Contando retas em superfícies no espaço projetivo

Jacqueline Rojas
Sally Andria
Wállace Mangueira

34º Colóquio Brasileiro de Matemática

impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Contando retas em superfícies no espaço projetivo

Contando retas em superfícies no espaço projetivo
Primeira impressão, setembro de 2023

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

ISBN 978-85-244-0539-6 (print)
ISBN 978-85-244-0540-2 (ebook)
MSC (2020) Primary: 14N10, Secondary: 20E36, 13P15, 14Q99

Coordenação Geral Carolina Araujo

Produção Books in Bytes **Capa** IMPA

Realização da Editora do IMPA
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
`www.impa.br`
`editora@impa.br`

R741c Rojas, Jacqueline
Contando retas em superfícies no espaço projetivo / Jacqueline Rojas, Sally Andria e Wállace Mangueira. - 1.ed. -- Rio de Janeiro: IMPA, 2023.
34 Colóquio Brasileiro de Matemática; v. 4, 268p.: il.; 23cm
ISBN 978-85-244-0539-6 (print)
ISBN 978-85-244-0540-2 (ebook)
1. Geometria Algébrica Clássica. 2. Contagem de retas. I. Andria, Sally; Mangueira, Wállace. II. Série. III. Título
UDC: 512
Carolina Celano Lima/CRB-7: 2438

Ao meu pai (in memoriam) e minha mãe.
E aos amores da minha vida Ramón, Pablo e Olga.

Ao meu Deus e à minha chi, Sandy Vieira.

Ao vô Amigão (in memoriam), tio Zé Galberto (in memoriam) e Marcinho (in memoriam).

Agradecimentos

Gostaríamos de expressar nossa mais profunda gratidão a todos os participantes do minicurso por sua presença e interesse. Sua dedicação e entusiasmo foram fundamentais para o sucesso deste evento.

Também queremos estender nossos sinceros agradecimentos pela oportunidade de compartilhar um dos problemas matemáticos que têm cativado a mente de inúmeros matemáticos ao longo da história. Este trabalho é fruto do nosso grupo de pesquisa.

Neste momento especial, gostaríamos de dedicar este livro a nossos familiares e amigos, que têm sido uma fonte constante de apoio, incentivo e inspiração. Em particular, queremos mencionar Issis Dias, Ageu Freire, Ramón Mendoza, professor Israel Vainsencher, professor Roberto Bedregal, *in memoriam*, professor Eduardo Esteves e a professora Carolina Araújo. Suas palavras encorajadoras e sua crença em nosso potencial têm sido um farol de luz durante toda a jornada de criação deste livro.

Agradecemos a todos vocês, nossos leitores e apoiadores, por embarcar nessa jornada conosco. Esperamos que este livro possa transmitir nosso amor pela matemática e inspirar novas gerações de mentes curiosas a explorarem as maravilhas desse campo magnífico.

Com gratidão, J. Rojas, S. Andria e W. Mangueira.

Sumário

Agradecimentos **ii**

Introdução **1**

1 Fundamentos de Geometria Algébrica Clássica **5**
1.1 No universo afim 6
1.1.1 Variedades afins e quase afins 11
1.1.2 Teorema dos Zeros de Hilbert 24
1.1.3 Dimensão de conjuntos algébricos afins 29
1.1.4 Funções regulares 44
1.2 No universo projetivo 52
1.2.1 Variedades projetivas e quase projetivas 68
1.2.2 Teorema dos zeros de Hilbert 81
1.2.3 Dimensão de conjuntos algébricos projetivos 84
1.2.4 Funções regulares 98
1.3 Morfismos caso afim/projetivo 107
1.3.1 Critério para morfismos (caso projetivo) 116
1.3.2 Teorema da dimensão das fibras 131

2 Toda superfície contém retas? **150**
2.1 Retas em $\mathbb{P}^3$ e quádrica de Plücker 151
2.2 Aplicando o teorema da dimensão das fibras 159
2.3 Prelúdio para contagem de retas em superfícies não singulares 168

3 Contagem de retas em superfícies de grau $d \leqslant 4$ **182**
3.1 Retas em superfícies de graus 1 e 2 183

3.2 Retas em superfícies de grau 3 189
3.2.1 Contagem de retas via estratificação 191
3.2.2 Retas em superfícies cúbicas não singulares 199
3.3 Retas em superfícies de grau 4 208

4 Contagem de retas em superfícies de grau $d \geqslant 5$ 219
4.1 Uma cota inferior: cortesia de Fermat 220
4.2 Sobre as cotas superiores 220
4.3 Caçando cotas 224

A Classificação dos automorfismos da reta projetiva 233
A.1 Ação de um grupo sobre um conjunto 233
A.2 Automorfismos da reta projetiva 234
A.3 Ação de subgrupos de Aut($\mathbb{P}^1$) sobre pontos fixos 235

B Maxima 239
B.1 Linhas de comando utilizadas no Maxima 239
B.2 Contando retas com o Maxima 242

Bibliografia 249

Índice Remissivo 253

Introdução

Prezado leitor, seja muito vem vindo ao minicurso Contando retas em superfícies no espaço projetivo!

Para a contagem que propomos realizar junto ao leitor, precisamos viajar para França (em torno de 1637) e agradecer ao matemático e filósofo francês René Descartes pela maravilhosa ideia de introduzir um sistema de coordenadas cartesianas. Cabe salientar que um dos elementos onipresentes neste texto são os anéis de polinômios e seus quocientes.

Para esclarecer o tipo de contagem que iremos abordar, imagine uma reta e uma circunferência no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, e pense na seguinte pergunta: qual é a quantidade máxima de pontos na interseção da reta com a circunferência? Esse é um problema básico de *Geometria Enumerativa*. De fato, dado um sistema de equações algébricas que possui uma quantidade finita de soluções, podemos dizer que contar o número dessas soluções é o objetivo da Geometria Enumerativa.

Entretanto, o problema enumerativo que abordaremos neste texto, tratará com objetos que moram não mais no $\mathbb{R}^2$ (ou, mais geralmente, num $\mathbb{R}^n$ com $n \geqslant 3$). Graças às contribuições de Desargues, Poncelet, Pascal entre outros[1], chegamos no ambiente no qual desenvolveremos a contagem: *o espaço projetivo complexo* $\mathbb{P}^3$ (que pode ser pensado como o conjunto das retas que passam pela origem em $\mathbb{C}^4$).[2] Representaremos os pontos de $\mathbb{P}^3$ na forma $[a_0 : a_1 : a_2 : a_3]$, sendo (a_0, a_1, a_2, a_3) um vetor diretor da reta determinada por tal ponto. Neste contexto, uma superfície $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ de grau d, com $d \geqslant 1$, é definida a partir de um polinômio $f \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$ *homogêneo de grau* d.[3] Mais precisamente, $[a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \in \mathrm{X}$ se, e somente se, $f(a_0, a_1, a_2, a_3) = 0$. Superfícies

[1] No texto Dieudonne (1972), o leitor poderá conferir uma síntese do desenvolvimento histórico da Geometria Algébrica.

[2] De forma mais geral, no desenvolvimento do texto vamos utilizar $\mathbb{P}(V)$, a *projetivização* de V, constituído pelas retas que passam pela origem do espaço vetorial V.

[3] Um polinômio não nulo $f \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$ é dito homogêneo de grau d se $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) = \lambda^d f(x, y, z, t)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo.

de grau 1 são denominadas de planos, e para nossa tranquilidade, como o leitor poderá constatar no Capítulo 1, a interseção de dois planos distintos em $\mathbb{P}^3$ determinam uma reta (e vice-versa).

Apresentados os protagonistas de nossa história, passemos ao problema que desejamos estudar. Uma referência cronológica mais abrangente é encontrada no texto de Ciliberto e Zaidenberg (2022).

O problema

Um problema clássico de Geometria Algébrica remonta ao século XIX e envolve a contagem de retas em superfícies projetivas. Mais precisamente,

> Qual é a quantidade máxima de retas que uma superfície projetiva não singular de grau d no espaço projetivo pode conter?

Começamos com o *spoiler* que revela todas as respostas a esta pergunta encontradas até o momento (agosto de 2023).

- Para grau $d \in \{1, 2\}$, as superfícies são planos e quádricas e ambas contêm infinitas retas.
- Para grau $d = 3$, as superfícies cúbicas não singulares contêm exatamente 27 retas.
- Para grau $d = 4$, sabemos que as superfícies quárticas não singulares contêm no máximo 64 retas.
- Para $d \geqslant 5$, o problema está em aberto! Por outro lado, existem cotas para o número máximo de retas.

É intuitivo perceber que um plano contém infinitas retas. Mais ainda, o teorema de classificação das superfícies quádricas no espaço projetivo nos permite concluir que essas superfícies contém infinitas retas (cf. Seção 3.1).

Vamos fazer um passeio histórico para entendermos quando e como os resultados dos casos $d = 3, 4$ foram encontrados.

Em 1847, o britânico Arthur Cayley (1821–1895) enviou uma carta para o irlandês George Salmon (1819–1904) na qual mencionava que uma superfície cúbica geral deveria conter um número finito de retas. Salmon provou que este número era 27. Dois anos depois, Cayley apresenta a demonstração de Salmon e a publica no artigo *On the triple tangent planes of surfaces of the third order* (Cayley (1849)). No artigo *On the triple tangent planes to surfaces of the third order* (Salmon (1849)) publicado na mesma revista, Salmon prova que *qualquer* superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$ contém exatamente 27 retas. Este resultado foi também demonstrado pelo alemão Alfred Clebsch (1871). Esta descoberta foi muito importante para o desenvolvimento da Geometria Algébrica, pois há quem diga que a Geometria Algébrica Moderna tenha se iniciado neste momento. O cálculo de tal número (de forma bastante elementar) será discutido na Seção 3.2, seguindo as ideias expostas em Reid (1988). Para uma revisão histórica confira os textos de Dolgachev (2005) e Henderson (2015). O leitor que desejar se aprofundar em outros aspectos ou abordagens do estudo das retas em superfícies cúbicas pode conferir os seguintes textos: Bruce e Wall (1979), Santos (2001), Dolgachev (2012), Luza e Pereira (2018) e McKean, Minahan e Zhang (2021).

Quando passamos para superfícies de grau maior ou igual a quatro a situação muda. Primeiro, nem toda superfície não singular de grau $d \geqslant 4$ contém retas (confira a discussão no Capítulo 2). Segundo, o número de retas numa superfície não singular de grau fixado pode variar.

No caso das superfícies quárticas não singulares, o enredo se inicia com a publicação do artigo *Ueber eine besondre Classe von Flächen vierter Ordnung* (Schur (1882)), no qual o alemão Friedrich Schur (1856–1932) apresentou a superfície quártica não singular dada pelo polinômio $x^4+xy^3+z^4+zt^3$, que contém exatamente 64 retas. Essa superfície é agora denominada de quártica de Schur. Porém, foi apenas em 1943 que o italiano Beniamino Segre (1903–1977), no artigo *The maximum number of lines lying on a quartic surface* (Segre (1943)), afirmou que toda superfície quártica não singular em $\mathbb{P}^3$ contém *no máximo* 64 retas. Apesar desta afirmação ser verdadeira, a demonstração feita por Segre estava errada, e este fato foi verificado apenas 72 anos depois por Sławomir Rams e Matthias Schütt, em *64 lines on smooth quartic surfaces* (Rams e Schütt (2015)). Para mais detalhes confira o Capítulo 3.

Para superfícies de grau $d \geqslant 5$, como já mencionamos, o problema está em aberto e existem apenas cotas para o número máximo de retas que uma superfície não singular de grau d em $\mathbb{P}^3$ pode conter. Uma cota inferior é dada pela família das superfícies de Fermat de grau d, que contém exatamente $3d^2$ retas. Já para cotas superiores, Clebsch exibiu uma cota em *Ueber die anwendung der quadratischen substitution auf die gleichungen 5ten grades und die geometrische Theorie des Ebenen Fünfseits* (Clebsch (1871)), a qual foi melhorada por Segre (1947). Recentemente, a cota de Segre foi otimizada por Bauer e Rams (2022) em *Counting lines on projective surfaces*.

Esperamos que o leitor adquira uma compreensão dos desafios e da beleza inerentes à contagem de retas em superfícies no espaço projetivo. Assim como também, se sinta motivado a explorar mais sobre o tema e aproveite ao máximo essa jornada matemática.

Estrutura do livro e como utilizá-lo

Reservamos esta seção para desenhar o caminho que será tomado neste livro através de cada capítulo, assim como orientações em geral para o público alvo.

No Capítulo 1, apresentamos as noções básicas de Geometria Algébrica que nos permitirão entender e desenvolver o nosso problema. Além de resultados importantes, o leitor encontrará exemplos e exercícios que o ajudarão a compreender o assunto. Para o leitor que ainda não teve a oportunidade de fazer um curso introdutório de Geometria Algébrica Clássica, recomendamos focar nas definições de espaço projetivo, superfícies e retas, e no enunciado do teorema da dimensão das fibras e suas consequências (sem se preocupar, neste momento, com a compreensão da demonstração deste teorema).

Vale salientar que o leitor com base em Geometria Algébrica Clássica, pode optar por iniciar a leitura a partir do Capítulo 2. O leitor muito curioso, que esteja interessado em conferir as respostas existentes do problema em questão, pode ir diretamente para os Capítulos 3 e 4.

No Capítulo 2, exploramos a questão de uma superfície conter ou não retas, sendo o teorema da dimensão das fibras um dos elementos-chaves para essa discussão. Outro elemento que utilizamos é a associação do conjunto das retas no espaço projetivo com pontos da superfície quádrica de Plücker em $\mathbb{P}^5$. Finalizamos o capítulo com um prelúdio para contagem de retas em superfícies não singulares de grau $d \geqslant 3$, sendo essa a base teórica para a contagem das 27 retas numa superfície cúbica não singular, como também para obter cotas para o número máximo de retas em superfícies de grau $d \geqslant 5$.

O Capítulo 3 acompanha a história e a contagem de retas em superfícies nos casos em que o problema já foi resolvido, i.e. superfícies de grau $d \leqslant 4$. Um método bastante simples de contagem de retas é via estratificação, e nós o utilizaremos para discutir diversos exemplos de superfícies de grau 3 e, principalmente, de grau 4. Ao contrário do que ocorre com superfícies não singulares de grau 3, a quantidade de retas em superfícies não singulares de grau 4 varia, sendo 64 o número máximo de retas contidas em tais superfícies.

Já no Capítulo 4, abordamos o problema para superfícies de grau $d \geqslant 5$ e a parte histórica da determinação das cotas de Clebsch, Segre e Bauer–Rams para o número máximo de retas que uma superfície pode conter. Além disso, obteremos cotas a partir da família de superfícies não singulares $\mathcal{S}_\phi$, determinada pelos zeros do polinômio homogêneo $\phi(x, y) - \phi(z, t)$, sendo $\phi(u, v)$ homogêneo de grau d, tal que $\mathcal{Z}(\phi) \subset \mathbb{P}^1$ consiste de d pontos distintos.

No Apêndice A expomos alguns resultados de ação de grupos sobre conjuntos com foco no grupo $\Gamma_C = \{\mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) | \mathbf{T}(C) = C\}$, sendo $C \subset \mathbb{P}^1$ um conjunto finito com $\#(C) \geqslant 3$. Neste processo, o teorema de classificação dos automorfismos de $\mathbb{P}^1$ de Klein tem um papel preponderante.

Para utilização do sistema de álgebra computacional Maxima, no Apêndice B apresentamos apenas os comandos necessários para implementação da contagem de retas por estratificação. Revisitamos alguns exemplos do Capítulo 3, e apresentamos um preâmbulo completo dos comandos a serem inseridos no Maxima para que o próprio leitor possa calcular a quantidade de retas em superfícies de grau 3.

1 Fundamentos de Geometria Algébrica Clássica

O próprio título deste livro "Contando retas em superfícies no espaço projetivo" desperta no leitor a perspectiva de adquirir conhecimentos sobre o que vem a ser o *espaço projetivo* e os objetos denominados de *retas* e *superfícies* nesse espaço. Assim, nossa proposta inicial neste primeiro capítulo é introduzir os termos e propriedades mais utilizadas no estudo da Geometria Algébrica Clássica, mantendo o foco no objetivo do nosso texto, mas dando a oportunidade para que os neófitos no assunto, venham tomar posse dos termos matemáticos que serão utilizados, como também conhecer resultados tão importantes, quanto o *teorema da dimensão das fibras* (cf. Teorema 1.7). Vale salientar que este capítulo foi dividido em três seções.

- **No universo afim.** Esta primeira seção foi dedicada aos objetos afins, com os quais o leitor possivelmente já teve um contato. Por exemplo, retas e parábolas no plano cartesiano real e/ou o estudo das retas, planos, cônicas e superfícies no espaço 3--dimensional real. Um dos destaques desta seção é dotar o espaço afim $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (neste momento, leia-se $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^n$, sendo $\mathbb{K}$ um corpo) e seus subconjuntos de uma topologia denominada *topologia de Zariski*, o que permite calcular a *dimensão topológica* desse espaço. Entretanto, o arcabouço algébrico, permite usar a noção de *dimensão de Krull* para calcular a dimensão do *anel de coordenadas* associado a um subconjunto fechado de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, que vem a coincidir com a dimensão topológica desse fechado. Outro resultado que merece destaque é o *teorema dos zeros de Hilbert*, que nos permite estabelecer uma bijeção entre os subconjuntos fechados do espaço afim $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e os ideais radicais do anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Concluímos essa seção com a noção de *função regular*, que nos permite definir o conceito de *morfismo* entre conjuntos fechados (na terceira seção), o qual neste momento o leitor pode pensar como os homólogos das funções contínuas quando relacionamos espaços topológicos.

- **No universo projetivo.** Nesta segunda seção, o leitor será apresentado aos protagonista da contagem: o espaço projetivo complexo $\mathbb{P}^3$, e as retas e superfícies em $\mathbb{P}^3$. Além disso, o leitor poderá conferir que as noções e muitos dos resultados que foram apresentados no caso afim (tais como *topologia de Zariski*, *dimensão*, *ideal associado*, *função regular*, etc.) ganharão, por assim dizer, sua versão projetiva. Em particular, demonstraremos a versão projetiva do *teorema dos zeros de Hilbert*, cuja prova recebe o subsídio da versão afim. Entretanto, diferente do caso afim, nesta seção exploramos o conceito de conjunto algébrico num produto cartesiano de espaços projetivos, uma vez que utilizaremos o *teorema da dimensão das fibras* em morfismos, cujos domínios são conjuntos algébricos num produto de espaços projetivos.

- **Morfismos caso afim/projetivo.** Nesta seção, exploramos o conceito de *morfismo*, morfismo *dominante* (pré-requisito para podermos utilizar o *teorema da dimensão das fibras*), e *isomorfismo*. Mostramos que isomorfismos entre variedades afins estão em correspondência com isomorfismos entre seus anéis de coordenadas. Entretanto, dentre os isomorfismos entre variedades projetivas, nossa ênfase são as *mudanças de coordenadas projetivas* (MCP), que permite modificar o polinômio que define uma dada superfície, sem perdermos nada na proposta de contagem. Mais precisamente, as *mudanças de coordenadas projetivas* preservam a quantidade de retas contidas numa superfície e a incidência entre tais retas, assim como outras propriedades que são exploradas nesta seção. Concluímos com uma demonstração do *teorema da dimensão das fibras* e alguns resultados sobre morfismos que possuem fibras irredutíveis de dimensão fixa.

1.1 No universo afim

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e n um inteiro positivo.

O n-espaço afim[1] $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ como conjunto é igual a $\mathbb{K}^n$. Entretanto o que torna este conjunto numa variedade afim, será essencialmente a topologia de Zariski, com seus fechados que denominaremos de conjuntos algébricos, que iremos introduzir em breve.

Para abordar o conceito de conjunto algébrico precisamos introduzir o conjunto dos zeros de um polinômio.

[1] Usualmente, $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ e $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ são denominados de *reta afim*, *plano afim* e *espaço afim*, respectivamente.

Considere $f \in \mathbb{K}[\underline{x}] := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Definimos o *conjunto de zeros* de f em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ por

$$\mathcal{Z}(f) := \left\{a \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \,|\, f(a) = 0\right\}.$$

Por exemplo, se $\mathbb{K}$ for infinito e $f \in \mathbb{K}[x]$, então

$$\mathcal{Z}(f) = \begin{cases} \emptyset & \text{se grau}(f) = 0 \text{ ou } f \text{ não tiver raízes em } \mathbb{K}, \\ \mathbb{K} & \text{se } f = 0, \\ X \overset{finito}{\subseteq} \mathbb{K} & \text{se grau}(f) \geqslant 1. \end{cases}$$

Exercício 1.1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito e $f \in \mathbb{K}[x]$. Mostre que

(a) Se grau$(f) = n$, então $\#(\mathcal{Z}(f)) \leqslant n$.

(b) Se $\mathcal{Z}(f)$ é infinito, então $f = 0$.

Exercício 1.2. Considere o corpo finito $\mathbb{Z}_p = \left\{\overline{0}, \ldots, \overline{p-1}\right\}$, com p primo. Seja $X \subseteq \mathbb{Z}_p$, determine $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ não nulo tal que $\mathcal{Z}(f) = X$.

Exercício 1.3. Sejam $f, g \in \mathbb{K}[\underline{x}]$. Mostre que $\mathcal{Z}(fg) = \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g)$.

De forma mais geral, podemos definir os zeros de um subconjunto S em $\mathbb{K}[\underline{x}] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ da seguinte forma.

Considere $S \subseteq \mathbb{K}[\underline{x}]$ não vazio. O *conjunto dos zeros de* S em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é dado por

$$\mathcal{Z}(S) := \left\{a \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \,|\, f(a) = 0,\ \forall f \in S\right\}.$$

Em particular, ao considerarmos $S = I$ sendo I um ideal de $\mathbb{K}[\underline{x}]$, obtemos o *conjunto dos zeros* de I em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$

$$\mathcal{Z}(I) := \left\{a \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \,|\, f(a) = 0,\ \forall f \in I\right\}.$$

Proposição 1.1. *Sejam $S, T \subseteq \mathbb{K}[\underline{x}]$ não vazios e $\langle S \rangle$ o ideal gerado*[2] *por S em $\mathbb{K}[\underline{x}]$ e I, J ideais em $\mathbb{K}[\underline{x}]$. Verifica-se que*

(i) *Se $S \subseteq T$, então $\mathcal{Z}(T) \subseteq \mathcal{Z}(S)$.*

(ii) $\mathcal{Z}(S) = \mathcal{Z}(\langle S \rangle)$.

[2]Lembre que $\langle S \rangle := \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot f_i \in A | a_i \in A \text{ e } f_i \in S \text{ com } 1 \leqslant i \leqslant k, k \in \mathbb{N}\right\}$. Ou equivalentemente, $\langle S \rangle := \bigcap\limits_{\substack{S \subseteq J \subseteq A \\ ideal}} J$ sendo $A = \mathbb{K}[\underline{x}]$. Se $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$, então definimos $\langle S \rangle := \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$.

(iii) $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(\sqrt{I})$, *sendo* $\sqrt{I}$ *o radical*[3] *do ideal* I.

(iv) $\mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(I \cap J)$.

Demonstração. $\boxed{\text{(i)}}$ Deixamos a cargo do leitor.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Tendo em consideração que $S \subseteq \langle S \rangle$, segue de (i) que $\mathcal{Z}(\langle S \rangle) \subseteq \mathcal{Z}(S)$. A seguir provaremos a outra inclusão.

Considere $a \in \mathcal{Z}(S)$. Assim, $f(a) = 0$ para todo $f \in S$. Note que

$$
\begin{aligned}
g \in \langle S \rangle \quad &\Longrightarrow \quad \exists\, g_1, \dots, g_k \in S \text{ e } p_1, \dots, p_k \in \mathbb{K}[\underline{x}], \text{ tais que } g = \sum_{i=1}^{k} p_i g_i \\
&\Longrightarrow \quad g(a) = \sum_{i=1}^{k} p_i(a) g_i(a), \quad \forall\, a \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \\
&\overset{a \in \mathcal{Z}(S)}{\Longrightarrow} \quad g(a) = 0 \quad (\text{pois } g_i \in S) \\
&\Longrightarrow \quad a \in \mathcal{Z}(\langle S \rangle).
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{Z}(S) \subseteq \mathcal{Z}(\langle S \rangle)$.

$\boxed{\text{(iii)}}$ Deixamos a cargo do leitor.

$\boxed{\text{(iv)}}$ $\boxed{\subseteq}$ Considere $a \in \mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J)$. Assuma que $a \in \mathcal{Z}(I)$, neste caso

$$
f(a) = 0, \ \forall\, f \in I \ \overset{I \cap J \subseteq I}{\Longrightarrow} \ f(a) = 0, \ \forall\, f \in I \cap J \Longrightarrow a \in \mathcal{Z}(I \cap J).
$$

(se $a \notin \mathcal{Z}(I)$ necessariamente $a \in \mathcal{Z}(J)$, e segue o mesmo raciocínio).

$\boxed{\supseteq}$ Considere $a \in \mathcal{Z}(I \cap J)$.

Queremos concluir que $a \in \mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J)$. Suponha que, $a \notin \mathcal{Z}(I)$. Logo existe $f \in I$ tal que $f(a) \neq 0$.

Observe que para cada $g \in J$, temos que $fg \in I \cap J$. Portanto,

$$
\underbrace{fg(a)}_{f(a)g(a)} = 0, \ \forall\, g \in J \ \overset{f(a) \neq 0}{\Longrightarrow} \ g(a) = 0, \ \forall\, g \in J \Longrightarrow a \in \mathcal{Z}(J) \Longrightarrow a \in \mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J).
$$

Portanto, $\mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(I \cap J)$. $\square$

Proposição 1.2. *Seja* $I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle \subseteq \mathbb{K}[\underline{x}]$. *Então* $\mathcal{Z}(I) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{Z}(f_i)$.

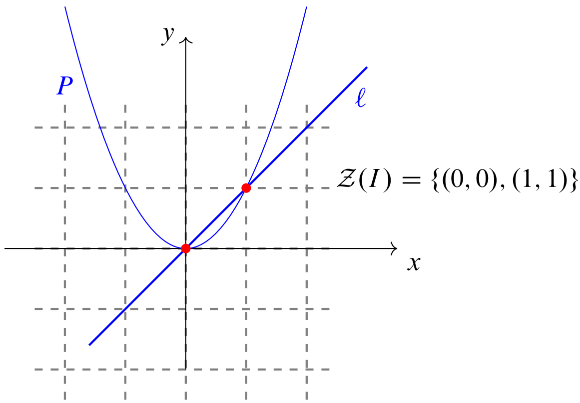
[3]Lembre que $\sqrt{I} := \{a \in A \mid \text{existe } n \text{ inteiro não negativo tal que } a^n \in I\}$ é o *radical* do ideal I no anel comutativo com unidade A.

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor. □

Notação: Usaremos a notação $\mathcal{Z}(f_1,\ldots,f_k)$ em lugar de $\mathcal{Z}(\langle f_1,\ldots,f_n\rangle)$.

Por exemplo, considere o ideal $I=\langle x-y, y-x^2\rangle$ no anel $\mathbb{R}[x,y]$. Assim,

$$\mathcal{Z}(I)=\mathcal{Z}(x-y)\cap\mathcal{Z}(y-x^2)=\underbrace{\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|a=b\}}_{\ell}\cap\underbrace{\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|b=a^2\}}_{P}$$



Exercício 1.4. Sejam $\{f_1,\ldots,f_k\}$ e $\{g_1,\ldots,g_r\}$ dois conjunto de geradores do ideal I no anel $\mathbb{K}[\underline{x}]$. Mostre que $\mathcal{Z}(f_1,\ldots,f_k)=\mathcal{Z}(g_1,\ldots,g_r)$.[4]

Conjunto algébrico afim

Um subconjunto Y de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é denominado *conjunto algébrico afim* (ou simplesmente, conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$) se existe um ideal I do anel $\mathbb{K}[\underline{x}]$ tal que $\mathcal{Z}(I)=Y$.

Observação 1.1. Sendo $\mathbb{K}[\underline{x}]$ um anel noetheriano[5], todo ideal admite um conjunto finito de geradores. Assim,

$$Y \text{ é um conjunto algébrico em } \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \iff \begin{array}{l}\exists\ f_1,\ldots,f_k\in\mathbb{K}[\underline{x}] \text{ tais}\\ \text{que } Y=\mathcal{Z}(f_1,\ldots,f_k).\end{array} \tag{1.1}$$

Exemplo 1.1. $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e $\emptyset$ são conjuntos algébricos de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, pois $\mathcal{Z}(0)=\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (considere $I=\{0\}$) e $\mathcal{Z}(1)=\emptyset$ (considere $I=\langle 1\rangle$).

Exemplo 1.2. $Y=\{a\in\mathbb{R}|a>0\}$ não é um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$. Pelo absurdo, suponha que Y é um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$. Assim, $Y=\mathcal{Z}(I)$ sendo I um ideal de

---

[4] De fato, $\mathcal{Z}(f_1,\ldots,f_k)=\mathcal{Z}(g_1,\ldots,g_r)=\mathcal{Z}(I)$ o que demonstra que o cálculo dos zeros do ideal I independe do conjunto de geradores escolhidos para o ideal I.

[5] Veja Teorema III.5.2 na p. 105 em Garcia e Lequain (2013)

$\mathbb{R}[x]$. Lembre que todo ideal em $\mathbb{R}[x]$ é principal, logo $Y = \mathcal{Z}(f)$ se $I = \langle f \rangle$. Neste caso, $f(a) = 0$ para todo $a > 0$. Assim $\mathcal{Z}(f)$ é infinito e segue do Exercício 1.1 que $f = 0$, que implica em $Y = \mathcal{Z}(0) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$, o que é um absurdo.

Exemplo 1.3. Conjuntos algébricos $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ sendo $\mathbb{K}$ corpo finito.

Se Y é um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, segue de (1.1) que existem $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ tais que

$$Y = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_k) = \mathcal{Z}(f_1) \cap \mathcal{Z}(f_2) \cap \cdots \cap \mathcal{Z}(f_k).$$

Sendo $\mathbb{K}$ um corpo finito, concluímos que $\mathcal{Z}(f_i)$ é finito para cada i. Logo, Y é finito.

Reciprocamente, considere Y um subconjunto finito não vazio de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (sabemos que o conjunto vazio é um conjunto algébrico). Logo, $Y = \{\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_m\}$ com $\mathrm{a}_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$ para $i = 1, \ldots, m$. Note que

$$\{\mathrm{a}_i\} = \mathcal{Z}(x_1 - a_{i,1}, x_2 - a_{i,2}, \ldots, x_n - a_{i,n}).$$

Logo, $\{\mathrm{a}_i\}$ é um conjunto algébrico e Y uma união finita de conjuntos algébricos em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Portanto Y é um conjunto algébrico.

O exemplo acima, motiva a seguinte pergunta

Pergunta

A união finita de conjuntos algébricos (afins) é um conjunto algébrico afim?[a]

[a] Pense! A resposta faz parte de uma das condições que definem a topologia de Zariski em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (cf. Proposição 1.3).

Exemplo 1.4. Conjuntos algébricos $Y \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ sendo $\mathbb{K}$ infinito.

Observe que todo conjunto algébrico em $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ é da forma $\mathcal{Z}(f)$, para algum $f \in \mathbb{K}[x]$ (visto que $\mathbb{K}[x]$ é um D.I.P.[6]). Logo, Y é um conjunto algébrico se, e somente se, Y for finito ou $Y = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$.

Hipersuperfícies: curvas, superfícies, …

Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito. Se $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ($n \geqslant 2$) for não constante, tal que $\mathcal{Z}(f)$ é infinito, então $\mathcal{Z}(f)$ será denominada *hipersuperfície* (afim) em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Neste contexto, $\mathcal{Z}(f)$ é denominada *curva* (plana afim), *superfície* (afim) se $n = 2, 3$, respectivamente.

Exercício 1.5. Mostre que $Y = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | b \geqslant 0)\}$ não é um conjunto algébrico de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

[6] Um anel comutativo com unidade, que é um domínio de integridade, com a propriedade de que todo ideal é principal (ou seja, gerado por exatamente um elemento) é denominado *Domínio de ideais principais* (*D.I.P.*)

Exercício 1.6. Se $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ $(n \geqslant 2)$ for não constante, então $\mathcal{Z}(f) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ é infinito.

Para caracterizar os conjuntos algébricos no plano vamos usar o seguinte resultado (cf. p. 26 em Vainsencher (2017))

Lema 1.1. *Sejam $f, g \in \mathbb{K}[x, y]$, sendo $\mathbb{K}$ corpo, dois polinômios sem fatores irredutíveis em comum. Então $\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g)$ é um conjunto finito.*

Exemplo 1.5. Conjuntos algébricos Y no plano afim $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. Seja Y um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. Segue de (1.1) que existem $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{K}[x, y]$ tais que

$$Y = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_k) = \mathcal{Z}(f_1) \cap \mathcal{Z}(f_2) \cap \cdots \cap \mathcal{Z}(f_k).$$

Vamos abordar o caso em que $\mathbb{K}$ é um corpo infinito (para o caso finito veja Exemplo 1.3). Note que:

- Se existir $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\mathcal{Z}(f_i)$ for finito, então Y é um conjunto finito.
- Assuma que $\mathcal{Z}(f_i)$ é infinito para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ ($\mathcal{Z}(f_i)$ é uma curva).

Segue do Lema 1.1 que Y será finito, se existirem $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ $(i \neq j)$ tais que f_i e f_j não possuem fatores irredutíveis em comum. Caso contrário, podemos escrever $f_1 = hg_1$ e $f_2 = hg_2$ de modo que g_1 e g_2 não possuem fatores irredutíveis em comum. Observe que:

$$\mathcal{Z}(f_1) \cap \mathcal{Z}(f_2) = \mathcal{Z}(h) \cup \underbrace{\left(\mathcal{Z}(g_1) \cap \mathcal{Z}(g_2)\right)}_{finito} = \mathcal{Z}(h_1) \cup \cdots \cup \mathcal{Z}(h_s) \cup \underbrace{\left(\mathcal{Z}(g_1) \cap \mathcal{Z}(g_2)\right)}_{finito},$$

se $h = h_1 \cdots h_s$ é a fatoração de h em irredutíveis.

Em resumo, ao fazermos indução em k, sendo $Y = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_k) = \mathcal{Z}(f_1) \cap \mathcal{Z}(f_2) \cap \cdots \cap \mathcal{Z}(f_k)$, concluímos que:

Se Y é um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ (sendo $\mathbb{K}$ infinito) então

$$Y = \begin{cases} \emptyset, \\ \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}, \\ Y_1 \cup \cdots \cup Y_m, \quad \text{sendo } Y_j \text{ uma curva ou um conjunto unitário.} \end{cases}$$

Exercício 1.7. Dê exemplos de polinômios em $\mathbb{R}[x, y]$ cujo conjunto de zeros em $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ seja finito (com $0, 1, 2, \ldots$ elementos).

Exercício 1.8. Se $f \in \mathbb{C}[x, y]$ for não constante, conclua que $\mathcal{Z}(f) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ é infinito. Ou seja, $\mathcal{Z}(f)$ é uma curva plana.

1.1.1 Variedades afins e quase afins

Continuando nosso percurso, a seguir vamos especificar quais dentre os conjuntos algébricos serão denominados de variedades afins e quase afins. O que nos leva ao conceito de Topologia de Zariski.

Topologia de Zariski em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$

Vamos começar lembrando a definição de espaço topológico.

Sejam X um conjunto e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{F}$ define uma *topologia* em X se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) X e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{F}$.

(ii) Para quaisquer subfamília $\{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ de $\mathcal{F}$ tem-se que $\bigcup_{i\in\mathcal{J}} A_i \in \mathcal{F}$.

(iii) Se A_1 e $A_2 \in \mathcal{F}$ então $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$.

Os elementos $A \in \mathcal{F}$ são chamados de *abertos* e os elementos B^c com $B \in F$ são chamados de *fechados*.

Observação 1.2. Com as notações acima. A família $\mathcal{F}$ define uma topologia em X se, e somente se, a família $\mathcal{G} = \{B \subseteq X | B^c = X - B \in \mathcal{F}\}$ (formada pelos complementares dos elementos da família $\mathcal{F}$) satisfaz as seguintes condições:

(a) X e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{G}$.

(b) Para quaisquer subfamília $\{B_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ de $\mathcal{G}$ tem-se que $\bigcap_{i\in\mathcal{J}} B_i \in \mathcal{G}$.

(c) Se B_1 e $B_2 \in \mathcal{G}$ então $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{G}$.

Exemplo 1.6. Seja $\mathbb{K}$ um corpo finito. Vejamos que $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ é um espaço topológico.

Vamos partir da condição de que todo ideal de $\mathbb{K}[x]$ é principal. Além disso, também vale a seguinte igualdade para $I = \langle \mathrm{p} \rangle = \mathrm{p}\mathbb{K}[x]$.

$$\mathcal{Z}(I) = \Big\{a \in \mathbb{K} | f(a) = 0,\ \forall\, f \in I\Big\} = \Big\{a \in \mathbb{K} | \mathrm{p}(a) = 0\Big\}. \tag{1.2}$$

Ou seja, $\mathcal{Z}(I)$ é formado pelas raízes do polinômio p. Assim, segue de (1.2) que

$$\mathcal{Z}(I) = \begin{cases} \mathbb{K} & \text{se } I = \langle 0 \rangle = \{0\} \\ \text{Finito} & \text{se } I = \langle \mathrm{p} \rangle \quad \text{com} \quad \mathrm{p} \neq 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

A partir de (1.3) temos que:

(a) $\mathbb{K}$ e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{G} = \Big\{\mathcal{Z}(I) \mid I \text{ é ideal do anel } \mathbb{K}[x]\Big\}$.

(b) Se $\{B_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ é uma subfamília de $\mathcal{G}$, então temos duas possibilidades:
- Existe $i_0 \in \mathcal{J}$ tal que B_{i_0} é finito. Neste caso,

$$\bigcap_{i\in\mathcal{J}} B_i \subseteq B_{i_0} \implies \bigcap_{i\in\mathcal{J}} B_i \ \text{ é finito} \implies \bigcap_{i\in\mathcal{J}} B_i \in \mathcal{G}.$$

• Para todo $i \in \mathcal{J}$ tem-se que B_i é infinito. Assim, $B_i = \mathbb{K}$ para todo $i \in \mathcal{J}$. Logo

$$\bigcap_{i \in \mathcal{J}} B_i = \mathbb{K} \in \mathcal{G}.$$

(c) Se B_1 e $B_2 \in \mathcal{G}$ então temos duas possibilidades a serem analisadas.

• $B_1 = \mathbb{K}$ ou $B_2 = \mathbb{K}$. Neste caso, $B_1 \cup B_2 = \mathbb{K} \in \mathcal{G}$.

• $B_1 \neq \mathbb{K}$ e $B_2 \neq \mathbb{K}$. Logo, B_1 e B_2 são ambos conjuntos finitos, o que nos leva a concluir que $B_1 \cup B_2$ também é finito. Assim, $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{G}$.

Proposição 1.3. *Seja* $\mathcal{C}_{Alg} : = \left\{ Y | Y \text{ é um conjunto algébrico em } \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \right\}$*. O conjunto* $\mathcal{C}_{alg}$ *induz uma topologia em* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$*, ao considerarmos os complementares dos conjuntos algébricos em* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *como os abertos. Esta topologia é denominada* Topologia de Zariski *em* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Demonstração. Lembre que todo conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é da forma $\mathcal{Z}(I)$ para algum ideal I do anel $\mathbb{K}[\underline{x}]$. Seja $\Sigma : = \{I | I$ é ideal do anel $\mathbb{K}[\underline{x}]\}$. Assim, nosso objetivo é mostrar que a família $\mathcal{F} = \left\{ \mathcal{Z}(I)^c \right\}_{I \in \Sigma}$ define uma topologia em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Nossa proposta será mostrar que a família $\mathcal{G} = \left\{ \mathcal{Z}(I) \right\}_{I \in \Sigma}$ satisfaz as condições (a), (b) e (c) da Observação 1.2. Se $\mathbb{K}$ for um corpo finito o Exemplo 1.3 nos garante que todos os conjuntos algébricos são finitos. Neste caso, a verificação dos itens acima é direta.

Vamos assumir que o corpo $\mathbb{K}$ é infinito.

(a) $\mathbb{K}^n$ e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{G}$. Pois,

$$\mathcal{Z}(I) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } I = \langle 1 \rangle = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \\ \mathbb{K}^n & \text{se } I = \langle 0 \rangle = \{0\}. \end{cases}$$

(b) Considere uma subfamília $\{\mathcal{Z}(I_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ de $\mathcal{G}$.

Afirmação: $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{J}} \mathcal{Z}(I_\alpha) = \mathcal{Z}(\langle S \rangle)$ sendo $S = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} I_\alpha$.

$\boxed{\subseteq}$ Considere $a \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{J}} \mathcal{Z}(I_\alpha)$ e observe que:

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{Z}(I_\alpha),\ \forall\, \alpha \in \mathcal{J} &\Longrightarrow f(a) = 0,\ \forall\ f \in I_\alpha, \forall\, \alpha \in \mathcal{J} \\ &\Longrightarrow f(a) = 0,\ \forall\ f \in S = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} I_\alpha \\ &\underset{Proposio\ 1.1}{\overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow}} f(a) = 0,\ \forall\ f \in \langle S \rangle \\ &\Longrightarrow a \in \mathcal{Z}(\langle S \rangle). \end{aligned}$$

$\boxed{\supseteq}$ Considere $a \in \mathcal{Z}(\langle S \rangle)$ e observe que:

$$\begin{aligned} f(a) = 0,\ \forall\ f \in \langle S \rangle \quad & \overset{S \subseteq \langle S \rangle}{\Longrightarrow} \quad f(a) = 0,\ \forall\ f \in S \\ & \overset{I_\alpha \subseteq S}{\Longrightarrow} \quad f(a) = 0,\ \forall\ f \in I_\alpha, \forall\ \alpha \in \mathcal{J} \\ & \Longrightarrow a \in \mathcal{Z}(I_\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathcal{J} \\ & \Longrightarrow a \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{J}} \mathcal{Z}(I_\alpha). \end{aligned}$$

(c) Segue do item (iv) da Proposição 1.1.

□

Conjunto Irredutível

Como veremos em breve um conjunto algébrico será considerado uma variedade se for irredutível. A noção de irredutibilidade pode ser definida em qualquer espaço topólogico. Em particular, no caso dos espaços topológicos noetherianos, que tem a propriedade de representar todo conjunto fechado como união finita de irredutíveis maximais (cf. Proposição 1.7).

Sejam X um espaço topológico e Y um subconjunto de X. A *topologia induzida* por X em Y é definida da seguinte forma:

$$U \subseteq Y \text{ é } \textit{aberto} \Longleftrightarrow \exists\ U_1 \subseteq X, \text{aberto tal que } U = U_1 \cap Y.$$

De fato, se Σ define a topologia de X então

$$\Sigma_Y = \left\{ V \cap Y | V \in \Sigma \right\}$$

define a topologia induzida por X em Y.

Exercício 1.9. Sejam X um espaço topológico e Y um subconjunto de X. Considere a topologia induzida por X em Y. Mostre que $F \subseteq Y$ é *fechado* $\Longleftrightarrow\ \exists\ F_1 \subseteq X$ fechado tal que $F = F_1 \cap Y$.

Sejam X um espaço topológico e Y um subconjunto de X. Considere a topologia induzida por X em Y.

$$Y \text{ é dito } \textit{irredutível} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \forall\ F_1, F_2 \text{ fechados em } Y \text{ tais que } Y = F_1 \cup F_2 \\ \text{tem-se que } F_1 = Y \text{ ou } F_2 = Y. \end{array}$$

Ou seja, Y não pode ser escrito como uma união de dois subconjuntos fechados próprios de Y. Do contrário, Y é denominado *redutível*.

Exemplo 1.7. Se X é um espaço topológico, então $\emptyset$ é um conjunto irredutível.

De agora em diante consideraremos a Topologia de Zariski em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, salvo menção explícita em contrário.

Exemplo 1.8. Se $\mathbb{K}$ é um corpo finito, então

$$Y \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \text{ é irredutível e não vazio} \iff \#(Y) = 1,$$

visto que os fechados próprios são o vazio e os subconjuntos finitos com pelo menos um elemento ($\{a\} = \mathcal{Z}(x - a)$ é um fechado de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$). Agora, tendo em consideração que $\mathbb{K}$ é um anel comutativo com unidade, tal que $0 \neq 1$ (sendo 1 a unidade de $\mathbb{K}$), segue-se que $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ é redutível.

Exemplo 1.9. Se $\mathbb{K}$ é um corpo infinito, então

$$Y \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \text{ é irredutível e não vazio} \iff \#(Y) = 1 \text{ ou } Y = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$$

Se $\#(Y) < \infty$, então basta usar o raciocínio do Exemplo 1.8. Caso contrário, basta lembrar que os fechados próprios em $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ são os subconjuntos finitos de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$. Assim, não é possível exprimir $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ como uma união de dois subconjuntos fechados próprios (de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$).

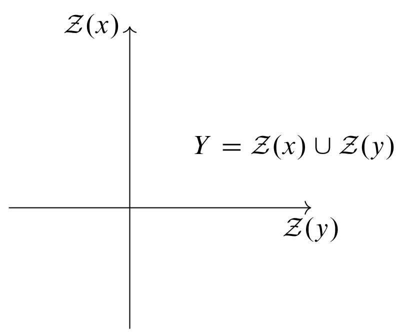
Exemplo 1.10. Seja $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais.

(a) $\mathbb{R} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ é irredutível ao considerar a topologia de Zariski em $\mathbb{R}$ (cf. Exemplo 1.9).

(b) Entretanto, ao considerar a topologia Euclidiana[7] usual em $\mathbb{R}$, tem-se que $F_1 = (-\infty, 0]$ e $F_2 = [0, +\infty)$ são fechados próprios de $\mathbb{R}$ tais que $\mathbb{R} = F_1 \cup F_2$, logo $\mathbb{R}$ é redutível.

Assim, a propriedade de um dado conjunto ser irredutível ou redutível, não depende do conjunto e sim da topologia em questão.

Exemplo 1.11. O conjunto algébrico $Y = \mathcal{Z}(xy) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ é redutível.



Exercício 1.10. Sejam X um espaço topológico e Y um subconjunto de X. Mostre que: Y é irredutível $\iff$ $\overline{Y}$ é irredutível (sendo $\overline{Y}$ o fecho[8] de Y em X).

[7] Na topologia Euclidiana os abertos são os intervalos abertos da reta.

[8] Se (X, Σ) é um espaço topológico e Y um subconjunto de X, então $\overline{Y} = \bigcap_{Y \subseteq F \in \Sigma} F$.

O próximo resultado nos será muito útil no estudo das variedades quase afins que introduziremos em breve.

Proposição 1.4. *Seja $X \neq \emptyset$ um espaço topológico. São equivalentes.*

(i) *X é um espaço topológico irredutível.*

(ii) *Todo par de conjuntos abertos não vazios em X tem interseção não vazia.*

(iii) *Todo aberto não vazio em X é denso*[9] *em X.*

Demonstração. Deixamos como exercício a cargo do leitor. □

Exercício 1.11. Considere a topologia induzida em $H = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | b \geqslant 0\}$ pela topologia de Zariski em $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Determine se H é fechado em $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$? H é irredutível?

Variedade Afim e Quase Afim

Ao considerarmos subconjuntos de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ usaremos a topologia induzida pela topologia de Zariski, salvo menção em contrário.

