". *Calc. Var. Partial Differential Equations* 57.3, Paper No. 83, 24. MR: 3796393 (ver p. 70).

J. V. da Silva e H. Vivas (2021a). "The obstacle problem for a class of degenerate fully nonlinear operators". *Rev. Mat. Iberoam.* 37.5, pp. 1991–2020. MR: 4276303 (ver p. 71).

— (2021b). "The obstacle problem for a class of degenerate fully nonlinear operators". *Rev. Mat. Iberoam.* 37.5, pp. 1991–2020. MR: 4276303.

A. Święch (1997). "$W^{1,p}$-interior estimates for solutions of fully nonlinear, uniformly elliptic equations". *Adv. Differential Equations* 2.6, pp. 1005–1027. MR: 1606359.

— (2020). "Pointwise properties of L^p-viscosity solutions of uniformly elliptic equations with quadratically growing gradient terms". *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 40.5, pp. 2945–2962. MR: 4097485 (ver p. 122).

E. V. Teixeira (2014). "Universal moduli of continuity for solutions to fully nonlinear elliptic equations". *Arch. Ration. Mech. Anal.* 211.3, pp. 911–927. MR: 3158810 (ver p. 66).

— (2016). "Geometric regularity estimates for elliptic equations". Em: *Mathematical Congress of the Americas*. Vol. 656. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 185–201. MR: 3457602 (ver pp. 80, 84).

— (2020). "Regularity theory for nonlinear diffusion processes". *Notices Amer. Math. Soc.* 67.4, pp. 475–483. MR: 4186265.

— (s.d.). *Introdução à teoria de regularidade elíptica: uma abordagem geométrica*. III ENAMA, Maringá, 2009 (ver pp. iv, 4).

E. V. Teixeira e J. M. Urbano (2021). "Geometric tangential analysis and sharp regularity for degenerate pdes". Em: *Harnack inequalities and nonlinear operators*. Vol. 46. Springer INdAM Ser. Springer, Cham, pp. 175–192. MR: 4290572 (ver p. 80).

G. Tian e X.-J. Wang (2013). “A priori estimates for fully nonlinear parabolic equations”. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 17, pp. 3857–3877. MR: 3096911 (ver p. 104).

N. S. Trudinger (1983). “Fully nonlinear, uniformly elliptic equations under natural structure conditions”. *Trans. Amer. Math. Soc.* 278.2, pp. 751–769. MR: 701522 (ver pp. 69, 125).

— (1988). “Hölder gradient estimates for fully nonlinear elliptic equations”. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 108.1-2, pp. 57–65. MR: 931007 (ver p. 65).

N. N. Ural’tseva e A. B. Urdaletova (1983). “Boundedness of gradients of generalized solutions of degenerate nonuniformly elliptic quasilinear equations”. *Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom.* vyp. 4, pp. 50–56. MR: 725829 (ver p. 68).

N. Winter (2009). “$W^{2,p}$ and $W^{1,p}$-estimates at the boundary for solutions of fully nonlinear, uniformly elliptic equations”. *Z. Anal. Anwend.* 28.2, pp. 129–164. MR: 2486925 (ver p. 110).

N. Wolanski (2007). “Introdución a los problemas de frontera libre”. Cursos y Seminarios de Matemática - Serie B 2. Publicaciones del Departamento de Matemática (ver pp. v, 112, 115).

D. Wu e P. Niu (2023). “Interior pointwise $C^{2,\alpha}$ regularity for fully nonlinear elliptic equations”. *Nonlinear Anal.* 227, Paper No. 113159, 9. MR: 4503817 (ver p. 90).

Y. Yuan (2001). “A priori estimates for solutions of fully nonlinear special Lagrangian equations”. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire* 18.2, pp. 261–270. MR: 1808031 (ver p. 82).

V. Zhikov (1993). “Lavrentiev phenomenon and homogenization for some variational problems”. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 316.5, pp. 435–439. MR: 1209262 (ver p. 68).

Índice Remissivo

Títulos Publicados — 34º Colóquio Brasileiro de Matemática

Uma introdução à convexidade em grafos – *Júlio Araújo, Mitre Dourado, Fábio Protti e Rudini Sampaio*

Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos – *Lucas Backes, Alexandre Tavares Baraviera e Flávia Malta Branco*

Introdução aos espaços de Banach – *Aldo Bazán, Alex Farah Pereira e Cecília de Souza Fernandez*

Contando retas em superfícies no espaço projetivo – *Jacqueline Rojas, Sally Andria e Wállace Mangueira*

Paths and connectivity in temporal graphs – *Andrea Marino e Ana Silva*

Geometry of Painlevé equations – *Frank Loray*

Implementação computacional da tomografia por impedância elétrica – *Fábio Margotti, Eduardo Hafemann e Lucas Marcilio Santana*

Regularidade elíptica e problemas de fronteiras livres – *João Vitor da Silva e Gleydson Ricarte*

The ∞-Laplacian: from AMLEs to Machine Learning – *Damião Araújo e José Miguel Urbano*

Homotopical dynamics for gradient-like flows – *Guido G. E. Ledesma, Dahisy V. S. Lima, Margarida Mello, Ketty A. de Rezende e Mariana R. da Silveira*

impa

Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

João Vitor da Silva

João Vitor nasceu em Juazeiro do Norte-CE, onde estudou licenciatura em Matemática na URCA. Realizou o doutorado em Matemática na UFC. Mudou-se para a Argentina em 2015, onde viveu, por quatro anos, em Buenos Aires. Atualmente trabalha na UNICAMP. É apreciador de MPB e Rock brasileiro dos anos 80. Gosta da culinária Latinoamérica, de clássicos do cinema, de literatura de mistério e não dispensa as reuniões com os amigos, regadas a cervejas, muitas risadas e conversas descontraídas.

Gleydson Ricarte

Gleydson é bacharel em Matemática pela UFC, onde também concluiu o mestrado e o doutorado. Posteriormente fez pós-doutorado na Universidade de Coimbra. É professor da UFC e autor de artigos científicos em revistas internacionais com ênfase à Teoria de Regularidade para equações diferenciais parciais e problemas de fronteira livre.

Regularidade elíptica e problemas de fronteiras livres

impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

ISBN 978-85-244-0533-4
9 788524 405334