Seja $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ um conjunto algébrico afim. Dizemos que Y é *variedade afim* se Y for irredutível. Um subconjunto aberto de uma variedade afim será denominado de *variedade quase afim*.

Exemplo 1.12. Se $\mathbb{K}$ for um corpo finito, então $\emptyset$ e $\{a\}$ com $a \in \mathbb{K}^n$ são as variedades afins e quase afins em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Exemplo 1.13. Se $\mathbb{K}$ for um corpo infinito, segue do Exemplo 1.9 que $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ é uma variedade afim. Mais geralmente, no Exemplo 1.18 mostraremos que $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é irredutível, logo uma variedade afim para todo n.

Observação 1.3. Seja $\mathbb{K}$ corpo infinito. Sejam $X \neq \emptyset$ uma variedade afim em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e U um aberto não vazio de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

(a) $U \cap X$ é um subconjunto aberto e irredutível de X.

(b) $U \cap X$ é uma variedade quase afim e toda variedade quase afim é dessa forma.[10]

(c) Toda variedade afim é uma variedade quase afim.[11]

(d) Todo aberto de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é uma variedade quase afim.

---

[9] Dizemos que $Y \subseteq X$ é denso em X se $\overline{Y} = X$.

[10] Lembre que: Se X é um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, então $U_1 \subseteq X$ é aberto em X se, e somente se, $\exists\, U$ aberto de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ tal que $U_1 = U \cap X$.

[11] Se $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é uma variedade afim, então X é aberto em X (ou $X = U \cap X$ com $U = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$).

(e) Se Y é uma variedade quase afim, então existe V aberto num certo $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ tal que $Y = V \cap \overline{Y}$.

Sendo Y uma variedade quase afim, existem V aberto e X variedade afim em um determinado espaço afim $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, tais que $Y = V \cap X$. Observe que $Y \subseteq X$, logo $\overline{Y} \subseteq X$. Portanto,

$$Y = V \cap X \overset{\cap \overline{Y}}{\Longrightarrow} Y = V \cap \overline{Y}.$$

Exemplo 1.14. Considere $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$. Y é uma variedade quase afim em $\mathbb{A}^1$ se, e somente se, Y é unitário ou Y é um aberto de $\mathbb{A}^1$. Lembremos que as variedades afins em $\mathbb{A}^1$ são: $\emptyset$, conjuntos unitários e $\mathbb{A}^1$. Seja Y uma variedade quase afim em $\mathbb{A}^1$. Assim, $Y = U \cap X$ sendo U aberto de $\mathbb{A}^1$ e X variedade afim em $\mathbb{A}^1$. Assim,

$$Y = \begin{cases} \emptyset & \text{se } X = \emptyset, \\ U \cap \{a\} & \text{se } X = \{a\} \ (\Longrightarrow Y = \emptyset \text{ ou } Y = \{a\}), \\ U & \text{se } X = \mathbb{A}^1. \end{cases}$$

A seguir vamos introduzir o conceito de ideal associado. Esse conceito nos permitirá estabelecer uma conexão entre os conjuntos algébricos em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (respectivamente, as variedades afins) com os ideias radicais em $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (respectivamente, os ideais primos do anel $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$). De fato, poderemos estabelecer uma bijeção, se o corpo $\mathbb{K}$ for algebricamente fechado (cf. Proposição 1.9).

Ideal Associado

Considere $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. O *ideal associado* a Y em $\mathbb{K}[\underline{x}]$ é dado por

$$\mathcal{I}(Y) := \Big\{ f \in \mathbb{K}[\underline{x}] \,|\, f(a) = 0, \ \forall\ a \in Y \Big\}.$$

Exemplo 1.15. Se $\mathbb{K}$ é um corpo infinito então $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = \{0\}$. De fato,

$$\mathcal{I}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = \Big\{ f \in \mathbb{K}[\underline{x}] \,|\, f(a) = 0, \ \forall\ a \in \mathbb{K}^n \Big\}$$

Note que, se $f \in \mathcal{I}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ então $\mathcal{Z}(f) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Afirmação: Se $\mathcal{Z}(f) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ então $f = 0$.

A demonstração será feita por indução em n. Considere

$$P(n) : \text{Se } \mathcal{Z}(f) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}, \text{ então } f = 0.$$

- $P(1)$ é valida (cf. Exercício 1.1).
- Assuma que $P(k)$ é verdadeira. Ou seja, se $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_k]$ e $\mathcal{Z}(g) = \mathbb{A}^k_{\mathbb{K}}$ então $g = 0$.

- Considere $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}]$ tal que $f(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{A}^{k+1}_{\mathbb{K}}$.
  E então escreva f como um polinômio na variável x_{k+1} com coeficientes no anel $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_k]$, ou seja,
  $$f = a_0 + a_1 x_{k+1} + \cdots + a_{d-1} x_{k+1}^{d-1} + a_d x_{k+1}^d,$$
  no qual $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_k]$. Considere $b = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{A}^k_{\mathbb{K}}$ e $f_b = f(b, x_{k+1}) = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i(b) x_{k+1}^i \in \mathbb{K}[x_{k+1}]$. Como $f(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{A}^{k+1}_{\mathbb{K}}$, então ao considerarmos $a = (a_1, \ldots, a_k, c)$ temos que $f_b(c) = 0$ para todo $c \in \mathbb{K}$, sendo f_b um polinômio tal que $\mathcal{Z}(f_b) = \mathbb{K}$ (com $\mathbb{K}$ infinito) segue que $f_b = 0$. Ou equivalentemente,
  $$a_i(b) = 0, \ \forall \ i \in \{0, \ldots, d\}.$$
  Agora, ao fazer variar $b \in \mathbb{A}^k_{\mathbb{K}}$, concluímos que
  $$a_i(b) = 0, \ \forall \ b \in \mathbb{A}^k_{\mathbb{K}} \overset{P(k)}{\Longrightarrow} a_i = 0 \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_k],$$
  para cada $i \in \{0, \ldots, d\}$. Portanto, $f = 0$.

Exemplo 1.16. Se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \ldots, \overline{p-1}\}$ com p primo, então (escrevemos x em lugar de $\overline{1}x$ para simplificar)
$$\mathcal{I}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}) = \left\langle x(x-\overline{1}) \cdots (x - \overline{p-1}) \right\rangle.$$

Considere $f \in \mathcal{I}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}})$. Neste caso, $f(\overline{a}) = \overline{0}$ para cada $a \in \{0, \ldots, p-1\}$. Logo
$$x - \overline{a} | f \overset{(*)}{\Longrightarrow} \prod_{a=0}^{p-1} (x - \overline{a}) | f \Longrightarrow f \in \left\langle \prod_{a=0}^{p-1} (x - \overline{a}) \right\rangle.$$

$(*)$ Sejam $a, b \in \{0, \ldots, p-1\}$. Então $x - \overline{a}$ e $x - \overline{b}$ são primos entre si, se $a \neq b$.[12]

Exercício 1.12. Seja $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \ldots, \overline{p-1}\}$ com p primo. Determine $\mathcal{I}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}})$.

Exercício 1.13. Verifique se o raciocínio empregado no Exercício 1.12, para determinar $\mathcal{I}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}})$ sendo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \ldots, \overline{p-1}\}$ com p primo, pode ser usado para determinar $\mathcal{I}(\mathbb{A}^m_{\mathbb{K}})$ para $m \geqslant 3$.

Exemplo 1.17. Se $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ então $\mathcal{I}(\{a\}) = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$.
Observe que $x_i - a_i \in \mathcal{I}(\{a\})$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Logo,
$$\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle \subseteq \mathcal{I}(\{a\}).$$

Para mostrarmos a outra inclusão, considere $f \in \mathcal{I}(\{a\})$. E vamos aplicar o algoritmo da divisão, do seguinte modo:

[12] Para relembrar Divisão Euclidiana de polinômios veja Proposição I.3.9, p. 26 em Garcia e Lequain (2013).

- Divida f por $x_n - a_n$. Logo existem $Q_n \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ e $R_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ tais que
$$f = Q_n \cdot (x_n - a_n) + R_n$$

- Divida R_n por $x_{n-1} - a_{n-1}$. Logo existem $Q_{n-1} \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ e $R_{n-1} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n-2}]$ tais que
$$R_n = Q_{n-1} \cdot (x_{n-1} - a_{n-1}) + R_{n-1}.$$
Logo, $f = Q_n \cdot (x_n - a_n) + Q_{n-1} \cdot (x_{n-1} - a_{n-1}) + R_{n-1}$.

- Ao continuarmos esse procedimento, concluímos que existem $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ e $R_1 \in \mathbb{K}$ tais que
$$f = Q_n \cdot (x_n - a_n) + Q_{n-1} \cdot (x_{n-1} - a_{n-1}) + \cdots + Q_n \cdot (x_1 - a_1) + R_1 \quad (1.4)$$
Segue de (1.4) que $f(a) = R_1$. Como $f(a) = 0$, concluímos que $R_1 = 0$. Portanto, $f \in \left\langle \{x_i - a_i\}_{i=1}^n \right\rangle$.

Proposição 1.5. *Sejam Y e X subconjuntos de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e $T \subseteq \mathbb{K}[\underline{x}]$. Verifica-se que*

(i) *$\mathcal{I}(Y)$ é um ideal radical.*[13]

(ii) *Se $X \subseteq Y$ então $\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{I}(X)$.*

(iii) *$\mathcal{I}(Y \cup X) = \mathcal{I}(Y) \cap \mathcal{I}(X)$.*

(iv) *$T \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(T))$.*

(v) *$\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) = \overline{Y}$.*

Demonstração. $\boxed{\text{(i)}}$ Deixamos a cargo do leitor.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Segue da definição de ideal associado.

$\boxed{\text{(iii)}}$ Como $Y, X \subseteq Y \cup X$. Segue de (ii) que $\mathcal{I}(Y \cup X) \subseteq \mathcal{I}(Y) \cap \mathcal{I}(X)$.
Para mostrar a outra inclusão considere $f \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ e note que

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{I}(Y) \cap \mathcal{I}(X) &\Longrightarrow f(a) = 0, \ \forall\, a \in Y \text{ e } f(a) = 0, \ \forall\, a \in X \\ &\Longrightarrow f(a) = 0, \ \forall\, a \in Y \cup X \\ &\Longrightarrow f \in \mathcal{I}(Y \cup X). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(iv)}}$ Deixamos a cargo do leitor.

$\boxed{\text{(v)}}$ Note que $Y \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y))$ e $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y))$ é um fechado de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Então $\overline{Y} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y))$ (visto que $\overline{Y}$ é a interseção de todos os fechados que contêm Y).

[13] Um ideal I no anel comutativo com unidade A é dito *radical* se $I = \sqrt{I}$.

A seguir mostraremos que $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) \subseteq \overline{Y}$. Seja $F = \mathcal{Z}(I) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ um fechado (qualquer) contendo Y. Logo,

$$Y \subseteq F = \mathcal{Z}(I) \overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) \subseteq \mathcal{I}(Y) \overset{\text{(iv)}}{\Longrightarrow} I \subseteq \mathcal{I}(Y) \Longrightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) \subseteq \mathcal{Z}(I) = F.$$

De onde concluímos que $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y))$ esta contido em todo fechado que contém Y (sendo $\overline{Y}$ um desses fechados), tem-se que $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) \subseteq \overline{Y}$. □

Exercício 1.14. Sejam A um anel comutativo com unidade, I, J e P ideais de A tais que $I \cap J \subseteq P$ e P é *primo*[14] Mostre que $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$.

Proposição 1.6. *Seja Y um subconjunto de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ não vazio. Então*

$$Y \text{ é irredutível} \Longleftrightarrow \mathcal{I}(Y) \text{ é um ideal primo.}$$

Demonstração. $\boxed{\Longrightarrow}$ Suponha por absurdo que $\mathcal{I}(Y)$ não é um ideal primo do anel $\mathbb{K}[\underline{x}]$. Logo existem $f, g \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ tais que

$$fg \in \mathcal{I}(Y),\ f \notin \mathcal{I}(Y) \ \text{ e } \ g \notin \mathcal{I}(Y). \tag{1.5}$$

Segue da primeira afirmação em (1.5) que $\{fg\} \subseteq \mathcal{I}(Y)$. Assim,

$$\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) \subseteq \mathcal{Z}(fg) = \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g) \overset{\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y))=\overline{Y}}{\Longrightarrow} Y \subseteq \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g).$$

Sendo $\mathcal{Z}(f) \cap Y$ e $\mathcal{Z}(g) \cap Y$ fechados em Y tais que

$$\begin{aligned} Y = \mathcal{Z}(f) \cap Y \cup \mathcal{Z}(g) \cap Y &\overset{Y\, irred.}{\Longrightarrow} Y = \mathcal{Z}(f) \cap Y \ \text{ ou } \ Y = \mathcal{Z}(g) \cap Y \\ &\Longrightarrow Y \subseteq \mathcal{Z}(f) \ \text{ ou } \ Y \subseteq \mathcal{Z}(g) \\ &\Longrightarrow f(a) = 0,\ \forall\, a \in Y \ \text{ ou } \ g(a) = 0,\ \forall\, a \in Y \\ &\Longrightarrow f \in \mathcal{I}(Y) \ \text{ ou } \ g \in \mathcal{I}(Y) \quad (Absurdo!) \end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sejam $F = F_1 \cap Y$ e $G = G_1 \cap Y$ fechados em Y tais que $Y = F \cup G$. Assim,

$$\begin{aligned} Y = (F_1 \cup G_1) \cap Y \quad &\Longrightarrow Y \subseteq F_1 \cup G_1 \\ &\Longrightarrow \mathcal{I}(F_1 \cup G_1) \subseteq \mathcal{I}(Y) \\ &\overset{Proposio\ 1.5}{\Longrightarrow} \mathcal{I}(F_1) \cap \mathcal{I}(G_1) \subseteq \mathcal{I}(Y) \\ &\overset{Exer. 1.14}{\Longrightarrow} \mathcal{I}(F_1) \subseteq \mathcal{I}(Y) \ \text{ ou } \ \mathcal{I}(G_1) \subseteq \mathcal{I}(Y) \\ &\Longrightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{I}(F_1)) \ \text{ ou } \ \mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{I}(G_1)) \\ &\Longrightarrow \overline{Y} \subseteq F_1 \ \text{ ou } \ \overline{Y} \subseteq G_1 \\ &\Longrightarrow Y \subseteq F_1 \ \text{ ou } \ Y \subseteq G_1 \\ &\overset{\cap Y}{\Longrightarrow} Y \subseteq F \ \text{ ou } \ Y \subseteq G \\ &\Longrightarrow Y = F \ \text{ ou } \ Y = G. \end{aligned}$$

Portanto, Y é um conjunto irredutível. □

[14] Dizemos que um ideal próprio P de A é um ideal *primo* se para todos $a, b \in A$ tais que $a \cdot b \in P$, então $a \in P$ ou $b \in P$.

Exercício 1.15. Considere $Y = \{(a, a^2, a^3) | a \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$. Determine $\mathcal{I}(Y)$ e verifique se Y é irredutível.

Exemplo 1.18. Se $\mathbb{K}$ for um corpo infinito, segue do Exemplo 1.15 que $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = \{0\}$ um ideal primo. Concluímos que $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é irredutível.

A seguir vamos estabelecer que todo conjunto algébrico afim pode ser exprimido como uma união finita de seus subconjuntos irredutíveis maximais (cf. Corolário 1.1). Entretanto, como já foi assinalado, vamos estabelecer esse resultado para a família dos espaços topológicos noetherianos, da qual os conjuntos algébricos fazem parte (cf. Exemplo 1.21).

Espaço topológico noetheriano

Seja X um espaço topológico. X é denominado *noetheriano* se, para toda cadeia descendente

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$$

formada por subconjuntos fechados $Y_i \subseteq X$, existe $r \geqslant 1$ natural tal que $Y_r = Y_{r+j}$ para todo j natural.

Exemplo 1.19. $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é um espaço topológico noetheriano.

Considere a cadeia descendente de fechados $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$, então

$$\mathcal{I}(Y_1) \subseteq \mathcal{I}(Y_2) \subseteq \cdots$$

é uma cadeia ascendente de ideais em $\mathbb{K}[\underline{x}]$. Sendo $\mathbb{K}[\underline{x}]$ um anel noetheriano, concluímos que existe $r \geqslant 1$ natural tal que

$$\mathcal{I}(Y_r) = \mathcal{I}(Y_{r+1}) = \cdots \stackrel{\mathcal{Z}}{\Longrightarrow} \overline{Y_r} = \overline{Y_{r+1}} = \cdots \stackrel{Y_i\ fech.}{\Longrightarrow} Y_r = Y_{r+1} = \cdots$$

Exemplo 1.20. Todo subconjunto fechado num espaço topológico noetheriano é também noetheriano (com a topologia induzida).

De fato, considere X um espaço topológico noetheriano e $Y \subseteq X$ um fechado. Se $Y_i \subseteq Y$ são fechados tais que

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots \supseteq Y_i \supseteq \cdots .$$

Então Y_i é fechado em X, para todo $i \geqslant 1$. Como X é noetheriano, existe $r \geqslant 1$ tal que $Y_r = Y_{r+j}$ para todo $j \geqslant 1$. Segue que a cadeia acima é estacionária. Portanto, Y é noetheriano.

Exemplo 1.21. Todo conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é um espaço topológico noetheriano (com a topologia induzida).

Exemplo 1.22. conjunto $\mathbb{R}$ com a topologia Euclidiana usual não é um espaço topológico noetheriano. Considere $Y_i = [i, +\infty)$ com $i \geqslant 1$ natural. Assim, $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$ é uma cadeia descendente de fechados em $\mathbb{R}$. Observe que não existe r natural tal que $[r, +\infty) = [r + 1, +\infty)$.

Exercício 1.16. Seja X um espaço topológico. Mostre que:

X é noetheriano $\Longleftrightarrow$ Toda família não vazia formada por subconjuntos fechados de X, possui *elemento minimal*.

Exercício 1.17. Se Y é um espaço topológico irredutível e $F_1, \ldots, F_m$ forem fechados em Y tais que $Y = F_1 \cup \cdots \cup F_m$, então $F_i = Y$ para algum $i = 1, \ldots, m$.

Proposição 1.7. *Se X é um espaço topológico noetheriano, então todo subconjunto fechado não vazio Y de X pode ser escrito como uma união finita*

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_k$$

onde cada Y_i é um subconjunto fechado irredutível de Y. Se colocarmos a condição $Y_i \not\subseteq Y_j$ para todo $i \neq j$, então $Y_1, \ldots, Y_k$ são unicamente determinados (a menos de reordenação). Neste caso, $Y_1, \ldots, Y_k$ são denominadas componentes irredutíveis *de Y.*

Demonstração. Considere

$$\Omega = \left\{ Y \overset{fech.}{\subseteq} X \;\middle|\; \begin{array}{c} Y \text{ não pode ser escrito como} \\ \text{uma união finita de subconjuntos} \\ \text{fechados irredutíveis de } Y \end{array} \right\}.$$

Suponha, por absurdo, que $\Omega \neq \emptyset$. Segue do Exercício 1.16 que Ω possui um elemento minimal, digamos Y_0.

Note que Y_0 não é irredutível.[15] Assim existem, Y_0^1 e Y_0^2 fechados próprios de Y_0 tais que $Y_0 = Y_0^1 \cup Y_0^2$. Agora, sendo Y_0 elemento minimal de Ω e Y_0^i fechado próprio de Y_0, concluímos que Y_0^1 e Y_0^2 não pertencem a Ω. Logo, cada um desses conjuntos pode ser escrito como uma união finita de fechados irredutíveis. Portanto, Y_0 pode ser escrito como uma união finita de fechados irredutíveis, o que é um absurdo.

A seguir, assuma que Y_i e Y_j' são fechados irredutíveis em Y tais que

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_r = Y_1' \cup Y_2' \cup \cdots \cup Y_s' \quad \text{com } Y_i \not\subseteq Y_j \text{ e } Y_i' \not\subseteq Y_j', \ \forall\, i \neq j. \tag{1.6}$$

Nosso objetivo é mostrar que $r = s$ e $Y_j' = Y_{\sigma(j)}$ para alguma permutação $\sigma \in S_r$. Faremos por indução em r, sendo

$P(r)$: Se Y é um fechado em X satisfazendo (1.6) então $s = r$ e existe $\sigma \in S_r$ tal que $Y_j' = Y_{\sigma(j)}$.

- $P(1)$: Neste caso ($r = 1$), Y é irredutível e $Y = Y_1' \cup Y_2' \cup \cdots \cup Y_s'$. A partir da irredutibilidade[16] de Y, concluímos que $Y_j' = Y$ para algum j. Se $s \geqslant 2$, tem-se que $Y_\ell' \subseteq Y = Y_j'$ para todo $\ell \neq j$, o que é absurdo. Logo $s = 1$ e escolhemos $\sigma = \mathrm{id}$.

[15] Do contrário $Y_0 = Y_0 \cup \emptyset$ seria escrito como união de fechados irredutíveis em Y_0.

[16] cf. Exercício 1.17.

- Assuma $P(k)$ verdadeira.
- Vamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira.

  Neste caso,

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_{k+1} = Y_1' \cup Y_2' \cup \cdots \cup Y_s' \quad \text{com } Y_i \not\subseteq Y_j \text{ e } Y_i' \not\subseteq Y_j' \ \forall\, i \neq j.$$

Observe que Y_{k+1} é um fechado irredutível contido na união $\bigcup_{j=1}^{s} Y_j'$. Assim,

$$Y_{k+1} = (Y_{k+1} \cap Y_1') \cup \cdots \cup (Y_{k+1} \cap Y_s') \underset{irred.}{\overset{Y_{k+1}}{\Longrightarrow}} Y_{k+1} = Y_{k+1} \cap Y_j' \text{ para algum } j \Longrightarrow Y_{k+1} \subseteq Y_j'$$

Podemos usar o mesmo raciocínio, ao considerar $Y_j' \subseteq Y_1 \cup \cdots \cup Y_{k+1}$, e concluirmos que existe $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ tal que $Y_j' \subseteq Y_i$. Logo, $Y_{k+1} \subseteq Y_j' \subseteq Y_i$, que implica em $i = k+1$ e $Y_j' = Y_{k+1}$. Portanto,

$$Y - Y_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k} (Y_i - Y_{k+1}) = \bigcup_{\ell \neq j} (Y_\ell' - Y_j') \tag{1.7}$$

Ao tomarmos o fecho em (1.7), obtemos[17]

$$\overline{Y - Y_{k+1}} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{(Y_i - Y_{k+1})} = \bigcup_{\ell \neq j} \overline{(Y_\ell' - Y_j')}.$$

Observe que $Y_i - Y_{k+1}$ e $Y_\ell' - Y_j'$ são abertos não vazios dos conjuntos irredutíveis Y_i e Y_ℓ', respectivamente. Logo esses abertos são densos, e portanto o fechado $Z = \overline{Y - Y_{k+1}}$ é igual a

$$Z = \bigcup_{i=1}^{k} Y_i = \bigcup_{\ell \neq j} Y_\ell'.$$

Como Z é um fechado satisfazendo $P(k)$, segue da hipótese de indução que $k = s - 1$, logo

$$Z = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k = Y_{i_1}' \cup \cdots \cup Y_{i_k}'$$

[17] Seja X um espaço topológico. Considere A e B subconjuntos de X. Então $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

e existe $\sigma \in S_k$ tal que $Y'_{i_t} = Y_{\sigma(t)}$. Portanto, $s = k + 1$ e

$$Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k \cup Y_{k+1} = Y'_{i_1} \cup \cdots \cup Y'_{i_k} \cup Y'_{i_{k+1}} \quad i_{k+1} := j \neq i_t \ \forall\, t \in \{1, \ldots, k\}.$$

Neste caso, considere $\tau \in S_{k+1}$ dada por $\tau(n) = \sigma(n)$ se, $n \neq k + 1$ e $\tau(k + 1) = k + 1$.

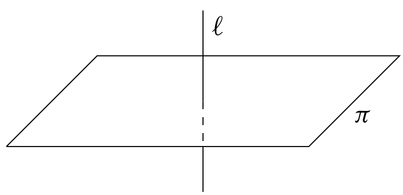
$\square$

Corolário 1.1. *Todo conjunto algébrico Y em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ pode ser escrito de maneira única (a menos de ordem) como uma união de variedades afins $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$ com $Y_i \not\subseteq Y_j$, para todo $i \neq j$. As variedades afins Y_i são as* componentes irredutíveis *de Y.*

Exemplo 1.23. O conjunto algébrico $Y = \mathcal{Z}(xy) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (ilustrado no Exemplo 1.11) tem exatamente duas componentes irredutíveis, a saber: $\mathcal{Z}(x)$ e $\mathcal{Z}(y)$.

Exemplo 1.24. Se Y é o subconjunto finito de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ dado por $Y = \{p_1, \ldots, p_k\}$. Então $\{p_i\}$ são as componentes irredutíveis de $Y = \{p_1\} \cup \cdots \cup \{p_k\}$.

Exemplo 1.25. O conjunto algébrico $Y = \mathcal{Z}(zx, zy) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tem duas componentes irredutíveis. O plano $\pi = \mathcal{Z}(z)$ e a reta $\ell = \mathcal{Z}(x, y)$



1.1.2 Teorema dos Zeros de Hilbert

Sabemos que para qualquer subconjunto $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ podemos definir o ideal $\mathcal{I}(Y)$, ideal associado a Y (veja 1.2.1). Isso nos permite definir a seguinte função:

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \text{Conjuntos algébricos em } \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \right\} & \xrightarrow{\mathcal{I}} & \left\{ \text{Ideais em } \mathbb{K}[\underline{x}] \right\} \\ Y & \longmapsto & \mathcal{I}(Y) \end{array}$$

Exercício 1.18. Considere a função $\mathcal{I}$ definida acima.

(a) Mostre que $\mathcal{I}$ é injetora e não é sobrejetora.

(b) A restrição da função $\mathcal{I}$ as variedades afins tem por imagem $\operatorname{Spec}(\mathbb{K}[\underline{x}])$?[18]

[18] Se A for um anel comutativo com unidade então $\operatorname{Spec}(A)$ denotá o conjunto formado pelos ideais primos do anel A.

A seguir vamos explorar, se

$$\begin{array}{ccc} \{\text{ Variedades em } \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}\} & \xrightarrow{\mathcal{I}} & \{\text{ Ideais primos em } \mathbb{K}[\underline{x}]\} = \operatorname{Spec}(\mathbb{K}[\underline{x}]) \\ Y & \longmapsto & \mathcal{I}(Y) \end{array}$$

é uma *bijeção*. Vamos começar com a seguinte pergunta:

É possível estabelecer quais são as variedades afins em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ cujo ideal associado é maximal[19] ?

De fato, o item (ii) da Proposição 1.5 nos permite concluir que os conjuntos unitários devem se corresponder com ideais maximais, conforme mostramos no próximo lema.

Lema 1.2. *Considere $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e $\mathfrak{m}_a = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle \subset \mathbb{K}[\underline{x}]$. Então $\mathfrak{m}_a = \mathcal{I}(\{a\})$ é um ideal maximal do anel $\mathbb{K}[\underline{x}]$.*

Demonstração. Defina $\varphi : \mathbb{K}[\underline{x}] \longrightarrow \mathbb{K}$ por $f \longmapsto f(a)$. Observe que φ é um homomorfismo de anéis sobrejetor tal que $\ker(\varphi) = \mathcal{I}(\{a\})$. Assim, segue do Teorema dos isomorfismos que $\mathcal{I}(\{a\})$ é um ideal maximal do anel $\mathbb{K}[\underline{x}]$. Além disso, mostramos no Exemplo 1.17 que $\mathcal{I}(\{a\}) = \mathfrak{m}_a$. □

Pergunta

Se $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal de $\mathbb{K}[\underline{x}]$, existe $a \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ tal que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_a$?

Não! Considere o ideal maximal $\mathfrak{m} = \langle x^2 + 1 \rangle$ em $\mathbb{R}[x]$. Suponha que existe $a \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ tal que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_a$. Logo,

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{m}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{m}_a) \Longrightarrow \emptyset = \{a\}, \quad \text{o que é absurdo.}$$

Lema 1.3 (Lema de Zariski)**.** Seja k um subcorpo do corpo K. Se K for uma k-álgebra finitamente gerada[20], então K é uma extensão algébrica[21] de k. Em particular, se k for algebricamente fechado concluímos que $k = $ K.

Demonstração. Confira o artigo "A simple proof of Zariski's Lemma" de Alborz Azarang (2017). □

---

[19]Um ideal próprio $\mathfrak{m}$ de um anel comutativo com unidade A é dito maximal se: Para todo ideal $J \subseteq A$ tal que $\mathfrak{m} \subseteq J$ tem-se que $J = \mathfrak{m}$ ou $J = A$.

[20]Seja k um subcorpo de K. $\mathbb{K}$ é uma *k-álgebra finitamente gerada* se existem $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ em K tais que $\varphi : k[x_1, \ldots, x_m] \longrightarrow$ K dado por $p \mapsto p(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ é um homomorfismo de anéis sobrejetor. Ou seja, todo elemento $\xi \in \mathbb{K}$ admite uma representação "polinomial", do tipo $\xi = \sum a_I \alpha_1^{i_1} \cdots \alpha_m^{i_m}$ com $a_I \in k$.

[21]$k \hookrightarrow$ K é uma *extensão algébrica* se, $\forall\, a \in$ K, $\exists\, p \neq 0$ em $k[x]$ tal que $p(a) = 0$.

Proposição 1.8. $\mathbb{K}$ *é algebricamente fechado*[22] *se, e somente se,*

$$\mathrm{Max}(\mathbb{K}[\underline{x}])^{23} = \Big\{\mathcal{I}(\{a\})|a \in \mathbb{K}^n\Big\}.$$

Demonstração. $\boxed{\Longleftarrow}$ Considere $f \in \mathbb{K}[x_1]$ de grau maior ou igual a 1. Logo f não é invertível em $\mathbb{K}[x_1]$ (nem em $\mathbb{K}[\underline{x}]$). Assim, existe $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathbb{K}[\underline{x}])$ contendo f. Segue da hipótese, que $\mathfrak{m} = \mathcal{I}(\{a\})$ para algum $a \in \mathbb{K}^n$. Assim, $f(a) = 0$ sendo que $f(a) = f(a_1) = 0$ com $a_1 \in \mathbb{K}$ $(a = (a_1, \ldots, a_n))$. Ou seja, f possui raiz em $\mathbb{K}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Vamos começar fazendo a prova no caso $n = 1$ (motivados pela simplicidade desse caso).

- $n = 1$. Considere $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathbb{K}[x_1])$. Sendo $\mathbb{K}[x_1]$ um D.I.P temos que $\mathfrak{m} = \langle f\rangle$ com f irredutível (visto que $\mathfrak{m}$ é maximal). Agora, sendo $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado, conclui-se que $f = a(x_1 - a_1)$ para algum $a, a_1 \in \mathbb{K}$ com $a \neq 0$. Assim,
$$\mathfrak{m} = \langle f\rangle = \langle a(x_1 - a_1)\rangle = \langle x_1 - a_1\rangle = \mathcal{I}(\{a_1\}).$$

- $n \geqslant 2$. Neste caso, se $\mathfrak{m} \subset \mathbb{K}[\underline{x}]$ for maximal, considere $\mathrm{K} = \dfrac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\mathfrak{m}}$, $\mathrm{K}_1 = \Big\{\overline{\alpha} \in \mathrm{K}|\alpha \in \mathbb{K}\Big\}$ e $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ em K .

  Note que:

  (i) K_1 é um corpo algebricamente fechado.

  (ii) $\mathrm{K} = \mathrm{K}_1[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}]$ é uma K_1-álgebra finitamente gerada.

  Assim segue do Lema de Zariski (cf. Lema 1.3) que $\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}$. Logo para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $a_i \in \mathbb{K}$ tal que $\overline{x_i} = \overline{a_i}$. De onde concluímos que $x_i - a_i \in \mathfrak{m}$ para cada i. Assim, $\mathfrak{m}_a \subseteq \mathfrak{m}$. Na verdade são iguais (por conta de serem ideais maximais). Assim, segue do Lema 1 que $\mathfrak{m} = \mathcal{I}(\{a\})$.

□

Exercício 1.19. Mostre que $\mathrm{Max}(\mathbb{C}[x, y]) = \Big\{\langle x - a, y - b\rangle \,|(a, b) \in \mathbb{C}^2\Big\}$ sem usar o Lema de Zariski (nem a Proposição 1.8).

Teorema dos Zeros de Hilbert (caso afim)

Teorema 1.1. *Sejam* $\mathbb{K}$ *um corpo algebricamente fechado e* I *um ideal em* $\mathbb{K}[\underline{x}]$. *Então*
(i) $I = \langle 1\rangle$ *ou* $\mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$.

---

[22] Um corpo $\mathbb{K}$ diz-se *algebricamente fechado* se qualquer polinômio $f \in \mathbb{K}[x]$ de grau maior ou igual a 1, possui uma raiz em $\mathbb{K}$. Consequentemente, $f = a\prod(x - a_i)^{n_i}$ com $a, a_i \in \mathbb{K}$ com $a \neq 0$. Assim, todas as raízes de f estão no corpo $\mathbb{K}$.

[23] Usaremos a notação $\mathrm{Max}(A)$ para indicar o conjunto formado por todos os ideias maximais do anel A.

(ii) $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I}$.

Demonstração. $\boxed{\text{(i)}}$ Suponha que $I \neq \langle 1 \rangle$. Então existe $\mathfrak{m}$ ideal maximal de $\mathbb{K}[\underline{x}]$ contendo I. Como $\mathbb{K}$ é um corpo algebricamente fechado, segue da Proposição 1.8 que $\mathfrak{m} = \mathcal{I}(\{a\})$ para algum $a \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Assim,

$$I \subseteq \mathcal{I}(\{a\}) \Longrightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\{a\})) \subseteq \mathcal{Z}(I) \Longrightarrow \{a\} \subseteq \mathcal{Z}(I) \Longrightarrow \mathcal{Z}(I) \neq \emptyset.$$

$\boxed{\text{(ii)}}$ Sabemos que $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ é um ideal radical tal que $I \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ (veja a Proposição 1.5). Como radical preserva inclusões[24] temos que $\sqrt{I} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$.

A seguir vamos mostrar a outra inclusão. Considere $g \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ e assuma que $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$. Basta provar no caso em que $g \neq 0$. Neste caso, considere $F_1, \ldots, F_{k+1} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]$ dados por

$$F_i = f_i, \;\; i = 1, \ldots, k \quad \text{ e } \quad F_{k+1} = 1 - g x_{n+1}.$$

Seja $J = \langle F_1, \ldots, F_{k+1} \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$. Segue do item (i) (deste teorema) que $J = \langle 1 \rangle$ ou $\mathcal{Z}(J) \neq \emptyset$.

Suponha que $\mathcal{Z}(J) \neq \emptyset$, então existe $a = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}$ tal que

$$f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0, \;\; \forall \; i \in \{1, \ldots, k\}. \tag{1.8}$$

$$1 = g(a_1, \ldots, a_n) a_{n+1} \tag{1.9}$$

De (1.8) seque que $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{Z}(I)$. Agora, como $g \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ e $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{Z}(I)$, segue que $g(a_1, \ldots, a_n) = 0$. A partir de (1.9) chegamos num absurdo. Portanto, $J = \langle 1 \rangle$. Assim, podemos escolher $Q_1, \ldots, Q_{k+1} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ tais que

$$1 = Q_1 F_1 + \cdots + Q_{k+1} F_{k+1}. \tag{1.10}$$

Ao considerarmos o homomorfismo de anéis

$$\pi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}] \longrightarrow \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]}{\langle F_{k+1} \rangle} \text{ dado por } p \longmapsto \overline{p}.$$

Ao aplicarmos π em (1.10) obtemos

$$\overline{1} = \overline{Q_1} \cdot \overline{F_1} + \cdots + \overline{Q_k} \cdot \overline{F_k} \quad \text{em} \quad \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]}{\langle F_{k+1} \rangle}. \tag{1.11}$$

Agora, lembre que

$$\varphi : \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]}{\langle F_{k+1} \rangle} \longrightarrow \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_g$$

[24] Se I e J são ideais no anel comutativo com unidade A tais que $I \subseteq J$ então $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.

dado por $\overline{x_i} \longmapsto \dfrac{x_1}{1}$, $i = 1, \ldots, n$ e $\overline{x_{n+1}} \longmapsto \dfrac{1}{g}$, ou mais precisamente,

$$\overline{\sum_{j=0}^{d} A_j(\underline{x}) x_{n+1}^j} \stackrel{\varphi}{\longmapsto} \sum_{j=0}^{d} \frac{A_j(\underline{x})}{g^j} = \frac{\sum_{j=0}^{d} A_j(\underline{x}) g^{d-j}}{g^d}$$

é um isomorfismo de anéis. Ao aplicarmos φ em (1.11), obtemos

$$\frac{1}{1} = \frac{R_1}{g^{m_1}} \cdot \frac{f_1}{1} + \cdots + \frac{R_k}{g^{m_k}} \cdot \frac{f_k}{1} \quad \text{sendo } \varphi(\overline{Q_i}) = \frac{R_i}{g^{m_i}} \text{ com } R_i \in \mathbb{K}[\underline{x}]. \tag{1.12}$$

De (1.12) segue que

$$\frac{1}{1} = \frac{T_1 f_1 + \cdots + T_k f_k}{g^m} \quad \text{sendo } m = m_1 + \cdots + m_k \text{ e } T_i = R_i g^{m-m_i}.$$

De onde concluímos que $g^m = T_1 f_1 + \cdots + T_k f_k$, isto é, $g \in \langle f_1, \ldots, f_k \rangle = I$. □

Proposição 1.9. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado. Considere*

$$\mathcal{C}_{\text{Alg}} = \left\{ Y \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n | Y \textit{ é um conjunto algébrico} \right\},$$

$$\mathcal{I}^{\text{Rad}} = \left\{ I \subseteq \mathbb{K}[\underline{x}] | I \textit{ é um ideal radical} \right\}.$$

Então

(i) *A função $\mathcal{I} : \mathcal{C}_{\text{Alg}} \longrightarrow \mathcal{I}^{\text{Rad}}$ dada por $Y \longmapsto \mathcal{I}(Y)$ é uma bijeção, cuja inversa $\mathcal{Z} : \mathcal{I}^{\text{Rad}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\text{Alg}}$ é dada por $I \longmapsto \mathcal{Z}(I)$.*

(ii) *A função $\mathcal{I}$ induz uma bijeção entre variedades afins e* Spec($\mathbb{K}[\underline{x}]$).

(iii) *A função $\mathcal{I}$ induz uma bijeção entre $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ e* Max($\mathbb{K}[\underline{x}]$).

Demonstração. $\boxed{\text{(i)}}$ Vamos começar mostrando que $\mathcal{I}$ é injetora. Considere, $Y, X \in \mathcal{C}_{\text{Alg}}$ tais que $\mathcal{I}(Y) = \mathcal{I}(X)$. Neste caso,

$$\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X)) \stackrel{Proposio\ 1.5}{\Longrightarrow} \overline{Y} = \overline{X} \underset{alg.}{\stackrel{Y,X}{\Longrightarrow}} Y = X.$$

Agora, vamos mostrar que $\mathcal{I}$ é sobrejetora. Para isto, seja I um ideal radical do anel $\mathbb{K}[\underline{x}]$. Observe que $Y = \mathcal{Z}(I) \in \mathcal{C}_{\text{Alg}}$. Além disso, tem-se que $\mathcal{I}(Y) = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I}$ (a última igualdade segue do Teorema dos Zeros de Hilbert), sendo I ideal radical, conclui-se que $\mathcal{I}(Y) = I$.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Segue da Proposição 1.6.

$\boxed{\text{(iii)}}$ Tendo em consideração a Proposição 1.8, segue-se que $a \longmapsto \mathcal{I}(\{a\})$ define uma bijeção de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ e Max($\mathbb{K}[\underline{x}]$). □

Já observamos que os conjuntos algébricos afins com a topologia de Zariski fazem parte da família dos espaços topológicos noetherianos. Outro aSpecto interessante, é que podemos utilizar o conceito de dimensão de um espaço topológico para definirmos a dimensão de um conjunto algébrico afim. Entretanto, o fato de trabalharmos com ideais em anéis de polinômios nos permite também explorar a dimensão de Krull nos anéis de coordenadas que iremos associar aos conjuntos algébricos afins. Na Proposição 1.10 mostra-se que ambas abordagens de dimensão coincidem.

1.1.3 Dimensão de conjuntos algébricos afins

Vamos começar explorando a noção de dimensão em espaços topológicos. Logo a seguir, vamos introduzir a noção de dimensão de Krull para anéis comutativos com unidade.

Dimensão de um espaço topológico

Seja X um espaço topológico. Definimos a *dimensão* de X, que denotaremos por $\dim X$, da seguinte forma:

$$\dim X = \sup \left\{ m \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Existe uma cadeia ascendente } Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_m, \\ \text{sendo } Z_i \neq \emptyset \text{ fechado irredutível de } X \text{ para cada } i. \end{array} \right\}.$$

Observação 1.4. Sejam X um espaço topológico e $Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_m$ uma cadeia ascendente tais que Z_i é um subconjunto fechado, não vazio e irredutível de X para todo $i \in \{0, \ldots, m\}$.

(a) Diremos que a cadeia $Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_m$ tem *comprimento* m. Assim, $\dim X$ é o supremo dos comprimentos de tais cadeias.

(b) Se $\dim X = d$, então toda cadeia de comprimento d será denominada *cadeia maximal*. Caso contrário (i.e., $\dim X = \infty$), então para todo k natural existe um cadeia de comprimento k.

(c) Se $X \neq \emptyset$ e $a \in X$, então $Z_0 = \overline{\{a\}}$ é um subconjunto fechado, não vazio e irredutível de X. Logo $\dim X \geqslant 0$.

(d) Definimos $\dim X = -\infty$ se $X = \emptyset$.

Exemplo 1.26. Se Y é um subconjunto finito não vazio de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, então $\dim Y = 0$. Basta observar, que os conjuntos fechados irredutíveis não vazios de Y são os unitários $\{a\}$, com $a \in Y$. Assim, as únicas cadeias possíveis são da forma $Z_0 = \{a\}$ com $a \in Y$.

Exemplo 1.27. Se $\mathbb{K}$ é um corpo finito, então $\dim Y = 0$ para todo conjunto algébrico não vazio de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (cf. Exemplo 1.26).

Exemplo 1.28. Se $\mathbb{K}$ é um corpo infinito, então $\dim \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} = 1$. Como $\mathbb{K}$ é um corpo infinito, os fechados irredutíveis de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ são: $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ e $\{a\}$ com $a \in \mathbb{K}$ (cf. Exemplo 1.9). Assim, as cadeias que podemos formar são as seguintes:

- $Z_0 = \{a\}$ cadeia de comprimento 0;
- $Z_0 = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ cadeia de comprimento 0;
- $Z_0 = \{a\} \subset Z_1 = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ cadeia de comprimento 1.

Exemplo 1.29. $\dim \mathbb{R} = 0$ com a topologia euclidiana usual. Vamos mostrar que os únicos subconjuntos irredutíveis não vazios em $\mathbb{R}$ são os unitários.

Afirmação: $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ é irredutível $\Longleftrightarrow$ X é unitário.

Vamos analisar a cardinalidade de X.

- X finito: Assuma que $X = \{p_1, \ldots, p_k\}$. Se $k \geqslant 2$, então $X = \{p_1\} \cup \{p_2, \ldots, p_k\}$ é união de fechados[25] próprios, logo redutível.
- X infinito: Neste caso, existem $a, b, c \in X$ tais que $a < b < c$. Considere $F_1 = (-\infty, b]$ e $F_2 = [b, +\infty)$ fechados próprios em $\mathbb{R}$.

  Logo, $X = (X \cap F_1) \cup (X \cap F_2)$ sendo $X \cap F_i$ $i = 1, 2$ fechados próprios de X (visto que $a \in F_1 - F_2$ e $c \in F_2 - F_1$).

Exercício 1.20. Considere a topologia euclidiana usual em $Y \subseteq \mathbb{R}$, $Y \neq \emptyset$. Mostre que $\dim Y = 0$.

Exemplo 1.30. No conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ considere a topologia dada por $T = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{I_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ sendo $I_n = \{1, \ldots, n\}$ e $I_n^c = \mathbb{N} - I_n$. Observe que I_n é irredutível para cada n natural. Além disso, para cada k natural, podemos considerar a cadeia ascendente formada por fechados irredutíveis de $\mathbb{N}$, de comprimento k:

$$Z_0 = I_1 \subset Z_1 = I_2 \subset \cdots \subset Z_k = I_{k+1}.$$

Assim, $\dim \mathbb{N} = \infty$.

Lema 1.4. *Seja X um espaço topológico e $\{U_i\}_{i=1}^k$ uma cobertura aberta finita de X tal que $U_i \neq \emptyset$ para todo i. Então* $\dim Y = \max\{\dim U_i\}_{i=1}^k$.

Demonstração. A seguir vamos analisar os casos de dimensão infinita e finita, respectivamente.

Caso 1: $\max\{\dim U_i\}_{i=1}^k = \infty$.

[25] Note que os conjuntos unitários são fechados na topologia euclidiana usual e união finita de conjuntos fechados é um fechado.

Neste caso, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\dim U_i = \infty$. Assim, para todo n natural existe uma cadeia de comprimento n em U_i formada por fechados irredutíveis não vazios de U_i. Seja

$$Z_0 = U_i \cap Y_0 \subset Z_1 = U_i \cap Y_1 \subset \cdots \subset Z_n = U_i \cap Y_n \tag{1.13}$$

uma cadeia de comprimento n em U_i, sendo Y_i fechado em X e Z_i fechado irredutível de U_i não vazio, para cada $i \in \{0, \dots, n\}$.

Entretanto, segue da afirmação 2 (na demonstração do Corolário 1.3) que ao tomar fecho na cadeia (1.13) as inclusões continuam próprias (e fecho de irredutível é irredutível). Assim,

$$\overline{Z_0} \subset \overline{Z_1} \subset \cdots \subset \overline{Z_n} \subseteq \overline{U_i}$$

é uma cadeia de comprimento n de $\overline{U_i}$. Logo uma cadeia de comprimento n de X. Portanto, $\dim X = \infty$.

Caso 2: $\max\{\dim U_i\}_{i=1}^{k} = d < \infty$.

Neste caso, $\dim U_i \leqslant d$ para todo i (valendo a igualdade para pelo menos um índice). Seja i_0 tal que $\dim U_{i_0} = d$.

Considere $Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_m$ uma cadeia de comprimento m de X. Assim, cada Z_i é um fechado irredutível não vazio de X.

Lembre que $X = \bigcup_{i=1}^{k} U_i$, logo

$$Z_0 = \bigcup_{i=1}^{k} (U_i \cap Z_0) \overset{Z_0 \neq \emptyset}{\Longrightarrow} U_i \cap Z_0 \neq \emptyset \quad \text{para algum } i \in \{1, \dots, k\}.$$

Além disso, verifica-se que $Z_j \cap U_i \subset Z_{j+1} \cap U_i$ para todo $j \in \{0, \dots, m-1\}$.

Suponha, por absurdo, que existe $j \in \{0, \dots, m-1\}$ tal que $Z_j \cap U_i = Z_{j+1} \cap U_i$. Observe que para cada índice ℓ, Z_ℓ é um fechado irredutível não vazio e $Z_\ell \cap U_i$ é um aberto não vazio de Z_ℓ (tal aberto é denso), logo $\overline{Z_\ell \cap U_i} = Z_\ell$. Assim,

$$Z_j \cap U_i = Z_{j+1} \cap U_i \Longrightarrow \overline{Z_j \cap U_i} = \overline{Z_{j+1} \cap U_i} \Longrightarrow Z_j = Z_{j+1},$$

o que é um absurdo. Portanto,

$$Z_0 \cap U_i \subset Z_1 \cap U_i \subset \cdots \subset Z_m \cap U_i$$

é uma cadeia de comprimento m de U_i. Assim, $m \leqslant \dim U_i \leqslant d$.

Portanto, toda cadeia em Y tem comprimento no máximo d. Assim, $\dim Y \leqslant d$.

Lembre que $\dim U_{i_0} = d$ e $U_{i_0} \subseteq Y$, o que permite concluir que $\dim Y \geqslant d$. Assim, $\dim Y = d$. □

Dimensão de Krull em anéis comutativos com unidade

Seja A um anel comutativo com unidade 1 tal que $(1 \neq 0)$. A *dimensão de Krull* de A, denotada por $\dim_{Krull} A$, é definida da seguinte forma:

$$\dim_{Krull} A = \sup \Big\{ m \,|\, \text{existe uma cadeia } \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m,\ \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec}(A) \Big\}.$$

Observação 1.5. Seja A um anel comutativo com unidade e $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$ uma cadeia ascendente de ideais primos do anel A.

(a) Diremos que a cadeia $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$ tem *comprimento* m. Assim, $\dim_{Krull} A$ é o supremo dos comprimentos das cadeias ascendentes de ideais primos do anel A.

(b) Se $\dim_{Krull} A = d$ finita, então toda cadeia de comprimento d será denominada *cadeia maximal*. Caso contrário (i.e., $\dim_{Krull} A = \infty$), então para todo k natural existe um cadeia de comprimento k.

(c) Se $A \neq \{0\}$, então existe $\mathfrak{p}_0$ ideal maximal[26] (logo primo) de A. Portanto, $\dim_{Krull} A \geqslant 0$.

Definimos $\dim_{Krull} A = -\infty$ se $A = \{0\}$.

Exemplo 1.31. Se A é um corpo, então $\operatorname{Spec}(A) = \Big\{\{0\}\Big\}$. Assim, $\dim_{Krull} A = 0$.

Exemplo 1.32. $\dim_{Krull} \mathbb{Z} = 1$. Basta lembrar que:

$$\operatorname{Max}(\mathbb{Z}) = \Big\{ \langle p \rangle \,|\, p \text{ é primo} \Big\} \quad \text{e} \quad \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) = \Big\{\{0\}\Big\} \bigcup \operatorname{Max}(\mathbb{Z}).$$

Assim, as cadeias maximais são da forma: $\mathfrak{p}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{p}_1 = \langle p \rangle$.

Exercício 1.21. Mostre que $\dim_{Krull} A = 1$ se A for um D.I.P.. Em particular, $\dim_{Krull} k[x] = 1$ se, k é um corpo.

Exercício 1.22. Determine $\dim_{Krull} \mathbb{Z}_m$ se, $m \geqslant 2$.

Anel de coordenadas de um conjunto algébrico

Seja Y um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Definimos o *anel de coordenadas* de Y pelo anel quociente, $A(Y) := \dfrac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\mathcal{I}(Y)}$ sendo $\mathcal{I}(Y)$ o ideal associado a Y.

Exemplo 1.33. No caso de corpos infinitos, o anel de coordenadas de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é dado por

$$A(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = \frac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\mathcal{I}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})} = \frac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\langle 0 \rangle} \cong \mathbb{K}[\underline{x}].$$

Exercício 1.23. Seja $Y \neq \emptyset$ um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Mostre que Y é um variedade se, e somente se, $A(Y)$ é um domínio de integridade (D.I.).

[26] Pelo Lema de Zorn.

Exercício 1.24. Seja $Y = \{0, 1\} \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$. É possível definir operações em $\mathbb{R}^2$ de modo que $A(Y) \cong \mathbb{R}^2$?

$\boxed{\text{ATENÇÃO:}}$ De agora em diante, salvo expressa menção em contrário, $\mathbb{K}$ denotará um corpo algebricamente fechado e $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$.

Exercício 1.25. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Mostre que $\mathbb{K}$ é um corpo infinito.

Proposição 1.10. *Seja Y um conjunto algébrico não vazio em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Então*

$$\dim Y = \dim_{Krull} A(Y).$$

Demonstração. Temos duas possibilidades para $\dim Y$: finita e infinita.

- **Caso 1.** $\dim Y = d < \infty$.

  Neste caso, existe uma cadeia maximal

  $$Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_d \tag{1.14}$$

  formada por $d + 1$ subconjuntos fechados irredutíveis de Y.

  Aplicando $\mathcal{I}$ na cadeia (1.14), obtemos a cadeia de ideias primos de $\mathbb{K}[\underline{x}]$ (sendo as inclusões próprias preservadas[27])

  $$\mathcal{I}(Z_0) \supset \mathcal{I}(Z_1) \supset \cdots \supset \mathcal{I}(Z_d) \supseteq \mathcal{I}(Y) \tag{1.15}$$

  contendo $\mathcal{I}(Y)$ (visto que $Z_d \subseteq Y$).

  Agora a partir da correspondência entre $V(\mathcal{I}(Y))$ [28] e $\operatorname{Spec}(A(Y))$ [29], obtemos a cadeia e ideais primos

  $$\overline{\mathcal{I}(Z_0)} \supset \overline{\mathcal{I}(Z_1)} \supset \cdots \supset \overline{\mathcal{I}(Z_d)}$$

  de comprimento d em $A(Y)$. Portanto, $\dim_{Krull} A(Y) \geqslant d$.

  Agora, considere $\overline{\mathfrak{p}_0} \subset \overline{\mathfrak{p}_1} \subset \cdots \subset \overline{\mathfrak{p}_k}$ cadeia ascendente de comprimento k formada por ideais primos de $A(Y)$. Usando novamente a correspondência entre $V(\mathcal{I}(Y))$ e $\operatorname{Spec}(A(Y))$, obtemos a cadeia de ideais primos contendo $\mathcal{I}(Y)$

  $$\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_k \overset{\mathcal{Z}}{\Longrightarrow} Y \supseteq \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_0) \supset \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_1) \supset \cdots \supset \mathcal{Z}(\mathfrak{p}_k).$$

  Assim, obtemos uma cadeia de fechados irredutíveis não vazios de Y de comprimento k. Sendo $\dim Y = d$, segue-se que $k \leqslant d$. Portanto, $\dim_{Krull} A(Y) \leqslant d$.

[27]Se X_1 e X_2 são fechados irredutíveis em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, verifica-se que: $X_1 \subset X_2 \iff \mathcal{I}(X_1) \quad \mathcal{I}(X_2)$. De fato, se $X_1 \subset X_2$ então $\mathcal{I}(X_1) \supseteq \mathcal{I}(X_2)$. Suponha que $\mathcal{I}(X_1) = \mathcal{I}(X_2)$, logo $X_1 = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X_1)) = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(X_2)) = X_2$. A outra implicação fica de exercício.

[28]Se A é um anel comutativo com unidade e $T \subseteq A$, então $V(T) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid T \subseteq \mathfrak{p}\}$.

[29]Dada por $\mathfrak{p} \longmapsto \overline{\mathfrak{p}} = \{\overline{f} \in A(Y) | f \in \mathfrak{p}\}$, que preserva a ordem da inclusão e também a propriedade da inclusão ser própria.

- **Caso 2.** $\dim Y = \infty$.

  Neste caso, para todo $k \geqslant 0$ inteiro existe uma cadeia de comprimento k, digamos

  $$Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_k$$

  formada por subconjuntos fechados não vazios e irredutíveis de Y. Então ao aplicarmos $\mathcal{I}$, obtemos a cadeia de ideais primos em $\mathbb{K}[\underline{x}]$ contendo $\mathcal{I}(Y)$

  $$\mathcal{I}(Z_0) \supset \mathcal{I}(Z_1) \supset \cdots \supset \mathcal{I}(Z_k)$$

  que determina uma cadeia de ideais primos em $A(Y)$ de comprimento k. Logo $\dim_{Krull} A(Y) = \infty$.

$\square$

Corolário 1.2. $\dim \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = n$.

Demonstração. Segue da Proposição 1.10 que

$$\dim \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = \dim_{Krull} A(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = \dim_{Krull} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n].$$

Por outro lado, $\dim_{Krull} \mathbb{K}[\underline{x}] = n$.[30] $\square$

Corolário 1.3. *Seja Y um subconjunto não vazio de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Então $\dim Y$ é finita e menor ou igual que n.*

Demonstração. Vamos começar provando as seguintes afirmações.

Afirmação 1: Z é um subconjunto fechado de $Y \iff Z = \overline{Z} \cap Y$ sendo $\overline{Z}$ o fecho de Z em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Seja Z um subconjunto fechado de Y. Assim,

$$Z \subseteq \overline{Z} \ \text{ e } \ Z \subseteq Y \Longrightarrow Z \subseteq \overline{Z} \cap Y.$$

Agora, sendo Z fechado em Y, existe F fechado em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ tal que $Z = Y \cap F$. Desta forma,

$$Z \subseteq F \Longrightarrow \overline{Z} \subseteq F \overset{\cap Y}{\Longrightarrow} \overline{Z} \cap Y \subseteq F \cap Y = Z.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Segue da definição da topologia induzida.

Afirmação 2: Se Y_1 e Y_2 são fechados irredutíveis de Y tais que $Y_1 \subset Y_2$, então $\overline{Y_1}$ e $\overline{Y_2}$ são fechados irredutíveis de $\overline{Y}$ (cf. Exercício 1.10) tais que $\overline{Y_1} \subset \overline{Y_2}$. [31]

---

[30] Confira a demonstração de que $\dim_{Krull} \mathbb{K}[\underline{x}] = n$ sendo $\mathbb{K}$ um corpo em Coquand e Lombardi (2005).

[31] Pelo absurdo, suponha que $\overline{Y_1} = \overline{Y_2}$. Assim, $\overline{Y_1} \cap Y = \overline{Y_2} \cap Y \overset{Af.1}{\Longrightarrow} Y_1 = Y_2$, o que é absurdo.

Seja $Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_d \subseteq Y$ uma cadeia de fechados não vazios e irredutíveis em Y, de comprimento d. Ao tomar o fecho dessa cadeia, por conta da Afirmação 2, obtemos

$$\overline{Z_0} \subset \overline{Z_1} \subset \cdots \subset \overline{Z_d} \subseteq \overline{Y}$$

cadeia de fechados não vazios e irredutíveis em $\overline{Y}$, de comprimento d. Observe que esta é uma cadeia em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ também. Assim, $d \leqslant \dim \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = n$. Portanto, $\dim Y$ é finita e menor ou igual que n. □

Exercício 1.26. Sejam X e Y conjuntos algébricos não vazios em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ tais que $X \subseteq Y$ (resp. $X \subset Y$). Mostre que $\dim X \leqslant \dim Y$ (resp. $\dim X < \dim Y$).

Exercício 1.27. Dê um exemplo de conjuntos algébricos não vazios X e Y em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ tais que $\dim X = \dim Y$ e $X \subset Y$.

Exercício 1.28. Sejam W um conjunto algébrico e X uma variedade afim tal que $W \subseteq X$ e $\dim W = \dim X$. Então $W = X$.

Exercício 1.29. Seja Y um conjunto algébrico não vazio em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ tal que $Y_1, \ldots, Y_k$ são suas componentes irredutíveis. Mostre que $\dim Y = \max\{\dim Y_j \,|\, j = 1, \ldots, k\}$.

Dimensão no caso quase afim

No lema a seguir, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ denotá a altura[32] do ideal primo $\mathfrak{p}$. Esse lema também nos será muito útil quando fomos expor a demonstração do Teorema da dimensão das fibras (cf. Teorema 1.7).

Lema 1.5. *Seja k um corpo e B um domínio de integridade que é uma k-álgebra finitamente gerada[33]. Então*

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \dim_{Krull} \frac{B}{\mathfrak{p}} = \dim_{Krull} B, \quad \forall\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B).$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada no Cap. 5 do texto de H. Matsumura (1970) ou no Cap. 11 do texto de Atiyah e Macdonald (1969) (se k for algebricamente fechado).

Proposição 1.11. *Seja Y uma variedade quase afim. Então* $\dim Y = \dim \overline{Y}$.

---

[32] Sejam A um anel comutativo com unidade e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Definimos a *altura* de $\mathfrak{p}$, denotada por $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, da seguinte forma:

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \sup \left\{ m \,|\, \text{existe uma cadeia } \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p},\ \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(A) \right\}.$$

[33] Sejam A e B anéis comutativos com unidade. Dizemos que B é uma A-álgebra finitamente gerada se B é isomorfo a um quociente de $A[x_1, \ldots, x_n]$ para algum natural n.

Demonstração. Segue do Corolário 1.3 que $\dim Y$ e $\dim \overline{Y}$ são finitas. Assuma que $\dim Y = d$ e considere

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_d \subseteq Y \tag{1.16}$$

uma cadeia maximal de fechados irredutíveis e não vazios de Y.
Afirmação 1: Se $F \subseteq \overline{Y}$ é fechado e irredutível, então $F \cap Y$ é um fechado irredutível de Y.

Se $F \cap Y = \emptyset$ o resultado segue. Assuma que, $F \cap Y \neq \emptyset$.

Sendo Y uma variedade quase afim, existem U aberto em um determinado espaço afim $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, tal que $Y = U \cap \overline{Y}$ (cf. (e) na Observação 1.3).

Logo, $\overline{Y}$ é uma variedade afim em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e sendo F um fechado de $\overline{Y}$, concluímos que F é um fechado do espaço afim $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Assim, $F \cap Y$ é um fechado de Y.

Por outro lado, observe que $F \cap Y = F \cap U \cap \overline{Y} = U \cap F \cap \overline{Y} = U \cap F$. Sendo $U \cap F$ um aberto não vazio do conjunto fechado irredutível F, tem-se que

$$\overline{F \cap Y} = \overline{U \cap F} = F \Longrightarrow \overline{F \cap Y} \text{ é irredutível} \overset{Exerccio\ 1.10}{\Longrightarrow} F \cap Y \text{ é irredutível.}$$

Afirmação 2: Não existe $F \subseteq \overline{Y}$ fechado e irredutível tal que

$$\overline{Z_i} \subset F \subset \overline{Z_{i+1}} \quad \text{para algum } \ i \in \{0, \ldots, d-1\}.$$

Pelo absurdo, suponha que existe $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ e $F \subseteq \overline{Y}$ fechado e irredutível tal que $\overline{Z_i} \subset F \subset \overline{Z_{i+1}}$. Observe que,

$$\overline{Z_i} \subset F \subset \overline{Z_{i+1}} \overset{\cap Y}{\Longrightarrow} \overline{Z_i} \cap Y \subseteq F \cap Y \subseteq \overline{Z_{i+1}} \cap Y \overset{Cor\ 1.3}{\Longrightarrow} Z_i \subseteq F \cap Y \subseteq Z_{i+1}.$$

Agora, sabendo que (1.16) é uma cadeia maximal (ou seja, não podemos aumentar[34] esta cadeia), concluímos que:

$$F \cap Y = Z_i \ \text{ ou } \ F \cap Y = Z_{i+1}$$

Ao tomar o fecho, chegamos em

$$\overline{F \cap Y} = \overline{Z_i} \ \text{ ou } \ \overline{F \cap Y} = \overline{Z_{i+1}} \overset{\overline{F \cap Y} = F}{\Longrightarrow} F = \overline{Z_i} \ \text{ ou } \ F = \overline{Z_{i+1}}$$

o que é um absurdo.

A partir da Afirmação 2, concluímos que ao tomar fecho na cadeia (1.16), obtemos a cadeia de fechados irredutíveis não vazia de $\overline{Y}$,

$$\overline{Z_0} \subset \overline{Z_1} \subset \cdots \subset \overline{Z_d} \subseteq \overline{Y}. \tag{1.17}$$

[34] Isto é, para todo $i \in \{0, \ldots, d\}$ e F fechado irredutível de Y tal que $Z_i \subseteq F \subseteq Z_{i+1}$ (sendo $Z_{d+1} = Y$) verifica-se que $F = Z_i$ ou $F = Z_{i+i}$.

Agora ao aplicarmos $\mathcal{I}$ em (1.17), obtemos a cadeia maximal de ideais primos

$$\mathcal{I}(\overline{Z_0}) \supset \mathcal{I}(\overline{Z_1}) \supset \cdots \supset \mathcal{I}(\overline{Z_d}) \supseteq \mathcal{I}(\overline{Y}). \tag{1.18}$$

Sendo o anel dos polinômios $\mathbb{K}[\underline{x}]$ um anel *catenário*,[35] segue de (1.18) que a altura do ideal $\mathcal{I}(\overline{Z_0})$ é igual a d, ou seja, $\operatorname{ht}(\mathcal{I}(\overline{Z_0})) = d$ e que $\mathcal{I}(\overline{Z_0})$ é um ideal maximal de $\mathbb{K}[\underline{x}]$ (visto que a cadeia em (1.18) é maximal), contendo o ideal $\mathcal{I}(\overline{Y})$.

A seguir tenha em mente o Lema 1.5 e considere $B = A(\overline{Y})$ o anel de coordenadas da variedade $\overline{Y}$. Assim,

- B é um domínio de integridade.
- $A(\overline{Y})$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerada.

  Visto que existem $\alpha_1 = \overline{x_1}, \ldots, \alpha_n = \overline{x_n}$ em $A(\overline{Y})$ tais que

  $$\varphi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow A(\overline{Y}) \;\text{ dado por }\; p \longmapsto p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

  é um homomorfismo de anéis sobrejetor.
- A partir da correspondência entre $V(\mathcal{I}(\overline{Y}))$ e $\operatorname{Spec}(A(\overline{Y}))$, obtemos de (1.18) a cadeia e ideais primos

  $$\mathfrak{q}_0 \supset \mathfrak{q}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{q}_d \quad \text{ sendo } \mathfrak{q}_j = \overline{\mathcal{I}(\overline{Z_j})} \in \operatorname{Spec}(A(\overline{Y})),\; j = 0, \ldots, d.$$

  Considere $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_0 = \overline{\mathcal{I}(\overline{Z_0})} \in \operatorname{Max}(A(\overline{Y}))$. Logo $\dim\limits_{Krull} \dfrac{B}{\mathfrak{p}} = 0$ (pois $\dfrac{B}{\mathfrak{p}}$ é um corpo) e $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = d$ (visto que a cadeia acima é maximal e $A(\overline{Y})$ é catenário).

Portanto, segue do Lema 1.5 que $\dim\limits_{Krull} A(\overline{Y}) = \dim\limits_{Krull} B = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = d$. Entretanto, por conta da Proposição 1.10 temos que $\dim \overline{Y} = \dim\limits_{Krull} A(\overline{Y})$. Assim, $d = \dim Y = \dim \overline{Y}$. □

Exercício 1.30. Considere $Y = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | b < 0\} \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

(a) Mostre que Y é um conjunto irredutível.

(b) Y é uma variedade quase afim?

(c) Calcule $\dim \overline{Y}$.

Proposição 1.12. *Seja $Y \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ uma variedade afim. Verifica-se que:*

$$\dim Y = n - 1 \iff \exists\, f \in \mathbb{K}[\underline{x}] \textit{ irredutível tal que } Y = \mathcal{Z}(f).$$

[35]Seja A um anel comutativo com unidade. A é dito *catenário* se, para quaisquer $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$ tais que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, verifica-se que quaisquer duas cadeias maximais de ideais primos entre $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$ possuem o *mesmo comprimento*. Por exemplo toda k-álgebra finitamente gerada (sendo k corpo) é um anel catenário (veja o Teorema 2.1.12 em Cohen–Macaulay rings, Bruns e Herzog (1993)).

Demonstração. $\boxed{\Longrightarrow}$ Segue da Proposição 1.10 que $\dim_{Krull} A(Y) = \dim Y$. Assim, temos $\dim_{Krull} A(Y) = n - 1$. Além disso, sendo Y uma variedade afim, segue que $\mathcal{I}(Y) \in \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[\underline{x}])$. Assim, a partir do Lema 1.5 (fazendo $B = \mathbb{K}[\underline{x}]$ e $\mathfrak{p} = \mathcal{I}(Y)$), concluímos que

$$\mathrm{ht}(\mathcal{I}(Y)) + \dim_{Krull} A(Y) = \dim_{Krull} \mathbb{K}[\underline{x}] \Longrightarrow \mathrm{ht}(\mathcal{I}(Y)) + n - 1 = n \Longrightarrow \mathrm{ht}(\mathcal{I}(Y)) = 1.$$

Note que $\mathcal{I}(Y) \neq \{0\}$ (do contrário teríamos que $Y = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \Longrightarrow \dim Y = n$.) Assim, podemos escolher $f \in \mathcal{I}(Y)$ não constante. De fato, como $\mathcal{I}(Y)$ é primo podemos escolher f irredutível[36]. Assim, podemos formar a cadeia de ideias primos

$$\mathfrak{p}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{p}_1 = \langle f \rangle \subseteq \mathcal{I}(Y).$$

Observe que, se a última inclusão (acima) não for uma igualdade, então $\mathrm{ht}(\mathcal{I}(Y)) \geqslant 2$ (o que é um absurdo, pois $\mathrm{ht}(\mathcal{I}(Y)) = 1$). Logo, $\mathcal{I}(Y) = \langle f \rangle$. Aplicando $\mathcal{Z}$ obtemos que $Y = \mathcal{Z}(f)$, com $f \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ irredutível.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Seja $Y = \mathcal{Z}(f)$ com $f \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ irredutível. Assim, Y é uma variedade afim e

$$\dim Y = \dim_{Krull} A(Y) = \dim_{Krull} \frac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\langle f \rangle}.$$

A partir do Lema 1.5, concluímos que

$$\mathrm{ht}(\langle f \rangle) + \dim Y = n \Longrightarrow \dim Y = n - \mathrm{ht}(\langle f \rangle).$$

Afirmação: $\mathrm{ht}(\langle f \rangle) = 1$ se, $f \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ é irredutível.

Precisamos mostrar que a cadeia de ideais primos

$$\mathfrak{p}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{p}_1 = \langle f \rangle$$

é maximal. Para isto, considere $\mathfrak{q}$ ideal primo não nulo e suponha que $\mathfrak{q} \subseteq \langle f \rangle$. Seja $g \in \mathfrak{q}$ irredutível, então $g \in \langle f \rangle$, logo $g = fh$ para algum $h \in \mathbb{K}[\underline{x}]$, sendo g e f irredutíveis, concluímos que h é invertível. Assim, $f \in \mathfrak{q}$. Portanto, $\mathfrak{q} = \langle f \rangle$. Portanto, $\mathrm{ht}(\langle f \rangle) = 1$. □

Exercício 1.31. Se $f \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ for um polinômio não constante, então mostre que $\mathcal{Z}(f) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é não vazio e tem dimensão $n - 1$ (lembre que $\mathbb{K}$ denota um corpo algebricamente fechado).

Exercício 1.32. Seja Y um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Se $\dim Y = n - 1$ então mostre que existe $f \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ irredutível tal que $\mathcal{Z}(f) \subseteq Y$.

O que denominamos de pontos, retas e planos fazem parte das assim denominadas variedades lineares, que vamos introduzir a seguir.

---

[36]Lembre que $\mathbb{K}[\underline{x}]$ é um D.F.U. Assim, $f \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ não invertível (isto é, $f \notin \mathbb{K}$) admite uma fatoração da forma $f = f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k}$ com f_i irredutível em $\mathbb{K}[\underline{x}]$.

Variedade Linear Afim

Seja
$$(\mathbb{K}[\underline{x}])_1 : \;= \Big\{a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n | a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\Big\}$$
o conjunto dos polinômios em $\mathbb{K}[\underline{x}]$ de grau no máximo 1 se não nulos.

Observe que $(\mathbb{K}[\underline{x}])_1$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n + 1$, sendo $\{1, x_1, \ldots, x_n\}$ a base canônica.

Seja Y um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Y é denominada *variedade linear* se $\mathcal{I}(Y)$ for gerado por polinômios que pertencem a $(\mathbb{K}[\underline{x}])_1$.

Exemplo 1.34. $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e $\emptyset$ são variedades lineares, pois $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = \{0\}$ e $\mathcal{I}(\emptyset) = \langle 1\rangle$.

Exemplo 1.35. Todo ponto[37] em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é uma variedade linear.

Considere $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, sabemos que $\mathcal{I}(\{a\}) = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\rangle$ é gerado por polinômios lineares. Assim, $\{a\}$ é uma variedade linear.

Exemplo 1.36. Seja $Y \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ conjunto algébrico. Y é uma variedade afim se, e somente se, Y é uma variedade linear. Sabemos que variedades afins em $\mathbb{A}^1$ são $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$ e os conjuntos unitários que são variedades lineares (cf. Exemplos 1.34 e 1.35). Deixamos a reciproca a cargo do leitor.

Exercício 1.33. Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer. É válida a afirmação:

Y é uma variedade linear em $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ se, e somente se, Y é uma variedade afim?

Observação 1.6. Seja Y um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ não vazio.

(a) $p \in (\mathbb{K}[\underline{x}])_1$ será denominado *linear* se, $p = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ com $a_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ou seja, o *grau total*[38] de p é igual a 1.

(b) Se Y é uma variedade linear então $\mathcal{I}(Y)$ é um ideal primo.[39]

(c) Sejam $f, g \in (\mathbb{K}[\underline{x}])_1$ lineares. Verifica-se que:

$\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g) \iff f$ e g são linearmente dependentes.

Se $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$, então $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(f)) = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(g))$. Assim, segue do teorema dos zeros de Hilbert (cf. Teorema 1.1) que $\sqrt{\langle f\rangle} = \sqrt{\langle g\rangle}$. Como $\langle f\rangle$ e $\langle g\rangle$ são ideais primos (cf. item (c)), concluímos que $\langle f\rangle = \langle g\rangle$. Logo,

$$f \in \langle g\rangle \Longrightarrow \exists\, h \in \mathbb{K}[\underline{x}], \text{ tal que } f = gh.$$

Por conta de f e g serem polinômios lineares, necessariamente $h \in \mathbb{K}$ e é não nulo. Portanto, f e g são linearmente dependentes.

---

[37]Neste contexto, usamos a expressão *ponto* para nos referir ao conjunto algébrico unitário, $\{a\} \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

[38]Lembremos que o monômio $\underline{x}^I = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ tem *grau total* $i_1 + \cdots + i_n$ e $\text{grau}(p) = \max\{\text{grau}(m) | m$ é um monômio que comparece em $p\}$.

[39]De fato, na Proposição 1.13 mostraremos que o anel de coordenadas de Y é um D.I..

(d) Se Y é uma variedade linear própria, então existe uma quantidade finita de polinômios lineares $f_1, \dots, f_k$, tais que $\{f_1, \dots, f_k\}$ é L.I. e $\mathcal{I}(Y) = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$.

De fato, se Y é uma variedade linear própria, então $\mathcal{I}(Y) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ sendo f_i linear para cada $i = 1, \dots, m$. Agora, se $\{f_i\}_{i=1}^m$ não for um conjunto L.I., segue que (a menos de reordenação nos índices) f_m é combinação linear dos polinômios $f_1, \dots, f_{m-1}$. De onde concluímos que, $\mathcal{I}(Y) = \langle f_1, \dots, f_{m-1} \rangle$. Como $\mathcal{I}(Y)$ admite uma quantidade finita de geradores, podemos repetir o procedimento até obtermos $\{f_1, \dots, f_k\}$ L.I. tal que $\mathcal{I}(Y) = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$. De fato, $k = \max\Big\{\#(C) | C \subseteq \{f_i\}_{i=1}^m$ e C é L.I.$\Big\}$.

Retas, planos e hiperplanos em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$

Seja Y um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Y é uma *reta, plano, hiperplano* se, Y é uma variedade linear tal que $\dim Y$ é igual a 1, 2, $n-1$, respectivamente. No Corolário 1.6 vamos mostrar que toda reta (respectivamente, plano) em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é determinada pelos zeros de exatamente $n-1$ (respectivamente, $n-2$) polinômios lineares L.I..

Exemplo 1.37. Seja Y um conjunto algébrico não vazio e próprio de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

$$Y \text{ é variedade linear} \Longleftrightarrow Y \text{ é um ponto ou uma reta.}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Seja Y é variedade linear não vazia contida propriamente em $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.
Assuma, que $\mathcal{I}(Y) = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ sendo $f_i \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ linear. Observe que

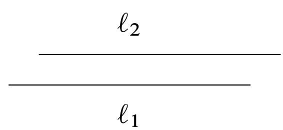
- $\mathcal{Z}(f_i)$ é uma reta em $\mathbb{R}^2$ para cada i.

  Basta observar que todo polinômio linear em $\mathbb{R}[x_1, x_2]$ é da forma $\alpha + \beta x_1 + \gamma x_2$ com α, β e γ reais tais que $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$. Sendo tal polinômio irredutível, segue que $\dim \mathcal{Z}(\alpha + \beta x_1 + \gamma x_2) = 1$, ou seja, define uma reta (veja Proposição 1.12).

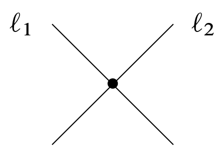
Portanto, se $k = 1$, concluímos que Y é uma reta.

- Se f_i e f_j são L.I, então $\mathcal{Z}(f_i) \cap \mathcal{Z}(f_j) = \emptyset$ ou $\mathcal{Z}(f_i) \cap \mathcal{Z}(f_j)$ é um ponto.

  O fato de f_i e f_j serem L.I garante que as retas $\ell_i = \mathcal{Z}(f_i)$, $i = 1, 2$ são distintas (veja o item (c) na Observação 1.6). Assim temos na imagem a seguir as seguintes possibilidades



retas paralelas



retas concorrentes

Assim, se $k \geqslant 2$ tem-se que

$$Y = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{Z}(f_i) = \begin{cases} \{a\}, & \text{se todas as retas } \mathcal{Z}(f_i) \text{ passam por } a, \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Proposição 1.13. *Sejam* $f_1, \ldots, f_k$ *polinômios lineares em* $\mathbb{K}[\underline{x}] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *tais que* $\{f_1, \ldots, f_k\}$ *é* L.I. *e* $1 \notin \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$*. Então* $k \leqslant n$ *e* $\dfrac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\langle f_1, \ldots, f_k \rangle} \cong \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]$*.*

Demonstração. Vamos começar mostrando que $k \leqslant n$.

Lembre que $(\mathbb{K}[\underline{x}])_1 = [1, x_1, \ldots, x_n]$ é um espaço vetorial de dimensão $n+1$. Sejam $g_i := f_i - f_i(0)$, para todo $i = 1, \ldots, k$ e observe que:

- $\{g_1, \ldots, g_k\}$ é L.I.

  De fato, considere $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ em $\mathbb{K}$ tais que $\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_k g_k = 0$. Assim,

  $$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(0) \Longrightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0, \text{ se } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(0) = 0.$$

  Caso contrário, concluímos que $1 \in \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$.[40]

- $\{g_1, \ldots, g_k\} \subset [x_1, \ldots, x_n]$. Logo $k \leqslant n$.

  Basta observar que $\{g_i\}_{i=1}^{k}$ é L.I. e, portanto[41], $\dim_{\mathbb{K}}[g_1, \ldots, g_k] = k$.

O isomorfismo será construído após a seguinte afirmação.

Afirmação 1: A menos de uma permutação nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ o ideal $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ admite um conjunto de geradores $h_1, h_2, \ldots, h_k$ da forma $h_i = x_i + p_i$, com $p_i \in (\mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n])_1$ para $i = 1, \ldots, k$.

Assuma que $f_i = a_{0,i} + a_{1,i} x_1 + \cdots + a_{n,i} x_n$.

- **Caso 1:** O menor determinado pelas colunas $2, 3, \ldots, k+1$ é não nulo.

  Ao colocarmos os coeficientes de f_i na linha de uma matriz de ordem $k \times (n+1)$, usando a base ordenada $\{1, x_1, \ldots, x_n\}$, obtemos

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{array} \quad \begin{pmatrix} a_{0,1} & a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{k,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{0,2} & a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{k,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{0,k} & a_{1,k} & a_{2,k} & \cdots & a_{k,k} & \cdots & a_{n,k} \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

[40] Ao dividir por $\beta = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(0)$, obtemos $\sum_{i=1}^{k} \beta^{-1} \alpha_i f_i = 1$.

[41] $\dim_{\mathbb{K}}$ indica a dimensão como espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$

Ao realizarmos operações linhas chegamos (a menos de uma reordenação nos índices) em

$$\begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \end{array} \qquad \begin{pmatrix} b_{0,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{k+2,1} & \cdots & b_{n,1} \\ b_{0,2} & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{k+2,2} & \cdots & b_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{0,k} & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{k+2,k} & \cdots & b_{n,k} \end{pmatrix}$$

- **Caso 2:** Sendo $\{f_1, \dots, f_k\}$ um conjunto L.I. a matriz em (1.19) tem posto k, logo existe uma submatriz de ordem $k \times k$ com determinante não nulo. Assim, podemos escolher $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ tais que $a_{n_i,i} \neq 0$ e

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_{n_1} & x_{n_2} & \cdots & x_{n_k} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{n_1,1} & a_{n_2,1} & \cdots & a_{n_k,1} \\ a_{n_1,2} & a_{n_2,2} & \cdots & a_{n_k,2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n_1,k} & a_{n_2,k} & \cdots & a_{n_k,k} \end{pmatrix} \end{array}$$

  a matriz acima tem posto k.

  A seguir fazemos uma permutação nas variáveis da seguinte forma: Seja $I_n = \{1, \dots, n\}$ e considere as seguintes partições de I_n.

$$\{1, \dots, k\} \cup \{k+1, \dots, n\} = \{n_1, \dots, n_k\} \cup C, \text{ com } C = I_n - \{n_1, \dots, n_k\}.$$

  Escolha $\sigma \in S_n$ uma permutação tal que $\sigma(n_i) = i$ para $i = 1, \dots, k$ e $\sigma(C) = \{k+1, \dots, n\}$.

  Assim, podemos definir o isomorfismo de anéis $\varphi : \mathbb{K}[\underline{x}] \longrightarrow \mathbb{K}[\underline{x}]$ dado por $f(x_1, \dots, x_n) \overset{\varphi}{\longmapsto} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

Considere $\mathrm{q}_i = \varphi(f_i)$ para $i = 1, \dots, k$. Assim

$$\varphi(\langle f_1, \dots, f_k \rangle) = \langle \mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_k \rangle, \ \{\mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_k\} \text{ é L.I. e } 1 \notin \langle \mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_k \rangle .$$

Observe que $\{\mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_k\}$ satisfaz as condições do caso 1. Além disso, φ induz o isomorfismo

$$\frac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\langle f_1, \dots, f_k \rangle} \cong \frac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\langle \mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_k \rangle}. \tag{1.20}$$

Afirmação 2: $\dfrac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\langle f_1, \dots, f_k \rangle} \cong \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$.

Segue de (1.20) que $\dfrac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\langle f_1, \dots, f_k \rangle} \cong \dfrac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\langle \mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_k \rangle}$ sendo $\{\mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_k\}$ um conjunto L.I. de polinômios lineares, tal que $1 \notin \langle \mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_k \rangle$. Além disso, temos que $\langle \mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_k \rangle =$

$\langle h_1, \ldots, h_k \rangle$, sendo $h_i = x_i + p_i$ com $p_i \in \mathbb{K}([x_{k+1}, \ldots, x_n])_1$ lineares para $i = 1, \ldots, k$.

Considere $\psi : \mathbb{K}[\underline{x}] \longrightarrow \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]$ o único homomorfismo de anéis tal que

$$x_i \longmapsto \begin{cases} -p_i, & \text{para } i = 1, \ldots, k \\ x_i, & \text{se } i > k \end{cases} \qquad \text{e} \qquad a \longmapsto a, \text{ para todo } a \in \mathbb{K}$$

Observe que ψ é sobrejetor e $\ker(\varphi) = \langle h_1, \ldots, h_k \rangle$. Portanto,

$$\frac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\langle h_1, \ldots, h_k \rangle} \cong \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n].$$

Como $\langle h_1, \ldots, h_k \rangle = \langle \mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_k \rangle$, conclui-se que $\dfrac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\langle f_1, \ldots, f_k \rangle} \cong \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]$. □

Corolário 1.4. *Seja Y uma variedade linear não vazia e própria de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ tal que $\mathcal{I}(Y) = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ sendo f_i linear e $\{f_1, \ldots, f_k\}$* L.I.. *Então* $\dim Y = n - k$.

Demonstração. Segue da Proposição 1.13 que $A(Y) \cong \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]$. Tendo em consideração que isomorfismos entre anéis preserva dimensão de Krull[42], concluímos que

$$\dim Y = \dim_{Krull} A(Y) = \dim_{Krull} \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n] = n - k.$$

□

Corolário 1.5. *Seja Y uma variedade linear não vazia e própria de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ tal que* $\dim Y = m$. *Então $0 \leqslant m < n$ e existem $n - m$ polinômios lineares $f_1, \ldots, f_{n-m}$ tal que $\{f_1, \ldots, f_{n-m}\}$ é* L.I. *e $\mathcal{I}(Y) = \langle f_1, \ldots, f_{n-m} \rangle$.*

Demonstração. Se $Y \neq \emptyset$ existe $p \in Y$, logo $\{p\} \subseteq Y$. Portanto, $\dim\{p\} = 0 \leqslant \dim Y = m$.

Por absurdo, suponha que $\dim Y = n = \dim \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Considere $\mathfrak{q} \in \mathrm{Max}(A(Y))$. Segue do Lema 1.5 que

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) + \dim A(Y) = \dim_{Krull} \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n] \Longrightarrow \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = 0$$

o que é absurdo. Assim, $\dim Y = m < n$.

Sabemos que existem polinômios lineares $f_1, \ldots, f_k$ tal que $\{f_1, \ldots, f_k\}$ é L.I. e $\mathcal{I}(Y) = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$. Segue do Corolário 1.4 que $\dim Y = n - k$. Logo, $k = n - m$. □

Em particular temos que:

Corolário 1.6. *Seja Λ uma variedade em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Então*

[42] Isomorfismos preservam cadeias maximais de primos

(i) *Λ é um ponto $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{I}(\Lambda)$ é gerado por n polinômios lineares* L.I..

(ii) *Λ é uma reta $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{I}(\Lambda)$ é gerado por $n-1$ polinômios lineares* L.I..

(iii) *Λ é um plano $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{I}(\Lambda)$ é gerado por $n-2$ polinômios lineares* L.I..

Exercício 1.34. rm Seja Y um conjunto algébrico não vazio e próprio de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Mostre que

Y é variedade linear $\Longleftrightarrow$ Y é um ponto ou uma reta ou um plano.

Exercício 1.35. Seja $Y = \{(a, a^2, a^3) | a \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{A}^3$.

(a) Determine $\dim Y$.

(b) Y é uma variedade linear?

(c) Para todo plano H de $\mathbb{A}^3$ determine $\#(Y \cap H)$.

(d) Dê um exemplo de uma reta ℓ em $\mathbb{A}^3$ tal que $\ell \cap Y = \emptyset$.

(e) Seja ℓ é uma reta em $\mathbb{A}^3$ tal que $\ell \cap Y \neq \emptyset$. Qual é a cardinalidade máxima possível do conjunto $\ell \cap Y$?

Exercício 1.36. Seja Y um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ tal que $\mathcal{I}(Y) = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$. Se $g_i = f_i - f_i(0)$ e $Z = \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_k)$, então mostre que

(a) $Y = Z$ ou $Y \cap Z = \emptyset$.

(b) Se Y é uma variedade linear não vazia e própria de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, então $\dim Y = \dim Z$.

Exercício 1.37. Sejam Y e Z variedades lineares não vazias em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ de mesma dimensão. Mostre que $A(Y) \cong A(Z)$.

1.1.4 Funções regulares

Sejam $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ um conjunto algébrico quase afim e $p \in Y$. Uma função $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ é dita *regular em* p, se existem $U_p \subseteq Y$ vizinhança aberta de p, $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tais que

$$g(u) \neq 0, \ \forall\, u \in U_p \quad \text{e} \quad \varphi(u) = \frac{f(u)}{g(u)}, \ \forall\, u \in U_p.$$

Neste caso, usamos a notação $\varphi_{|U_p} = \dfrac{f}{g}$ sempre que $\mathcal{Z}(g) \cap U_p = \emptyset$. Em essência as funções regulares são localmente definidas por um quociente polinomial (ou uma função racional).

A função $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ é dita *regular* se for regular em todos os pontos de seu domínio.

Exemplo 1.38. Fixe $k \in \mathbb{K}$. Se $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é um conjunto algébrico quase afim, então a função constante $\widehat{k} : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $y \longmapsto k$ é uma função regular.

De fato, para cada $p \in Y$, escolha a vizinhança $U_p = Y$ e os polinômios constantes $f = k$ e $g = 1$.

Exemplo 1.39. A projeção $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \xrightarrow{p_i} \mathbb{K}$ na i-ésima coordenada $(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto a_i$ é uma função regular para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Para cada $p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, basta escolher $U_p = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e $f = x_i, g = 1 \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Exemplo 1.40. Seja $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ um conjunto algébrico quase afim. A cada polinômio $h \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ podemos associar a função polinomial

$$\widehat{h} : Y \longrightarrow \mathbb{K} \;\text{ dada por }\; a \longmapsto h(a)$$

ou seja, $\widehat{h}$ é determinada pelo valor de h no ponto a e é uma função regular[43].

Exemplo 1.41. Seja $Y = \{(a, b) \in \mathbb{A}^2 | b^2 = a^3\}$ e $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(a, b) = \begin{cases} \dfrac{b}{a}, & \text{se } a \neq 0, \\ 0, & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

Verifica-se que Y é uma variedade afim e que φ é regular em $p \in Y$, somente se $p \neq (0, 0)$.
Afirmação 1: Y é uma variedade afim.

Observe que $Y = \mathcal{Z}(x^2 - y^3)$. A seguir vamos mostrar que $\mathcal{I}(Y)$ é um ideal primo. Defina $\psi : \mathbb{C}[x, y] \longrightarrow \mathbb{C}[t]$ o único homomorfismo de anéis tal que

$$\psi(a) = a, \;\; \forall\, a \in \mathbb{C}, \;\; \psi(x) = t^2 \;\text{ e }\; \psi(y) = t^3.$$

Observe que $\langle x^2 - y^3 \rangle \subseteq \ker(\psi)$. Considere, q $\in \ker(\psi)$. Ao aplicarmos o algoritmo da divisão em $A[x]$, sendo $A = \mathbb{C}[y]$, tem-se que existem $Q, R \in \mathbb{C}[x, y]$, tais que

$$\mathrm{q} = (x^2 - y^3)Q + R, \qquad \text{com } R = \alpha(y)x + \beta(y) \;\; \alpha,\, \beta \in \mathbb{C}[y].$$

Como q $\in \ker(\psi)$, a partir da igualdade acima, temos que $R(t^2, t^3) = 0$, ou seja,

$$\alpha(t^3)t^2 + \beta(t^3) = 0 \;\text{ em }\; \mathbb{C}[t]. \tag{1.21}$$

• Se α e $\beta \in \mathbb{C}[y]$ forem ambos não nulos, segue de (1.21) que

$$3\mathrm{grau}(\alpha) + 2 = 3\mathrm{grau}(\beta) \Longrightarrow 2 = 3(\mathrm{grau}(\beta) - \mathrm{grau}(\alpha)),$$

o que é absurdo.

[43] se $p \in Y$, escolha $U_p = Y$ e os polinômios $f = h$ e $g = 1 \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

• Se $\alpha = 0$ (resp. $\beta = 0$) então segue de (1.21) que $\beta = 0$ (resp. $\alpha = 0$). Assim, $R = 0$. O que implica em q $\in \langle x^2 - y^3 \rangle$. Portanto, segue do teorema dos isomorfismos que

$$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{\langle x^2 - y^3 \rangle} \cong \operatorname{Im}(\psi) \subset \mathbb{C}[t] \overset{\mathbb{C}[t]\, D.I.}{\Longrightarrow} \langle x^2 - y^3 \rangle \in \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x,y]).$$

Para concluir, note que

$$Y = \mathcal{Z}(x^2 - y^3) \Longrightarrow \mathcal{I}(Y) = \sqrt{\langle x^2 - y^3 \rangle} = \langle x^2 - y^3 \rangle \in \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x,y]).$$

Afirmação 2: φ é regular em p para todo $p \in Y - \{(0,0)\}$.

De fato, $U = Y - \{(0,0)\}$ é uma vizinhança aberta de p em Y. Escolha $f = y$ e $g = x \in \mathbb{C}[x,y]$ e observe que $\mathcal{Z}(g) \cap U = \emptyset$ (visto que $Z(g) \cap Y = \{(0,0)\}$). Além disso, para todo $u = (a,b) \in U$ tem-se que

$$\frac{f(u)}{g(u)} = \frac{b}{a} = \varphi(u).$$

Afirmação 3: φ não é regular em $(0,0)$.

Suponha, por absurdo, que φ é regular em $(0,0)$. Assim, existem $V \subseteq Y$ vizinhança aberta de $(0,0)$ e $f, g \in \mathbb{C}[x,y]$, tais que

$$\varphi_{|V} = \frac{f}{g} \quad \text{com } \mathcal{Z}(g) \cap V = \emptyset.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi(a,b) = \frac{f(a,b)}{g(a,b)}, \;\; \forall\, (a,b) \in V \quad & \Longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{f(a,b)}{g(a,b)}, \;\; \forall\, (a,b) \in V \\
& \Longrightarrow bg(a,b) = af(a,b), \;\; \forall\, (a,b) \in V \\
& \Longrightarrow V \subseteq \mathcal{Z}(yg - xf) \\
& \overset{Y \text{ irred.}}{\Longrightarrow} Y = \overline{V} \subseteq \mathcal{Z}(yg - xf) \\
& \Longrightarrow yg - xf \in \mathcal{I}(Y) = \langle x^2 - y^3 \rangle \\
& \Longrightarrow yg - xf = h \cdot (x^2 - y^3), \quad \text{para algum } h \\
& \overset{x=0}{\Longrightarrow} yg(0,y) = -h(0,y)y^3 \\
& \underset{D.I.}{\overset{\mathbb{C}[y]}{\Longrightarrow}} g(0,y) = -h(0,y)y^2 \\
& \Longrightarrow g(0,0) = 0 \\
& \Longrightarrow (0,0) \in \mathcal{Z}(g) \cap V \neq \emptyset,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Exercício 1.38. Considere a função $\varphi : \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \geqslant 0, \\ 1, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Determine os pontos $a \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ onde φ é regular.

Exemplo 1.42. Seja $Y = \{(a,b) \in \mathbb{A}^2 | b^2 = a^3\}$. A função $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(a,b) = \begin{cases} \dfrac{b}{a}, & \text{se } a \neq 0, \\ 0, & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

é contínua (ao considerarmos a topologia de Zariski em Y e $\mathbb{C}$).

De fato, observe que φ é bijetora.

- φ é injetora.

  Considere $(a,b), (a_1,b_1) \in Y$, tais que $\varphi(a,b) = \varphi(a_1,b_1)$.

  Se $\varphi(a,b) = \varphi(a_1,b_1) = 0$, então $a = a_1 = 0$. Assim, $b^2 = 0 = b_1^2$. Logo, $b = b_1 = 0$. Portanto, $(a,b) = (0,0) = (a_1,b_1)$.

  De contrário, $\varphi(a,b) = \varphi(a_1,b_1) \neq 0$, logo $\dfrac{b}{a} = \dfrac{b_1}{a_1}$. Assim,

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 \Longrightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{b_1^2}{a_1^2} \Longrightarrow \frac{a^3}{a^2} = \frac{a_1^3}{a_1^2} \Longrightarrow a = a_1 \overset{\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}}{\Longrightarrow} b = b_1.$$

- φ é sobrejetora.

  Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se que $p = (\lambda^2, \lambda^3) \in Y$ e $\varphi(p) = \lambda$.

Assim, se $a \in \mathbb{C}$ temos que $\varphi^{-1}(\{a\}) = \{(a^2, a^3)\}$ que é um fechado em Y (visto que $\varphi^{-1}(\{a\}) = Y \cap \mathcal{Z}(x - a^2, y - a^3))$. Assim, para todo fechado F de $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ tem-se que $\varphi^{-1}(F)$ é fechado em Y. Portanto, φ é contínua[44].

O próximo lema irá nos auxiliar na demonstração de que toda função regular é contínua.

Lema 1.6. *Seja X um espaço topológico e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ uma cobertura aberta de X. Considere Y um subconjunto de X. Verifica-se que*

Y é fechado em $X \Longleftrightarrow Y \cap U_\alpha \subseteq U_\alpha$ é fechado em U_α para todo $\alpha \in \mathcal{J}$.

[44] φ é contínua $\Longleftrightarrow \varphi^{-1}(F) \overset{fech.}{\subseteq} Y$ para todo $F \overset{fech.}{\subseteq} \mathbb{K} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$.

Demonstração. $\boxed{\Longrightarrow}$ Se Y é um fechado de X então $Y \cap U_\alpha$ é um fechado em U_α para todo $\alpha \in \mathcal{J}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sabemos que $Y \cap U_\alpha$ é um fechado em U_α para todo $\alpha \in \mathcal{J}$. Assim, seu complementar em U_α, a saber, $U_\alpha - Y \cap U_\alpha = U_\alpha \cap (Y \cap U_\alpha)^c = U_\alpha \cap Y^c$ [45] é um aberto de U_α. Logo, $U_\alpha \cap Y^c$ é um aberto em X para todo $\alpha \in \mathcal{J}$ (visto que U_α é aberto de X).

Para concluir, lembre que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ uma cobertura aberta de X. Assim,

$$Y^c = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} \underbrace{(U_\alpha \cap Y^c)}_{aberto\, em\, X} \Longrightarrow Y^c \quad \text{é aberto em } X \Longrightarrow Y \quad \text{é fechado em } X.$$

□

Proposição 1.14. *Seja $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ um conjunto algébrico quase afim e $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ uma função regular. Então φ é uma função contínua (ao considerarmos a topologia de Zariski em Y e em $\mathbb{K} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$).*

Demonstração. Note que:

- $\varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $\varphi^{-1}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}) = Y$ são fechados em Y.
- Se F é um fechado não trivial de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, então $F = \{p_1, \ldots, p_k\}$. E neste caso,

$$\varphi^{-1}(F) = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi^{-1}(\{p_i\}).$$

Assim, é suficiente provar que $\varphi^{-1}(\{p\})$ é um fechado de Y para todo $p \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$.

Como φ é regular em cada ponto $a \in Y$, existem $U_a \subseteq Y$ aberto contendo a e $f_a, g_a \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tais que

$$\varphi_{|U_a} = \frac{f_a}{g_a} \quad \text{com } \mathcal{Z}(g_a) \cap U_a = \emptyset. \tag{1.22}$$

Assim, $Y = \bigcup_{a \in Y} U_a$. Observe que para cada $\lambda \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ e $a \in Y$ tem-se que

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(\{\lambda\}) \cap U_a &= \Big\{b \in U_a | \varphi(b) = \lambda\Big\} \\
&\overset{(1.22)}{=} \left\{b \in U_a \,\middle|\, \frac{f_a(b)}{g_a(b)} = \lambda\right\} \\
&= \{b \in U_a | f_a(b) - \lambda g_a(b) = 0\} \\
&= U_a \cap \mathcal{Z}(f_a - \lambda g_a) \quad \text{é fechado em } U_a.
\end{aligned}$$

Portanto, segue do Lema 1.6 que $\varphi^{-1}(\{\lambda\})$ é fechado em Y. Logo φ é uma função contínua.

□

[45] $()^c$ indica o complementar em X.

Assim, em consideração ao Exemplo 1.39, concluímos que **continuidade não implica em regularidade** de uma dada função. Ou seja, a recíproca da Proposição 1.14 não é válida.

A $\mathbb{K}$-álgebra das funções regulares

Seja $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ um conjunto algébrico quase afim. Defina

$$\mathcal{O}(X) := \Big\{\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K} | \varphi \text{ é regular}\Big\}.$$

Proposição 1.15. *Com as notações acima. Verifica-se que*

(i) *Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ a função $\widehat{\lambda} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $x \longmapsto \lambda$ é uma função regular.*

(ii) *$\mathcal{O}(X)$ com as operações usuais de adição e multiplicação de funções com valores no corpo $\mathbb{K}$, é um anel comutativo com unidade $\widehat{1}$.*

(iii) *A função de $\mathbb{K}$ em $\mathcal{O}(X)$ dada por $a \longmapsto \widehat{a}$ é um homomorfismo de anéis, que torna $\mathcal{O}(X)$ uma $\mathbb{K}$-álgebra.*

Demonstração. Deixamos a demostração a cargo do leitor. □

O anel $\mathcal{O}(X)$ será denominado $\mathbb{K}-$*álgebra das funções regulares sobre X*.

Lema 1.7. *Sejam X uma variedade afim em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e φ, $\psi \in \mathcal{O}(X)$ tais que $\varphi_{|U} = \psi_{|U}$ para algum aberto não vazio U de X. Então $\varphi = \psi$.*

Demonstração. Observe que o conjunto $Y = \{x \in X | \varphi(x) = \psi(x)\}$ é um fechado em X, visto que $\varphi - \psi \in \mathcal{O}(X)$, logo $\varphi - \psi$ é uma função contínua. Portanto, $(\varphi - \psi)^{-1}(\{0\}) = Y$ é um fechado em X.

Agora, segue da hipótese que $U \subseteq Y \subseteq X$. Sendo, X uma variedade e U aberto não vazio de X, concluímos ao tomar fecho que

$$X = \overline{U} \subseteq Y \subseteq X \Longrightarrow Y = X \Longleftrightarrow \varphi = \psi.$$

□

Teorema 1.2. *Se X é uma variedade afim em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, então $\mathcal{O}(X)$ e $A(X)$ são isomorfas*[46] *como $\mathbb{K}$-álgebras.*

[46] Sejam A um anel comutativo com unidade e $\mathbb{K}$ um corpo. Dizemos que A é uma $\mathbb{K}$-álgebra se existe $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow A$ homomorfismo de anéis. Se A e B forem $\mathbb{K}$-álgebras com homomorfismos $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow A$ $\psi : \mathbb{K} \longrightarrow B$, então um homomorfismo de anéis $f : A \longrightarrow B$ será denominado de *homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras* se $f \circ \varphi = \psi$.

Demonstração. A cada polinômio $g \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ podemos associar a função polinomial

$$\widehat{g} : X \longrightarrow \mathbb{K} \ \text{ dada por } \ a \longmapsto g(a).$$

Observe que $\widehat{g} \in \mathcal{O}(X)$ para todo $g \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ (cf. Exemplo 1.40).

Afirmação 1: $\Psi : \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ dada por $g \longmapsto \widehat{g}$ é um homomorfismo de anéis.[47]

Afirmação 2: $\mathcal{I}(X) \subseteq \ker(\Psi)$.

Considere $g \in \mathcal{I}(X)$. Assim, $g(a) = 0$ para todo $a \in X$. Portanto, $\Psi(g) = \widehat{g} = \widehat{0}$. De onde, concluímos que $g \in \ker(\Psi)$.

Afirmação 3: A função $\Psi_1 : A(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ dada por $\Psi_1(\overline{g}) = \widehat{g}$ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. De fato, Ψ_1 está bem definida visto que $\mathcal{I}(X) \subseteq \ker(\Psi)$ e é um homomorfismo de anéis (deixamos a cargo do leitor).

Lembremos que os homomorfismos que tornam $A(X)$ e $\mathcal{O}(X)$ $\mathbb{K}$-álgebras são dados por:

$$\mathbb{K} \xrightarrow{\kappa} A(X) \ \text{ dada por } a \longmapsto \overline{a} \quad \text{e} \quad \mathbb{K} \xrightarrow{\kappa_1} \mathcal{O}(X) \ \text{ dada por } a \longmapsto \widehat{a}$$

A partir das definições de Ψ_1, κ e κ_1 chegamos à conclusão que $\Psi_1 \circ \kappa = \kappa_1$. Portanto, Ψ_1 é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras.

Afirmação 4: Ψ_1 (definido na Af. 3) é injetora.

Considere $\overline{g} \in \ker(\Psi_1)$. Assim,

$$\widehat{g} = \widehat{0} \Longrightarrow g(a) = 0, \ \ \forall\, a \in X \Longrightarrow g \in \mathcal{I}(X) \Longrightarrow \overline{g} = \overline{0}.$$

Afirmação 5: Ψ_1 (definido na Af. 3) é sobrejetora.

Dada $\varphi \in \mathcal{O}(X)$ vamos determinar um polinômio $g \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ tal que $\widehat{g} = \varphi$, ou seja, $\varphi(a) = g(a)$, para todo $a \in X$. Neste caso, φ é denominada *função polinomial*.

Como φ é regular para cada ponto $p \in X$, considere $V_p \subseteq X$ aberto contendo p, f_p e $g_p \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ tais que

$$\varphi_{|V_p} = \frac{f_p}{g_p} \quad \text{com } \ \mathcal{Z}(g_p) \cap V_p = \emptyset. \tag{1.23}$$

Seja $I = \langle \{g_p\}_{p \in X} \rangle$. Assuma que $g_{p_1},\dots,g_{p_k}$ é um conjunto de geradores do ideal I. Note que:

- $\varphi \cdot \widehat{g_{p_i}} = \widehat{f_{p_i}}$ para cada $i \in \{1,\dots,k\}$.

[47] Deixamos a cargo do leitor.

Segue de (1.23) que $\varphi_{|V_{p_i}} = \dfrac{f_{p_i}}{g_{p_i}}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = \frac{f_{p_i}(x)}{g_{p_i}(x)} \ \forall\, x \in V_{p_i} \quad &\Longrightarrow \varphi(x) g_{p_i}(x) = f_{p_i}(x) \ \forall\, x \in V_{p_i} \\
&\Longleftrightarrow \left(\varphi \cdot \widehat{g_{p_i}}\right)|_{V_{p_i}} = \widehat{f_{p_i}}|_{V_{p_i}} \\
&\overset{Lema\ 1.7}{\Longrightarrow} \varphi \cdot \widehat{g_{p_i}} = \widehat{f_{p_i}}
\end{aligned}$$

• $\mathcal{Z}(I) \cap X = \emptyset$.[48]

• Se $X = \mathcal{Z}(h_1, \ldots, h_\ell)$, então $\mathcal{Z}(g_{p_1}, \ldots, g_{p_k}, h_1, \ldots, h_\ell) = \emptyset$.
Assim, segue do teorema dos Zeros de Hilbert no caso afim (cf. Teorema 1.1 que

$$\left\langle g_{p_1}, \ldots, g_{p_k}, h_1, \ldots, h_\ell \right\rangle = \langle 1 \rangle .$$

Logo existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_\ell \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tais que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_{p_i} + \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j h_j = 1 \overset{\Psi}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{k} \widehat{\alpha_i} \widehat{g_{p_i}} + \sum_{j=1}^{\ell} \widehat{\beta_j} \widehat{h_j} = \widehat{1} \underbrace{\overset{\widehat{h_j} = \widehat{0}}{\Longrightarrow}}_{h_j \in \mathcal{I}(X)} \sum_{i=1}^{k} \widehat{\alpha_i} \widehat{g_{p_i}} = \widehat{1}$$

Assim, ao multiplicarmos a última igualdade por φ, obtemos

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \widehat{\alpha_i} \varphi \cdot \widehat{g_{p_i}} = \sum_{i=1}^{k} \widehat{\alpha_i} \widehat{f_{p_i}} = \Psi_1(\overline{g}), \quad \text{com } g = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_{p_i} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$$

(visto que $\varphi \cdot \widehat{g_{p_i}} = \widehat{f_{p_i}}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$). □

Corolário 1.7. *Se X for uma variedade afim, então toda função regular em X é polinomial.*

Demonstração. Segue da Afirmação 5 da demonstração do Teorema 1.2. □

Na próxima seção vamos estudar alguns conceitos que foram abordados no caso afim, que possuem análogos projetivos.

---

[48] Suponha, por absurdo que $q \in \mathcal{Z}(I) \cap X$. Como $g_q \in I$ concluímos que $q \in \mathcal{Z}(g_q)$. Entretanto, $q \in V_q$. Assim, $q \in \mathcal{Z}(g_q) \cap V_q$ (é um absurdo, visto que $\mathcal{Z}(g_q) \cap V_q = \emptyset$).

1.2 No universo projetivo

Vamos começar abordando o conceito de *projetivização* de um espaço vetorial.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita. Defina a seguinte relação em $V - \{0_V\}$ ($0_V \in V$ é o vetor nulo)

$$\mathrm{u} \sim \mathrm{v} \iff \mathrm{u} = \lambda \mathrm{v} \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Observe que

- λ na relação $\sim$ é distinto de 0 (visto que u e v são ambos não nulos).
- $\sim$ define uma relação de equivalência em $V - \{0_V\}$.
- Se $\mathrm{v} \in V$ for um vetor não nulo, a classe de equivalência associada ao vetor v é dada por

$$\overline{\mathrm{v}} = \{\mathrm{u} \in V - \{0\} | \mathrm{u} \sim \mathrm{v}\} = \{\lambda \mathrm{v} | \lambda \in \mathbb{K},\, \lambda \neq 0\} = [\mathrm{v}] - \{0_V\},$$

  sendo [v] o subespaço 1-dimensional de V gerado por v.

Se V for um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, então a *projetivização* de V, que denotaremos por $\mathbb{P}(V)$, é igual ao conjunto quociente $(V - \{0_V\})/\sim$.

Observação 1.7. Com as notações acima.

(a) Considere o espaço vetorial de dimensão $n+1$ sobre $\mathbb{K}$, $V = \mathbb{K}^{n+1}$. Neste caso usaremos a notação $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ em lugar de $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ será denominado de *n-espaço projetivo* sobre $\mathbb{K}$.

(b) Usaremos a notação $\mathbb{P}^n$ no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Assim, $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

(c) Para cada vetor $\mathrm{v} = (v_0, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ não nulo, usaremos a notação $[v_0 : \ldots : v_n]$ para indicar a classe de equivalência associada ao vetor v. As coordenadas $v_0, \ldots, v_n$ do vetor v são denominadas *coordenadas homogêneas* do ponto $[v_0 : \ldots : v_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Exercício 1.39. Sejam u e v vetores não nulos do espaço vetorial V. Mostre que u e v definem o mesmo ponto em $\mathbb{P}(V) \iff$ u e v são L.D.

Exemplo 1.43. Descrição dos pontos do espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ para $0 \leqslant n \leqslant 3$.

Neste exemplo $V = \mathbb{C}^{n+1}$ (considerado como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$). Lembre que $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ não nulo, determina o ponto $[a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n$. Além disso, vetores L.D. determinam o mesmo ponto. Assim,

$$[a_0 : a_1 : \ldots : a_n] = [\lambda a_0 : \lambda a_1 : \ldots : \lambda a_n] \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ não nulo.} \tag{1.24}$$

$\boxed{n=0}$ $\mathbb{P}^0$ consiste de um único ponto.

Sabemos que $\mathbb{P}^0 = \Big\{[a_0] | a_0 \neq 0\Big\}$, e segue de (1.24) que, $[a_0] = [a_0^{-1}a_0] = [1]$ para todo $a_0 \in \mathbb{C}$ não nulo. Assim, $\mathbb{P}^0 = \Big\{[1]\Big\}$.

$\boxed{n=1}$ A *reta projetiva* $\mathbb{P}^1$ consiste de uma cópia da reta afim $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ e um ponto no infinito.

Lembre que $\mathbb{P}^1 = \Big\{[a_0 : a_1] | a_0 \neq 0 \text{ ou } a_1 \neq 0\Big\}$.

Afirmação: $\mathbb{P}^1 = \Big\{[a:1] | a \in \mathbb{C}\Big\} \bigcup \Big\{[1:0]\Big\}$.

De fato, se $[a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1$ temos duas possibilidades: $a_1 \neq 0$ ou $a_1 = 0$.

- $a_1 \neq 0$: neste caso, $[a_0 : a_1] = [a_1^{-1} \cdot a_0 : a_1^{-1} \cdot a_1] = [a : 1]$ com $a = a_1^{-1} \cdot a_0$.
- $a_1 = 0$: temos $a_0 \neq 0$. Portanto, $[a_0 : a_1] = [a_0 : 0] = [a_0^{-1} \cdot a_0 : a_0^{-1} \cdot 0] = [1 : 0]$.

A seguir, observe que a função $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1 - \{[1:0]\} = \Big\{[a:1] | a \in \mathbb{C}\Big\}$ definida por $a \longmapsto [a : 1]$ é uma bijeção. Ou seja, em $\mathbb{P}^1$ existe uma cópia da reta afim $\mathbb{C} = \mathbb{A}^1$. Assim, temos a seguinte identificação.

$$\mathbb{P}^1 = \Big\{[a:1] | a \in \mathbb{C}\Big\} \bigcup \Big\{[1:0]\Big\} \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Nesta partição, $[1 : 0]$ é denominado *ponto no infinito* e denotado por $[1 : 0] := \infty$.

$\boxed{n=2}$ O *plano projetivo* $\mathbb{P}^2$ consiste de uma cópia do plano afim $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$ e uma reta no infinito.

Lembre que $\mathbb{P}^2 = \Big\{[a_0 : a_1 : a_2] | (a_0, a_1, a_2) \neq (0,0,0)\Big\}$.

Afirmação: $\mathbb{P}^2 = \Big\{[a:b:1] | (a,b) \in \mathbb{C}^2\Big\} \bigcup \mathrm{L}_\infty$ sendo

$$\mathrm{L}_\infty := \Big\{[a_0 : a_1 : 0] | a_0 \neq 0 \text{ ou } a_1 \neq 0\Big\}.$$

De fato, se $[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2$ temos novamente as possibilidades: $a_2 \neq 0$ ou $a_2 = 0$.[49]

Observe que, a função $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2 - \mathrm{L}_\infty$ definida por $(a,b) \longmapsto [a : b : 1]$ é uma bijeção. Ou seja, em $\mathbb{P}^2$ existe uma cópia do plano afim $\mathbb{C}^2 = \mathbb{A}^2$. Assim, temos a seguinte identificação.

$$\mathbb{P}^2 = \Big\{[a:b:1] | (a,b) \in \mathbb{C}^2\Big\} \bigcup \mathrm{L}_\infty \simeq \mathbb{C}^2 \cup \mathrm{L}_\infty.$$

[49] Se $a_2 \neq 0$, segue que $[a_0 : a_1 : a_2] = [a_2^{-1} \cdot a_0 : a_2^{-1} \cdot a_1 : a_2^{-1} \cdot a_2] = [a : b : 1]$ com $a = a_2^{-1} \cdot a_0$ e $b = a_2^{-1} \cdot a_1$. Caso contrário, temos que $a_0 \neq 0$ ou $a_1 \neq 0$. Assim, $[a_0 : a_1 : a_2] = [a_0 : a_1 : 0] \in \mathrm{L}_\infty$.

Nesta partição, L_∞ é denominada *reta no infinito*.

Note que $[a_0 : a_1] \longmapsto [a_0 : a_1 : 0]$ define uma bijeção entre a reta projetiva $\mathbb{P}^1$ e a reta no infinito L_∞.

$\boxed{n = 3}$ O *espaço projetivo* $\mathbb{P}^3$ consiste de uma cópia do espaço afim $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$ e um plano no infinito.

Lembre que $\mathbb{P}^3 = \Big\{[a_0 : a_1 : a_2 : a_3] | (a_0, a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0,0)\Big\}$.

Afirmação: $\mathbb{P}^3 = \Big\{[a : b : c : 1] | (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\Big\} \bigcup \mathrm{H}_\infty$ sendo

$$\mathrm{H}_\infty = \Big\{[a_0 : a_1 : a_2 : 0] | (a_0, a_1, a_2) \neq (0,0,0)\Big\}.$$

Deixamos a verificação da afirmação acima a cargo do leitor.

Para concluirmos, observe que, $(a,b,c) \longmapsto [a : b : c : 1]$ define uma bijeção de $\mathbb{C}^3$ em $\mathbb{P}^3 - \mathrm{H}_\infty$. Ou seja, em $\mathbb{P}^3$ existe uma cópia do espaço afim $\mathbb{C}^3 = \mathbb{A}^3$. Assim, temos a seguinte identificação.

$$\mathbb{P}^3 = \Big\{[a : b : c : 1] | (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\Big\} \bigcup \mathrm{H}_\infty \simeq \mathbb{C}^3 \cup \mathrm{L}_\infty.$$

Nesta partição, H_∞ é denominado *plano no infinito*. Note que a função $\mathbb{P}^2 \longrightarrow H_\infty$ dada por $[a_0 : a_1 : a_2] \longmapsto [a_0 : a_1 : a_2 : 0]$ define uma bijeção entre o plano projetivo $\mathbb{P}^2$ e o plano infinito H_∞

Exercício 1.40. Mostre que o n-espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ admite uma partição da forma $\mathbb{P}^n = \mathcal{A} \cup \mathcal{H}_\infty$, na qual podemos identificar $\mathcal{A}$ com o n-espaço afim $\mathbb{A}^n = \mathbb{C}^n$ e $\mathcal{H}_\infty$ (denominado *hiperplano no infinito*) com $\mathbb{P}^{n-1}$.

A seguir vamos apresentar outra forma de visualizar a projetivização de um espaço vetorial V.

A d-grassmanniana associada a V

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita n. Para cada d inteiro, $0 \leqslant d \leqslant n$, definimos

$$G_d(V) :=\Big\{W | W \text{ é um subespaço de } V \text{ de dimensão } d\Big\}.$$

O conjunto $G_d(V)$ será denominado *d-grassmanniana* associada a V.

Exemplo 1.44. Considere o espaço vetorial real $V = \mathbb{R}^3$.

Para cada $d \in \{0,1,2,3\}$ temos $G_d(\mathbb{R}^3) = \Big\{W | W \leqslant \mathbb{R}^3 \text{ e } \dim_{\mathbb{R}} W = d\Big\}$.

Assim, $G_0(\mathbb{R}^3) = \Big\{\{0\}\Big\}$ consiste de um único ponto (o espaço nulo).

$G_1(\mathbb{R}^3) = \Big\{[\mathrm{v}] | \mathrm{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ não nulo}\Big\}$ consiste das retas passando pela origem.

$$G_2(\mathbb{R}^3) = \Big\{[\mathrm{u}, \mathrm{v}] | \mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ L.I.}\Big\} \text{ consiste dos planos passando pela origem.}$$
$$G_3(\mathbb{R}^3) = \Big\{\mathbb{R}^3\Big\} \text{ consiste de um único ponto (o espaço } \mathbb{R}^3\text{).}$$

Observação 1.8. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geqslant 1$.

A função $\varphi : \mathbb{P}(V) \longrightarrow G_1(V)$, dada por $v \longmapsto [\mathrm{v}]$, está bem definida e é uma bijeção. Portanto, podemos identificar o espaço projetivo associado a V, $\mathbb{P}(V)$ com a grassmanniana $G_1(V)$. Assim, podemos pensar que o espaço projetivo é formado pelas subespaços de dimensão 1 de V.

No caso em que $V = \mathbb{K}^{n+1}$, estamos identificando os pontos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ com as retas que passam pela origem em V.

Vale salientar que os conjuntos algébricos projetivos são definidos de forma análoga ao caso afim, com a peculiaridade de utilizarmos polinômios homogêneos.

Polinômios homogêneos

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $S = \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ o anel dos polinômios nas variáveis $x_0, \ldots, x_n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$.

Para cada $\mathrm{I} = (i_0, i_1, \ldots, i_n)$, sendo $i_0, i_1, \ldots, i_n$ inteiros não negativos

$$\mathrm{x}^{\mathrm{I}} := x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \qquad \text{será denominado } \textit{monômio} \text{ de grau } i_0 + i_1 + \cdots + i_n.$$

Para cada d inteiro $0 \leqslant d$ denotaremos por S_d o subespaço vetorial de S gerado pelos monômios de grau d. Assim,

$$\begin{aligned}
S_0 &= [1] = \mathbb{K} \text{ consiste dos polinômios constantes,}\\
S_1 &= [x_0, \ldots, x_n] = \Big\{a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n | a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\Big\},\\
&\vdots\\
S_d &= \Big[\Big\{x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} | i_0 + i_1 + \cdots + i_n = d\Big\}\Big].
\end{aligned}$$

Todo elemento não nulo de S_d será denominado *polinômio homogêneo* de grau d.

Exercício 1.41. Mostre que $\dim_{\mathbb{K}} S_d = \binom{d+n}{n}$.

Observação 1.9. Se $f \in S$ for não nulo podemos agrupar todos os monômios do mesmo grau que comparecem em f e escrever

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d \qquad \text{sendo } d = \operatorname{grau}(f).$$

Neste caso, f_i será denominada *parte homogênea de grau i* de f.

Por exemplo, $f = 5 + 3x_0 - 5x_3 + 6x_1^3 + 7x_2x_3^4 - x_0^3x_2^2 + 3x_3^5 \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ tem grau 5 e

$$f = \underbrace{5}_{f_0} + \underbrace{3x_0 - 5x_3}_{f_1} + \underbrace{6x_1^3}_{f_3} + \underbrace{7x_2x_3^4 - x_0^3x_2^2 + 3x_3^5}_{f_5} \qquad \text{e } f_2 = f_4 = 0.$$

Proposição 1.16. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo infinito e $F \in S = \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ não nulo. Verifica-se que: $F \in S_d \iff F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \ldots, x_n), \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. $\boxed{\Longrightarrow}$ Considere $F \in S_d$. Assim, F é uma soma finita com coeficientes em $\mathbb{K}$ da forma

$$F = \sum_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{I}} \mathrm{x}^{\mathrm{I}} = \sum_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{I}} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \text{ tal que } i_0 + i_1 + \cdots + i_n = d.$$

Logo, para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se que

$$\begin{aligned} F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) &= \sum_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{I}} (\lambda x_0)^{i_0} (\lambda x_1)^{i_1} \cdots (\lambda x_n)^{i_n} \\ &= \lambda^d \sum_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{I}} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \quad (\text{visto que } i_0 + i_1 + \cdots + i_n = d) \\ &= \lambda^d F(x_0, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Observe que todo polinômio $F \in S$ escreve-se de forma única, como uma soma finita de suas partes homogêneas

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_d, \quad \text{com } F_i \in S_i \text{ e } F_d \neq 0.$$

Afirmação: $F_j = 0$ para todo $j \in \{0, \ldots, d-1\}$.

Suponha, pelo absurdo, que existe $j \in \{0, \ldots, d-1\}$ tal que $F_j \neq 0$. A seguir, observe que para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ tem-se que

$$F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = F_0 + \lambda F_1 + \cdots + \lambda^d F_d.$$

E segue da hipótese que

$$F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = F_0 + \lambda F_1 + \cdots + \lambda^d F_d = \lambda^d (F_0 + F_1 + \cdots + F_d).$$

De onde concluímos

$$F_0 + \lambda F_1 + \cdots + \lambda^{d-1} F_{d-1} - \lambda^d \Big(F_0 + \cdots + F_{d-1} \Big) = 0, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}. \tag{1.25}$$

Sendo $F_j \neq 0$ para algum $j \in \{0, \ldots, d-1\}$, escolha $a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tal que $F_j(a) \neq 0$. Defina $b_i = F_i(a)$ para $0 \leqslant i \leqslant d-1$ e $b_d = -b_0 - b_1 - \cdots - b_{d-1}$. Assim, o polinômio $q(t) \in \mathbb{K}[t]$ dado por

$$q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_{d-1} t^{d-1} + b_d t^d$$

é não nulo (uma vez que $b_j \neq 0$ para algum $j \in \{0, \ldots, d-1\}$). Entretanto, ao analisarmos as possibilidades $\mathrm{grau}(q(t)) = 0$ [50] ou $\mathrm{grau}(q(t)) \geqslant 1$ [51] chegamos num absurdo. Portanto, $F_0 = F_1 = \ldots = F_{d-1} = 0$. Logo $F = F_d \in S_d$. □

[50] Suponha que $q(t)$ é um polinômio constante, então $q(t) = b_0$ e

$$b_1 = \ldots = b_{d-1} = 0 = b_d \Longrightarrow 0 = b_d = -b_0 \Longrightarrow q(t) = 0$$

o que é um absurdo.

[51] Se $\mathrm{grau}(q(t)) \geqslant 1$, segue de (1.25) ao calcularmos os valores $F_i(a)$ para $i = 1, \ldots, d-1$, que $q(\lambda) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Ou seja, $q(t)$ possui infinitas raízes em $\mathbb{K}$. Logo $q(t) = 0$.

Corolário 1.8. *Se $F \in S_d$ e $a \in \mathbb{K}^{n+1}$. Então $F(a) = 0 \iff F(\lambda a) = 0,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$*

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor. □

Exercício 1.42. Sejam F e G polinômios homogêneos em $S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ de grau d e r, respectivamente. Mostre que $F \cdot G$ é homogêneo de grau $d + r$.

Exercício 1.43. Sejam f, g polinômios não nulos em $S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ com a seguinte decomposição em partes homogêneas $f = f_0 + \cdots + f_d$ e $g = g_0 + \cdots + g_e$ sendo $d \leqslant e$. Se $(\ )_k$ denota a parte homogênea de grau k, então mostre que:

(*a*) $(f + g)_k = f_k + g_k$, para todo $k \in \{0, \ldots, e\}$.

(*b*) $(f \cdot g)_k = f_0 \cdot g_k + f_1 \cdot g_{k-1} + \cdots + f_{k-1} \cdot g_1 + f_k \cdot g_0$, para todo $k \in \{0, \ldots, d+e\}$.

A seguir vamos introduzir o conceito de ideal homogêneo.

Ideal homogêneo

Seja I um ideal no anel $S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$. I é dito *homogêneo* se, existe uma quantidade finita de polinômios homogêneos $F_1, \ldots, F_k$ (não necessariamente do mesmo grau) que geram o ideal I, ou seja, $I = \langle F_1, \ldots, F_k \rangle$.

Exercício 1.44. Sejam $f_1, \ldots, f_k,\ g_1, \ldots, g_m$ elementos de um anel comutativo com unidade A. Considere os ideais $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ e $J = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$. Mostre que

$$I = J \iff f_i \in J,\ \ \forall\, i \in \{1, \ldots, k\} \quad \text{e} \quad g_j \in I,\ \ \forall\ j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Exemplo 1.45. O ideal $I = \left\langle x - y^2, y \right\rangle \subset \mathbb{R}[x, y]$ é um ideal homogêneo. Basta observar que $I = \langle x, y \rangle$, visto que $x = 1 \cdot (x - y^2) + y \cdot y \in I$.

Exemplo 1.46. O ideal $I = \{f \in \mathbb{R}[x, y] | f(0, 1) = 0\} \subset \mathbb{R}[x, y]$ não é homogêneo. Pelo absurdo, suponha que I é homogêneo. Assim, existem $F_1, \ldots, F_k \in \mathbb{R}[x, y]$ homogêneos tais que $I = \langle F_1, \ldots, F_k \rangle$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $F_i \neq 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Agora, como $y - 1 \in I$, existem polinômios $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}[x, y]$ tais que

$$y - 1 = p_1 F_1 + \cdots + p_k F_k. \tag{1.26}$$

Observe que $\text{grau}(F_i) \geqslant 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ [52]. Assim, $F_i(0, 0) = 0$ para todo i (uma vez que todo polinômio homogêneo de grau maior ou igual que 1 anula-se na origem). Portanto, ao calcularmos (1.26) na origem, chegamos num absurdo.

Proposição 1.17. *Seja I um ideal do anel $S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$. Verifica-se que*

I é homogêneo $\iff$ $\forall\, g = g_0 + \cdots + g_d \in I$ ($g_i \in S_i$), tem-se que $g_i \in I$, com $0 \leqslant i \leqslant d$.

[52] Visto que, $\text{grau}(F_i) = 0$ implica em F_i polinômio constante não nulo, logo $F_i(0, 1) = F_i \neq 0$.

Demonstração. Se $h \in S$ vamos denotar por $(h)_m \in S_m$ a parte homogênea de grau m de h.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sendo $I \subseteq S$ ideal homogêneo, escolha polinômios homogêneos $F_1, \ldots, F_k$ em S tais que $I = \langle F_1, \ldots, F_k \rangle$.

Seja $g \in I$ não nulo de grau d tal que

$$g = g_0 + g_1 + \cdots + g_d, \quad \text{com } g_i \in S_i.$$

Como $g \in I$ existem $p_1, \ldots, p_k \in S$ tais que $g = p_1F_1 + \cdots + p_kF_k$. Assim,

$$g_i = (g)_i = (p_1F_1 + \cdots + p_kF_k)_i \overset{Ex.1.43}{=} (p_1F_1)_i + \cdots + (p_kF_k)_i. \tag{1.27}$$

Agora vamos focar na determinação de $(p_1F_1)_i, \ldots, (p_kF_k)_i$. Para isso, assuma que $\text{grau}(F_j) = d_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$. Segue do Exercício 1.43 que

$$(p_1F_1)_i = \begin{cases} (p_1)_{i-d_1}F_1, & \text{se } i \geqslant d_1 \\ 0, & \text{se } i < d_1 \end{cases}, \ldots, \ (p_kF_k)_i = \begin{cases} (p_k)_{i-d_k}F_k, & \text{se } i \geqslant d_k \\ 0, & \text{se } i < d_k \end{cases}$$

Portanto, $(p_1F_1)_i, \ldots, (p_kF_k)_i$ pertencem ao ideal $\langle F_1, \ldots, F_k \rangle = I$. Segue de (1.27) que $g_i \in I$ para cada $i \in \{0, \ldots, d\}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Como S é um anel noetheriano podemos escolher $h_1, \ldots, h_k$ geradores do ideal I. Assuma que a decomposição desses geradores do ideal I é dada por

$$\begin{aligned} h_1 &= (h_1)_0 + (h_1)_1 + \cdots + (h_1)_{d_1} \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ h_k &= (h_k)_0 + (h_k)_1 + \cdots + (h_k)_{d_k} \end{aligned}$$

Afirmação: Seja $J = \big\langle (h_1)_0, (h_1)_1, \ldots, (h_1)_{d_1}, \ldots, (h_k)_0, (h_k)_1, \ldots, (h_k)_{d_k} \big\rangle$. Então $I = J$.

Sendo $h_1, \ldots, h_k$ geradores do ideal I, segue da hipótese que as partes homogêneas de cada h_j pertencem ao ideal I. Portanto, $J \subseteq I$.

A outra inclusão fica para o leitor. □

A luz da Proposição 1.17, se retornarmos no Exemplo 1.46, podemos afirmar que: Se $I = \langle x, y-1 \rangle$ for um ideal homogêneo do anel $\mathbb{R}[x, y]$ então $x, y, -1 \in I$, sendo que $y \notin I$ e $-1 \notin I$. Logo I não é um ideal homogêneo.

Exercício 1.45. Sejam I e J ideais homogêneos em $S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ e T um subconjunto de S formado por polinômios homogêneos. Mostre que $I \cap J$, $\sqrt{I}$ e $\langle T \rangle$ são ideais homogêneos de S.

Zeros de um polinômio homogêneo

Considere $[1:1] \in \mathbb{P}^1$ e $f = x_0 - x_1^2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$. Ao considerarmos as coordenadas homogêneas 1, 1 do ponto $[1:1]$, temos que $f(1,1) = 0$. Entretanto, ao mudar para as coordenadas homogêneas 2, 2 do mesmo ponto tem-se que $f(2,2) = 2 - 4 = -2 \neq 0$. Ou seja, o valor de f num representante de $[1:1]$ é igual a zero e em outro é distinto de zero. Isso acontece pelo fato de $f = x_0 - x_1^2$ não ser um polinômio homogêneo.

O Corolário 1.8 nos garante que se $[a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e $F \in S_d$, então

$$F(a_0, \ldots, a_n) = 0 \iff F(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0, \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Assim, faz sentido definir para cada $F \in S_d$, o conjunto dos *zeros do polinômio* F por

$$\mathcal{Z}(F) := \left\{ \mathrm{p} \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} | F(\mathrm{p}) = 0 \right\},$$

sendo $F(\mathrm{p}) = F(a_0, \ldots, a_n)$ se, $\mathrm{p} = [a_0 : \ldots : a_n]$.[53]

Em geral, se T for um subconjunto de $S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, cujos elementos são polinômios homogêneos, definimos o conjunto dos *zeros de* T por

$$\mathcal{Z}(T) := \bigcap_{F \in T} \mathcal{Z}(F).$$

Seja I um ideal homogêneo do anel $S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ tendo $F_1, \ldots, F_k$ como conjunto de geradores homogêneos. Definimos o conjunto dos *zeros de* I por

$$\mathcal{Z}(I) := \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{Z}(F_i).$$

Exemplo 1.47. Considere $I = \langle 3x_1 - x_0, x_2 - x_0 \rangle$ em $\mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$. Vamos determinar os zeros de I no plano projetivo real $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Considere $a = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e observe que

$$\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(3x_1 - x_0) \cap \mathcal{Z}(x_2 - x_0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{Z}(I) &\iff a \in \mathcal{Z}(3x_1 - x_0) \text{ e } a \in \mathcal{Z}(x_2 - x_0) \\ &\iff 3a_1 - a_0 = 0 \text{ e } a_2 - a_0 = 0 \\ &\iff a_1 = \frac{a_0}{3} \text{ e } a_2 = a_0, \quad \text{com } a_0 \neq 0 \\ &\iff a = [a_0 : \frac{a_0}{3} : a_0] = [3:1:3] \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{Z}(I) = \left\{ [3:1:3] \right\}$ consiste de um único ponto.

[53] Observe que embora $G = x_0^2 - x_1^2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ seja um polinômio homogêneo de grau 2, ao considerarmos $a = [1:0] \in \mathbb{P}^1$ o valor $G(a)$ não está bem definido, uma vez que $G(1,0) = 1$ e $G(\lambda, 0) = \lambda^2 \neq 1$ se, $\lambda \notin \{1, -1\}$, ou seja, o valor depende do representante do ponto a.

Exercício 1.46. Mostre que a definição de zeros de um ideal homogêneo I independe da conjunto de geradores homogêneos escolhidos.

Exercício 1.47. Seja I um ideal homogêneo do anel $S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$. Defina

$$I^h := \{F \in I | F \in S_d \text{ para algum } d \geqslant 0\}.$$

Mostre que $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(I^h)$.

Proposição 1.18. *Sejam I e J ideais homogêneos do anel $S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ e $T \subseteq S$ formado por polinômios homogêneos. Verifica-se que:*

(i) *Se $I \subseteq J$ então $\mathcal{Z}(I) \supseteq \mathcal{Z}(J)$.*

(ii) $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(\sqrt{I})$.

(iii) $\mathcal{Z}(T) = \mathcal{Z}(\langle T \rangle)$.

(iv) $\mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(I \cap J)$.

Demonstração. Lembre que, se $I \overset{\text{ideal}}{\subseteq} S$ homogêneo, então $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(I^h)$ (cf. Exercício 1.47).

$\boxed{\text{(i)}}$ Note que $I \subseteq J$ implica em $I^h \subseteq J^h$. Assim,

$$a \in \mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(J^h) \Longleftrightarrow F(a) = 0, \ \forall\, F \in J^h \overset{I^h \subseteq J^h}{\Longrightarrow} F(a) = 0, \ \forall\, F \in I^h \Longleftrightarrow a \in \mathcal{Z}(I).$$

$\boxed{\text{(ii)}}$ Como $I \subseteq \sqrt{I}$, segue de (i) que $\mathcal{Z}(\sqrt{I}) \subseteq \mathcal{Z}(I)$. A seguir, mostraremos a outra inclusão. Assuma que $I \neq S$ (deixamos o caso $I = S$ como exercício).

Observe que, se $G \in (\sqrt{I})^h$ então G é homogêneo e $G \in \sqrt{I}$. Logo, $G^m \in I$ para algum $m \geqslant 1$ inteiro e G^m é homogêneo. Portanto,

$$a \in \mathcal{Z}(I) \Longrightarrow 0 = G^m(a) = \underbrace{G(a) \cdots G(a)}_{m-vezes} \Longrightarrow G(a) = 0 \Longrightarrow a \in \mathcal{Z}(\sqrt{I}).$$

$\boxed{\text{(iii)}}$ Como $T \subseteq \langle T \rangle$ e T é formado por polinômios homogêneos, concluímos que $T \subseteq \langle T \rangle^h$. Assim, segue de (i) que $\mathcal{Z}(\langle T \rangle) \subseteq \mathcal{Z}(T)$.

Por outro lado, note que todo $G \in \langle T \rangle^h$ é um polinômio homogêneo que pertence a $\langle T \rangle$. Assim, existem $F_{i_1},\ldots,F_{i_k} \in T$ e $H_{i_1},\ldots,H_{i_k} \in S$ tais que

$$G = H_{i_1} F_{i_1} + \cdots + H_{i_k} F_{i_k}. \tag{1.28}$$

Considere $a \in \mathcal{Z}(T)$. Logo

$$F_{i_1}(a) = 0, \ldots, F_{i_k}(a) = 0 \overset{(1.28)}{\Longrightarrow} G(a) = 0 \Longrightarrow a \in \mathcal{Z}(\langle T \rangle).$$

Portanto, $\mathcal{Z}(T) \subseteq \mathcal{Z}(\langle T \rangle)$.

$\boxed{\text{(iv)}}$ Deixamos a cargo do leitor. □

Nas próximas subseções vamos introduzir os conceitos de conjunto algébrico, ideal associado entre outros.

Conjunto algébrico em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$

Um subconjunto Y de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ é denominado *conjunto algébrico projetivo* (ou simplesmente, conjunto algébrico em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$) se, existe $I \subseteq S = \mathbb{K}[x_0, ..., x_n]$ ideal homogêneo tal que $Y = \mathcal{Z}(I)$.

Notação: Se T for um conjunto finito, digamos $T = \{F_1, \ldots, F_k\}$, usaremos a notação $\mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_k)$ em lugar de $\mathcal{Z}(\{F_1, \ldots, F_k\})$.

Exemplo 1.48. $\emptyset$ e $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ são conjuntos algébricos projetivos. De fato, $\emptyset = \mathcal{Z}(1)$ e $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \mathcal{Z}(0)$.

Exemplo 1.49. Todo conjunto unitário é um conjunto algébrico projetivo.

Considere $\{a\} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ sendo $a = [a_0 : \ldots : a_n]$. Suponha que $a_0 \neq 0$, então

$$a = \left[1 : \frac{a_1}{a_0} : \ldots : \frac{a_n}{a_0}\right].$$

Queremos determinar $F \in S_d$, tal que $F(a) = 0$. Vamos começar a procura em grau 1 (i.e. $d = 1$). Considere $F = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in S_1$. Assim,

$$\begin{aligned}
F(a) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \alpha_0 + \alpha_1 \frac{a_1}{a_0} + \cdots + \alpha_n \frac{a_n}{a_0} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \alpha_0 = -\left(\alpha_1 \frac{a_1}{a_0} + \cdots + \alpha_n \frac{a_n}{a_0}\right) \\
&\Longrightarrow F = -\left(\alpha_1 \frac{a_1}{a_0} + \cdots + \alpha_n \frac{a_n}{a_0}\right) x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \\
&\Longleftrightarrow F = \alpha_1\left(x_1 - \frac{a_1}{a_0} x_0\right) + \alpha_2\left(x_2 - \frac{a_2}{a_0} x_0\right) + \cdots + \alpha_n\left(x_n - \frac{a_n}{a_0} x_0\right) \\
&\Longrightarrow F \in \left\langle x_1 - \frac{a_1}{a_0} x_0, x_2 - \frac{a_2}{a_0} x_0, \ldots, x_n - \frac{a_n}{a_0} x_0 \right\rangle \\
&\Longleftrightarrow F \in \langle a_0 x_1 - a_1 x_0, a_0 x_2 - a_2 x_0, \ldots, a_0 x_n - a_n x_0 \rangle
\end{aligned}$$

Afirmação 1: $\{a\} = \mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_n)$, com $F_i = a_0 x_i - a_i x_0$.

De fato, considere $b = [b_0 : b_1 : \ldots : b_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Note que

$$\begin{aligned} b \in \mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_n) &\iff F_i(b) = a_0 b_i - a_i b_0 = 0, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \\ &\iff b_i = a_i \frac{b_0}{a_0} \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \text{ e } b_0 \neq 0 \\ &\implies b = \left[a_0 \frac{b_0}{a_0} : a_1 \frac{b_0}{a_0} : \ldots : a_n \frac{b_0}{a_0}\right] = a. \end{aligned}$$

Como $\{a\} \subseteq \mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_n)$, concluímos que $\{a\} = \mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_n)$.

Para concluirmos, observe que se $a_0 = 0$ então existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_i \neq 0$. Neste caso, deixamos a cargo do leitor verificar que.

Afirmação 2: $\{a\} = \mathcal{Z}(a_i x_0 - a_0 x_i, \ldots, \underbrace{a_i x_j - a_j x_i}_{j \neq i}, \ldots, a_i x_n - a_n x_i)$.

Conjuntos algébricos em $\mathbb{P}^1$

A seguir daremos uma descrição dos conjuntos algébricos na reta projetiva complexa[54].

Sabemos que $\emptyset$ e $\mathbb{P}^1$ são conjuntos algébricos na reta projetiva $\mathbb{P}^1$. Em geral, os conjuntos algébricos são determinado pela interseção dos zeros de polinômios homogêneos. Assim, vamos começar explorando o conjunto algébrico $\mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^1$ com $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ homogêneo de grau $d \geqslant 1$.

No caso $d = 1$, $F = bx_0 - ax_1$ com $a, b \in \mathbb{C}$ não ambos nulos[55]. Observe que

$$\begin{aligned} a = [a_0 : a_1] \in \mathcal{Z}(bx_0 - ax_1) &\iff ba_0 - aa_1 = 0 \\ &\iff 0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a & b \end{vmatrix} \\ &\iff (a_0, a_1) \text{ e } (a, b) \text{ são L.D.} \\ &\iff a = [a_0 : a_1] = [a : b]. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{Z}(F) = \Big\{[a : b]\Big\}$ consiste de um único ponto, cujas coordenadas homogêneas são determinadas a partir dos coeficientes da forma linear F.

Para abordarmos o caso $d \geqslant 2$ vamos precisar do seguinte lema.

Lema 1.8. *Considere $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ homogêneo de grau $d \geqslant 1$. Então existem $L_1, \ldots, L_d$ polinômios homogêneos de grau 1 (não necessariamente distintos) tais que $F = L_1 \cdot L_2 \cdots L_d$.*

Demonstração. Faremos a demonstração usando indução em d.

- $d = 1$. Neste caso, existe $L_1 = F$.

[54] Lembre que $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ é a reta projetiva complexa. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ é a reta projetiva real.

[55] Ao representar $F = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1$ com $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ não ambos nulos tem-se que $\mathcal{Z}(F) = \Big\{[\alpha_1 : -\alpha_0]\Big\}$.

- Assuma que a afirmação é válida para todo polinômio homogêneo de grau menor ou igual que d.

- Considere $G \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ homogêneo de grau $d + 1$.

  Temos duas possibilidades: $x_0|G$ ou $x_0 \quad G$.

  Caso 1: $x_0|G$.

  Neste caso, $G = x_0 \cdot F$ sendo $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ homogêneo de grau d.

  Assim, segue da hipótese de indução que existem L_1,...,L_d polinômios homogêneos de grau 1 tais que $F = L_1 \cdot L_2 \cdots L_d$. Portanto

  $$G = x_0 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdots L_d = L_1 \cdot L_2 \cdots L_d \cdot L_{d+1}, \quad \text{sendo } L_{d+1} = x_0.$$

  Caso 2: $x_0 \quad G$.

  Neste caso, $F = \alpha_0 x_1^d + \alpha_1 x_0 x_1^{d-1} + \cdots + \alpha_{d-1} x_0^{d-1} x_1 + \alpha_d x_0^d$ com $\alpha_0 \neq 0$.

  Considere $f(x_1) = F(1, x_1) = \alpha_0 x_1^d + \alpha_1 x_1^{d-1} + \cdots + \alpha_{d-1} x_1 + \alpha_d \in \mathbb{C}[x_1]$. Sendo $\mathbb{C}$ um corpo algebricamente fechado e f de grau $d \geqslant 1$, existe $c \in \mathbb{C}$ raiz de f, ou seja, $f(c) = 0 = F(1, c)$.

  A seguir, vamos mostrar que $(x_1 - cx_0)|F$. De fato, ao aplicarmos o algoritmo da divisão em $A[x_1]$, sendo $A = \mathbb{C}[x_0]$, segue-se que existem $Q, R \in A[x_1] = \mathbb{C}[x_0, x_1]$ tais que

  $$F = (x_1 - cx_0)Q + R, \quad R = 0 \text{ ou } 0 \neq R \in A = \mathbb{C}[x_0]. \tag{1.29}$$

  Lembre que $F(1, c) = 0$ e F é homogêneo, logo $F(\lambda, \lambda c) = 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

  Assim, segue de (1.29) que $0 = F(\lambda, \lambda c) = 0Q(\lambda, \lambda c) + R(\lambda) = R(\lambda), \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Portanto, $R = 0$ e segue de (1.29) que $F = (x_1 - cx_0)Q$, com $Q \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ homogêneo[56] de grau d. Assim, o resultado segue de forma análoga ao caso 1 (trocado a forma linear x_0 pela forma linear $x_1 - cx_0$).

□

Assim, todo polinômio homogêneo em $\mathbb{C}[x_0, x_1]$ é um produto de fatores lineares da forma $bx_0 - ax_1$ (podendo aparecer fatores repetidos). Logo, podemos representar $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ da seguinte forma:

$$F = L_1^{m_1} \cdot L_2^{m_2} \cdots L_k^{m_k}, \quad \text{sendo } L_i = b_i x_0 - a_i x_1 \text{ e } \{L_1, \ldots, L_k\} \text{ L.I.}$$

com $m_1, \ldots, m_k$ naturais tais que $m_1 + \cdots + m_k = d$. Assim, ao aplicarmos $\mathcal{Z}$ na igualdade acima, chegamos em

$$\mathcal{Z}(F) = \mathcal{Z}(L_1^{m_1}) \cup \mathcal{Z}(L_2^{m_2}) \cup \cdots \cup \mathcal{Z}(L_k^{m_k}) = \mathcal{Z}(L_1) \cup \mathcal{Z}(L_2) \cup \cdots \cup \mathcal{Z}(L_k).$$

---

[56] Se F, G e H são polinômios em $S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ não nulos tais que $F = G \cdot H$. Verifica-se que: Se $F \in S_d$ e $G \in S_e$ então $e \leqslant d$ e $H \in S_{d-e}$.

Portanto,

$$\mathcal{Z}(F) = \Big\{[a_1 : b_1], [a_2 : b_2], \ldots, [a_k : b_k]\Big\}$$

consiste de k pontos distintos.

Concluímos que os conjuntos algébricos em $\mathbb{P}^1$ são os subconjuntos finitos de $\mathbb{P}^1$ e $\mathbb{P}^1$.

Vale salientar que, no caso geral, ao fatorarmos um polinômio homogêneo G em $\mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ e aplicarmos $\mathcal{Z}$, vamos escrever $\mathcal{Z}(G)$ como uma união de hipersuperfícies, conceito que vamos introduzir a seguir.

Hipersuperfícies em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$

Um conjunto algébrico $Y \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ é denominado *hipersuperfície* se existe $F \in S_d$ não nulo de grau $d \geqslant 1$ tal que $Y = \mathcal{Z}(F)$.

Se $\mathcal{Z}(F)$ é uma hipersuperfície tal que $\langle F \rangle = \sqrt{\langle F \rangle}$ (ou seja, F é *livre de quadrados*[57]), então $\mathcal{Z}(F)$ será denominada *hipersuperfície reduzida* de grau $d = \text{grau}(F)$.

Conforme seja o grau d da hipersuperfície reduzida $\mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, é usada a seguinte nomenclatura:

- Em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$

$$\begin{cases} d = 1 & \text{Hiperplano} \\ d = 2, 3, 4, 5, \ldots & \text{Hipersuperfície quádrica, cúbica, quártica, quíntica, \ldots} \end{cases}$$

- Em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ é denominada *curva* de grau d.

$$\begin{cases} d = 1 & \text{Reta} \\ d = 2, 3, 4, 5, \ldots & \text{cônica, cúbica, quártica, quíntica, \ldots} \end{cases}$$

- Em $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ é denominada *superfície* de grau d.

$$\begin{cases} d = 1 & \text{Plano} \\ d = 2, 3, 4, 5, \ldots & \text{Superfície quádrica, cúbica, quártica, quíntica, \ldots} \end{cases}$$

A seguir, vamos introduzir as variedades lineares no caso projetivo. De forma análoga ao caso afim, entre as variedades lineares, encontram-se os pontos, retas e planos.

[57] Se $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ admite a fatoração em irredutíveis $F = F_1^{n_1} \cdots F_k^{n_k}$ dizemos que F é livre de quadrados se $n_1 = \ldots = n_k = 1$.

Variedades lineares projetivas

Seja Λ um conjunto algébrico próprio em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e $0 \leqslant k < n$ inteiro. Λ é denominada *k-variedade linear* (ou k-plano) se, existirem $L_1, \ldots, L_{n-k} \in S_1$ L.I. tais que $\Lambda = \mathcal{Z}(L_1, \ldots, L_{n-k})$.

Exemplo 1.50. Segue do Exemplo 1.49 que um conjunto unitário $\{a\} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ é uma 0-variedade linear.

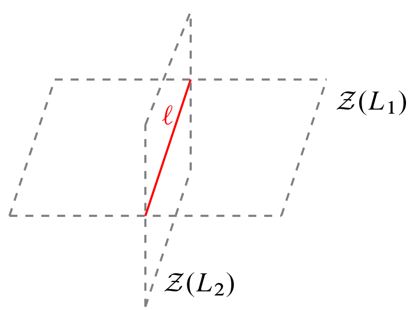
Exercício 1.48. Mostre que $Y = \left\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} | a_1 a_2 = 0\right\}$ não é uma variedade linear.

Retas e planos em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$

- ℓ é uma *reta* em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, se ℓ for uma 1-variedade linear, ou seja, se existirem $L_1,\ldots,L_{n-1} \in S_1$ L.I. tais que $\ell = \mathcal{Z}(L_1, \ldots, L_{n-1})$.

- π é um *plano* em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, se π for uma 2-variedade linear, ou seja, se existirem $L_1,\ldots,L_{n-2} \in S_1$ L.I. tais que $\pi = \mathcal{Z}(L_1, \ldots, L_{n-2})$.

Exemplo 1.51. Considere ℓ uma reta em $\mathbb{P}^3$. Logo, $\ell = \mathcal{Z}(L_1, L_2)$ sendo L_1, L_2 L.I. em S_1. Assim, $\ell = \mathcal{Z}(L_1) \cap \mathcal{Z}(L_2)$, ou seja, a reta ℓ é determinada pela interseção de dois planos distintos.



Observação 1.10. Como veremos em breve (cf. Proposição 1.19), as variedades lineares são cópias dos espaços projetivos. Mais precisamente, retas são isomorfas[58] com $\mathbb{P}^1$, planos com $\mathbb{P}^2$, e assim por diante. Para isso, fixaremos $\Psi : S_1 \longrightarrow (\mathbb{K}^{n+1})^*$ isomorfismo $\mathbb{K}$-linear descrito a seguir.

Lembre que S_1 é um espaço vetorial de dimensão $n + 1$ sobre $\mathbb{K}$ tendo $\{x_0, \ldots, x_n\}$ como uma base.

Para simplificar as notações vamos denotar por $\{e_0, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{K}^{n+1}$, sendo $e_0 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. A seguir considere a base dual $\{e_0^*, \ldots, e_n^*\}$.

[58] Isomorfismos são funções bijetivas tais que ela e sua inversa são definidas localmente por funções coordenadas polinomiais (cf. Proposição 1.32).

Assim, $e_j^* \in (\mathbb{K}^{n+1})^*$ é o funcional linear dado por $e_j^*(\mathrm{v}) = v_j$ se $\mathrm{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Fixadas essas bases vamos considerar o isomorfismo linear

$$\Psi : S_1 \longrightarrow (\mathbb{K}^{n+1})^* \quad \text{dado por } a_0x_0 + \cdots + a_nx_n \longmapsto a_0e_0^* + \cdots + a_ne_n^*. \tag{1.30}$$

Lema 1.9. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão n e $f_1, \ldots, f_k$ com $k \leqslant n$ funcionais lineares sobre V (i.e. $f_1, \ldots, f_k \in V^*$). Seja $W_i = \ker(f_i)$ para cada i, $1 \leqslant i \leqslant k$, então temos:*

(i) $f_1, \ldots, f_k$ *são* L.I. *se, e somente se,* $\dim(W_1 \cap \cdots \cap W_k) = n - k$.

(ii) $f_1, \ldots, f_k$ *são* L.D. *se, e somente se,* $\dim(W_1 \cap \cdots \cap W_k) > n - k$.

Demonstração. Observe que $[f_1, \ldots, f_k]$ é o anulador[59] de $W_1 \cap \cdots \cap W_k$. Assim,

$$\dim(W_1 \cap \cdots \cap W_k) = n - \dim[f_1, \ldots, f_k].$$

A partir dessa igualdade deduzimos as afirmações (i) e (ii). □

Proposição 1.19. *Seja Λ um conjunto algébrico próprio em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ e $0 \leqslant k < n$ inteiro. Verifica-se que*

Λ é uma k-variedade linear $\Longleftrightarrow$ Existe $W \in G_{k+1}(\mathbb{K}^{n+1})$ tal que $\Lambda = \mathbb{P}(W)$.

Demonstração. $\boxed{\Longrightarrow}$ Seja Λ uma k-variedade linear em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Assim, existem L_1, ..., $L_{n-k} \in S_1$ L.I. tais que $\Lambda = \mathcal{Z}(L_1, \ldots, L_{n-k})$.

A partir do isomorfismo em (1.30), considere $f_i = \Psi(L_i) \in (\mathbb{K}^{n+1})^*$. Como $\{L_i\}_{i=1}^{n-k}$ é L.I. segue que $\{f_i\}_{i=1}^{n-k}$ também é L.I.. Logo, segue do item (i) no Lema 1.9 que

$$\dim(W_1 \cap \cdots \cap W_{n-k}) = n + 1 - (n - k) = k + 1$$

sendo $W_i = \ker(f_i)$ para cada i, $1 \leqslant i \leqslant n - k$.

Afirmação 1: Se $W = W_1 \cap \cdots \cap W_{n-k}$ então $\Lambda = \mathbb{P}(W)$.

De fato, se $L_i = \sum_{j=0}^n a_{i,j}x_j$ então $f_i = \sum_{j=0}^n a_{i,j}e_j^*$ para $i = 0, \ldots, n - k$. Assim,

$$\begin{aligned} b = [b_0 : \ldots : b_n] \in \Lambda \quad &\Longleftrightarrow L_i(b) = \textstyle\sum_{j=0}^n a_{i,j}b_j = 0, \ \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n-k\} \\ &\Longleftrightarrow f_i(b_0, \ldots, b_n) = 0, \ \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n-k\} \\ &\Longleftrightarrow (b_0, \ldots, b_n) \in W - \{(0, \ldots, 0)\} \\ &\Longleftrightarrow b \in \mathbb{P}(W). \end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Assuma que Λ é um conjunto algébrico próprio em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ tal que $\Lambda = \mathbb{P}(W)$, sendo W um subespaço de $\mathbb{K}^{n+1}$ de dimensão $k + 1$ com $0 \leqslant k < n$ inteiro.

[59] Se W é um subespaço vetorial de V, define-se o *anulador* de W por: $W^0 = \{f \in V^* | f(\mathrm{w}) = \mathbf{0}, \ \forall\, \mathrm{w} \in W\}$. Verifica-se que $\dim V = \dim W + \dim W^0$.

Assim, W^0, o anulador de W, tem dimensão $(n+1)-(k+1)=n-k$.

Seja $\{f_1,\dots,f_{n-k}\}$ uma base de W^0. Considere, $L_i=\Psi^{-1}(f_i)$ para cada i. Assim, $\{L_i\}_{i=1}^{n-k}$ é um conjunto L.I. em S_1.

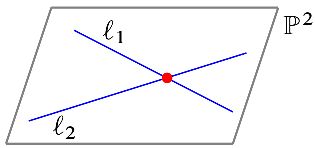
Deixamos a cargo do leitor concluir que $\Lambda=\mathcal{Z}(L_1,\dots,L_{n-k})$. $\square$

Corolário 1.9. *Seja Λ um conjunto algébrico em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Então*

(i) *Λ é uma reta $\iff \Lambda=\mathbb{P}(W)$, para algum $W\in G_2(\mathbb{K}^{n+1})$.*

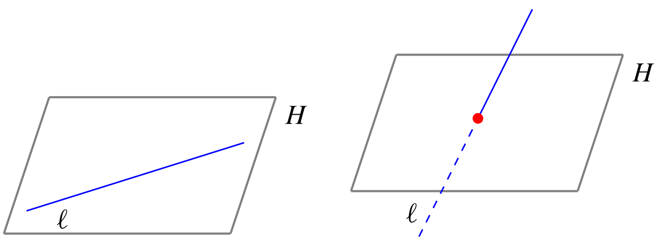
(ii) *Λ é um plano $\iff \Lambda=\mathbb{P}(W)$, para algum $W\in G_3(\mathbb{K}^{n+1})$.*

Exercício 1.49. Sejam ℓ_1 e ℓ_2 retas distintas em $\mathbb{P}^2$. Mostre que $\ell_1\cap\ell_2$ consiste de um único ponto.



Exercício 1.50. Sejam ℓ_1,ℓ_2 retas em $\mathbb{P}^3$ e $H\subset\mathbb{P}^3$ um plano. Mostre que:

(a) $\ell\subset H$ ou $\ell\cap H$ consiste de um único ponto.



(b) Se $\ell_i=\mathbb{P}(W_i)$ com $W_i\in G_2(\mathbb{C}^4)$ para $i=1,2$, então

$$\ell_1\cap\ell_2=\emptyset\iff W_1\oplus W_2=\mathbb{C}^4.$$

No caso projetivo, também podemos definir a topologia de Zariski, que de forma análoga ao caso afim, tem os conjuntos algébricos projetivos como fechados.

Topologia de Zariski em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$

Proposição 1.20. *Se $\mathcal{C}_{alg}=\left\{Y\,|\,Y \text{ é um conjunto algébrico em } \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}\right\}$, então $\mathcal{C}_{alg}$ induz uma topologia em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, ao considerarmos os complementares dos conjuntos algébricos em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Esta topologia é denominada* Topologia de Zariski *em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.*

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor. $\square$

No que segue do texto ao considerarmos subconjuntos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ usaremos a topologia induzida pela topologia de Zariski em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, salvo menção em contrário.

1.2.1 Variedades projetivas e quase projetivas

Seja $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ um conjunto algébrico projetivo. Y será denominada *variedade projetiva* se, Y for irredutível.[60] De forma mais geral, um subconjunto Y de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ é denominado *conjunto algébrico quase projetivo* (respectivamente, *variedade quase projetiva*) se for um subconjunto aberto de um conjunto algébrico projetivo (respectivamente, se for um subconjunto aberto de uma variedade projetiva) em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Exemplo 1.52. Todos os abertos e variedades projetivas em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ são variedades quase projetivas.

Exemplo 1.53. O conjunto vazio é um conjunto irredutível em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Logo, uma variedade quase projetiva.

Exemplo 1.54. $\emptyset \neq Y \subseteq \mathbb{P}^1$ é irredutível $\Longleftrightarrow$ Y é unitário ou Y é infinito. Sabemos que os fechados em $\mathbb{P}^1$ são os subconjuntos finitos de $\mathbb{P}^1$ e o próprio $\mathbb{P}^1$. Assim, todo subconjunto infinito de $\mathbb{P}^1$ é irredutível.

Assim, só nos resta considerar $Y \subseteq \mathbb{P}^1$ finito e não vazio. Agora, observe que todo conjunto unitário é irredutível. A seguir, assuma que $Y \subseteq \mathbb{P}^1$ é finito e irredutível. Suponha que $\#(Y) \geqslant 2$. Neste caso, podemos escolher $a \in Y$ e escrever $Y = F_1 \cup F_2$ sendo $F_1 = \{a\}$ e $F_2 = Y - F_1$ ambos fechados próprios de Y. Logo Y é redutível.

Observe que o Exemplo 1.54 nos permite concluir que:

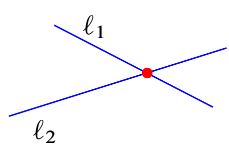
Exemplo 1.55. $\emptyset \neq Y \subseteq \mathbb{P}^1$ é uma variedade projetiva $\Longleftrightarrow$ Y é unitário ou $Y = \mathbb{P}^1$.

Exemplo 1.56. Se $\mathbb{K}$ for um corpo infinito, segue do Exemplo 1.60 que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ é uma variedade projetiva.

Exemplo 1.57. $Y = \Big\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} | a_1 a_2 = 0\Big\}$ é uma curva de grau 2, visto que $Y = \mathcal{Z}(x_1 x_2)$ e $\langle x_1 x_2 \rangle$ é um ideal homogêneo radical do anel $\mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$. Observe que Y é irredutível. De fato,

$$\mathcal{Z}(x_1 x_2) = \mathcal{Z}(x_1) \cup \mathcal{Z}(x_2) \text{ e } \mathcal{Z}(x_1) \cap \mathcal{Z}(x_2) = \Big\{[1:0:0]\Big\}.$$

Assim, Y é união das retas (projetivas) $\ell_1 = \mathcal{Z}(x_1)$ e $\ell_2 = \mathcal{Z}(x_2)$ que se encontram no ponto $\mathrm{p} = [1:0:0]$.



[60]Se X um espaço topológico e Y um subconjunto de X. Considere a topologia induzida por X em Y.

Y é dito *irredutível* $\Longleftrightarrow$ $\begin{array}{l} \forall\ F_1, F_2 \text{ fechados em } Y \text{ tais que } Y = F_1 \cup F_2 \\ \text{tem-se que } F_1 = Y \text{ ou } F_2 = Y. \end{array}$

Observação 1.11. Seja $Y = \left\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} | a_1a_2 = 0\right\}$. Note que $Y = \mathcal{Z}(x_1x_2) = \mathcal{Z}(x_1^2x_2) = \mathcal{Z}(x_1x_2^2) = \mathcal{Z}(x_1^{n_1}x_2^{n_2})$ com n_1, n_2 inteiros positivos[61]. Assim, não podemos definir o grau da curva Y simplesmente como sendo grau(F), tal que $Y = \mathcal{Z}(F)$.

Pergunta

Se F é homogêneo de grau d, tal que $Y = \mathcal{Z}(F)$, podemos concluir que $\sqrt{\langle F\rangle} = \langle x_1x_2\rangle$?

Comece por perceber que $d \geqslant 2$. [62]. Se

$\boxed{d = 2}$ Observe que podemos escrever F da seguinte forma

$$F = x_2 \cdot L + \alpha_0x_1^2 + \alpha_1x_1x_0 + \alpha_2x_0^2, \quad \text{com} \quad L = \beta_0x_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2.$$

Ao consideramos os pontos $\mathrm{p} = [1 : 0 : 0]$, $\mathrm{p}_1 = [1 : 1 : 0]$, $\mathrm{p}_2 = [2 : 1 : 0]$, $\mathrm{p}_3 = [1 : 0 : 1]$ e $\mathrm{p}_4 = [2 : 0 : 1]$ em Y, temos que

$$F(\mathrm{p}) = 0 \Longrightarrow \alpha_2 = 0,$$

$$\begin{array}{l} F(\mathrm{p}_1) = 0 \Longrightarrow \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \\ F(\mathrm{p}_2) = 0 \Longrightarrow \alpha_0 + 2\alpha_1 = 0 \end{array} \Longrightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = 0.$$

$$\begin{array}{l} F(\mathrm{p}_3) = 0 \Longrightarrow \beta_0 + \beta_2 = 0 \\ F(\mathrm{p}_4) = 0 \Longrightarrow 2\beta_0 + \beta_2 = 0 \end{array} \Longrightarrow \beta_0 = \beta_2 = 0.$$

Portanto, $F = \beta_1x_1x_2$. Neste caso, $\sqrt{\langle F\rangle} = \langle F\rangle = \langle x_1x_2\rangle$.

$\boxed{d = 3}$ Podemos escrever F da seguinte forma

$$F = x_1x_2L + +\alpha_0x_0^3 + x_0^2(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) + x_0(\alpha_3x_1^2 + \alpha_4x_2^2) + \alpha_5x_1^3 + \alpha_6x_2^3$$

sendo $L = \beta_0x_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2$.

$$\mathrm{p} = [1 : 0 : 0] \in Y \Longrightarrow F(\mathrm{p}) = 0 \Longrightarrow \alpha_0 = 0.$$

$$\mathrm{q} = [t : 1 : 0] \in Y,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \overset{F(\mathrm{q})=0}{\Longrightarrow} \alpha_1t^2 + \alpha_3t + \alpha_5 = 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0.$$

$$\mathrm{r} = [t : 0 : 1] \in Y,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \overset{F(\mathrm{r})=0}{\Longrightarrow} \alpha_2t^2 + \alpha_4t + \alpha_6 = 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = 0.$$

[61] De fato, $\sqrt{\langle x_1^{n_1}x_2^{n_2}\rangle} = \langle x_1x_2\rangle$ para quaisquer n_1 e n_2 inteiros positivos.

[62] Visto que, se grau$(F) = 1$ então $F = \alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2$ sendo algum α_i não nulo. Como $\mathrm{p} = [1 : 0 : 0]$, $\mathrm{p}_1 = [1 : 1 : 0]$ e $\mathrm{p}_2 = [1 : 0 : 1]$ são pontos de Y, temos que $F(\mathrm{p}) = \alpha_0 = 0$, $F(\mathrm{p}_1) = \alpha_1 = 0$ e $F(\mathrm{p}_2) = \alpha_2 = 0$, o que é absurdo.

Portanto, $F = x_1x_2L$, sendo $L = \beta_0x_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2$. Agora, note que

$$Y = \mathcal{Z}(F) = \mathcal{Z}(x_1x_2L) = \underbrace{\mathcal{Z}(x_1x_2)}_{=Y} \cup \mathcal{Z}(L) \Longrightarrow \mathcal{Z}(L) \subseteq Y$$

sendo $\mathcal{Z}(L)$ uma reta em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Deixamos como exercício mostrar que $L = \beta_1x_1$ ou $L = \beta_2x_2$. Portanto, $F = \beta_1x_1^2x_2$ ou $F = \beta_2x_1x_2^2$.

$\boxed{d \geqslant 4}$ Considere $F = x_1x_2^{d-3}(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$. Note que,

$$\mathcal{Z}(F) = \underbrace{\mathcal{Z}(x_1x_2^{d-3})}_{=Y} \cup \underbrace{\mathcal{Z}(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)}_{=\emptyset} = Y \quad \text{e} \quad \sqrt{\langle F \rangle} = \underbrace{\left\langle x_1x_2(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)\right\rangle}_{\neq \langle x_1x_2 \rangle}.$$

Como veremos a seguir o conceito de ideal associado no caso projetivo é idêntico ao do caso afim. Entretanto, uma peculiaridade do caso projetivo é que tais ideais são homogêneos, como veremos na Observação 1.12.

Ideal Associado

Considere $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. O *ideal associado* a Y em $S = \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ é dado por

$$\mathcal{I}(Y) := \Big\{ f \in S \,|\, f(a) = 0, \ \forall\, a \in Y \Big\}.$$

Observação 1.12. Seja $T = \Big\{ F \in S \,|\, F \text{ é homogêneo e } F(a) = 0, \quad \forall\, a \in Y \Big\}$.

(a) $\mathcal{I}(Y) = \langle T \rangle$. Logo $\mathcal{I}(Y)$ é um ideal homogêneo do anel S.

De fato, para todo $F \in T$ verifica-se que $F(a) = 0, \quad \forall\, a \in Y$. Assim, todo $g \in \langle T \rangle$ também satisfaz a condição $g(a) = 0, \quad \forall\, a \in Y$. Portanto, $\langle T \rangle \subseteq \mathcal{I}(Y)$.

Para verificarmos a outra inclusão, considere $0 \neq f \in \mathcal{I}(Y)$ [63] e escreva f na sua decomposição em partes homogêneas, ou seja,

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d, \qquad \text{com } f_i \in S_i. \tag{1.31}$$

Se $a = [a_0 : \ldots : a_n] \in Y$ então $f(a) = 0$ e segue de (1.31) que

$$f_0 + f_1(a_0, \ldots, a_n) + \cdots + f_d(a_0, \ldots, a_n) = 0$$

Entretanto, se mudarmos as coordenadas homogêneas do ponto a para $a = [\lambda a_0 : \ldots : \lambda a_n]$ com λ em $\mathbb{K}$ não nulo, segue de (1.31) que

$$f_0 + f_1(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) + \cdots + f_d(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \neq 0.$$

[63] Se $\mathcal{I}(Y) = \{0\}$ o resultado segue.

Ou equivalentemente,

$$f_0 + f_1(a_0,\dots,a_n)\lambda + \cdots + f_d(a_0,\dots,a_n)\lambda^d = 0, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \neq 0. \quad (1.32)$$

Segue de (1.32) que $\sum_{i=0}^{d} b_i t^i \in \mathbb{K}[t]$ sendo $b_i = f_i(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{K}$ é o polinômio nulo (visto que $\mathbb{K}$ é infinito). Portanto,

$$f_i(a_0,\dots,a_n) = 0, \quad \forall\, i \in \{0,\dots,d\} \Longrightarrow f_i(a) = 0, \quad \forall\, i \in \{0,\dots,d\}.$$

Como $a \in Y$ é arbitrário, concluímos que

$$f_i(a) = 0, \quad \forall\, i \in \{0,\dots,d\},\ \forall\, a \in Y.$$

Portanto, $f_0,\dots,f_d \in \langle T\rangle$. Assim, segue de (1.31) que $f \in \langle T\rangle$.

(b) $\mathcal{I}(Y)$ é um ideal radical. Deixamos essa verificação a cargo do leitor.

Exemplo 1.58. $\mathcal{I}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}) = \{0\}$ se $\mathbb{K}$ é infinito. Basta aplicar o raciocínio do Exemplo 1.15.

Exemplo 1.59. Se $a = [a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ com $a_i \neq 0$, então $\mathcal{I}(\{a\}) = \langle a_i x_0 - a_0 x_i, \ldots, \underbrace{a_i x_j - a_j x_i}_{j \neq i}, \ldots, a_i x_n - a_n x_i\rangle$ (cf. Exemplo 1.49).

Perguntas

Observe que $\mathcal{Z}(1) = \emptyset$ e $\mathcal{Z}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \emptyset$.

(a) $\mathcal{I}(\emptyset) = ?$

(b) Quais são todos os ideais $J \subset S = \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ homogêneos do anel tais que $\mathcal{Z}(J) = \emptyset$?

Proposição 1.21. *Sejam I um ideal homogêneo de S e $S_+ := \langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle$ o ideal* irrelevante. *Então são equivalentes:*

(i) $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$.

(ii) $\sqrt{I} = \langle 1\rangle$ *ou* $\sqrt{I} = S_+$.

(iii) $S_d \subseteq I$, *para algum* $d \geqslant 0$.

Demonstração. $\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$ Suponha que $\sqrt{I} \neq \langle 1\rangle$. Nosso objetivo será mostrar que $\sqrt{I} = S_+$.

Se $\sqrt{I} \neq \langle 1 \rangle$, então $I \neq \langle 1 \rangle$. Assim, segue do *Teorema dos zeros de Hilbert* no caso afim (cf. Teorema 1.1) que

$$\mathcal{Z}(I) = \left\{ a \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n+1} | f(a) = 0, \ \ \forall f \in I \right\} \neq \emptyset.$$

Afirmação: $\mathcal{Z}(I) = \left\{ (0,0,\ldots,0) \right\}$.

Sejam $F_1, \ldots, F_k$ um conjunto de geradores homogêneos de I. Assim, $I = \langle F_1, \ldots, F_k \rangle$ e $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(F_1) \cap \cdots \cap \mathcal{Z}(F_k)$. Como F_i é homogêneo tem-se que

$$F_i(0,0,\ldots,0) = 0, \quad \forall\, i \Longrightarrow (0,0,\ldots,0) \in \mathcal{Z}(I).$$

A seguir, suponha por absurdo que $a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathcal{Z}(I)$ e $a \neq (0,0,\ldots,0)$. Neste caso,

$$F_i(a) = 0, \quad \forall\, i \Longrightarrow [a_0 : \ldots : a_n] \in \mathcal{Z}(I)$$

o que é um absurdo.

Por outro lado, o *Teorema dos zeros de Hilbert* (cf. Teorema 1.1) também nos garante que $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I}$. Assim,

$$\mathcal{I}(\{(0,0,\ldots,0)\}) = \sqrt{I} \iff S_+ = \sqrt{I}.$$

$\boxed{\text{(ii)} \Longrightarrow \text{(i)}}$ Sabemos que $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(\sqrt{I})$ (veja Proposição 1.18). Além disso, $\mathcal{Z}(J) = \emptyset$ se $J = \langle 1 \rangle$ ou $J = S_+$. Portanto, se I é um ideal satisfazendo (ii) segue-se que $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$.

$\boxed{\text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)}}$ Vamos analisar as duas possibilidades para $\sqrt{I}$ (conforme (ii)).

- $\sqrt{I} = \langle 1 \rangle \Longrightarrow I = S \Longrightarrow S_d \subset I$ para todo $d \geqslant 0$.
- $\sqrt{I} = S_+ \Longrightarrow \ \ \forall\, i \in \{0, \ldots, n\}$, $\exists\, m_i \geqslant 1$ inteiro tal que $x_i^{m_i} \in I$.

Afirmação: Sejam $m = \max\{m_0, \ldots, m_n\}$ e $d = m(n+1)$ então $S_d \subset I$.

Considere $u = x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} \in S_d$. Observe que se existir $j \in \{i_0, \ldots, i_n\}$ tal que $j \geqslant m$ então $u \in I$, visto que $x_i^m \in I$ para todo i (pois $x^m = x_i^{m_i} x_i^{m-m_i}$ e $x_i^{m_i} \in I$). Caso contrário, $i_k < m$ para $k = 0, \ldots, n$, logo $i_0 + \cdots + i_n < m(n+1) = d$, o que é absurdo.

$\boxed{\text{(iii)} \Longrightarrow \text{(i)}}$ Se $d = 0$, então $I = \langle 1 \rangle$. Caso contrário, temos que $S_d \subset I$ para algum $d \geqslant 1$. Então $\{x_0^d, x_1^d, \ldots, x_n^d\} \subset I$. Portanto,

$$\mathcal{Z}(I) \subseteq \mathcal{Z}(x_0^d, x_1^d, \ldots, x_n^d) = \mathcal{Z}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \emptyset,$$

ou seja, $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$. $\square$

Proposição 1.22. *Sejam $Y, Y_1 \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e $T \subseteq S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ formado por polinômios homogêneos. Então*

(i) *Se $Y_1 \subseteq Y$, então $\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{I}(Y_1)$.*

(ii) *$\mathcal{I}(Y \cup Y_1) = \mathcal{I}(Y) \cap \mathcal{I}(Y_1)$.*

(iii) *$T \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(T))$.*

(iv) *$\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) = \overline{Y}$, sendo $\overline{Y}$ o fecho de Y relativo à topologia de Zariski.*

Demonstração. $\boxed{\text{(i)}}$ Segue da definição de ideal associado.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Prova análoga ao caso afim (veja a prova do item (iii) da Proposição 1.5).

$\boxed{\text{(iii)}}$ Deixamos como exercício.

$\boxed{\text{(iv)}}$ Prova análoga ao caso afim (veja a prova do item (v) da Proposição 1.5). □

Exercício 1.51. Seja $Y = \left\{[1 : t : t^2] | t \in \mathbb{C}\right\} \subset \mathbb{P}^2$. Determine $\mathcal{I}(Y)$.

Exercício 1.52. Sejam $Y = \{p, q\} \subset \mathbb{P}^2$, $p = [1 : 0 : 0]$ e $q = [0 : 1 : 0]$. Considere $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ e defina

$$A_d := \{f \in S_d | f(p) = 0 = f(q)\}.$$

(i) Mostre que A_d é um subespaço vetorial de S.

(ii) Determine uma base para A_1, A_2 e A_3. Qual é a dimensão de A_d?

(iii) Determine $\mathcal{I}(Y)$.

O ideal associado $\mathcal{I}$ no caso projetivo também pode ser usado para determinar se um dado conjunto algébrico projetivo é uma variedade projetiva ou não (cf. Proposição 1.23). Entretanto, para estabelecermos tal resultado, precisaremos usar o seguinte lema.

Lema 1.10. *Sejam $S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, $S^h = \{F \in S | F \in S_d$ para algum $d\}$ e I um ideal homogêneo de S. Então I é primo se, e somente se, para todos $F, G \in S^h$ tais que $FG \in I$, tem-se que $F \in I$ ou $G \in I$.*

Demonstração. $\boxed{\Longrightarrow}$ Se $F, G \in S^h$ então $F, G \in S$. Assim, essa implicação segue da definição de ideal primo no anel S.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Sejam $f, g \in S$ tais que $fg \in I$. Assuma que $f \notin I$.
Escreva a decomposição de f e g em partes homogêneas,

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d \quad \text{e} \quad g = g_0 + g_1 + \cdots + g_e.$$

Assim, a decomposição em partes homogêneas de fg é dada por:

$$(fg)_0 = f_0g_0, (fg)_1 = f_0g_1 + f_1g_0, \ldots, (fg)_k = \sum_{\ell=0}^{k} f_\ell g_{k-\ell}, \ldots, (fg)_{de} = f_d g_e.$$

Lembre que:

- $fg \in I \iff (fg)_k \in I, \ \ \forall\, k \in \{0, \ldots, de\}$.
- $f \notin I \iff \exists\ i \in \{0, \ldots, d\}$, tal que $f_i \notin I$.

  Seja $\alpha \in \{0, \ldots, d\}$ o menor índice tal que $f_\alpha \notin I$. Assim, $f_0, f_1, \ldots, f_{\alpha-1} \in I$ e $f_\alpha \notin I$.

Afirmação: $g_j \in I$ para todo $j \in \{0, \ldots, e\}$.

Por absurdo, suponha que existe $i \in \{0, \ldots, e\}$ tal que $g_i \notin I$. Escolha $\beta \in \{0, \ldots, e\}$ tal que $g_0, \ldots, g_{\beta-1} \in I$ e $g_\beta \notin I$.

Entretanto, $(fg)_{\alpha+\beta} \in I$. Assim,

$$(fg)_{\alpha+\beta} = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\alpha-1} f_\ell g_{\alpha+\beta-\ell}}_{\in I} + f_\alpha g_\beta + \underbrace{f_{\alpha+1}g_{\beta-1} + \cdots + f_{\alpha+\beta}g_0}_{\in I} \Longrightarrow$$

$$f_\alpha g_\beta \in I \underset{f_\alpha \notin I}{\overset{Hip.}{\Longrightarrow}} g_\beta \in I.$$

O que é absurdo. Portanto, segue da afirmação que $g \in I$. Assim, I é um ideal primo do anel S. $\square$

Proposição 1.23. *Seja Y um subconjunto de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ não vazio. Então*

$$Y \textit{ é irredutível} \iff \mathcal{I}(Y) \textit{ é um ideal primo.}$$

Demonstração. Segue do Lema 1.10 e da Proposição 1.6. $\square$

Exemplo 1.60. Se $\mathbb{K}$ for infinito então $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ é irredutível.

Seja $J = \mathcal{I}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}) \subseteq S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$. Observe que $\mathcal{Z}(J) = \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}$. Assim, $J \subseteq \sqrt{J} = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)) = \mathcal{I}(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}) = \{0\}$. Portanto, $\mathcal{I}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}) = \{0\} \in \operatorname{Spec}(S)$.

Exercício 1.53. Seja X $\subset \mathbb{P}^n$ tal que $\mathcal{I}(\mathrm{X}) = \langle F \rangle$ com $F \in S_d$ com $d \geqslant 1$. Mostre que X é irredutível se, e somente se, F é um polinômio irredutível do anel $S = \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$.

Pontos singulares numa hipersuperfície

Sejam $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ um hipersuperfície tal que $\mathcal{I}(X) = \langle F \rangle$ e $p \in X$. Dizemos que p é um *ponto singular* de X se $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0$, para cada $i \in \{0, ..., n\}$. Usaremos a notação Sing(X) para indicar o conjunto de todos os pontos singulares que a hipersuperfície X possui. Se $\mathrm{Sing}(X) = \emptyset$ diremos que X é uma *hipersuperfície não singular*. Caso contrário, ou seja, se $\mathrm{Sing}(X) \neq \emptyset$, então diremos que X é *singular*.

Exemplo 1.61. Considere $F \in S = \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ homogêneo e $X = \mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}^n$. Note que

(a) Se $F \in S_1$ é não nulo, então $\mathrm{Sing}(X) = \emptyset$. Logo, todo hiperplano em $\mathbb{P}^n$ é não singular.

(b) Se $F = x_0^d + x_1^d + \cdots + x_{n-1}^d \in S_d$ com $d, n \geqslant 2$, então $[0 : 0 : \ldots : 0 : 1]$ é o único ponto singular da hipersuperfície X.[64] Logo, X é uma hipersuperfície singular.

Exercício 1.54. Dado $F = a_{00}x_0^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^3$, considere a cônica $C = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^2$. Mostre que

$$C \text{ é singular} \iff \begin{vmatrix} 2a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & 2a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & 2a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Um resultado que nos permite fazer uma conexão entre o conceito de irredutibilidade e hipersuperfícies não singulares é o seguinte: toda hipersuperfície não singular em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ se $n \geqslant 2$ é irredutível (cf. Lema 1.13).

Componentes irredutíveis dos conjuntos algébricos projetivos

Como no caso afim, verifica-se que

Lema 1.11. *Todo conjunto algébrico projetivo em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ é um espaço topológico noetheriano (com a topologia induzida).*

Assim, segue da Proposição 1.7 que se Y é um conjunto algébrico não vazio em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, então Y pode ser escrito como uma união finita

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_k$$

onde cada Y_i é um subconjunto fechado irredutível de Y. Se colocarmos a condição $Y_i \not\subseteq Y_j$ para todo $i \neq j$, então $Y_1, \ldots, Y_k$ são unicamente determinados (a menos de reordenação). Neste caso, $Y_1, \ldots, Y_k$ são denominadas *componentes irredutíveis* de Y.

[64] Basta observar que $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = dx_i^{d-1}$ para cada $i \in \{0, ..., n-1\}$ e que $\mathcal{Z}(dx_0^{d-1}, \ldots, dx_{n-1}^{d-1}) = \mathcal{Z}(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

Exercício 1.55. Determine as componentes irredutíveis de $Y = \mathcal{Z}(I) \subseteq \mathbb{P}^3$ sendo

(a) $I = \langle x_0^2, x_1x_2, x_1x_3 \rangle$

(b) $I = \langle x_0x_1, x_2x_3, x_1x_3 \rangle$

(c) $I = \langle x_0^2 - x_1x_2, x_1x_3 \rangle$.

Exercício 1.56. Considere $I_\lambda := \langle x_0^2 - x_1x_2, x_1^2 - \lambda x_2^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, com $\lambda \in \mathbb{C}$. Se $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, existe $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{Z}(I_{\lambda_i}) \subseteq \mathbb{P}^2$ possua exatamente i componentes irredutíveis, respectivamente?

Exercício 1.57. Determine $L_1, L_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ homogêneos de grau 1 e L.I tais que $\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(L_1, L_2) \subset \mathbb{P}^3$ possua exatamente d componentes irredutíveis, se $F = x_0^d - x_1^d + x_2^d - x_3^d$.

Exemplo 1.62. Se Λ é uma k–variedade linear em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ com $0 \leqslant k < n$, então Λ é uma variedade projetiva.

De fato, se Λ é uma k–variedade linear em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ com $0 \leqslant k < n$, então existem $L_1, \ldots, L_{n-k} \in S_1$ L.I. tais que $\Lambda = \mathcal{Z}(L_1, \ldots, L_{n-k})$. Observe que, $\Lambda \neq \emptyset$, visto que $\Lambda = \mathbb{P}(W)$ sendo W subespaço vetorial de $\mathbb{K}^{n+1}$ de dimensão $k+1$ (cf. Proposição 1.19). Como $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ temos que $1 \leqslant \dim W = k + 1 \leqslant n$. Portanto, existe $\mathrm{w} \in W$ não nulo, o qual determina um ponto em Λ.

Seja $I = \langle L_1, \ldots, L_{n-k} \rangle$. Como $\Lambda = \mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$ segue do Teorema dos zeros de Hilbert (cf. Teorema 1.4) que $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \mathcal{I}(\Lambda) = \sqrt{I} = \sqrt{\langle L_1, \ldots, L_{n-k} \rangle}$.

Afirmação: Se $L_1, \ldots, L_k \in S_1$ L.I. então $I \in \operatorname{Spec}(S)$.

Aplicando o raciocínio empregado na prova da Proposição 1.13, mostra-se que existe um isomorfismo $\varphi : S \longrightarrow S$ (dado por uma permutação $\sigma \in S_{n+1}$ nas variáveis $x_0, \ldots, x_n$) tal que $\varphi(L_i) = G_i$, sendo G_i homogêneo (de grau 1)[65] da forma $G_i = x_{i-1} + H_i$ com $H_i \in \mathbb{K}[x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_n]$ homogêneo de grau 1, para cada $i \in \{1, \ldots, n-k\}$. Assim φ induz o isomorfismo de anéis

$$\frac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{\langle L_1, \ldots, L_{n-k} \rangle} \cong \frac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{\langle G_1, \ldots, G_{n-k} \rangle}. \tag{1.33}$$

A seguir, considere $\psi : \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] \longrightarrow \mathbb{K}[x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_n]$ o único homomorfismo de anéis determinado por

$$\begin{array}{rccccl} \psi : & \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{K}[x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_n] & & \\ & x_{i-1} & \longmapsto & -H_i & & i \in \{1, \ldots, n-k\} \\ & x_j & \longmapsto & x_j & & j \in \{n-k, \ldots, n\} \\ & a & \longmapsto & a & & a \in \mathbb{K}. \end{array}$$

[65] pois φ só permuta as variáveis, logo leva polinômios homogêneos em polinômios homogêneos.

Ou seja, $\psi(f) = f(-H_1, \ldots, -H_{n-k}, x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_n)$, se $f \in S$.

Observe que ψ é sobrejetor e $\ker(\psi) = \langle G_1, \ldots, G_{n-k} \rangle$. Portanto,

$$\frac{\mathbb{K}[\underline{x}]}{\langle G_1, \ldots, G_{n-k} \rangle} \cong \mathbb{K}[x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_n]. \tag{1.34}$$

Segue de (1.33) e (1.34) que $\dfrac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{\langle L_1, \ldots, L_{n-k} \rangle}$ é isomorfo ao domínio $\mathbb{K}[x_{n-k}, \ldots, x_n]$. Portanto, o ideal $I = \langle L_1, \ldots, L_{n-k} \rangle$ é primo.

Assim, $\mathcal{I}(\Lambda) = \sqrt{I} = \sqrt{\langle L_1, \ldots, L_{n-k} \rangle} = \langle L_1, \ldots, L_{n-k} \rangle \in \operatorname{Spec}(S)$. Portanto, a k–variedade linear Λ é uma variedade projetiva.

Observação 1.13. De aqui em diante vamos denominar $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ *variedade linear* se, $\mathcal{I}(\Lambda)$ for gerado por um subconjunto L.I. de $S_1 = [x_0, \ldots, x_n]$.

Exemplo 1.63. $\emptyset$ e $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ são variedades lineares em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. De fato

(a) Se $\Lambda = \emptyset$, então $\mathcal{I}(\Lambda) = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ sendo $\{x_0, \ldots, x_n\}$ um subconjunto L.I. de S_1.

(b) $\emptyset$ é um subconjunto L.I. de S_1 tal que $\langle \emptyset \rangle = \{0\} = \mathcal{I}(\Lambda)$, se $\Lambda = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Exercício 1.58. Seja $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade linear não vazia. Mostre que existe $0 \leqslant k \leqslant n$ tal que Λ está em bijeção com $\mathbb{P}^k$.

Exercício 1.59. Sejam $\Lambda_1, \Lambda_2 \subseteq \mathbb{P}^n$ variedades lineares. Mostre que $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ é uma variedade linear.

Exercício 1.60. Sejam $C \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ finito e $\langle C \rangle = \bigcap\limits_{\Lambda \in \Sigma_C} \Lambda$ sendo $\Sigma_C = \{\subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} | C \subseteq \Lambda$ e Λ é variedade linear$\}$.

(a) Mostre que $\langle C \rangle$ é uma variedade linear. Conclua que $\langle C \rangle$ é a menor (no sentido da inclusão) variedade linear em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ contendo C.

(b) Mostre que $\langle C \rangle = \mathcal{Z}(x_0 + x_1)$ para $C = \{[1 : -1 : 0], [0 : 0 : 1]\} \subset \mathbb{P}^2$.

(c) Determine $\langle C \rangle$ para $C = \{[1 : 1 : 1], [a : b : 0]\} \subset \mathbb{P}^2$.

(d) Determine $\langle C \rangle$, para $C = \{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathbb{P}^2$ com $p_i \neq p_j$ para todo $i \neq j$.

A seguir vamos introduzir o Mergulho de Segre, que nos permitirá caracterizar quais subconjuntos do produto cartesiano $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ serão denominados de conjuntos algébricos. Salientamos que no Capítulo 2 iremos utilizar esse conceito ao aplicarmos o Teorema da dimensão das fibras (Teorema 1.7).

Conjuntos algébricos projetivos em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$

Mergulho de Segre. Seja $N = (n+1)(m+1) - 1$. Sejam $a = [a_0 : \ldots : a_n]$ e $b = [b_0 : \ldots : b_m]$, então defina $\varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N$ da seguinte forma:

$$(a,b) \overset{\varphi}{\longmapsto} [a_0 b_0 : \ldots : a_0 b_m : a_1 b_0 : \ldots : a_1 b_m : \ldots : a_n b_0 : \ldots : a_n b_m].$$

Observe que:

- φ está bem definida.[66]

- φ é injetora.

  Considere $c = [c_0 : \ldots : c_n]$ e $d = [d_0 : \ldots : d_m]$ tais que $\varphi(a,b) = \varphi(c,d)$. Assim, existe $\lambda \neq 0$ em $\mathbb{C}$ tal que

  $$a_i b_j = \lambda c_i d_j, \quad \forall\, i \in \{0, \ldots, n\},\ j \in \{0, \ldots, m\}. \tag{1.35}$$

  Sabemos que existem índices r, s tais que $a_r b_s \neq 0$. Segue de (1.35) que $c_r d_s \neq 0$. Assim,

  $$a = [a_0 b_s : \ldots : a_n b_s] = [\lambda c_0 d_s : \ldots : \lambda c_n d_s] = c, \ \text{ visto que } \lambda d_s \neq 0.$$

  Analogamente, segue de (1.35) que

  $$b = [a_r b_0 : \ldots : a_r b_m] = [\lambda c_r d_0 : \ldots : \lambda c_r d_m] = d, \ \text{ visto que } \lambda c_r \neq 0.$$

- $\mathrm{Im}(\varphi)$ é um conjunto algébrico projetivo em $\mathbb{P}^N$.

  De fato, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{Z}(T)$ sendo $T \subset \mathbb{C}[z_{00}, \ldots, z_{ij}, \ldots, z_{nm}]$ com $0 \leqslant i \leqslant n$ e $0 \leqslant j \leqslant m$ formado pelos polinômios homogêneos de grau 2

  $$F_{ijkl} = z_{ij} z_{kl} - z_{kj} z_{il} = \begin{vmatrix} z_{ij} & z_{il} \\ z_{kj} & z_{kl} \end{vmatrix}, \quad \forall i, k \in \{0, \ldots, n\},\ j, l \in \{0, \ldots, m\}.$$

  Ou seja, T é determinado por todos os menores de ordem 2×2 da matriz

  $$\begin{bmatrix} z_{00} & z_{01} & \cdots & z_{0m} \\ z_{10} & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z_{n0} & z_{n1} & \cdots & z_{nm} \end{bmatrix}.$$

  De fato, se $\mathrm{p} = \varphi(a,b) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ (logo $p_{ij} = a_i b_j$) tem-se que

  $$F_{ijkl}(\mathrm{p}) = p_{ij} p_{kl} - p_{kj} p_{il} = a_i b_j a_k b_l - a_k b_j a_i b_l = 0, \ \forall\, i, j, k, l \Longrightarrow \mathrm{p} \in \mathcal{Z}(T).$$

[66] De fato, se $a = [a_0 : \ldots : a_n] = [\lambda a_0 : \ldots : \lambda a_n]$ e $b = [b_0 : \ldots : b_m] = [\delta b_0 : \ldots : \delta b_m]$, então $\varphi(a,b) = [a_0 b_0 : \ldots : a_i b_j : \ldots : a_n b_m] = [\lambda\delta a_0 b_0 : \ldots : \lambda\delta a_i b_j : \ldots : \lambda\delta a_n b_m]$. Além disso, existem i, j tais que $a_i b_j \neq 0$.

Deixamos como exercício mostrar a outra inclusão.

A função $\varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N$ $((a,b) \longmapsto [a_0b_0 : \ldots : a_ib_j : \ldots : a_nb_m])$ é denominada *mergulho de Segre*. Essa função nos permite identificar os subconjuntos de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ com subconjuntos fechados do espaço projetivo $\mathbb{P}^N$. E nesse contexto, vamos dizer que um subconjunto Z de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ é um *conjunto algébrico projetivo* se sua imagem pelo mergulho de Segre, isto é, $\varphi(Z)$ for um conjunto algébrico projetivo em $\mathbb{P}^N$.

Exemplo 1.64. Se $n = m = 1$, então $N = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ e $\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ é dada por $(a,b) \longmapsto [a_0b_0 : a_0b_1 : a_1b_0 : a_1b_1]$.

Sabemos que $\mathrm{Im}(\varphi)$ é definido pelos menores 2×2 da matriz

$$\begin{bmatrix} z_{00} & z_{01} \\ z_{10} & z_{11} \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $\varphi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$ com $F = z_{00}z_{11} - z_{10}z_{01} \in \mathbb{C}[z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11}]$. De fato,

$$F(\varphi(a,b)) = F(a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0, a_1b_1) = a_0b_0a_1b_1 - a_0b_1a_1b_0 = 0, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{P}^1.$$

Exemplo 1.65. Se $n = 1$ e $m = 2$, então $N = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ e $\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$ é dada por $(a,b) \longmapsto [a_0b_0 : a_0b_1 : a_0b_2 : a_1b_0 : a_1b_1 : a_1b_2]$.

Considere o hiperplano $\mathcal{U} = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^5$ com $F = z_{01} - z_{11}$. Observe que:

- $\mathcal{U} \nsubseteq \mathrm{Im}(\varphi)$, visto que $\mathrm{p} = [0 : 0 : 1 : 1 : 0 : 0] \in \mathcal{U}$ e $\mathrm{p} \notin \mathrm{Im}(\varphi)$.

  Suponha, pelo absurdo, que $\mathrm{p} \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Assim, existem $a = [a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1$ e $b = [b_0 : b_1 : b_2] \in \mathbb{P}^2$, tais que $\varphi(a,b) = \mathrm{p}$. Logo,

  $$[a_0b_0 : a_0b_1 : a_0b_2 : a_1b_0 : a_1b_1 : a_1b_2] = [0 : 0 : 1 : 1 : 0 : 0].$$

  De onde concluímos que $a_0b_2 \neq 0$ e $a_1b_0 \neq 0$. Logo $a_i \neq 0$, para $i = 0, 1$. Entretanto, também temos que

  $$a_0b_0 = a_0b_1 = a_1b_1 = a_1b_2 = 0 \overset{a_i \neq 0}{\Longrightarrow} b_0 = b_1 = b_2 = 0 \quad \text{(Absurdo!)}$$

- $\mathcal{U} \cap \mathrm{Im}(\varphi)$ é um conjunto algébrico redutível.

  Sabemos que $\mathrm{Im}(\varphi)$ é definido pelos menores 2×2 da matriz

  $$\begin{bmatrix} z_{00} & z_{01} & z_{02} \\ z_{10} & z_{11} & z_{12} \end{bmatrix}$$

  Assim,

  $$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{Z}(z_{00}z_{11} - z_{10}z_{01}, z_{00}z_{12} - z_{10}z_{02}, z_{01}z_{12} - z_{11}z_{02}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{U} \cap \operatorname{Im}(\varphi) &= \mathcal{Z}(z_{01} - z_{11}, z_{00}z_{11} - z_{10}z_{01}, z_{00}z_{12} - z_{10}z_{02}, z_{01}z_{12} - z_{11}z_{02}) \\ &= \mathcal{Z}(z_{01} - z_{11}, z_{11}(z_{00} - z_{10}), z_{00}z_{12} - z_{10}z_{02}, z_{11}(z_{12} - z_{02})) \\ &= \mathcal{Z}(z_{01}, z_{11}, z_{00}z_{12} - z_{10}z_{02}) \cup \mathcal{Z}(z_{01} - z_{11}, z_{00} - z_{10}, z_{12} - z_{02})\end{aligned}$$

Observe que:

$$\frac{\mathbb{C}[z_{00}, z_{01}, z_{02}, z_{10}, z_{11}, z_{12}]}{\langle z_{01}, z_{11}, z_{00}z_{12} - z_{10}z_{02}\rangle} \cong \frac{\mathbb{C}[z_{00}, z_{02}, z_{10}, z_{12}]}{\langle z_{00}z_{12} - z_{10}z_{02}\rangle} \cong \frac{\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]}{\langle x_0x_3 - x_1x_2\rangle}$$

Mais ainda

$$\frac{\mathbb{C}[z_{00}, z_{01}, z_{02}, z_{10}, z_{11}, z_{12}]}{\langle z_{01} - z_{11}, z_{00} - z_{10}, z_{12} - z_{02}\rangle} \cong \mathbb{C}[z_{10}, z_{11}, z_{12}] \cong \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$$

Assim, $\mathcal{U} \cap \operatorname{Im}(\varphi)$ possui duas componentes irredutíveis.

- Considere $G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1, y_2]$ definido por

$$G = F(x_0y_0, x_0y_1, x_0y_2, x_1y_0, x_1y_1, x_1y_2) = x_0y_1 - x_1y_1 = y_1(x_0 - x_1).$$

Note que G é um polinômio *bihomogêneo*[67] de bigrau (1,1) tal que

$$\begin{aligned}\Big\{(a,b) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 | G(a,b) = 0\Big\} &= \Big\{(a,b) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 | b_1 = 0 \text{ ou } a_0 = a_1\Big\} \\ &= \mathbb{P}^1 \times \mathcal{Z}(y_1) \bigcup \{[1:1]\} \times \mathbb{P}^2 \\ &= \varphi^{-1}(\mathcal{U}).\end{aligned}$$

Observação 1.14. De forma mais geral, se $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N$ é o mergulho de Segre ($(a,b) \longmapsto [a_0b_0 : \ldots : a_ib_j : \ldots : a_nb_m]$) e $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ é tal que $\varphi(\mathrm{X}) \subseteq \mathbb{P}^N$ for um conjunto algébrico projetivo, então ao considerar $\mathcal{U} = \varphi(\mathrm{X}) \subseteq \mathbb{P}^N$ tem-se que $\mathcal{U} = \mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_k)$ com $F_1, \ldots, F_k \in \mathbb{C}[z_{00}, \ldots, z_{ij}, \ldots, z_{nm}]$ homogêneos. Ao substituirmos a variável z_{ij} pelo produto x_iy_j no polinômio F_i, obtemos

$$G_i \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m] \qquad para\ i = 1, \ldots, k$$

bihomogêneo nas variáveis $x_0, \ldots, x_n$ e $y_0, \ldots, y_m$, dado por

$$G_i(x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m) = F_i(x_0y_0, \ldots, x_iy_i, \ldots, x_ny_m)$$

tais que

$$\Big\{(a,b) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m | G_i(a,b) = 0,\ \ \forall\, i = 1, \ldots, k\Big\} = \varphi^{-1}(\mathcal{U}) = \mathrm{X}.$$

[67] Seja F um polinômio nas variáveis $x_0, \ldots, x_n$ e $y_0, \ldots, y_m$. Dizemos que F é *bi-homogêneo de bigrau* (d, e) se F for homogêneo de grau d nas variáveis $x_0, \ldots, x_n$ e F for homogêneo de grau e nas variáveis $y_0, \ldots, y_m$. Por exemplo, $F = x_0y_1^3 - x_1y_0y_2^2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1y_2]$ é bi-homogêneo de bi-grau (1,3).

Assim, podemos caracterizar os conjuntos algébricos em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ da seguinte forma

Teorema 1.3. *Um subconjunto* $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ *é um conjunto algébrico projetivo se, e somente se, existem* $G_1, \ldots, G_k \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m]$ *bihomogêneos nas variáveis* $x_0, \ldots, x_n$ *e* $y_0, \ldots y_m$*, para cada* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *tais que*

$$\mathrm{X} = \Big\{(a, b) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m | G_i(a, b) = 0, \ \ \forall\, i = 1, \ldots, k\Big\}.$$

Demonstração. $\boxed{\Longrightarrow}$ Foi mostrado na observação acima.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Confira as páginas 56 e 57 no texto Shafarevich (1974). □

Na próxima subseção vamos demonstrar o Teorema dos zeros de Hilbert no caso projetivo. Como também explorar a conexão que a função $\mathcal{I}$ nos permitirá estabelecer entre conjuntos algébricos projetivos e ideais homogêneos radicais, se $\mathbb{K}$ for um corpo algebricamente fechado. Em particular, mostraremos que $\mathcal{I}$ induz uma bijeção entre $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e $G_n(S_1)$ (cf. Proposição 1.24).

1.2.2 Teorema dos zeros de Hilbert

Teorema 1.4. *Sejam* $\mathbb{K}$ *um corpo algebricamente fechado e* I *um ideal homogêneo em* $S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$*, tal que* $\mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$*. Então* $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I}$.

Demonstração. Segue do item (iii) da Proposição 1.22 que $I \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$. Como radical preserva inclusão, temos que $\sqrt{I} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$.

Para provarmos a outra inclusão, considere $g \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ homogêneo e assuma que $I = \langle F_1, \ldots, F_k \rangle$ com $F_i \in S$ homogêneo para cada i.

Afirmação 1: $(0, \ldots, 0) \in \mathcal{Z}(I)$ e $\mathcal{Z}(I) \neq \{(0, \ldots, 0)\}$.

Observe que

$$a \in \mathcal{Z}(I) \iff F_i(a) = 0, \ \ \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Sendo a origem um zero (afim) de todo polinômio homogêneo, concluímos que $(0, \ldots, 0) \in \mathcal{Z}(I)$.

Suponha que $\mathcal{Z}(I) = \{(0, \ldots, 0)\}$. Neste caso, a versão afim do Teorema dos zeros de Hilbert (cf. Teorema 1.1), nos garante que

$$\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I} = \mathcal{I}(\{(0, \ldots, 0)\}) = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle = S_+.$$

Daí concluímos que $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(\sqrt{I}) = \mathcal{Z}(S_+) = \emptyset$, o que é um absurdo.

Afirmação 2: Se g for homogêneo e $g \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$, então $g \in \sqrt{I}$.

Note que:

$$g \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) \iff g(a) = 0, \ \ \forall\, a \in \mathcal{Z}(I).$$

Assuma que $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{Z}(I)$ e $a \neq (0, \ldots, 0)$. Logo

$$F_i(a) = 0, \ \ \forall\, i \in \{1, \ldots, k\} \overset{\mathrm{p}=[a_0:\ldots:a_n]}{\Longrightarrow} F_i(\mathrm{p}) = 0, \ \ \forall\, i \in \{1, \ldots, k\} \Longrightarrow \mathrm{p} \in \mathcal{Z}(I).$$

Como $g \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ temos que $g(a) = 0$. Segue da versão afim do teorema dos zeros de Hilber (cf. Teorema 1.1) que $g \in \sqrt{I}$.

Para finalizar a demonstração, basta mostrar que a Afirmação 2 contínua válida para g não homogêneo. De fato, se $g \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ não for homogêneo, escreva a decomposição de g em partes homogêneas, a saber, $g = g_0 + g_1 + \cdots + g_d$ com $g_i \in S_i$. Como $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ é um ideal homogêneo, segue que

$$g_i \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)), \ \ \forall\, i \in \{1, \ldots, d\} \overset{Af.2}{\Longrightarrow} g_i \in \sqrt{I}, \ \ \forall\, i \in \{1, \ldots, d\} \Longrightarrow g \in \sqrt{I}.$$

□

Conjuntos algébricos projetivos & Ideais homogêneos radicais

Proposição 1.24. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado, $S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ e $S_+ = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$. Considere*

$$\mathcal{C}_{\mathrm{Alg}} = \Big\{ Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} | Y \ \text{ é um conjunto algébrico projetivo não vazio} \Big\},$$

$$\mathcal{I}^h_{\mathrm{Rad}} = \Big\{ I \subseteq S | I \ \text{ é um ideal homogêneo radical e } S_+ \nsubseteq I \Big\}.$$

Então

(i) *A função $\mathcal{I} : \mathcal{C}_{\mathrm{Alg}} \longrightarrow \mathcal{I}^h_{\mathrm{Rad}}$ dada por $Y \longmapsto \mathcal{I}(Y)$ é uma bijeção, cuja inversa é dada por: $I \longmapsto \mathcal{Z}(I)$.*

(ii) *$\mathcal{I}$ induz uma bijeção entre $\{Y | Y$ é uma variedade projetiva não vazia $\}$ e* $\mathrm{Spec}(S) \cap \mathcal{I}^h_{\mathrm{Rad}}$.

(iii) *$\mathcal{I}$ induz uma bijeção entre $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e $G_n(S_1)$.*

Demonstração. $\boxed{\text{(i)}}$ Observe que:

- $\mathcal{I}$ está bem definida.

  Já foi observado que $\mathcal{I}(Y)$ é um ideal homogêneo radical do anel S para quaisquer subconjunto Y de $\mathbb{P}^n$. Agora, suponha (por absurdo) que $S_+ \subseteq \mathcal{I}(Y)$. Neste caso, aplicando $\mathcal{Z}$ concluímos que $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) = Y \subseteq \mathcal{Z}(S_+) = \emptyset$. Assim, $Y = \emptyset$, o que é um absurdo.

- $\mathcal{I}$ é injetora (cf. Proposição 1.9).

- $\mathcal{I}$ é sobrejetora.

  Considere I um ideal homogêneo radical do anel S tal que $S_+ \not\subseteq I$. Observe que $Y = \mathcal{Z}(I) \in \mathcal{C}_{\text{Alg}}$. Além disso, como $Y \neq \emptyset$, segue do Teorema dos Zeros de Hilbert (cf. Teorema 1.4) que $\mathcal{I}(Y) = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I}$, sendo I ideal radical, conclui-se que $\mathcal{I}(Y) = I$.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Observe que se Y é uma variedade projetiva não vazia em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ então $Y \in \mathcal{C}_{\text{Alg}}$ e Y é irredutível. Assim, $\mathcal{I}(Y)$ é primo, logo $\mathcal{I}(Y) \in \operatorname{Spec}(S) \cap \mathcal{I}^h_{\text{Rad}}$. E vice-versa, se $I \in \operatorname{Spec}(S) \cap \mathcal{I}^h_{\text{Rad}}$ então $\mathcal{Z}(I) \in \mathcal{C}_{\text{Alg}}$ é irredutível tal que $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = I$.

$\boxed{\text{(iii)}}$ Defina

$$\Omega : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \longrightarrow G_n(S_1) \quad \text{por} \quad a \longmapsto \mathcal{I}(\{a\}) \cap S_1. \tag{1.36}$$

Observe que

- Ω está bem definida.

  Observe que $\mathcal{I}(\{a\}) \cap S_1 = \{L \in S_1 | L(a) = 0\}$ é um subespaço vetorial de S_1.

  A seguir, usaremos o isomorfismo $\Psi : S_1 \longrightarrow (\mathbb{K}^{n+1})^*$ definido em (1.30) para determinarmos a dimensão do subespaço $\mathcal{I}(\{a\}) \cap S_1$. Seja $W_a = \Psi(\mathcal{I}(\{a\}) \cap S_1)$ e assuma que $a = [a_0 : \ldots : a_n]$ e $\vec{a} = (a_0, \ldots, a_n)$. Assim,

  $$W_a = \Big\{ f \in (\mathbb{K}^{n+1})^* | f(a_0, \ldots, a_n) = 0 \Big\} = [\vec{a}]^0.$$

  Portanto,

  $$\dim W_a = \dim[\vec{a}]^0 = \dim \mathbb{K}^{n+1} - \dim[\vec{a}] = n + 1 - 1 = n,$$

  sendo $[\vec{a}]^0$ o anulador do subespaço gerado pelo vetor $\vec{a}$, isto é, $[\vec{a}]$.

  Como Ψ é um isomorfismo linear, concluímos que $\dim(\mathcal{I}(\{a\}) \cap S_1) = n$.

- Ω é injetora.

  Considere $a = [a_0 : \ldots : a_n], b = [b_0 : \ldots : b_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ tais que $\Omega(a) = \Omega(b)$.

  Observe que, se $a_\ell \neq 0$ então $L_j = a_\ell x_j - a_j x_\ell \in \Omega(a) = \mathcal{I}(\{a\}) \cap S_1$, para todo $j \neq \ell$. Como $\Omega(a) = \Omega(b)$, segue que $L_j(b) = a_\ell b_j - a_j b_\ell = 0$, para todo $j \neq \ell$. Assim,

  $$b_j = \frac{b_\ell}{a_\ell} a_j \text{ para todo } j \neq \ell \quad \text{e} \quad b_\ell = \frac{b_\ell}{a_\ell} a_\ell.$$

  A partir das igualdades acima, segue que $b_\ell \neq 0$ e $a = b$.

- Ω é sobrejetora.

  Seja $U \in G_n(S_1)$ qualquer. Escolha $\{L_1, \ldots, L_n\}$ conjunto de geradores de U. Assim, $\Lambda = \mathcal{Z}(L_1, \ldots, L_n)$ é uma 0–variedade linear em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

  Lembremos que o isomorfismos linear Ψ nos garante que $\Lambda = \mathbb{P}(W)$ com W de dimensão 1, dado por $W = W_1 \cap \cdots \cap W_k$ sendo $W_i = \ker(f_i)$ e $f_i = \Psi(L_i)$ (veja Proposição 1.19). Portanto, $W = [\mathrm{w}]$ com $\mathrm{w} = (w_0, \ldots, w_n)$ e $\Lambda = \{\mathrm{p}\}$ com $\mathrm{p} = [w_0 : \ldots : w_n]$.

  Agora,

$$\Lambda = \mathcal{Z}(L_1, \ldots, L_n) = \{\mathrm{p}\} \Longrightarrow \mathcal{I}(\Lambda) = \mathcal{I}(\{\mathrm{p}\}) = \langle L_1, \ldots, L_n \rangle \tag{1.37}$$

  Afirmação: $\Omega(\mathrm{p}) = U$.

  Sabemos que $\Omega(\mathrm{p}) = \mathcal{I}(\{\mathrm{p}\}) \cap S_1 \overset{(1.37)}{=} \langle L_1, \ldots, L_n \rangle \cap S_1$. Como $L_1, \ldots, L_n \in \langle L_1, \ldots, L_n \rangle \cap S_1$, temos que $U = [L_1, \ldots, L_n] \subseteq \langle L_1, \ldots, L_n \rangle \cap S_1 = \Omega(p)$. Como U e $\Omega(\mathrm{p})$ tem a mesma dimensão, segue que $U = \Omega(\mathrm{p})$.

$\square$

A seguir vamos introduzir os processos de *homogeneização* e *desomogeneização* de polinômios, conceitos que nos serão de muita utilidade para estabelecer conexões entre os conjuntos algébricos afins e seus correspondentes nos abertos fundamentais no espaço projetivo. De fato, essa conexão nos permitirá calcular a dimensão dos conjuntos algébricos projetivos (inicialmente como espaços topológicos).

1.2.3 Dimensão de conjuntos algébricos projetivos

Homogeneização e desomogeneização

De agora em diante, salvo menção em contrário, $\mathbb{K}$ denotará um corpo algebricamente fechado. Aproveitamos de lembrar que $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.
Homogeneização. Considere o polinômio $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Escreva g na sua decomposição em partes homogêneas, a saber, $g = g_0 + g_1 + \cdots + g_{d-1} + g_d$ com $g_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ homogêneo de grau i se não for nulo. A seguir, escolha uma variável que não faça parte do conjunto $x_1, \ldots, x_n$, por exemplo x_0. Neste caso,

$$G = g_0 x_0^d + g_1 x_0^{d-1} + \cdots + g_{d-1} x_0 + g_d \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

é denominado *homogeneização* de g relativa a x_0.

Exemplo 1.66. Observe que $g = 2 - 5x_1x_2 + 3x_3^3 - 3x_1^2x_2^2 + 8x_2^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ não é homogêneo e tem grau 4. Assim, a homogeneização de g relativa à variável x_0 é dado por $G = 2x_0^4 - 5x_1x_2x_0^2 + 3x_3^3x_0 - 3x_1^2x_2^2 + 8x_2^4 \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2, x_3]$.

Lema 1.12. *Seja $G \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ a homogeneização de $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ relativa à variável x_0. Se $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ com $a_0 \neq 0$ então*

$$G(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0^d g\Big(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\Big), \quad \textit{sendo} \quad d = \mathrm{grau}(g).$$

Demonstração. Se $g = g_0 + g_1 + \cdots + g_{d-1} + g_d$ então a homogeneização de g relativa à variável x_0 é dada por $G = g_0 x_0^d + g_1 x_0^{d-1} + \cdots + g_{d-1} x_0 + g_d \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. De onde, concluímos que

$$\begin{aligned} G(a_0, a_1, \ldots, a_n) &= g_0 a_0^d + g_1(a_1, \ldots, a_n) a_0^{d-1} + \cdots + g_d(a_1, \ldots, a_n) \\ &= a_0^d \Big(g_0 + \frac{1}{a_0} g_1(a_1, \ldots, a_n) + \cdots + \frac{1}{a_0^d} g_d(a_1, \ldots, a_n)\Big). \end{aligned}$$

Como cada g_i é homogêneo de grau i (se não for nulo) segue que

$$\frac{1}{a_0^i} g_i(a_1, \ldots, a_n) = g_i\Big(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\Big), \quad \forall\, i = 0, \ldots, d.$$

Portanto, $G(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0^d \left(\sum_{i=0}^{d} g_i\Big(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\Big)\right) = a_0^d\, g\left(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right)$. □

Exercício 1.61. Seja $\varphi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ dado por $f \longmapsto f^*$ sendo f^* a homogeneização de f relativa à variável x_0, se $\mathrm{grau}(f) \geqslant 1$ e $\varphi(a) = a$, se $a \in \mathbb{K}$.
(a) $(f + g)^* = f^* + g^*$ e $(f \cdot g)^* = f^* \cdot g^*$, para todo $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$?
(b) φ é injetor?

Desomogeneização. Considere o polinômio $G \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ homogêneo de grau d. A *desomogeneização* de F relativa à variável x_i é dada por

$$f = F(x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Exemplo 1.67. Note que $G = -3x_0^5 + 6x_1x_2^2x_3^2 + 3x_1^3x_3^2 + 4x_2^2x_3^3 - 7x_3^5 \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ é homogêneo de grau 5. Neste caso, se g_i é a desomogeneização de G em relação à variável x_i temos que

$$\begin{aligned} g_0 &= G(1, x_1, x_2, x_3) = -3 + 6x_1x_2^2x_3^2 + 3x_1^3x_3^2 + 4x_2^2x_3^3 - 7x_3^5, \\ g_1 &= G(x_0, 1, x_2, x_3) = -3x_0^5 + 6x_2^2x_3^2 + 3x_3^2 + 4x_2^2x_3^3 - 7x_3^5, \\ g_2 &= G(x_0, x_1, 1, x_3) = -3x_0^5 + 6x_1x_3^2 + 3x_1^3x_3^2 + 4x_3^3 - 7x_3^5, \\ g_3 &= G(x_0, x_1, x_2, 1) = -3x_0^5 + 6x_1x_2^2 + 3x_1^3 + 4x_2^2 - 7. \end{aligned}$$

Exercício 1.62. Seja $\psi : \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ dado por

$$f \longmapsto f(1, x_1, \ldots, x_n)$$

(a) ψ é um homomorfismo de anéis?
(b) ψ é injetor ou sobrejetor?

Seja $U_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} - \mathcal{Z}(x_i)$ aberto de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ para $i = 0, \ldots, n$. Observe que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$.

Proposição 1.25. *Seja $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ definida por*

$$[a_0 : \ldots : a_n] \longmapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right).$$

Então φ_i é um homeomorfismo (ao considerarmos a topologia de Zariski).

Demonstração. Temos $U_i = \Big\{[a_0 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} | a_i \neq 0\Big\}$. Observe que

- φ_i está bem definida.

  Considere $[a_0 : \ldots : a_n] \in U_i$. Assuma que $[a_0 : \ldots : a_n] = [b_0 : \ldots : b_n]$, logo os vetores $(a_0, \ldots, a_n)$ e $(b_0, \ldots, b_n)$ (ambos não nulos) são L.D.. Assim, existe $\lambda \neq 0$ em $\mathbb{K}$, tal que $(b_0, \ldots, b_n) = \lambda(a_0, \ldots, a_n)$ de onde concluímos que

  $$b_i = \lambda a_i \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{b_j}{b_i} = \frac{\lambda a_j}{\lambda a_i} = \frac{a_j}{a_i}, \quad \forall\, j \in \{0, \ldots, n\}.$$

  Portanto, φ_i está bem definida.

- φ_i é injetora.

  Considere $a = [a_0 : \ldots : a_n]$ e $b = [b_0 : \ldots : b_n]$ em U_i tais que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Assim,

  $$\frac{b_j}{b_i} = \frac{a_j}{a_i}, \ \forall\, j \in \{0, \ldots, n\},\ j \neq i \Longrightarrow b_j = \frac{b_i}{a_i} a_j, \ \forall\, j \in \{0, \ldots, n\} \Longrightarrow a = b.$$

- φ_i é sobrejetora.

  Dado $\mathrm{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ o ponto $\mathrm{p} = [v_1 : \ldots : v_i : 1 : v_{i+1} : \ldots : v_n] \in U_i$ e $\varphi_i(\mathrm{p}) = \mathrm{v}$.

- φ_i é contínua.

  Por simplicidade vamos apenas mostrar que $\varphi = \varphi_0$ é contínua. Deixamos a cargo do leitor fazer as adaptações (caso necessárias) para concluir que φ_i é contínua para qualquer i.

  Seja $\mathcal{Z}(I)$ um fechado em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ sendo $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ ideal em $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Sejam $F_1, \ldots, F_k \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ a homogeneização de $f_1, \ldots, f_k$ em relação á variável x_0, respectivamente.

Afirmação 1: $\varphi^{-1}(\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_k)) = U_0 \cap \mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_k)$.

De fato, considere $a = [a_0 : \ldots : a_n]$ e observe que

$$\begin{aligned}
a \in \varphi^{-1}(\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_k)) &\Longleftrightarrow a \in U_0 \ \text{ e } \ \varphi(a) \in \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_k) \\
&\Longleftrightarrow a_0 \neq 0 \ \text{ e } \ f_i\Big(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\Big) = 0, \ \forall\, i = 1, \ldots, k \\
&\underset{d_i = \mathrm{grau}(f_i)}{\overset{a_0 \neq 0}{\Longleftrightarrow}} a_0^{d_i} f_i\Big(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\Big) = 0, \ \ \forall\, i = 1, \ldots, k \\
&\overset{Lema\ 1.12}{\Longleftrightarrow} F_i(a_0, \ldots, a_n) = 0, \ \ \forall\, i = 1, \ldots, k \text{ com } a_0 \neq 0. \\
&\Longleftrightarrow a \in U_0 \cap \mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_k).
\end{aligned}$$

- φ_i^{-1} é contínua.

  Por simplicidade vamos mostrar que a inversa de $\varphi = \varphi_0$ é contínua. Deixamos a cargo do leitor fazer as adaptações (caso necessárias) para concluir que φ_i^{-1} é contínua para quaisquer i.

  Considere Y fechado em U_0. Assim, $Y = U_0 \cap \mathcal{Z}(T)$ sendo $T \subseteq S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ formado por polinômios homogêneos. Podemos assumir que T é finito[68], dado por $\{F_1, \ldots, F_k\}$.

  Sejam $f_1, \ldots, f_k$ a desomogeneização de $F_1, \ldots, F_k$ em relação à variável x_0, respectivamente. Assim, $f_i(x_1, \ldots, x_n) = F_i(1, x_1, \ldots, x_n)$ para cada $i = 1, \ldots, k$.

  Afirmação 2: $\varphi(U_0 \cap \mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_k)) = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_k)$.

  Observe que todo ponto $a = [a_0 : \ldots : a_n] \in U_0$ admite um único representante da forma $a = [1 : b_1 : \ldots : b_n]$ sendo $b_i = a_i/a_0$ para cada i.

  Considere $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, $a = [a_0 : \ldots : a_n] \in U_0$ e observe que

$$\begin{aligned}
b \in \varphi(U_0 \cap \mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_k)) &\Longleftrightarrow \exists\, a \in U_0 \cap \mathcal{Z}(F_1, \ldots, F_k), \text{ tal que } \varphi(a) = b \\
&\Longleftrightarrow F_i(a) = 0, \ \ \forall i \ \text{ e } \Big(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\Big) = b \\
&\Longleftrightarrow F_i(a) = 0, \ \ \forall i \ \text{ sendo } a = [1 : b_1 : \ldots : b_n] \\
&\Longleftrightarrow F_i(1, b_1, \ldots, b_n) = 0, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, k\} \\
&\Longleftrightarrow f_i(b_1, \ldots, b_n) = 0, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, k\} \\
&\Longleftrightarrow b \in \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_k).
\end{aligned}$$

[68]Lembre que $\mathcal{Z}(T) = \mathcal{Z}(\langle T \rangle)$ e $\langle T \rangle$ é um ideal homogêneo de S (logo admite um conjunto finito de geradores homogêneos).

□

Corolário 1.10. $\dim U_i = n$ *para todo* $i \in \{0, \dots, n\}$.

Demonstração. Sendo φ_i um homeomorfismo, φ_i preserva conjuntos fechados e também irredutíveis. Portanto, $\dim U_i = \dim \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = n$. □

Corolário 1.11. $\dim \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = n$.

Demonstração. Note que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \bigcup_{i=0}^n U_i$ com $U_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} - \mathcal{Z}(x_i)$. Segue do Corolário 1.10 que $\dim U_i = n$ para todo i. Portanto, a partir Lema 1.4 tem-se que $\dim \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \max\{\dim U_i\}_{i=0}^n = n$. □

Corolário 1.12. *Se* $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ *é uma hipersuperfície de grau* d*, então* $\dim \mathrm{X} = n - 1$.

Demonstração. Sendo X uma hipersuperfície de grau d, segue que $\mathcal{I}(\mathrm{X}) = \langle F \rangle$ com $F \in S_d$ e $d \geqslant 1$. Ao considerarmos a cobertura aberta canônica de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, isto é, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \bigcup\limits_{i=0}^{n} U_i$ (sendo $U_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} - \mathcal{Z}(x_i)$ para $i = 0, \dots, n$), segue do Lema 1.4 que $\dim Y = \max\{\dim Y_i | Y_i = Y \cap U_i \neq \emptyset \text{ e } 0 \leqslant i \leqslant n\}$. Assuma por simplicidade que $\dim Y = \dim Y_0$. Segue da Proposição 1.25 que $\varphi_0(Y_0) = \mathcal{Z}(f) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ sendo $f = F(1, x_1, ..., x_n)$ em $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ a desomogeneização de F em relação à variável x_0. Agora observe que $\mathcal{Z}(f) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é uma hipersuperfície em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Logo, o Exercício 1.31 nos garante que $\dim \mathcal{Z}(f) = n - 1$. Portanto, $\dim Y = n - 1$. □

Lema 1.13. *Se* X *é não singular, então* X *é irredutível.*

Demonstração. Se $d = 1$ então X é um hiperplano, logo não singular (cf. Exemplo 1.61). Assim, assuma que $d \geqslant 2$. Lembre que X é irredutível se, e somente se, F é irredutível (cf. Exercício 1.53). Suponha, pelo absurdo, que F é um polinômio redutível. Assim, $F = G \cdot H$ com $G, H \in S$ homogêneos de grau d_1 e d_2, respectivamente, tais que $1 \leqslant d_1, d_2 < d$ e $d_1 + d_2 = d$.

Por outro lado, o Corolário 1.12 nos garante que $\dim \mathcal{Z}(G) = \dim \mathcal{Z}(H) = n - 1$. Logo, $\dim \mathcal{Z}(G) + \dim \mathcal{Z}(H) - n = 2n - 2 - n = n - 2 \geqslant 0$, o que nos permite utilizar o Teorema 7.2 (p. 48, Hartshorne (1977)) para concluir que $\mathcal{Z}(G) \cap \mathcal{Z}(H) \neq \emptyset$. Assim, podemos escolher $\mathrm{p} \in \mathcal{Z}(G) \cap \mathcal{Z}(H)$. Entretanto, tal ponto é um zero de cada derivada parcial de F, uma vez que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial G}{\partial x_i} \cdot H + G \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \forall\, i = 0, \dots, n.$$

Logo $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^n$ é singular, o que é um absurdo. □

Exercício 1.63. A recíproca do Lema 1.13 é verdadeira? Justifique.

Anel de coordenadas homogêneo

Seja Y um conjunto algébrico projetivo em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Definimos o *anel de coordenadas homogêneo* de Y pelo anel quociente, $S(Y) := \dfrac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{\mathcal{I}(Y)}$.

Assim, no caso de corpos infinitos, o anel de coordenadas homogêneo de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ é dado por:

$$S(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}) = \frac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{\mathcal{I}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})} = \frac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{\{0\}} \cong \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]. \tag{1.38}$$

Exercício 1.64. Seja $Y \neq \emptyset$ um conjunto algébrico projetivo em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Mostre que Y é um variedade se, e somente se, $S(Y)$ é um D.I..

A partir de (1.38), percebemos que $\dim \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = n = \underset{Krull}{\dim} S(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}) - 1$ (distinto do caso afim, no qual $\dim Y = \underset{Krull}{\dim} A(Y)$ se, Y for uma variedade em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$). No que segue do texto vamos trabalhar nos preliminares algébricos, que nos permitirão mostrar que

$$\dim Y = \underset{Krull}{\dim} S(Y) - 1$$

para toda variedade projetiva Y em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Lema 1.14. *Sejam A, B anéis comutativos com unidade e $f : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Verifica-se que*

(i) *Se I é um ideal do anel A contido no núcleo de f, então $f_1 : \dfrac{A}{I} \longrightarrow B$ dado por $f_1(\overline{a}) = f(a)$ é um homomorfismo de anéis.*

(ii) *Dados $b_1, \ldots, b_n \in B$, existe um único homomorfismo de anéis $A[x_1, \ldots, x_n] \xrightarrow{f_1} B$ tal que $f_1(a) = f(a)$ se $a \in A$ e $f_1(x_i) = b_i$, $\forall\, i$.*

(iii) *Se $S \subseteq A$ é um sistema multiplicativamente fechado*[69] *tal que $f(s) \in B$ é invertível para todo $s \in S$, então existe um único homomorfismo de anéis $f_1 : S^{-1}A \longrightarrow B$ tal que $f_1(\frac{a}{1}) = f(a)$.*

Demonstração. $\boxed{\text{(i)}}$ Deixamos a cargo do leitor.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Defina $f_1 : A[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow B$ da seguinte forma: se $p \in A[x_1, \ldots, x_n]$ é dado por $\sum_I a_I x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ sendo $I = (i_1, \ldots, i_n)$, defina

$$f_1(p) := \sum_I f(a_I) b_1^{i_1} \cdots b_n^{i_n}.$$

[69] Sejam A um anel comutativo com unidade $\mathbf{1}$ e S um subconjunto do anel A. Dizemos que S é *multiplicativamente fechados (*m.f.*)* em A se, $\mathbf{1} \in S$ e $s_1 \cdot s_2 \in S$ para todo $s_1, s_2 \in S$.

Observe que:

- se $p = a \in A$ então $f_1(a) = f(a)$ e $f_1(x_i) = b_i, \ \ \forall\, i$
- f_1 é um homomorfismo de anéis.
- Unicidade de f_1.

Suponha que $g : A[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow B$ é um homomorfismo de anéis tal que $g(a) = f(a)$ para todo $a \in A$, e $g(x_i) = b_i, \ \ \forall\, i$. Assim,

$$g(p) = g\Big(\sum_I a_I x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}\Big) = \sum_I g(a_I)(g(x_1))^{i_1} \cdots (g(x_n))^{i_n} =$$
$$\sum_I f(a_I) b_1^{i_1} \cdots b_n^{i_n} = f_1(p).$$

$\boxed{\text{(iii)}}$ Defina $f_1 : S^{-1}A \longrightarrow B$ por $f_1\Big(\dfrac{a}{s}\Big) =: f(a) \cdot f(s)^{-1}$.

- f_1 está bem definida.

Considere $\dfrac{a}{s}, \dfrac{b}{t} \in S^{-1}A$ tais que $\dfrac{a}{s} = \dfrac{b}{t}$. Observe que: $\dfrac{a}{s} = \dfrac{b}{t} \Longleftrightarrow \exists\, r \in S$ tal que $r(at - bs) = 0$. Assim, ao aplicarmos f nessa última igualdade, concluímos que

$$\begin{aligned} f(r)(f(a)f(t) - f(b)f(s)) = 0 \quad & \overset{\cdot f(r)^{-1}}{\Longrightarrow} \ f(a)f(t) = f(b)f(s) \\ & \Longrightarrow f(a) \cdot f(s)^{-1} = f(b)f(t)^{-1} \\ & \Longrightarrow f_1\Big(\frac{a}{s}\Big) = f_1\Big(\frac{b}{t}\Big). \end{aligned}$$

- f_1 é um homomorfismo de anéis tal que $f_1\Big(\dfrac{a}{1}\Big) = f(a)$.
- Unicidade de f_1.

Seja $g : S^{-1}A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis tal que $g(\frac{a}{1}) = f(a)$. Assim, para cada $s \in S$ tem-se que

$$\frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1} \overset{g}{\Longrightarrow} g\Big(\frac{s}{1}\Big) g\Big(\frac{1}{s}\Big) = g\Big(\frac{1}{1}\Big) \Longrightarrow f(s) g\Big(\frac{1}{s}\Big) = 1 \Longrightarrow g\Big(\frac{1}{s}\Big) = f(s)^{-1}.$$

Portanto,

$$g\Big(\frac{a}{s}\Big) = g\Big(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s}\Big) = g\Big(\frac{a}{1}\Big) g\Big(\frac{1}{s}\Big) = f(a) \cdot f(s)^{-1} = f\Big(\frac{a}{s}\Big).$$

$\square$

Lema 1.15. *Sejam A um anel comutativo com unidade, S e T subconjuntos multiplicativamente fechados (*m.f.*)*[70] *do anel A. Então*

[70] Sejam A um anel comutativo com unidade $\mathbf{1}$ e S um subconjunto do anel A. Dizemos que S é multiplicativamente fechados (m.f.) em A se, $\mathbf{1} \in S$ e $s_1 \cdot s_2 \in S$ para todo $s_1, s_2 \in S$.

(i) *$ST = \{st \in A | s \in S, t \in T\}$ é um subconjunto* m.f. *de A.*

(ii) *$T_1 = \left\{ \frac{t}{s} \,\middle|\, t \in T,\ s \in S \right\}$ é um subconjunto* m.f. *de $S^{-1}A$.*

(iii) *A função $\Psi : T_1^{-1}(S^{-1}A) \longrightarrow (ST)^{-1}A$ dada por*

$$\frac{\frac{a}{s}}{\frac{t}{s_1}} \longmapsto \frac{bs_1}{st},$$

está bem definida e é um isomorfismo de anéis.

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor. □

Corolário 1.13. *Sejam A um domínio de integridade e $S \subset A$ um conjunto multiplicativamente fechado (m.f.) tal que $0 \notin S$. Então*

$$\mathrm{Frac}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}) \cong \mathrm{Frac}(A). \tag{1.39}$$

Demonstração. Lembre que se A é um D.I. então $\mathrm{Frac}(A)$ é o *corpo de frações* [71] do anel A. Observe que se considerarmos $T = A - \{0\} \overset{\text{m.f.}}{\subseteq} A$ então

$$T_1 = S^{-1}A - \left\{\frac{0}{1}\right\} \quad \text{e} \quad TS = T.$$

(T_1 definido no Lema 1.15, e note que $S \subseteq T$). Assim, segue do Lema 1.15 que

$$T_1^{-1}(S^{-1}A) \overset{\Psi}{\cong} (ST)^{-1}A \Longleftrightarrow \mathrm{Frac}(S^{-1}A) \overset{\Psi}{\cong} \mathrm{Frac}(A).$$

□

Lema 1.16. *Seja A um domínio de integridade e k um corpo. Se A for uma k-álgebra finitamente gerada, então*

$$\dim_{Krull} A = \mathrm{trdeg}_k \mathrm{Frac}(A)$$

($\mathrm{trdeg}_k \mathrm{Frac}(A)$ *é o grau de transcendência do corpo de frações* $\mathrm{Frac}(A)$ *sobre o corpo k*). *Consequentemente,* $\dim_{Krull} A[x_1, \ldots, x_n] = \dim_{Krull} A + n$.

Demonstração. Conferir a demonstração no Cap. 5 do texto Matsumura (1970) ou no Cap. 11 do texto Atiyah e Macdonald (1969) (se k for algebricamente fechado). □

[71] O *corpo de frações* de um domínio de integridade A, denotado por $\mathrm{Frac}(A)$, é dado pela localização do anel A no sistema m.f. $A - \{0\}$. Assim, $\mathrm{Frac}(A) = \{\frac{a}{s} | a \in A,\ 0 \neq s \in A\}$.

Proposição 1.26. *Sejam $U_0 = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} - \mathcal{Z}(x_0)$ e $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ uma variedade projetiva tal que $Y \cap U_0 \neq \emptyset$. Seja[72] $Y_0 = \varphi_0(Y \cap U_0) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Então*

$$A(Y_0)[x_0]_{x_0} \cong S(Y)_{u_0} \quad \textit{sendo} \quad u_0 = \overline{x_0} \in S(Y) = \frac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{\mathcal{I}(Y)}.$$

Demonstração. Lembre que $S(Y)_{u_0}$ denota a localização do anel de coordenadas homogêneo $S(Y)$ no elemento u_0, ou seja, no sistema multiplicativo $\{1, u_0, u_0^2, \ldots\}$. Assim,

$$S(Y)_{u_0} = \left\{ \frac{\overline{f}}{u_0^m} \,\middle|\, \overline{f} \in S(Y), m \geqslant 0 \text{ inteiro} \right\}.$$

E que $A(Y_0) = \dfrac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{\mathcal{I}(Y_0)}$ é o anel de coordenadas do conjunto algébrico afim $Y_0 \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Denotaremos os elementos no anel $A(Y_0)$ por $\widehat{g}$, ou seja, $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e

$$\widehat{g} = \Big\{ h \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] | g - h \in \mathcal{I}(Y_0) \Big\} \in A(Y_0)$$

é a classe de equivalência associada ao polinômio g.

A seguir listaremos 7 afirmações (cuja demostrações constam logo a seguir, exceto no caso da Afirmação 1 que deixamos a cargo do leitor) que nos permitirão concluir a demostração desta proposição.

Afirmação 1: A função $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow S(Y)_{u_0}$ dada por $a \longmapsto \dfrac{\overline{a}}{\overline{1}}$ é um homomorfismo de anéis injetor.

Afirmação 2: Considere $u_i = \overline{x_i} \in S(Y)$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$. Dados $\dfrac{u_1}{u_0}, \ldots, \dfrac{u_n}{u_0} \in S(Y)_{u_0}$, existe um único homomorfismo de anéis[73]

$$\varphi_1 : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow S(Y)_{u_0}$$

tal que $\varphi_1(a) = \varphi(a)$ se $a \in \mathbb{K}$ (φ definido na Afirmação 1) e $\varphi_1(x_i) = \dfrac{u_i}{u_0}, \ \forall\, i$.

Afirmação 3: Se $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tiver grau d, então $\varphi_1(g) = \dfrac{\overline{g^*}}{u_0^d}$ sendo g^* a homogeneização de g relativa à variável x_0 e φ_1 definida na Afirmação 2.

Vamos abordar os casos (g homogêneo e g não homogêneo).

• $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ é homogêneo de grau d.

[72] Sendo $\varphi_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ homeomorfismo dado por $[a_0 : \ldots : a_n] \longmapsto \left(\dfrac{a_1}{a_0}, \ldots, \dfrac{a_n}{a_0}\right)$ (Veja Proposição 1.25).

[73] Esta afirmação decorre do item (ii) de Lema 1.14.

Neste caso, vamos mostrar que $\varphi_1(g) = \dfrac{\overline{g}}{u_0^d}$ (visto que $g^* = g$).

Assuma que $g = \sum_I a_I x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ sendo $I = (i_1, \ldots, i_n)$ tal que $i_1 + \cdots + i_n = d$. Assim,

$$\varphi_1(g) = \sum_I \frac{\overline{a_I}}{\overline{1}} \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{u_n}{u_0}\right)^{i_n} = \frac{\overline{1}}{u_0^d} \sum_I \frac{\overline{a_I}}{\overline{1}} \cdot \frac{u_1^{i_1}}{\overline{1}} \cdots \frac{u_n^{i_n}}{\overline{1}} \overset{u_i = \overline{x_i}}{=} \frac{\overline{1}}{u_0^d} \sum \frac{\overline{a_I x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}}}{\overline{1}}$$

Portanto,

$$\varphi_1(g) = \frac{\overline{1}}{u_0^d} \cdot \frac{\overline{g}}{\overline{1}} = \frac{\overline{g}}{u_0^d}.$$

- $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tem grau d e admite a decomposição em partes homogêneas $g = g_0 + g_1 + \cdots + g_d$. Assim,

$$\varphi_1(g) = \sum_{i=0}^{d} \varphi_1(g_i) \underset{homog.}{\overset{g_i}{=}} \frac{\overline{g_0}}{\overline{1}} + \frac{\overline{g_1}}{u_0} + \cdots + \frac{\overline{g_d}}{u_0^d} = \frac{\overline{g_0 u_0^d}}{u_0^d} + \frac{\overline{g_1 u_0^{d-1}}}{u_0^d} + \cdots + \frac{\overline{g_d}}{u_0^d} = \frac{\overline{g^*}}{u_0^d}.$$

Afirmação 4: A função $\varphi_2 : A(Y_0) \longrightarrow S(Y)_{u_0}$ dado por $\varphi_2(\widehat{g}) = \varphi_1(g)$ (φ_1 definido na Afirmação 2) está bem definida e é um homomorfismo de anéis.

Conforme o item (i) do Lema 1.14, basta mostrar que $\mathcal{I}(Y_0)$ esta contido no núcleo de φ_1 (visto que $A(Y_0) = \dfrac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{\mathcal{I}(Y_0)}$).

Considere $f \in \mathcal{I}(Y_0)$. Note que $f \in \ker(\varphi_1)$ se, e somente se, $\varphi_1(f) = \dfrac{\overline{0}}{\overline{1}}$. Por outro lado, se grau$(f) = d$, a partir da afirmação 3 temos que

$$\varphi_1(f) = \frac{\overline{0}}{\overline{1}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{f^*}}{u_0^d} = \frac{\overline{0}}{\overline{1}} \Longleftrightarrow \overline{f^*} = \overline{0} \Longleftrightarrow f^* \in \mathcal{I}(Y).$$

Para concluir que $f^* \in \mathcal{I}(Y)$, vamos começar mostrando que $f^*(a) = 0$ para todo $a \in Y \cap U_0$.

Considere $a = [a_0 : \ldots. : a_n] \in U_0 \cap Y$. Segue do Lema 1.12 que

$$f^*(a) = a_0^d f\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right) = a_0^d f(\varphi_0(a)). \tag{1.40}$$

Tendo em consideração que $f \in \mathcal{I}(Y_0)$ e que $\varphi_0(a) \in Y_0$ (visto que $a \in U_0 \cap Y$). Segue de (1.40) que

$$f^*(a) = 0 \quad \text{para todo } a \in Y \cap U_0 \Longrightarrow U_0 \cap Y \subseteq \mathcal{Z}(f^*).$$

Agora, sendo $U_0 \cap Y$ um aberto não vazio da variedade projetiva Y, tem-se que

$$Y = \overline{U_0 \cap Y} \subseteq \mathcal{Z}(f^*) \Longrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{Z}(f^*)) \subseteq \mathcal{I}(Y) \Longrightarrow f^* \in \mathcal{I}(Y).$$

Afirmação 5: Existe um único $\varphi_3 : A(Y_0)[x_0] \longrightarrow S(Y)_{u_0}$ homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras tal que $\varphi_3(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$ se $\alpha \in A(Y_0)$ e $\varphi_3(x_0) = u_0$, com φ_2 definido na Afirmação 4.

Segue do item (ii) no Lema 1.14 que existe um único homomorfismo de anéis $\varphi_3 : A(Y_0)[x_0] \longrightarrow S(Y)_{u_0}$ tal que $\varphi_3(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$, se $\alpha \in A(Y_0)$ e $\varphi_3(x_0) = u_0$.

A seguir, vamos verificar que φ_3 é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Note que, os homomorfismos "naturais"que tornam $A(Y_0)[x_0]$ e $S(Y)_{u_0}$ em $\mathbb{K}$-álgebras são

$$\psi : \mathbb{K} \longrightarrow A(Y_0)[x_0] \text{ dado por } a \longmapsto \widehat{a} \text{ e } \varphi : \mathbb{K} \longrightarrow S(Y)_{u_0} \text{ dado por } a \longmapsto \frac{\overline{a}}{\overline{1}}$$

Para concluir, observe que $\varphi_3 \circ \psi(a) = \varphi_3(\widehat{a}) = \varphi_2(\widehat{a}) = \varphi_1(a) = \varphi(a)$ para todo $a \in \mathbb{K}$.

Afirmação 6: Existe um único $\psi : A(Y_0)[x_0]_{x_0} \longrightarrow S(Y)_{u_0}$ homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras tal que $\psi\left(\dfrac{\beta}{\widehat{1}}\right) = \varphi_3(\beta)$ para todo $\beta \in A(Y_0)[x_0]$, com φ_3 definido na Afirmação 5.

Observe que $A(Y_0)[x_0]_{x_0}$ denota a localização do anel $A(Y_0)[x_0]$ no elemento x_0, ou seja, no sistema multiplicativo $\{1, x_0, x_0^2, \ldots\}$. Visto que $\varphi_3(x_0) = u_0$ é invertível no anel $S(Y)_{u_0}$. Segue que $\varphi_3(s)$ é invertível no anel $S(Y)_{u_0}$ para todo $s \in \{1, x_0, x_0^2, \ldots\}$. Assim o item (iii) do Lema 1.14 nos garante a existência e unicidade do homomorfismo de anéis ψ.

Deixamos a cargo do leitor verificar que ψ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras ao considerar os homomorfismos.

$$\mathbb{K} \xrightarrow{\psi_1} A(Y_0)[x_0]_{x_0} \text{ dado por } a \longmapsto \frac{\widehat{a}}{\widehat{1}} \text{ e } \mathbb{K} \xrightarrow{\varphi} S(Y)_{u_0} \text{ dado por } a \longmapsto \frac{\overline{a}}{\overline{1}}$$

Afirmação 7: ψ é um isomorfismo de anéis (ψ definido na Afirmação 6).

- ψ é injetora.

Considere $\dfrac{g}{x_0^m} \in A(Y_0)[x_0]_{x_0} \in \ker(\psi)$ sendo $g = \sum_{i=0}^{d} \widehat{g_i} x_0^i \in A(Y_0)[x_0]$. Assim,

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{g}{x_0^m}\right) = \frac{\overline{0}}{\overline{1}} \overset{Af.6}{\iff} \frac{\overline{1}}{u_0^m} \cdot \varphi_3(g) = \frac{\overline{0}}{\overline{1}} \quad & \iff \varphi_3(g) = \frac{\overline{0}}{\overline{1}} \quad (u_0 \text{ é invertível}) \\
& \overset{Af.5}{\iff} \textstyle\sum_{i=0}^{d} \varphi_2(\widehat{g_i}) \dfrac{u_0^i}{\overline{1}} = \dfrac{\overline{0}}{\overline{1}} \\
& \overset{Af.4}{\iff} \textstyle\sum_{i=0}^{d} \varphi_1(g_i) \dfrac{u_0^i}{\overline{1}} = \dfrac{\overline{0}}{\overline{1}} \\
& \overset{Af.3}{\iff} \textstyle\sum_{i=0}^{d} \dfrac{\overline{g_i^*}}{u_0^{e_i}} \dfrac{u_0^i}{\overline{1}} = \dfrac{\overline{0}}{\overline{1}} \quad \text{com } e_i = \text{grau}(g_i) \\
& \iff \textstyle\sum_{i=0}^{d} \dfrac{\overline{g_i^*} u_0^i}{u_0^{e_i}} = \dfrac{\overline{0}}{\overline{1}} \quad \text{com } e_i = \text{grau}(g_i).
\end{aligned}$$

Faça $E = e_0 + e_1 + \cdots + e_d$ e observe que $\dfrac{\overline{1}}{u_0^{e_i}} = \dfrac{u_0^{E-e_i}}{u_0^E}$ para cada $i \in \{0, \ldots, d\}$. Assim,

$$\sum_{i=0}^{d} \frac{\overline{g_i^*} u_0^i}{u_0^{e_i}} = \frac{\overline{0}}{\overline{1}} \iff \sum_{i=0}^{d} \frac{\overline{g_i^*} u_0^{E-e_i+i}}{u_0^E} = \frac{\overline{0}}{\overline{1}} \iff \frac{\sum_{i=0}^{d} \overline{g_i^*} u_0^{E-e_i+i}}{u_0^E} = \frac{\overline{0}}{\overline{1}} \iff$$

$$\sum_{i=0}^{d} \overline{g_i^*} u_0^{E-e_i+i} = \overline{0}$$

Da última igualdade concluímos que

$$\sum_{i=0}^{d} g_i^* x_0^{E-e_i+i} \in \mathcal{I}(Y) \underset{homog.}{\overset{ideal}{\Longrightarrow}} g_i^* x_0^{E-e_i+i} \in \mathcal{I}(Y) \quad \forall\, i \in \{0, \ldots, d\}. \tag{1.41}$$

Considere $a = [a_0 : \ldots . : a_n] \in U_0 \cap Y$. Segue de (1.41) que

$$g_i^*(a) a_0^{E-e_i+i} = 0 \overset{a_0 \neq 0}{\iff} g_i^*(a) = 0 \overset{Lema\ 1.12}{\iff} g_i^*(a) = a_0^{d_i} g_i(\varphi_0(a)) = 0$$

Como $Y_0 = \varphi_0(U_0 \cap Y)$, temos que $g_i(b) = 0$ para todo $b \in Y_0$. Logo $g_i \in \mathcal{I}(Y_0)$ para cada $i \in 0, \ldots, d$. Ou seja, $\widehat{g_i} = \widehat{0}$, logo $g = 0 \in A(Y_0)[x_0]$. Portanto, ψ é injetora.

- ψ é sobrejetora. Considere $\dfrac{\overline{f}}{u_0^m} \in S(Y)_{u_0}$ com $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ de grau d.

(i) f é homogêneo.

Assim, $f = x_0^t G$ com G é homogêneo de grau $d - t$ tal que $x_0 \quad G$. Neste caso, considere $g = G(1, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ a desomogeneização de G e observe que $g^* = G$ (g^* é a homogeneização de g relativa a x_0). Logo,

$$\frac{\overline{f}}{u_0^m} = \frac{\overline{x_0^t g^*}}{u_0^m} = \frac{u_0^d}{u_0^m} \frac{\overline{g^*}}{u_0^{d-t}} = \psi\Big(\frac{x_0^d \,\widehat{g}}{x_0^m}\Big).$$

(ii) f não é homogêneo.

Neste caso, escreva a decomposição de f em partes homogêneas. Assim, $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$. Logo,

$$\frac{\overline{f}}{u_0^m} = \sum_{i=0}^{d} \frac{\overline{f_i}}{u_0^m} \underset{\exists \mathrm{p}_i}{\overset{\text{(i)}}{\Longrightarrow}} \frac{\overline{f}}{u_0^m} = \sum_{i=0}^{d} \psi(\mathrm{p}_i) \quad \mathrm{p}_i \in A(Y_0)[x_0]_{x_0} \text{ tal que } \psi(\mathrm{p}_i) = \frac{\overline{f_i}}{u_0^m}.$$

Portanto, se $\mathrm{p} = \sum_{i=0}^{d} \mathrm{p}_i \in A(Y_0)[x_0]_{x_0}$, então $\psi(\mathrm{p}) = \dfrac{\overline{f}}{u_0^m}$. □

Teorema 1.5. *Seja Y uma variedade projetiva em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ e $S(X)$ seu anel de coordenadas homogêneo. Então $\underset{Krull}{\dim} S(Y) = \dim Y + 1$.*

Demonstração. Lembre que $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$ sendo $U_i = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n - \mathcal{Z}(x_i)$. Assim, Y admite a cobertura aberta $\{Y \cap U_i\}_{i=0}^n$. Pelo Lema 1.4, temos que $\dim Y = \max \Big\{ \dim Y \cap U_i \,|\, Y \cap U_i \neq \emptyset \text{ e } i \in \{0, \dots, n\} \Big\}$.

Assuma que $\dim Y = \dim Y \cap U_0$. Agora, sendo $\varphi_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ um homeomorfismo (cf. Proposição 1.25) e $Y_0 := \varphi_0(Y \cap U_0)$, concluímos que

$$\dim Y = \dim Y \cap U_0 = \dim \varphi_0(Y \cap U_0) = \dim Y_0 = \underset{Krull}{\dim} A(Y_0).$$

Note que $S(Y)$ e $A(Y_0)$ são $\mathbb{K}$-álgebras finitamente geradas[74]. Assim,

$$\begin{aligned}
\dim_{Krull} S(Y) \overset{Lema\ 1.16}{=} \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Frac}(S(Y)) &\overset{(1.39)}{=} \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Frac}(S(Y)_{u_0}) \\
&\overset{Proposio\ 1.26}{=} \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Frac}(A(Y_0)[x_0]_{x_0}) \\
&\overset{(1.39)}{=} \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Frac}(A(Y_0)[x_0]) \\
&\overset{Lema\ 1.16}{=} \dim_{Krull} A(Y_0)[x_0] \\
&\overset{Lema\ 1.16}{=} \dim_{Krull} A(Y_0) + 1 \\
&= \dim Y + 1.
\end{aligned}$$

□

Exercício 1.65. Seja $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade linear projetiva não vazia. Mostre que $\dim \Lambda = n - \dim(\mathcal{I}(\Lambda) \cap S_1)$ sendo $S_1 = [x_0, \ldots, x_n]$.

O subanel $S(Y)_{(u)}$ de $S(Y)_u$

Considere $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ uma variedade projetiva, $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ um polinômio homogêneo de grau d tal que $u = \overline{F} \in S(Y)$ seja não nulo (i.e. $F \notin \mathcal{I}(Y)$).

Se $S(Y)_u$ é a localização do anel de coordenadas homogêneo da variedade Y no sistema multiplicativamente fechado $\{1, u, u^2, \ldots\}$, então

$$S(Y)_{(u)} := \left\{ \frac{v}{u^m} \in S(Y)_F | v = \overline{G},\ G \in S_{dm} \text{ e } 0 \leqslant m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Observe que $S(Y)_{(u)}$ é um anel comutativo com unidade (ao considerarmos as operações do anel $S(Y)_u$). Logo é um subanel de $S(Y)_u$. Usualmente denominado *subanel dos elementos de grau zero* de $S(Y)_u$.

Proposição 1.27. *Seja $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ uma variedade projetiva tal que $Y \cap U_i \neq \emptyset$ e $Y_i = \varphi_i(Y \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (com U_i, φ_i segundo a Proposição 1.25). Então*

$$A(Y_i) \cong S(Y)_{(u_i)}$$

como $\mathbb{K}$-álgebras, sendo $u_i = \overline{x_i} \in S(Y)$.

[74]Sejam A, B anéis comutativos com unidade. Assuma que A é uma B-álgebra com homomorfismo $\varphi : B \longrightarrow A$. Dizemos que A é uma *B-álgebra finitamente gerada* se existem $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ em A tais que $\psi : B[x_1, \ldots, x_m] \longrightarrow A$ dado por $b \longmapsto \varphi(b)$ se, $b \in B$ e $x_i \longmapsto \alpha_i$ é um homomorfismo de anéis sobrejetor. Por exemplo, se $\mathbb{K}$ é um corpo então $\dfrac{\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]}{I}$ sendo I um ideal do anel $\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]$, é uma $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerada.

Demonstração. Indicaremos as principais linhas da demonstração no caso $i = 0$.

Segue da Afirmação 4 (na demonstração da Proposição 1.26) que a função

$$\varphi_2 : A(Y_0) \longrightarrow S(Y)_{u_0} \text{ dada por } \varphi_2(\widehat{g}) = \frac{\overline{g^*}}{u_0^d} \text{ e } d = \text{grau}(g)$$

sendo g^* a homogeneização de $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ relativa à variável x_0, se $\widehat{g}$ é não nulo e leva zero em zero (dos respectivos anéis), está bem definida e é um homomorfismo de anéis (de fato, é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras).

Observe que $\varphi_2(\widehat{g}) \in S(Y)_{(u_0)}$ para todo $\widehat{g} \in A(Y)$.

Afirmação: $\psi : A(Y_0) \longrightarrow S(Y)_{(u_0)}$ dada por $\widehat{g} \longmapsto \varphi_2(\widehat{g})$ é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras.

Deixamos a cargo do leitor a verificação da afirmação acima. □

1.2.4 Funções regulares

Seja $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ um conjunto algébrico quase projetivo e $p \in Y$. Uma função $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ é dita *regular em* p, se existe $U_p \subseteq Y$ vizinhança aberta de p, $F, G \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ homogêneos do mesmo grau tais que

$$G(u) \neq 0, \ \forall\, u \in U_p \quad \text{e} \quad \varphi(u) = \frac{F(u)}{G(u)}, \ \forall\, u \in U_p.$$

Neste caso, usamos a notação $\varphi_{|U_p} = \dfrac{F}{G}$ sempre que $\mathcal{Z}(G) \cap U_p = \emptyset$. Em essência as funções regulares são localmente definidas por um quociente polinomial homogêneo do mesmo grau.[75]

A função $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ é dita *regular* se for regular em todos os pontos de seu domínio.

Exemplo 1.68. Fixe $k \in \mathbb{K}$. Se $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ for uma variedade quase projetiva, então a função constante $\widehat{k} : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $y \longmapsto k$ é uma função regular.

De fato, para cada $p \in Y$, escolha a vizinhança $U_p = Y$, $F = k$ e $G = 1$.

Exemplo 1.69. Seja $U_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} - \mathcal{Z}(x_i)$ com $0 \leqslant i \leqslant n$. A função $\pi_j : U_i \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $[a_0 : \ldots : a_n] \longmapsto \dfrac{a_j}{a_i}$ é uma função regular para cada $j \in \{0, \ldots, n\}$, $j \neq i$.

Para cada $p \in U_i$ escolha $U_p = U_i$ e $F = x_j, G = x_i \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$.

Exemplo 1.70. Sejam $Y = \left\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 | a_1^2 a_2 = a_0^3\right\}$ e $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi([a_0 : a_1 : a_2]) = \begin{cases} \dfrac{a_1}{a_0}, & \text{se } a_0 \neq 0, \\ 0, & \text{se } a_0 = 0. \end{cases}$$

[75] Observe que o fato de F e G serem homogêneos do mesmo grau garante a boa definição da função $\dfrac{F}{G}$ em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} - \mathcal{Z}(G)$.

A seguir vamos mostrar que Y é uma variedade projetiva e que φ é regular para todo $p \in Y - \{[0:1:0],[0:0:1]\}$.

Afirmação 1: Y é uma variedade projetiva.

Observe que:

- $Y = \mathcal{Z}(x_1^2 x_2 - x_0^3)$. Assim, Y é um conjunto algébrico projetivo.
- $Y = (U_2 \cap Y) \cup \{q\}$, sendo $q = [0:1:0]$ e $U_2 = \mathbb{P}^2 - \mathcal{Z}(x_2)$.
- $U_2 \cap Y$ é um conjunto irredutível em $\mathbb{P}^2$.

Visto que, $\mathcal{Z}(x_1^2 - x_0^3)$ é uma variedade afim em $\mathbb{A}^2$ (cf. Exemplo 1.41) e $U_2 \cap Y = \varphi_2^{-1}(\mathcal{Z}(x_1^2 - x_0^3))$, sendo $\varphi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ o homeomorfismo dado por (cf. Proposição 1.25)

$$[a_0 : a_1 : a_2] \longmapsto \Big(\frac{a_0}{a_2}, \frac{a_1}{a_2}\Big).$$

- $Y = \overline{U_2 \cap Y}$. Logo Y é irredutível.

A partir da igualdade $Y = (U_2 \cap Y) \cup \{q\}$ sendo $q = [0:1:0]$, concluímos ao tomar fecho que

$$Y = \overline{U_2 \cap Y} \cup \{q\}.$$

Assim, é suficiente mostrar que $q \in \overline{U_2 \cap Y}$.

Note que para todo $t \in \mathbb{C}$ não nulo $[t^2 : 1 : t^3] \in U_2 \cap Y$. Assim, para todo $f \in \mathcal{I}(U_2 \cap Y)$ tem-se que $f(t^2, 1, t^3) = 0$, para todo $t \neq 0$ complexo. Logo, o polinômio $h(x) = f(x^2, 1, x^3) \in \mathbb{C}[x]$ é nulo (pois possui infinitas raízes). Portanto, $h(0) = f(0,1,0) = 0$ para todo $f \in \mathcal{I}(U_2 \cap Y)$. Portanto,

$$q = [0:1:0] \in \mathcal{Z}(\mathcal{I}(U_2 \cap Y)) = \overline{U_2 \cap Y}.$$

Afirmação 2: φ é regular para todo $p \in Y - \{[0:1:0],[0:0:1]\}$.

Observe que

$$Y \cap \mathcal{Z}(x_0) = \mathcal{Z}(x_1^2 x_2 - x_0^3, x_0) = \mathcal{Z}(x_1 x_2, x_0) = \Big\{[0:1:0],[0:0:1]\Big\}.$$

Assim $Y - \{[0:1:0],[0:0:1]\} = Y \cap U_0$, sendo $U_0 = \mathbb{P}^2 - \mathcal{Z}(x_0)$.

Então para cada $p \in Y - \{[0:1:0],[0:0:1]\}$, considere $U_p = Y \cap U_0$, $F = x_1$ e $G = x_0 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$.

Afirmação 3: φ não é regular em $p \in \{[0:1:0],[0:0:1]\}$.

Considere $p \in \{[0:1:0],[0:0:1]\}$ e suponha (por absurdo) que φ é regular em p.

Assim existem $V \subseteq Y$ vizinhança aberta de p e $F, G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneos do mesmo grau tais que

$$\varphi_{|V} = \frac{F}{G}, \quad \text{com } \mathcal{Z}(G) \cap V = \emptyset.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\varphi(q)=\frac{F(q)}{G(q)},\ \ \forall\, q=[a_0:a_1:a_2]\in V \quad &\Longrightarrow \frac{a_1}{a_0}=\frac{F(q)}{G(q)},\ \ \forall\, q\in V\\ &\Longrightarrow a_1G(q)=a_0F(q),\ \ \forall\, q\in V\\ &\Longrightarrow V\subseteq \mathcal{Z}(x_1G-x_0F)\end{aligned}$$

Como Y é irredutível e V um aberto não vazio em Y, temos que

$$\begin{aligned}Y=\overline{V}\subseteq\mathcal{Z}(x_1G-x_0F)\quad &\Longrightarrow x_1G-x_0F\in\mathcal{I}(Y)=\sqrt{\langle x_1^2x_2-x_0^3\rangle}=\langle x_1^2x_2-x_0^3\rangle\\ &\Longrightarrow x_1G-x_0F=H\cdot(x_1^2x_2-x_0^3)\ \ \text{para algum } H\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{homogêneo em } \mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]\\ &\Longrightarrow x_1(G-Hx_1x_2)=x_0(F-Hx_0^2)\\ &\Longrightarrow G-Hx_1x_2=x_0G_1 \text{ para algum } G_1 \text{ homogêneo}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{em } \mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]\\ &\Longrightarrow G(p)=0,\ \text{se } p\in Y\cap\mathcal{Z}(x_0)\\ &\Longrightarrow \{[0:1:0],[0:0:1]\}\subseteq\mathcal{Z}(G)\cap V\neq\emptyset\end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Exercício 1.66. Considere $Y=\Big\{[a_0:a_1:a_2]\in\mathbb{P}^2|a_1^2a_2=a_0^3\Big\}$. Mostre que $\mathcal{I}(Y)=\langle x_1^2x_2-x_0^3\rangle$.

Exercício 1.67. Sejam $F,G\in\mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ polinômios homogêneos do mesmo grau e $Y\subseteq\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ uma variedade quase projetiva tais que $\mathcal{Z}(G)\cap Y=\emptyset$. Mostre que a função $\varphi:Y\longrightarrow\mathbb{K}$ dada por $y\longmapsto\dfrac{F(y)}{G(y)}$ é contínua.

Proposição 1.28. *Seja $Y\subseteq\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ um conjunto algébrico quase projetivo e $\varphi:Y\longrightarrow\mathbb{K}$ uma função regular. Então φ é uma função contínua.*

Demonstração. Como φ é regular em cada ponto $a\in Y$, então existem $U_a\subseteq Y$ aberto contendo a e $F_a,G_a\in\mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ homogêneos do mesmo grau tais que

$$\varphi_{|U_a}=\frac{F_a}{G_a}\quad\text{com }\ \mathcal{Z}(G_a)\cap U_a=\emptyset. \tag{1.42}$$

Segue do Exercício 1.67 que $\varphi_{|U_a}:U_a\longrightarrow\mathbb{K}$ definida em (1.42) é uma função contínua. Logo, para todo fechado $Z\subseteq\mathbb{K}=\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ temos que $(\varphi_{|U_a})^{-1}(Z)=\varphi^{-1}(Z)\cap U_a$ é um fechado em U_a. Por outro lado sendo $\{U_a\}_{a\in Y}$ é uma cobertura aberta de Y, então $\varphi^{-1}(Z)$ é fechado em Y pelo Lema 1.6. Portanto φ é uma função contínua. □

Exercício 1.68. Sejam $Y\subseteq\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ uma variedade quase projetiva e $\varphi:Y\longrightarrow\mathbb{K}$ uma bijeção. Mostre que φ é contínua.

Exemplo 1.71. Se $Y := \Big\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 | a_1^2 a_2 = a_0^3\Big\}$ e $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$\varphi([a_0 : a_1 : a_2]) := \begin{cases} \dfrac{a_1}{a_0}, & \text{se } a_0 \neq 0, \\ 0, & \text{se } a_0 = 0. \end{cases}$$

Então φ é contínua.

Observe que φ não é uma bijeção visto que $\varphi([0 : 0 : 1]) = \varphi([0 : 1 : 0]) = 0$. Entretanto, se $U = Y - Y \cap \mathcal{Z}(x_0)$ temos que $\varphi_1 : U \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ definida por $\varphi_1(y) = \varphi(y)$ é bijetiva, e sua inversa é dada por: $\varphi_1^{-1}(\lambda) = [\lambda^2 : \lambda^3 : 1]$ com $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo.

Seja Z um fechado em $\mathbb{A}^1$. Vamos comentar o caso em que $Z = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ é finito (e não vazio).

Caso 1: $0 \notin Z$.

Neste caso, $\varphi^{-1}(Z) = \{q_1, \ldots, q_k\}$ sendo $q_i = [\lambda_i^2 : \lambda_i^3 : 1] \in Y$. Assim, Z é fechado em Y.

Caso 2: $Z = \{0\} \cup Z_1$ sendo $Z_1 = Z - \{0\}$ fechado em Y.

Observe que $\varphi^{-1}(Z) = \varphi^{-1}(\{0\}) \cup \varphi^{-1}(Z_1)$. Assim, segue do Caso 1 que $\varphi^{-1}(Z_1)$ é fechado em Y. Por outro lado,

$$\varphi^{-1}(\{0\}) = Y \cap \mathcal{Z}(x_0) = \{[0 : 0 : 1], [0 : 1 : 0]\}$$

que também é um fechado em Y.

Observação 1.15. A função φ do Exemplo 1.71 é contínua, mas não é regular em todos os pontos de seu domínio (veja Exemplo 1.70). Assim, (como no caso afim) conferimos que a recíproca da Proposição 1.28 não é válida no caso projetivo.

A $\mathbb{K}$-álgebra das funções regulares $\mathcal{O}(X)$

Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ um conjunto algébrico quase projetivo. Defina

$$\mathcal{O}(X) := \Big\{\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K} | \varphi \text{ é regular}\Big\}.$$

$\boxed{\text{ATENÇÃO:}}$ Estamos usando a mesma notação $\mathcal{O}(X)$ no caso em que X é um conjunto algébrico quase afim ou quase projetivo.

Proposição 1.29. *Com as notações acima.*

(i) *Para cada $a \in \mathbb{K}$ a função $\widehat{a} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $x \longmapsto a$ é uma função regular.*

(ii) *$\mathcal{O}(X)$ com as operações usuais de adição e multiplicação de funções com valores no corpo $\mathbb{K}$, é um anel comutativo com unidade $\widehat{1}$.*

(iii) *A função de $\mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ dada por $a \longmapsto \widehat{a}$ é um homomorfismo de anéis, que torna $\mathcal{O}(X)$ uma $\mathbb{K}$-álgebra.*

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor. □

Lema 1.17. *Sejam X uma variedade projetiva em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(X)$, tais que $\varphi_{|U} = \psi_{|U}$ para algum aberto não vazio U de X. Então $\varphi = \psi$.*

Demonstração. Observe que o conjunto $Y = \{x \in X | \varphi(x) = \psi(x)\}$ é um fechado em X, visto que $\varphi - \psi \in \mathcal{O}(X)$. Logo $\varphi - \psi$ é uma função contínua e $(\varphi - \psi)^{-1}(\{0\}) = Y$ é um fechado em X.

Agora, segue da hipótese que $U \subseteq Y \subseteq X$. Sendo X uma variedade e U aberto não vazio de X, concluímos ao tomar fecho que

$$X = \overline{U} \subseteq Y \subseteq X \Longrightarrow Y = X \Longleftrightarrow \varphi = \psi.$$

□

Exemplo 1.72. A função $\Psi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}})$ dada por $a \longmapsto \widehat{a}$, sendo $\widehat{a}$ a função constante $x \longmapsto a$, é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Ou seja, toda função regular em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ é constante.

Deixamos a cargo do leitor verificar que Ψ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras injetor. A seguir mostraremos que Ψ é sobrejetor.

Considere $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{P}^1)$ não nula e $p \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Como φ é regular em p, existe $V_p \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ aberto contendo p e $F_p, G_p \in \mathbb{K}[x_0, x_1]$ homogêneos do mesmo grau d tais que

$$\varphi_{|V_p} = \frac{F_p}{G_p} \quad \text{com } \mathcal{Z}(G_p) \cap V_p = \emptyset.$$

Sem perda de generalidade vamos assumir que $\mathrm{mdc}(F_p, G_p) = 1$, logo $\mathcal{Z}(F_p) \cap \mathcal{Z}(G_p) = \emptyset$.[76]

Temos duas possibilidades para o grau de d de F_p e G_p.

- $d = 0$.

  Neste caso, F_p e G_p são constantes e não nulos. Assim, se $\dfrac{F_p}{G_p} = a \in \mathbb{K}$ então $\varphi_{|V_p} = \widehat{a}_{|V_p}$, e segue do Lema 1.17 que $\varphi = \widehat{a}$.

- $d \geqslant 1$.

  Neste caso, $\mathcal{Z}(G_p)$ é um conjunto não vazio e finito. Assuma, que $\mathcal{Z}(G_p) = \{p_1, \ldots, p_k\}$. Sendo φ regular em p_1, existem $V_1 \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ aberto contendo p_1 e $F_1, G_1 \in \mathbb{K}[x_0, x_1]$ homogêneos do mesmo grau tais que

$$\varphi_{|V_1} = \frac{F_1}{G_1} \quad \text{com } \mathcal{Z}(G_1) \cap V_1 = \emptyset.$$

[76] Se $\mathrm{mdc}(F_p, G_p) = H$ com H de grau maior ou igual que 1, então $F_p = HA$ e $G_p = HB$ para algum $A, B \in \mathbb{K}[x_0, x_1]$ (homogêneos do mesmo grau) e $\mathrm{mdc}(A, B) = 1$. Neste caso $\varphi_{|V_p} = \dfrac{F_p}{G_p} = \dfrac{A}{B}$. Por outro lado, se $[a_0 : a_1] \in \mathcal{Z}(F_p) \cap \mathcal{Z}(G_p)$ então $a_1 x_0 - a_0 x_1$ divide F_p e G_p, logo $\mathrm{mdc}(F_p, G_p) \neq 1$.

Agora, como V_p e V_1 são abertos não vazios em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ (que é uma variedade) tem-se que $V_p \cap V_1 \neq \emptyset$ e ao restringirmos φ a este aberto, concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{F_p(q)}{G_p(q)} = \frac{F_1(q)}{G_1(q)},\ \forall\, q \in V_p \cap V_1 &\Longrightarrow V_p \cap V_1 \subseteq \mathcal{Z}(F_pG_1 - F_1G_p) \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \\
&\Longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} = \overline{V_p \cap V_1} \subseteq \mathcal{Z}(F_pG_1 - F_1G_p) \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \\
&\Longrightarrow F_pG_1 = F_1G_p, \quad \text{em } \mathbb{K}[x_0, x_1] \\
&\Longrightarrow F_p(p_1) = 0,\ (G_p(p_1) = 0 \text{ e } G_1(p_1) \neq 0) \\
&\Longrightarrow p_1 \in \mathcal{Z}(F_p) \cap \mathcal{Z}(G_p)
\end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Exercício 1.69. A argumentação utilizada no Exemplo 1.72 pode ser usada para mostrar que $\mathcal{O}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}) \underset{\mathbb{K}-alg}{\cong} \mathbb{K}$?

Exercício 1.70. Sejam $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ um conjunto algébrico projetivo, $Y_1, \ldots, Y_k$ suas componentes irredutíveis. Se $\varphi \in \mathcal{O}(Y)$, então mostre que $\varphi_{|Y_i}$ (a restrição de φ à componente Y_i) é uma função regular.

Exercício 1.71. Sejam Y uma variedade projetiva e $\varphi \in \mathcal{O}(Y)$. Mostre que $\varphi|_U \in \mathcal{O}(U)$ para todo $U \subseteq Y$ aberto.

Exemplo 1.73. Considere $Y = \left\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 | a_1^2 a_2 = a_0^3\right\}$. Verifica-se que $\mathcal{O}(Y) \cong \mathbb{C}$.

Sabemos que $\Psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}(Y)$ dada por $\lambda \longmapsto \widehat{\lambda}$ é um homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras injetor. Para conferirmos que ψ é sobrejetora, considere $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Y$ dada por $[s : t] \longmapsto [st^2 : t^3 : s^3]$. Observe que:

- f está bem definida e é bijetora.[77]
- f é contínua.

  Basta notar que os fechados em Y são o próprio Y e seus subconjuntos finitos. De fato, se $H \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ for homogêneo, então

  $$Y \cap \mathcal{Z}(H) = \left\{[st^2 : t^3 : s^3] \in Y | H(st^2, t^3, s^3) = 0\right\}.$$

  Considere $h(u) := H(u^2, u^3, 1) \in \mathbb{C}[u]$. Se $h(u) = 0$, segue que $H(st^2, t^3, s^3) = 0$ para todo $s \neq 0$ (visto que $[st^2 : t^3 : s^3] = [a^2 : a^3 : 1]$ e $h(a) = 0$ sendo $a = t/s$). Assim

  $$Y - \{[0:1:0]\} \subseteq \mathcal{Z}(H) \overset{fecho}{\Longrightarrow} Y \subseteq \mathcal{Z}(H) \Longrightarrow Y \cap \mathcal{Z}(H) = Y.$$

[77] Note que, se $p = [a_0 : a_1 : a_2] \in Y$ e $a_1 \neq 0$ então $p = [a_1^2 a_0 : a_1^3 : a_1^2 a_2] = [a_1^2 a_0 : a_1^3 : a_0^3]$, ou seja, $p = f([a_0 : a_1])$. Agora, se $a_1 = 0$ então $p = [0 : 0 : 1]$, e neste caso $p = f([1 : 0])$.

Caso contrário, $h(u) \neq 0$ e possui uma quantidade finita de raízes. De onde concluímos que $Y \cap \mathcal{Z}(H)$ é um conjunto finito.[78]

Sendo f bijetora segue que $f^{-1}(Z) \overset{fech.}{\subseteq} \mathbb{P}^1$, para todo fechado Z de Y.

- Se $\psi \in \mathcal{O}(Y)$, então $\psi \circ f$ é regular.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi\circ f"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

De fato, dado $a \in \mathbb{P}^1$ sendo ψ regular em $p = f(a)$, existe $V_p \subseteq Y$ aberto contendo p e $F_p, G_p \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneos do mesmo grau d, tais que

$$\psi_{|V_p} = \frac{F_p}{G_p} \quad \text{com } \mathcal{Z}(G_p) \cap V_p = \emptyset. \tag{1.43}$$

Agora, como f é contínua, $U_a := f^{-1}(V_p)$ é um aberto de $\mathbb{P}^1$ contendo a. Além disso, $F_1 := F(x_0x_1^2, x_1^3, x_0^3)$ e $G_1 := G(x_0x_1^2, x_1^3, x_0^3) \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ são polinômios homogêneos do mesmo grau $3d$ tais que

$$f_{|U_a} = \frac{F_1}{G_1} \quad \text{com } \mathcal{Z}(G_1) \cap U_a = \emptyset.$$

Visto que, todo ponto $b \in U_a$ é da forma $b = f^{-1}(q)$ com $q \in V_p$, segue de (1.43) que

$$\psi(q) = \frac{F_p(q)}{G_p(q)} \iff \psi(f(b)) = \frac{F_p(f(b))}{G_p(f(b))} \iff \psi \circ f(b) = \frac{F_1(b)}{G_1(b)}.$$

Para finalizar, basta lembrar que toda função regular em $\mathbb{P}^1$ é constante (cf. Exemplo 1.72). Assim, $\psi \circ f = \widehat{\lambda}$ com $\lambda \in \mathbb{C}$. De onde concluímos que $\psi = \widehat{\lambda}$, sendo ψ uma função regular em Y arbitrária.

Exercício 1.72. Seja $Y = \left\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 | a_1a_2 = 0\right\}$. Determine o anel de funções $\mathcal{O}(Y)$.

Exercício 1.73. Considere $Y = \mathcal{Z}(x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3) \subseteq \mathbb{P}^3$. Determine:

(a) As componentes irredutíveis de Y.

[78] Como todo fechado em $\mathbb{P}^2$ é da forma $\mathcal{Z}(H_1) \cap \cdots \cap \mathcal{Z}(H_k)$, conclui-se que os fechados em Y são o próprio Y e seus subconjuntos finitos.

(b) O anel de funções $\mathcal{O}(Y)$.

Proposição 1.30. $\mathcal{O}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}) \underset{\mathbb{K}-alg}{\cong} \mathbb{K}$, *para todo n natural.*

Demonstração. Sabemos que a função $\Psi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$ dada por $a \longmapsto \widehat{a}$ sendo $\widehat{a}$ a função constante $x \longmapsto a$, é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras injetor.

Assim, basta mostrar Ψ é sobrejetora. Com esse objetivo em mente, considere $\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$ não nula. Além disso, precisamos lembrar que se $U_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} - \mathcal{Z}(x_i)$ com $i \in \{0, \ldots, n\}$, então $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ dado por

$$[a_0 : \ldots . : a_{i-1} : a_i : a_{i+1} : \ldots : a_n] \longmapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right)$$

é um homeomorfismo (cf. Proposição 1.25).

Ao considerarmos a restrição $\psi_{|_{U_i}}$, para cada i obtemos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \arrow[r, "{\varphi_i}^{-1}"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & U_i \arrow[d, "\psi_{|_{U_i}}"] \\
& \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Afirmação: $\psi_i : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{K}$, dada pela composta $x \longmapsto \psi(\varphi_i^{-1}(x))$, é uma função regular para cada i.

De fato, considere $x = \varphi_i(p) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, com $p \in U_i$. Como ψ é regular em p existe $V_p \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ aberto contendo p e $F_p, G_p \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ homogêneos do mesmo grau tais que

$$\psi_{|_{V_p}} = \frac{F_p}{G_p} \quad \text{com } \mathcal{Z}(G_p) \cap V_p = \emptyset. \tag{1.44}$$

Observe que $p \in U_i \cap V_p \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ (com V_p aberto em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$). Assim, $W_p = U_i \cap V_p$ é aberto de U_i contendo p.

Além disso, segue de (1.44) que

$$\psi_{|_{W_p}} = \frac{F_p}{G_p} \quad \text{com } \mathcal{Z}(G_p) \cap W_p = \emptyset.$$

Considere $U_x = \varphi_i(W_p) \overset{ab.}{\subseteq} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ contendo $x = \varphi_i(p)$. Assim, temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
U_i \arrow[r, "\varphi_i"] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \\
W_p \arrow[u, hook] \arrow[d, "\psi_{|_{W_p}}"] & U_x \arrow[u, hook] \arrow[l, "{\varphi_i}^{-1}_{|_{U_x}}"] \arrow[dl, "{\psi_i}_{|_{U_x}}"] \\
\mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

A seguir, mostraremos que a restrição de ψ_i ao aberto U_x é um quociente polinomial.

Para fazer isso, considere $f_x, g_x \in \mathbb{K}[\check{x}_i]$ determinados pela desomogeneização de F_p, G_p em relação à variável x_i, respectivamente ($\mathbb{K}[\check{x}_i]$ denota o subanel de $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ no qual a variável x_i foi omitida[79]).

Note que, para cada $q = (b_0, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n) \in U_x$ tem-se que

$$\underbrace{\varphi_i^{-1}(q) = [b_0 : \ldots : b_{i-1} : 1 : b_{i+1} : \ldots : b_n]}_{\in W_p \subseteq V_p} \text{ e } \underbrace{\psi(\varphi_i^{-1}(q))}_{=\psi_i(q)} = \frac{F_p(\varphi_i^{-1}(q))}{G_p(\varphi_i^{-1}(q))} = \frac{f_x(q)}{g_x(q)}$$

com $g_x(q) \neq 0$, para todo $q \in U_x$. Visto que $\mathcal{Z}(G_p) \cap W_p = (\mathcal{Z}(G_p) \cap U_i) \cap W_p$ ao aplicarmos φ_i, obtemos

$$\emptyset = \varphi_i(\underbrace{\mathcal{Z}(G_p) \cap W_p}_{=\emptyset}) = \underbrace{\varphi_i(\mathcal{Z}(G_p) \cap U_i)}_{=\mathcal{Z}(g_x)} \cap \underbrace{\varphi_i(W_p)}_{=U_x}.$$

Por outro lado, segue do Teorema 1.2 que $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) \cong A(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e da Proposição 1.27 que $A(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) \cong S(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})_{(x_i)}$. Assim,

$$\psi_{|U_i} \longmapsto \underbrace{\psi_i}_{\in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})} \longmapsto \underbrace{h_i}_{\in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]} \longmapsto \frac{h_i}{x_i^{m_i}} \in S_{(x_i)},\ h_i \in S_{m_i}.$$

De onde concluímos que:

$$\psi_{|U_i} = \frac{h_i}{x_i^{m_i}} \quad \text{com} \quad h_i \in S_{m_i}. \tag{1.45}$$

Sem perda de generalidade vamos assumir que $\mathrm{mdc}(h_i, x_i) = 1$ se $m_i \geqslant 1$ (ou seja, x_i não divide h_i)

Seguindo a linha de raciocínio do Exemplo 1.72, analisaremos os seguintes dois casos:

- Existe $i \in \{0, \ldots, n\}$, tal que $m_i = 0$.

  Ou seja, $\psi_{|U_i}$ em (1.45) é uma função constante. Assim segue do Lema 1.17 que $\psi = \widehat{a}$ com $a = h_i \in \mathbb{K}$.

- $m_i \geqslant 1$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.

  Considere $i \neq j$, segue de (1.45) que ao restringirmos ψ ao aberto $U_i \cap U_j$ tem-se que para todo $p = [a_0 : \ldots : a_n] \in U_i \cap U_j$ vale a seguinte igualdade

$$\frac{h_i(p)}{a_i^{m_i}} = \frac{h_j(p)}{a_j^{m_j}}.$$

[79] Por exemplo, $\mathbb{K}[\check{x}_0] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathbb{K}[\check{x}_1] = \mathbb{K}[x_0, x_2, \ldots, x_n]$,..., $\mathbb{K}[\check{x}_n] = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$.

De onde concluímos que $U_i \cap U_j \subseteq \mathcal{Z}(h_i \cdot x_j^{m_j} - h_j \cdot x_i^{m_i}) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Ao tomar fecho, segue que

$$\mathcal{Z}(h_i \cdot x_j^{m_j} - h_j \cdot x_i^{m_i}) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \Longrightarrow h_i \cdot x_j^{m_j} = h_j \cdot x_i^{m_i}$$

o que é absurdo, pois $x_\ell \quad h_\ell$, sendo $\ell \in \{i, j\}$.

$\square$

Observação 1.16. O resultado que acabamos de estabelecer na Proposição 1.30 é uma caso particular do seguinte resultado mais geral. Se $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ é uma variedade projetiva, então

$$\mathcal{O}(X) \underset{\mathbb{K}-alg}{\cong} \mathbb{K}.$$

Ou seja, as únicas funções regulares numa variedade projetiva são as funções constantes (cf. Teorema 3.4, p. 18 em Hartshorne (1977)).

1.3 Morfismos caso afim/projetivo

Sejam X e Y conjuntos algébricos quase afins ou quase projetivos.

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é denominada *morfismo* se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) f é contínua;

(ii) Para todos $V \overset{ab.}{\subseteq} Y$ e $\varphi \in \mathcal{O}(V)$, verifica-se que $(\varphi \circ f)_{|_V} \in \mathcal{O}(f^{-1}(V))$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
f^{-1}(V) \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_{|}"] \arrow[dr, "(\varphi\circ f)_{|_V}"'] & V \arrow[u, hook] \arrow[d, "\varphi"] \\
 & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Se f for uma bijeção tal que $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ também é um morfismo, então f será denominada *isomorfismo*. Neste caso, X e Y são ditas *isomorfas* e usamos a notação $X \cong Y$.

Observação 1.17. O próximo exemplo mostra que a natureza dos morfismos entre variedades não tem um comportamento semelhante ao que acontece na categoria dos espaços vetoriais, grupos e anéis. Mais precisamente, se $f : X \longrightarrow Y$ for um homomorfismo de grupos ou anéis bijetivo, então $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ também é um homomorfismo de grupos ou anéis. De fato, no exemplo a seguir vamos exibir um morfismo bijetivo $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Y$, cuja inversa não é um morfismo.

Exemplo 1.74. Considere a variedade $Y = \left\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 | a_1^2 a_2 = a_0^3\right\}$ e a função $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Y$, dada por $[s : t] \longmapsto [st^2 : t^3 : s^3]$.

Primeiramente, note que f é um morfismo (cf. Exemplo 1.73).

Afirmação: $f^{-1} : Y \longrightarrow \mathbb{P}^1$ **não** é um morfismo.

- No Exemplo 1.73 também mostramos que f é uma bijeção. E sendo os fechados em $\mathbb{P}^1$ o próprio $\mathbb{P}^1$ e seus subconjuntos finitos segue-se que f^{-1} é uma função contínua.

- Considere o aberto $U_0 = \{[s : t] \in \mathbb{P}^1 | s \neq 0\}$ de $\mathbb{P}^1$, $\varphi \in \mathcal{O}(U_0)$ dada por $\varphi([s : t]) = \dfrac{t}{s}$. A seguir, mostraremos que $(\varphi \circ f^{-1})_{|f(U_0)} : f(U_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ não é uma função regular no ponto $p = [0 : 0 : 1] = f([1 : 0])$.

  Observe que

$$(\varphi \circ f^{-1})([a_0 : a_1 : a_2]) = \begin{cases} \dfrac{a_1}{a_0}, & \text{se } a_0 \cdot a_1 \neq 0, \\ 0, & \text{se } a_0 = a_1 = 0. \end{cases}$$

  De fato, se $q = [a_0 : a_1 : a_2] \in f(U_0)$ sendo a_0 e a_1 ambos não nulos, segue que $q = [a_0 a_1^2 : a_1^3 : a_2 a_1^2] = [a_0 a_1^2 : a_1^3 : a_0^3] = f([a_0 : a_1])$ com $[a_0 : a_1] \in U_0$ (visto que $a_0 \neq 0$). Assim,

$$(\varphi \circ f^{-1})(q) = (\varphi \circ f^{-1})(f([a_0 : a_1])) = \varphi([a_0 : a_1]) = \frac{a_1}{a_0}.$$

  Pelo absurdo, suponha que $(\varphi \circ f^{-1})_{|f(U_0)}$ é regular em $p = [0 : 0 : 1] = f([1 : 0])$. Assim, existem $V \subseteq f(U_0)$ vizinhança aberta de p e $F, G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneos do mesmo grau tais que

$$(\varphi \circ f^{-1})_{|V} = \frac{F}{G} \quad \text{com} \quad \mathcal{Z}(G) \cap V = \emptyset. \tag{1.46}$$

  Ao considerarmos o aberto $V_1 = V - \{p\} \subseteq f(U_0)$ e $\psi := (\varphi \circ f^{-1})_{|V}$, segue de (1.46) que

$$\begin{aligned} \psi(q) = \frac{F(q)}{G(q)}, \ \forall\, q = [a_0 : a_1 : a_2] \in V_1 \quad &\Longrightarrow \frac{a_1}{a_0} = \frac{F(q)}{G(q)}, \ \forall\, q \in V_1 \\ &\Longrightarrow a_1 G(q) = a_0 F(q), \ \forall\, q \in V_1 \\ &\Longrightarrow V_1 \subseteq \mathcal{Z}(x_1 G - x_0 F). \end{aligned}$$

Como Y é irredutível e $V_1 \subset Y$ aberto não vazio, temos que $Y = \overline{V_1}$. Logo,

$$\begin{aligned} Y \subseteq \mathcal{Z}(x_1G - x_0F) &\Longrightarrow x_1G - x_0F \in \mathcal{I}(Y) = \left\langle x_1^2x_2 - x_0^3 \right\rangle \text{(cf. Exercício 1.66)} \\ &\Longrightarrow x_1G - x_0F = H \cdot (x_1^2x_2 - x_0^3), \quad \text{para algum } H \\ &\qquad\qquad\qquad \text{homogêneo em } \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \\ &\Longrightarrow x_1(G - Hx_1x_2) = x_0(F - Hx_0^2) \\ &\Longrightarrow G - Hx_1x_2 = x_0G_1, \quad \text{para algum } G_1 \\ &\qquad\qquad\qquad \text{homogêneo em } \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \\ &\Longrightarrow G(p) = 0 \\ &\Longrightarrow p \in \mathcal{Z}(G) \cap V \neq \emptyset \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Exercício 1.74. Mostre que $\mathbb{P}^1$ e $\mathcal{C} = \left\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 | a_2a_0 = a_1^2\right\}$ são variedades projetivas isomorfas.

Exercício 1.75. Sejam X e Y variedades quase afins ou quase projetivas isomorfas. Mostre que $\dim X = \dim Y$.

Lema 1.18. *Seja X um conjunto algébrico (quase afim ou quase projetivo). Se $\varphi \in \mathcal{O}(X)$ e $\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então $\frac{1}{\varphi} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $x \longmapsto \frac{1}{\varphi(x)}$ é uma função regular.*[80]

Demonstração. Assuma que X é um conjunto algébrico quase afim em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Como $\varphi \in \mathcal{O}(X)$, para cada $a \in X$ existem $U_a \overset{ab}{\subseteq} X$ (contendo a) e $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tais que

$$\varphi_{|U_a} = \frac{f}{g} \quad \text{e} \quad \mathcal{Z}(g) \cap U_a = \emptyset. \tag{1.47}$$

Observe que $f(x) \neq 0, \ \forall\, x \in U_a$. Assim, segue de (1.47) que

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)_{|U_a} = \frac{g}{f} \quad \text{e} \quad \mathcal{Z}(f) \cap U_a = \emptyset.$$

O caso em que X é um conjunto algébrico quase projetivo prova-se de forma análoga. □

Proposição 1.31. *Sejam X um conjunto algébrico (afim ou projetivo) e $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ um conjunto algébrico afim. Verifica-se que $f : X \longrightarrow Y$ é um morfismo se, somente se, $\pi_i \circ f \in \mathcal{O}(X)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, sendo $\pi_i : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{K}$ a projeção na i-ésima coordenada, i.e. $(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto a_i$.*

[80] Se $k \in \mathbb{K}$ for não nulo, então $\frac{1}{k} = k^{-1}$ é o inverso multiplicativo de k.

Demonstração. Considere a função $f : X \longrightarrow Y$ dada por

$$x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x)),$$

ou seja, $f_i : X \longrightarrow \mathbb{K}$ são as (assim denominadas) *funções coordenadas* de f.

Observe que $\pi_i \circ f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é igual a f_i para cada i.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Nosso objetivo é mostrar que $f_i \in \mathcal{O}(X)$ se, f for um morfismo.

Considere $x \in X$, logo $p = f(x) \in Y$ e a função $\varphi_i = \pi_{i|_Y} \in \mathcal{O}(Y)$, sendo f um morfismo segue da segunda condição que $\varphi_i \circ f = f_i \in \mathcal{O}(X)$ para cada i.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi_i"] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \arrow[dl, "\pi_i"] \\
& \mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Vamos assumir que $f_i \in \mathcal{O}(X)$ para todo i, e mostrar que f é um morfismo.

- f é uma função contínua.

  Se $Z := \mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_k) \overset{fech.}{\subseteq} Y$, então

$$\begin{aligned}
f^{-1}(Z) &= \Big\{x \in X | f(x) \in Z\Big\} \\
&= \Big\{x \in X | g_i(f(x)) = 0, \ \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}\Big\} \\
&= \Big\{x \in X | g_i(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 0, \ \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}\Big\}.
\end{aligned}$$

  Como $f_1, \ldots, f_n$ são funções regulares em X, para cada $x \in X$ podemos escolher $U_x \overset{ab}{\subseteq} X$ (contendo x) e polinômios α_i, β_i tais que

$$f_{i|_{U_x}} = \frac{\alpha_i}{\beta_i} \quad \beta_i(a) \neq 0, \ \forall\, a \in U_x.$$

  Assim, para cada $a \in f^{-1}(Z) \cap U_x$ tem-se que

$$g_i\left(\frac{\alpha_1(a)}{\beta_1(a)}, \ldots, \frac{\alpha_n(a)}{\beta_n(a)}\right) = 0, \ \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$$

  Assuma que

$$g_i = \sum_I a_{i,I} \mathrm{x}^I, \text{ sendo } \mathrm{x}^I = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \text{ para } i = 1, \ldots, k. \tag{1.48}$$

Por simplicidade, escreva

$$\alpha(a)^I = (\alpha_1(a))^{i_1} \cdots (\alpha_n(a))^{i_n} \quad \text{e} \quad \beta(a)^I = (\beta_1(a))^{i_1} \cdots (\beta_n(a))^{i_n}.$$

Assim, segue de (1.48) que

$$\sum_I a_{i,I} \left(\frac{\alpha_1(a)}{\beta_1(a)}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{\alpha_n(a)}{\beta_n(a)}\right)^{i_n} = 0 \iff \sum_I a_{i,I} \frac{\alpha(a)^I}{\beta(a)^I} = 0$$

para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Observe que podemos escolher $\gamma_i(a) = \prod_I \beta(a)^I$ como um denominador comum nas frações $\dfrac{\alpha(a)^I}{\beta(a)^I}$, ou seja, podemos escrever

$$\frac{\alpha(a)^I}{\beta(a)^I} = \frac{\alpha(a)^I \cdot \gamma_{i,I}(a)}{\gamma_i(a)} \quad \text{sendo} \quad \gamma_{i,I}(a) = \prod_{I \neq J} \beta(a)^J.$$

Assim,

$$\sum_I a_{i,I} \frac{\alpha(a)^I}{\beta(a)^I} = 0 \iff \frac{\sum_I a_{i,I} \alpha(a)^I \cdot \gamma_{i,I}(a)}{\gamma_i(a)} = 0 \iff P_i(a) = 0$$

com $P_i(\mathrm{y}) = \sum_I a_{i,I} \alpha(\mathrm{y})^I \cdot \gamma_{i,I}(\mathrm{y})$ polinômio no conjunto de variáveis y.[81] Portanto, $a \in f^{-1}(Z) \cap U_x \iff P_1(a) = \ldots = P_k(a) = 0$ e $a \in U_x$. Assim, $f^{-1}(Z) \cap U_x$ é fechado em U_x. Agora, $\{U_x\}_{x \in X}$ é uma cobertura aberta de X. Portanto, $f^{-1}(Z)$ é um fechado em X (cf. Lema 1.6).

- Para todo $V \overset{ab.}{\subseteq} Y$, $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ verifica-se que $(\varphi \circ f)_{|V} \in \mathcal{O}(f^{-1}(V))$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[dr] & \\
f^{-1}(V) \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_{|_{f^{-1}(V)}}"] \arrow[dr, "(\varphi \circ f)_{|V}"'] & V \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \arrow[dl, "\pi_i"] \\
& \mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

Para cada $x \in f^{-1}(V)$, tem-se que $p = f(x) \in V$ e existem $V_p \overset{ab}{\subseteq} V$ contendo p e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tais que

$$\varphi_{|V_p} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{e} \quad \beta(q) \neq 0, \ \forall\, q \in V_p.$$

[81] Se $X \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$ então $\mathrm{y} = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Entretanto, se $X \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$ então $\mathrm{y} = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$.

Considere $U_x = f^{-1}(V_p) \overset{ab}{\subseteq} f^{-1}(V)$ e observe que para cada $a \in U_x$ verifica-se que

$$(\varphi \circ f)(a) = \varphi(f(a)) = \frac{\alpha(f(a))}{\beta(f(a))} \quad \text{e} \quad \beta(f(a)) \neq 0, \ \ \forall\, a \in U_x.$$

Ou seja,

$$(\varphi \circ f)(a) = \frac{\alpha(f_1(a), \ldots, f_n(a))}{\beta(f_1(a), \ldots, f_n(a))} \quad \text{e} \quad \beta(f(a)) \neq 0, \ \ \forall\, a \in U_x.$$

Lembre que $\mathcal{O}(U_x)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra (assim, produtos e somas finitas de funções regulares é uma função regular) e $f_1, \ldots, f_n$ são funções regulares em X. Portanto, $\alpha(f_1(a), \ldots, f_n(a))$ e $\beta(f_1(a), \ldots, f_n(a))$ são funções regulares em U_x. Além disso, $\beta(f_1(a), \ldots, f_n(a)) \neq 0$ para todo $a \in U_x$. Logo o Lema 1.18 nos garante que $\dfrac{1}{\beta(f_1(a), \ldots, f_n(a))} \in \mathcal{O}(U_x)$. Portanto,

$$(\varphi \circ f)(a) = \frac{\alpha(f_1(a), \ldots, f_n(a))}{\beta(f_1(a), \ldots, f_n(a))} \in \mathcal{O}(U_x).$$

□

Corolário 1.14. *Sejam $X \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$, $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ conjuntos algébricos afins e $f : X \longrightarrow Y$ dada por $x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Verifica-se que f é um morfismo se, e somente se, f_i é uma* função polinomial[82] *para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demonstração. $\boxed{\Longrightarrow}$ Se f é um morfismo, segue-se da Proposição 1.31 que $f_i \in \mathcal{O}(X)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Agora, segue-se do Teorema 1.2 que

$$A(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X) \quad \text{dada por} \quad g \longmapsto \widehat{g} \quad (\widehat{g}(a) = g(a), \ \ \forall\, a \in X)$$

é um isomorfismo. Assim, toda função regular em X é polinomial. Portanto, f_i é uma função polinomial para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Se f_i é uma função polinomial para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, então cada f_i é uma função regular. Logo, a Proposição 1.31 nos permite concluir que f é um morfismo. □

Teorema 1.6. *Seja X uma variedade e $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ uma variedade afim. Considere*

$$\operatorname{Mor}(X, Y) := \Big\{ f : X \longrightarrow Y \,|\, f \text{ é um morfismo} \Big\}$$

e

$$\operatorname*{Hom}_{\mathbb{K}-alg}(A(Y), \mathcal{O}(X)) := \left\{ \varphi : A(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \text{ é um homomorfismo} \\ \text{de } \mathbb{K}\text{-álgebras} \end{array} \right\}.$$

Verifica-se que

[82] Seja $X \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$ uma variedade quase afim. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é denominada *função polinomial* se, existe $\mathrm{p} \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]$ tal que $f(a) = \mathrm{p}(a)$ para todo $a \in X$.

(i) *Se* $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$, *então* $f^* : A(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ *dado por* $\overline{\mathrm{p}} \longmapsto \widehat{\mathrm{p}} \circ f$ *é um homomorfismo de* $\mathbb{K}$*-álgebras (*$\widehat{\mathrm{p}}(a) = \mathrm{p}(a)$ *para todo* $a \in Y$*).*

(ii) $\Omega : \mathrm{Mor}(X,Y) \longrightarrow \operatorname*{Hom}_{\mathbb{K}-alg}(A(Y), \mathcal{O}(X))$ *dada por* $f \longmapsto f^*$ *é uma bijeção.*

Demonstração. $\boxed{\text{(i)}}$ Observe que:

• f^* está bem definida.

Se $\mathrm{p} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, então $Y \xrightarrow{\widehat{\mathrm{p}}} \mathbb{K}$ definida por $\widehat{\mathrm{p}}(a) = \mathrm{p}(a)$ é uma função regular. Sendo f um morfismo segue da segunda condição (na definição de morfismo 1.3) que $\widehat{\mathrm{p}} \circ f \in \mathcal{O}(X)$.

• f^* é um homomorfismo de anéis.

De fato, $f^*(\widehat{1})(a) = (\widehat{1} \circ f)(a) = 1$ para todo $a \in X$. Assim, leva a unidade na unidade (dos respectivos anéis).

Considere p e q $\in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, tem-se que

$$\begin{cases} f^*(\overline{\mathrm{p}} + \overline{\mathrm{q}}) = f^*(\overline{\mathrm{p} + \mathrm{q}}) = \widehat{\mathrm{p} + \mathrm{q}} \circ f = \widehat{\mathrm{p}} \circ f + \widehat{\mathrm{q}} \circ f = f^*(\overline{\mathrm{p}}) + f^*(\overline{\mathrm{q}}), \\ f^*(\overline{\mathrm{p}} \cdot \overline{\mathrm{q}}) = f^*(\overline{\mathrm{pq}}) = \widehat{\mathrm{pq}} \circ f = (\widehat{\mathrm{p}} \circ f)(\widehat{\mathrm{q}} \circ f) = (f^*(\overline{\mathrm{p}}))(f^*(\overline{\mathrm{q}})). \end{cases}$$

• f^* é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras.[83]

$\boxed{\text{(ii)}}$ O item (i) nos garante que Ω está bem definida. A seguir verificaremos que Ω é uma bijeção. Lembre que $A(Y) = \dfrac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{\mathcal{I}(Y)}$.

• Ω é injetora.

Considere $f, g \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ dadas por

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

e

$$g(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$$

. Se $f^* = g^*$, então

$$f^*(\overline{x_i}) = g^*(\overline{x_i}), \ \forall i \Longrightarrow \widehat{x_i} \circ f = \widehat{x_i} \circ g, \ \forall i \Longrightarrow f_i = g_i, \ \forall i \Longrightarrow f = g.$$

• Ω é sobrejetora.

Considere $\theta : A(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Queremos determinar $f : X \longrightarrow Y$ morfismo tal que $f^* = \theta$.

Considere $f_i := \theta(\overline{x_i}) \in \mathcal{O}(X)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Defina a função

$$\psi : X \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \quad \text{por} \quad x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

[83] Lembre que a estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra é definida pelos homomorfismos de anéis $\mathbb{K} \longrightarrow A(Y)$ dado por $k \longmapsto \overline{k}$ e $\mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ dado por $k \longmapsto \widehat{k}$.

Afirmação 1: $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq Y$.

Lembre que: $\psi(a) \in Y \iff h(\psi(a)) = 0, \ \ \forall\, h \in \mathcal{I}(Y)$.

Considere $h \in \mathcal{I}(Y)$ e $a \in X$. Note que

$$\begin{aligned} h(\psi(a)) = h(f_1(a), \ldots, f_n(a)) &= (h(f_1, \ldots, f_n))(a) \\ &= (h(\theta(\overline{x_n}), \ldots, \theta(\overline{x_n})))(a) \\ &= (\theta(h(\overline{x_n}, \ldots, \overline{x_n})))(a), \quad \theta \text{ é homomorfismo} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{de } \mathbb{K}\text{-álgebras.} \\ &= (\theta(\overline{h}))(a) \\ &= 0, \qquad \text{visto que } \overline{h} = \overline{0}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq Y$.

Afirmação 2: A função $f : X \longrightarrow Y$ dada por $x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ é um morfismo.

Como cada função componente $f_i = \pi_i \circ f$ de f é regular, segue da Proposição 1.31 que f é um morfismo.

Afirmação 3: f definida na Afirmação 2 satisfaz $f^* = \theta$.

Observe que $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ é um conjunto de geradores da $\mathbb{K}$-álgebra $A(Y)$. Assim, para dois homomorfismos de $\mathbb{K}$-álgebras com domínio $A(Y)$ coincidirem, basta que $f^*(\overline{x_i}) = \theta(\overline{x_i})$ para todo i. De fato, note que $f^*(\overline{x_i}) = \widehat{x_i} \circ f = f_i = \theta(\overline{x_i})$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $f^*(\overline{k}) = \widehat{k} = \theta(\overline{k})$, para todo $k \in \mathbb{K}$. Portanto, $f^* = \theta$. $\square$

Observação 1.18. Sejam X, Y variedades afins e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo. Neste caso, usaremos a identificação $A(X) \underset{\mathbb{K}-alg}{\cong} \mathcal{O}(X)$ dada por $\overline{\mathrm{p}} \overset{\Psi_X}{\longmapsto} \widehat{\mathrm{p}}$ (cf. Teorema 1.2), e redefiniremos a função f^* (do item (i) do Teorema 1.6) como sendo

$$f^* : A(Y) \longrightarrow A(X) \quad \text{dada por} \quad \overline{\mathrm{q}} \longmapsto \Psi_X^{-1}(\widehat{\mathrm{q}} \circ f). \tag{1.49}$$

Lema 1.19. *Considere as notações da Observação 1.18. Sejam X, Y e Z variedades afins. Considere $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ morfismos. Então $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Além disso, se $h \in \mathrm{Mor}(X, X)$, então $h^* = \mathrm{id}_{A(X)}$ se, e somente se, $h = \mathrm{id}_X$.*

Demonstração. Note que

- $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Basta mostrar que $(g \circ f)^*(\kappa) = f^* \circ g^*(\kappa)$, $\forall\, \kappa \in A(Z)$.

Considere $\kappa = \mathrm{q} + \mathcal{I}(Z) \in A(Z)$ e note que

$$g^*(\kappa) = g^*(\mathrm{q} + \mathcal{I}(Z)) = \Psi_Y^{-1}(\widehat{\mathrm{q}} \circ g) =: \kappa_1, \qquad \text{com } \kappa_1 = \mathrm{q}_1 + \mathcal{I}(Y) \in A(Y).$$

Assim, $f^*(g^*(\kappa)) = f^*(\kappa_1)$ e $\widehat{\mathrm{q}}_1 = \Psi_Y(\kappa_1) = \widehat{\mathrm{q}} \circ g$. Agora calculando

$$(g \circ f)^*(\kappa) = \Psi_X^{-1}(\widehat{\mathrm{q}} \circ (g \circ f)) = \Psi_X^{-1}((\widehat{\mathrm{q}} \circ g) \circ f) = \Psi_X^{-1}(\widehat{\mathrm{q}}_1 \circ f) = f^*(\kappa_1).$$

Portanto, $(g \circ f)^*(\kappa) = f^*(\kappa_1) = f^*(g^*(\kappa)) = f^* \circ g^*(\kappa)$.

• $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{A(X)}$.
• Considere $h : X \longrightarrow X$ morfismo tal que $h^* = \mathrm{id}_{A(X)}$. Assuma que $A(X) = \dfrac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_m]}{\mathcal{I}(X)}$ e $h(x) = (h_1(x),\ldots,h_m(x))$ sendo $h_1,\ldots,h_m$ polinomiais (conforme Corolário 1.14), ou seja, $h_i(x) = \mathrm{p}_i(x),\ \forall\, x \in X$ com $\mathrm{p}_i \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_m]$ para cada i. Note que, se $a = (a_1,\ldots,a_m) \in X$ então

$$\begin{aligned} h^* = \mathrm{id}_{A(X)} &\Longrightarrow h^*(\overline{x_i}) = \mathrm{id}_{A(X)}(\overline{x_i}),\ \forall\, i \\ &\Longrightarrow \overline{\mathrm{p}_i} = \overline{x_i},\ \forall\, i \\ &\overset{\forall\, a\in X}{\underset{\forall\, i}{\Longrightarrow}} h_i(a) = \mathrm{p}_i(a) = a_i. \end{aligned}$$

Portanto, $h = \mathrm{id}_X$. □

Corolário 1.15. *Sejam X e Y variedades afins. Verifica-se que*

$$X \cong Y \iff A(Y) \underset{\mathbb{K}-alg}{\cong} A(X).$$

Demonstração. $\boxed{\Longrightarrow}$ Como $X \cong Y$, considere $f : X \longrightarrow Y$ um isomorfismo e sua inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ (que também é um isomorfismo). Com a notação em (1.49) obtemos

$$f^* : A(Y) \longrightarrow A(X) \quad \text{e} \quad (f^{-1})^* : A(X) \longrightarrow A(Y)$$

homomorfismos de $\mathbb{K}$-álgebras. Agora, segue do Lema 1.19 que

$$\begin{array}{l} \mathrm{id}_{A(X)} = (\mathrm{id}_X)^* = (f \circ f^{-1})^* = (f^{-1})^* \circ f^*, \\ \mathrm{id}_{A(X)} = (\mathrm{id}_X)^* = (f^{-1} \circ f)^* = f^* \circ (f^{-1})^* \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} f^* \text{ é isomorfismo} \\ \text{de } \mathbb{K}\text{-álgebras.} \end{array}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Seja $\theta : A(Y) \longrightarrow A(X)$ isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras e $\theta^{-1} : A(X) \longrightarrow A(Y)$ o isomorfismo inverso.

A partir da bijeção $\Omega : \mathrm{Mor}(X,Y) \longrightarrow \underset{\mathbb{K}-alg}{\mathrm{Hom}}(A(Y),\mathcal{O}(X))$ (definida no item (ii) do Teorema 1.6) e da identificação estabelecida em (1.49), obtemos a bijeção

$$\Omega_1 : \mathrm{Mor}(X,Y) \longrightarrow \underset{\mathbb{K}-alg}{\mathrm{Hom}}(A(Y),A(X)) \quad \text{dada por } f \longmapsto f^*. \tag{1.50}$$

Considere $f : X \longrightarrow Y$ morfismo tal que $f^* = \Omega_1(f) = \theta$. Ao trocarmos X por Y e Y por X em (1.50), temos que existe um único morfismo $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g^* = \theta^{-1}$. Assim,

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* = \mathrm{id}_{A(X)} = (\mathrm{id}_X)^* \overset{Lema\ 1.19}{\Longrightarrow} g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Analogamente, prova-se que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Portanto, f é um isomorfismo (visto que sua inversa g também é um morfismo). Logo, $X \cong Y$. □

Exercício 1.76. Sejam X e Y variedades lineares afins não vazias da mesma dimensão em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Mostre que $X \cong Y$.

Exercício 1.77. Sejam $X = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 | b = a^2\}$ e $Y = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 | b = a^3\}$ variedades afins. Elas são isomorfas?

Exercício 1.78. Considere a variedade quase afim $X = \{a \in \mathbb{C} | a \neq 0\} \subset \mathbb{A}^1$ e a variedade afim $Y = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 | ab = 1\} \subset \mathbb{A}^2$. Seja $f : X \longrightarrow Y$ definida por $a \longmapsto (a, a^{-1})$.

(a) f é um morfismo? (b) f é um isomorfismo?

1.3.1 Critério para morfismos (caso projetivo)

Vamos começar esta seção abordando um resultado análogo ao do Corolário 1.14, só que no caso de conjuntos algébricos projetivos. Ou seja, um critério para determinar quando uma dada função entre conjuntos algébricos projetivos é um morfismo.

Proposição 1.32. *Sejam $X \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$, $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ conjuntos algébricos projetivos.*

$$\begin{array}{c} f : X \longrightarrow Y \\ \textit{é um morfismo} \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall\ p \in X,\ \exists\ U_p \overset{ab}{\subseteq} X \textit{ contendo } p \textit{ e } G_0, \ldots, G_n \\ \textit{homogêneos do mesmo grau em } \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_m] \\ \textit{tais que} \quad U_p \cap \mathcal{Z}(G_0, \ldots, G_n) = \emptyset \textit{ e} \\ f(a) = [G_0(a) : \ldots . : G_n(a)], \ \forall\, a \in U_p. \end{array} \right.$$

Demonstração. $\boxed{\Longrightarrow}$ Assuma que $f : X \longrightarrow Y$ é um morfismo tal que $f(p) = [f_0(p) : \ldots . : f_n(p)]$. Escolha $i \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $U_i \cap Y \neq \emptyset$ sendo $U_i = \{[b_0 : \ldots . : b_n]\} \in \mathbb{P}^n | b_i \neq 0\}$. Por simplicidade, assuma que $i = 0$, isto é, $U_0 \cap Y \neq \emptyset$ e considere para cada $i \neq 0$ a função $p_i : U_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $[b_0 : \ldots . : b_n] \longmapsto \dfrac{b_i}{b_0}$. Observe que p_i é uma função regular e sendo f um morfismo temos que $\varphi_i = p_i \circ f_{|_{f^{-1}(U_0)}}$ é regular para cada i (veja diagrama)

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U_0) \arrow[r, "f_{|_{f^{-1}(U_0)}}"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & U_0 \arrow[d, "p_i"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Observe que para cada $p \in f^{-1}(U_0)$, existe uma vizinhança aberta $V_{p,i}$ de p relativa à qual φ_i é um quociente polinomial da forma $\dfrac{\alpha_i}{\beta_i}$, sendo α_i e β_i homogêneos do mesmo grau em $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_m]$ tais que $\beta_i(a) \neq 0$ para todo $a \in V_{p,i}$. Seja $U_p = \bigcap_{i=1}^n V_{p,i}$. Observe que em U_p podemos representar

$$\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{G_i}{G_0}, \quad \text{sendo } G_0 := \prod_{i=1}^{n} \beta_i \ \text{ e } \ G_i := \alpha_i \cdot \prod_{j \neq i} \beta_j. \tag{1.51}$$

Assim, tendo em consideração (1.51), para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ verifica-se que

$$
\begin{aligned}
\varphi_{i|_{U_p}} = \frac{G_i}{G_0} \quad & \Longrightarrow \varphi_i(a) = p_i(f(a)) = \frac{f_i(a)}{f_0(a)} = \frac{G_i(a)}{G_0(a)}, \quad \forall\, a \in U_p \\
& \overset{\forall\, a \in U_p}{\Longrightarrow} \ (f_0(a), \dots, f_n(a)) \ \text{ e } \ (G_0(a), \dots, G_n(a)) \ \text{ são L.D.} \\
& \Longrightarrow f(a) = [G_0(a) : \dots . : G_n(a)], \quad \forall\, a \in U_p.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Observe que:

• f é contínua.

De fato, a partir da hipótese obtemos a cobertura aberta $\{U_p\}_{p \in X}$ de X tal que $f(a) = [G_0(a) : \dots . : G_n(a)]$, para todo $a \in U_p$ com $G_0, \dots, G_n \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ homogêneos do mesmo grau.

Se $Z \subseteq Y$ é fechado, então $f^{-1}(Z) = \bigcup_{p \in X} (f^{-1}(Z) \cap U_p)$. Assim, é suficiente mostrar que $f^{-1}(Z) \cap U_p$ é um fechado de U_p (Lema 1.6). De fato,

$$
\begin{aligned}
a \in f^{-1}(Z) \cap U_p \Longleftrightarrow\ & f(a) = [G_0(a) : \dots : G_n(a)] \in Z \\
\overset{a \in U_p}{\Longleftrightarrow}\ & F_j(G_0(a), \dots, G_n(a)) = 0, \quad \forall\, j \ \text{ sendo } \mathcal{I}(Z) = \langle F_1, \dots, F_k \rangle \\
\Longleftrightarrow\ & a \in \mathcal{Z}(H_1, \dots, H_k) \cap U_p \ \text{ com } H_j = F_j(G_0(x), \dots, G_n(x)).
\end{aligned}
$$

• $\forall\, V \overset{ab.}{\subseteq} Y$, $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ verifica-se que $(\varphi \circ f)_{|_{f^{-1}(V)}} \in \mathcal{O}(f^{-1}(V))$.

Considere $x \in f^{-1}(V)$ e $q = f(x) \in V$, sendo φ regular em q existem $V_q \subseteq V$ aberto contendo q e $\alpha_q, \beta_q \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ homogêneos do mesmo grau tais que

$$
\varphi_{|V_q} = \frac{\alpha_q}{\beta_q} \quad \text{com } \mathcal{Z}(\beta_q) \cap V_q = \emptyset.
$$

Por outro lado, segue da hipótese que existem $U_x \overset{ab}{\subseteq} X$ contendo x e $F_0, \dots, F_n$ homogêneos do mesmo grau em $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ tais que $U_x \cap \mathcal{Z}(G_0, \dots ., G_n) = \emptyset$ e $f(a) = [G_0(a) : \dots . : G_n(a)]$ para todo $a \in U_x$. Assim, ao considerarmos o aberto $W_x = U_x \cap f^{-1}(V_q)$ de X tem-se que: $x \in W_x$ e W_x é um aberto de $f^{-1}(V)$.

$$
\begin{tikzcd}
f^{-1}(V) \arrow[r, "f_|"] & V \\
f^{-1}(V_q) \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_|"] & V_q \arrow[u, hook] \arrow[d, "\varphi_|"] \\
W_x \arrow[u, hook] \arrow[ur, "f_|"] \arrow[r, "(\varphi \circ f)_|"'] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}
$$

De fato, para todo $a \in W_x$ tem-se que

$$\varphi \circ f(a) = \varphi(f(a)) = \frac{\alpha_q(f(a))}{\beta_q(f(a))} = \frac{\alpha_q(G_0(a), \dots, G_n(a))}{\beta_q(G_0(a), \dots, G_n(a))} = \frac{F_1(a)}{F_2(a)}$$

com $F_1(\mathrm{x}) = \alpha_q(G_0(\mathrm{x}), \dots . G_n(\mathrm{x}))$ e $F_2(\mathrm{x}) = \beta_q(G_0(\mathrm{x}), \dots, G_n(\mathrm{x}))$ polinômios homogêneos do mesmo grau em $\mathbb{K}[\mathrm{x}] = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$. Além disso, temos que $\mathcal{Z}(F_2) \cap W_x = \emptyset$.[84] Assim, $\varphi \circ f \in \mathcal{O}(f^{-1}(V))$. Portanto, f é um morfismo. □

Corolário 1.16. *Sejam $X \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$, $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ conjuntos algébricos projetivos. Se $G_0, \dots, G_n$ forem polinômios homogêneos do mesmo grau em $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ tais que a interseção $X \cap \mathcal{Z}(G_0, \dots, G_n) = \emptyset$ e $[G_0(x) : \dots : G_n(x)] \in Y$ para todo $x \in X$, então $f : X \longrightarrow Y$ dada por $f(x) = [G_0(x) : \dots : G_n(x)]$ é um morfismo.*

Demonstração. Observe que o fato de $G_0, \dots, G_n$ serem polinômios homogêneos do mesmo grau, digamos d atrelado ao fato que $X \cap \mathcal{Z}(G_0, \dots ., G_n) = \emptyset$, garante a boa definição de f.[85]

Para concluir, segue da Proposição 1.32, ao escolhermos para cada $x \in X$ o aberto $U_x = X$ e os polinômios homogêneos $G_0, \dots, G_n$ do enunciado (os quais satisfazem as condições requeridas) que f é um morfismo. □

Exemplo 1.75. Sejam $X = \left\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 | a_0 a_2 = a_1^2\right\}$ e $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow X$ dada por $f([s : t]) = [s^2 : st : t^2]$, então f é um morfismo.

Basta observar que as funções coordenadas são polinômios, definidas a partir dos polinômios homogêneos $G_0 = x_0^2$, $G_1 = x_0 x_1$ e $G_2 = x_1^2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$. Além disso, a boa definição de f segue, visto que:

- $\mathcal{Z}(G_0, G_1, G_2) = \mathcal{Z}(x_0^2, x_0 x_1, x_1^2) = \mathcal{Z}(x_0, x_1) = \emptyset$. Logo, $\mathbb{P}^1 \cap \mathcal{Z}(G_0, G_1, G_2) = \emptyset$.
- Para todo $a = [s : t] \in \mathbb{P}^1$ tem-se que $f(a) = [G_0(a) : G_1(a) : G_2(a)] \in X$.

Exemplo 1.76. Considere $X = \left\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 | a_0^2 + a_2^2 = a_1^2\right\}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ dada por

$$p = [a_0 : a_1 : a_2] \longmapsto \begin{cases} [a_0 : a_1 - a_2], & \text{se } p \neq [0 : 1 : 1], \\ [1 : 0], & \text{se } p = [0 : 1 : 1] \end{cases}$$

Vamos aplicar o critério da Proposição 1.32 para concluir que f é um morfismo.

Temos que mostrar que para todo $q \in X$ existe $U_q \overset{ab}{\subseteq} X$ contendo q e G_0, G_1 homogêneos do mesmo grau em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, tais que $U_q \cap \mathcal{Z}(G_0, G_1) = \emptyset$ e $f(a) = [G_0(a) : G_1(a)]$ para todo $a \in U_q$.

---

[84] Suponha que $a \in \mathcal{Z}(F_2) \cap W_x$, então $a \in W_x$ (logo $f(a) = [G_0(a) : \dots : G_n(a)] \in V_q$) e $F_2(a) = 0 = \beta_q(G_0(a), \dots, G_n(a))$. Que implica em $f(a) \in \mathcal{Z}(\beta_q) \cap V_q$, o que é absurdo.

[85] Visto que, se $G_0, \dots, G_n$ são homogêneos de grau d e $X \cap \mathcal{Z}(G_0, \dots ., G_n) = \emptyset$, então para todo $\lambda \neq 0$ em $\mathbb{C}$, tem-se que $f(a) = f([\lambda \cdot a_0 : \dots : \lambda \cdot a_m]) = [\lambda^d \cdot G_0(a) : \dots : \lambda^d \cdot G_n(a)] = [G_0(a) : \dots . : G_n(a)]$ se, $a = [a_0 : \dots . : a_m] \in X$.

De fato, considere $q \in X$.

(i) Se $q \neq [0:1:1]$ então considere $U_q = X - \{[0:1:1]\}$, $G_1 = x_0$ e $G_2 = x_1 - x_2$.
Observe que:
- $\mathcal{Z}(G_0, G_1) = \mathcal{Z}(x_0, x_1 - x_2) = \{[0:1:1]\}$. Logo, $U_q \cap \mathcal{Z}(G_0, G_1) = \emptyset$.
- Para todo $a = [a_0 : a_1 : a_2] \in U_q$ tem-se que $f(a) = [G_0(a) : G_1(a)]$.

(ii) Se $q = [0:1:1]$ então considere $U_q = X - \{[0:1:-1]\}$, $G_0 = x_1 + x_2$ e $G_1 = x_0$.
Observe que:
- $\mathcal{Z}(G_0, G_1) = \mathcal{Z}(x_1 + x_2, x_0) = \{[0:1:-1]\}$. Logo, $U_q \cap \mathcal{Z}(G_0, G_1) = \emptyset$.
- Para todo $a = [a_0 : a_1 : a_2] \in U_q - \{[0:1:1]\}$ tem-se que

$$f(a) = [a_0 : a_1 - a_2] = [a_0(a_1+a_2) : a_1^2 - a_2^2] = [a_0(a_1+a_2) : a_0^2] = [a_1+a_2 : a_0].$$

E para $a = [0:1:1]$ tem-se que $f(a) = [1:0] = [2:0] = [G_0(a), G_1(a)]$.

Pergunta

Sejam $X \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$, $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ conjuntos algébricos projetivos e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo. Podemos afirmar que existem polinômios homogêneos $G_0, \ldots, G_n \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_m]$ do mesmo grau, tais que $Y \cap \mathcal{Z}(G_0, \ldots., G_n) = \emptyset$ e $f(a) = [G_0(a) : \ldots : G_n(a)]$, $\forall\, a \in X$?

O Exemplo 1.75 verifica essa propriedade. Mas não verdadeira em geral. De fato, se considerarmos $X = \left\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 | a_0^2 + a_2^2 = a_1^2\right\}$ e o morfismo (do Exemplo 1.76) $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ dado por

$$p = [a_0 : a_1 : a_2] \longmapsto \begin{cases} [a_0 : a_1 - a_2], & \text{se } p \neq [0:1:1], \\ [1:0], & \text{se } p = [0:1:1], \end{cases}$$

mostremos que não existem $G_0, G_1 \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneos do mesmo grau, tais que $X \cap \mathcal{Z}(G_0, G_1) = \emptyset$ e $f(a) = [G_0(a) : G_1(a)]$, $\forall\, a \in X$.

Pelo absurdo, suponha que existem $G_0, G_1 \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneos do mesmo grau, tais que $X \cap \mathcal{Z}(G_0, G_1) = \emptyset$ e $f(a) = [G_0(a) : G_1(a)]$, $\forall\, a \in X$. Assim, no aberto $U = X - \{[0:1:1]\}$ temos que

$$f(a) = [a_0 : a_1 - a_2] = [G_0(a) : G_1(a)], \quad \forall\, a \in U.$$

De onde concluímos que

$$a_0 \cdot G_1(a) - (a_1 - a_2) \cdot G_0(a) = 0, \quad \forall\, a \in U \Longrightarrow U \subseteq \mathcal{Z}(x_0 \cdot G_1 - (x_1 - x_2) \cdot G_0).$$

Sendo U aberto não vazio e X uma variedade projetiva, ao tomar o fecho, concluímos que

$$X \subseteq \mathcal{Z}(x_0 \cdot G_1 - (x_1 - x_2) \cdot G_0) \Longrightarrow x_0 \cdot G_1 - (x_1 - x_2) \cdot G_0 \in \overbrace{\left\langle x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 \right\rangle}^{=\mathcal{I}(X)}.$$

Logo, existe $H \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneo tal que

$$x_0 \cdot G_1 - (x_1 - x_2) \cdot G_0 = H \cdot (x_0^2 - x_1^2 + x_2^2). \tag{1.52}$$

A seguir usaremos o seguinte resultado.

Afirmação: Se C_1 e C_2 são curvas planas projetivas,[86] então $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.[87]

Considere $q = [0 : 1 : -1] \in X$. Temos duas possibilidades:

$$X \cap \mathcal{Z}(G_0) \neq \{q\} \quad \text{ou} \quad X \cap \mathcal{Z}(G_0) = \{q\}.$$

• $X \cap \mathcal{Z}(G_0) \neq \{q\}$.

Segue da Afirmação que $X \cap \mathcal{Z}(G_0) \neq \emptyset$. Logo existe $b = [b_0 : b_1 : b_2] \neq q$ na interseção $X \cap \mathcal{Z}(G_0)$. Agora, segue de (1.52) ao calcular em b que $b_0 G_1(b) = 0$. Como estamos assumindo que $X \cap \mathcal{Z}(G_0, G_1) = \emptyset$, então necessariamente $b_0 = 0$. Assim,

$$b \in X \cap \mathcal{Z}(x_0) = \{q, p = [0 : 1 : 1]\} \overset{b \neq q}{\Longrightarrow} b = p.$$

Se $b = p$ então $\underbrace{G_0(p) = 0}_{\text{Absurdo!}}$ (pois $f(p) = [1 : 0] = [G_0(p) : G_1(p)]$).

• $X \cap \mathcal{Z}(G_0) = \{q\}$.

Temos duas possibilidades:[88] $q \in \operatorname{Sing}(\mathcal{Z}(G_0))$ ou $q \notin \operatorname{Sing}(\mathcal{Z}(G_0))$.

(I) $q \in \operatorname{Sing}(\mathcal{Z}(G_0))$. Logo $\dfrac{\partial G_0}{\partial x_i}(q) = 0$, para $i = 0, 1, 2$.

Segue da *relação de Euler*[89] que $G_0(q) = 0$. Agora ao calcularmos $\dfrac{\partial}{\partial x_0}(q)$ em (1.52), concluímos que $G_1(q) = 0$, o que implica em $q \in X \cap \mathcal{Z}(G_0, G_1)$ (o que é absurdo, visto que $X \cap \mathcal{Z}(G_0, G_1) = \emptyset$).

(II) $q \notin \operatorname{Sing}(\mathcal{Z}(G_0))$.

---

[86] $C \subset \mathbb{P}^2$ é uma curva (plana) projetiva, se $C = \mathcal{Z}(F)$ com $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneo e não constante.

[87] Uma demonstração desta afirmação pode ser encontrada no texto *Introdução às Curvas Algébricas Planas* (Vainsencher (2017)).

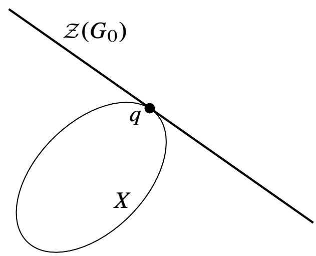
[88] Seja $C = \mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ uma curva definida pelo polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ e $p \in C$. Dizemos que p é um *ponto singular* de C, se $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0$ para $i = 0, 1, 2$. Caso contrário, p é denominado *ponto não singular* de C. Usaremos a notação $\operatorname{Sing}(C)$ para indicar o conjunto de todos os pontos singulares da curva C.

[89] Se $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ for homogêneo de grau d, então $x_0 \cdot \dfrac{\partial F}{\partial x_0} + \cdots + x_n \cdot \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = d \cdot F$

Segue de (1.52) que $x_0 \cdot (G_1 - H \cdot x_0) = (x_1 - x_2)(G_0 - H \cdot (x_1 + x_2))$. Agora, como $\mathrm{mdc}(x_0, x_1 - x_2) = 1$ segue que existe $A \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ tal que

$$G_1 = H \cdot x_0 + A \cdot (x_1 - x_2) \quad \text{e} \quad G_0 = H \cdot (x_1 + x_2) + Ax_0 \tag{1.53}$$

Agora, se $\mathrm{grau}(G_0) = 1$ então H e A na igualdade acima são constantes. Assim, vamos escrever $G_0 = \alpha(x_1 + x_2) + \beta x_0$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos. Neste caso, estamos na seguinte situação: $\mathcal{Z}(G_0)$ é uma reta que encontra X num único ponto, o q. Ou seja, $\mathcal{Z}(G_0)$ é uma reta tangente à curva X no ponto q.



A seguir vamos introduzir a noção de *reta tangente* a uma curva num ponto não singular.

Seja $C = \mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ uma curva plana e $p \in C - \mathrm{Sing}(C)$. A *reta tangente* à curva C no ponto p, que denotaremos por T_pC é definida pelos zeros em $\mathbb{P}^2$

$$T_pC := \mathcal{Z}\left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(q) \cdot x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(q) \cdot x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(q) \cdot x_2\right).$$

Observe que a reta tangente $T_qX = \mathcal{Z}(-2x_1 - 2x_2) = \mathcal{Z}(x_1 + x_2)$. Assim,

$$T_qX = \mathcal{Z}(x_1 + x_2) = \mathcal{Z}(G_0) = \mathcal{Z}(\alpha(x_1 + x_2) + \beta x_0) \Longrightarrow \beta = 0 \text{ e } \alpha \neq 0.$$

Logo, $\dfrac{\partial G_0}{\partial x_0}(q) = 0$ e ao calcularmos $\dfrac{\partial}{\partial x_0}(q)$ em (1.52), concluímos que $G_1(q) = 0$ o que implica em $q \in X \cap \mathcal{Z}(G_0, G_1)$ (o que é absurdo, visto que $X \cap \mathcal{Z}(G_0, G_1) = \emptyset$).

Continuando, se $\mathrm{grau}(G_0) \geqslant 2$ e $q \notin \mathrm{Sing}(\mathcal{Z}(G_0))$, vamos apelar para o seguinte resultado:

Lema 1.20. *Sejam C_1 e C_2 curvas planas projetivas tais que* $\mathrm{grau}(C_1) = d_1 \geqslant 2$, $\mathrm{grau}(C_2) = d_2 \geqslant 2$.[90] *Se $C_1 \cap C_2 = \{q\}$ e $q \notin \mathrm{Sing}(C_i)$ para $i = 1, 2$, então $T_qC_1 = T_qC_2$.*[91]

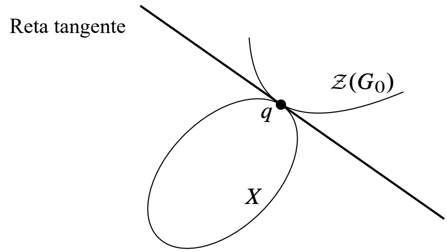
[90] Se C é uma curva plana tal que $\mathcal{I}(C) = \langle F \rangle$, então $\mathrm{grau}(C) = \mathrm{grau}(F)$.

[91] Para entender a demonstração deste Lema, o leitor irá precisar dos conceitos de multiplicidade e número de interseção de curva planas. Primeiramente, notemos que:

$$\begin{cases} m_q(C_i) = 1 \text{ para } i = 1, 2; \\ I(q; C_1 \cap C_2) = d_1 \cdot d_2 \geqslant 2 \end{cases} \Longrightarrow I(q; C_1 \cap C_2) > 1 = m_q(C_1) \cdot m_q(C_2).$$

Agora, pela propriedade (5) de Número de Interseção (cf. p. 37 em Fulton (1989)) as curvas C_1 e C_2 têm retas tangentes comuns no ponto q. Como o ponto q é não singular, seque que $T_pC_1 = T_pC_2$.

Estamos na seguinte situação:



E segue do Lema 1.20 que $T_qX = \mathcal{Z}(x_1 + x_2) = T_q\mathcal{Z}(G_0)$. Entretanto, de (1.53) temos que $G_0 = H\cdot(x_1+x_2)+Ax_0$. Logo $T_q\mathcal{Z}(G_0)$ é definido pelos zeros do polinômio

$$A(q)x_0 + H(q)x_1 + H(q)x_2.$$

Agora, a partir do fato que $T_qX = \mathcal{Z}(x_1 + x_2) = T_q\mathcal{Z}(G_0)$, concluímos que $A(q) = 0$ e $H(q) \neq 0$. Agora, a partir de (1.53) tem-se que

$$G_1 = H\cdot x_0 + A\cdot(x_1 - x_2) \Longrightarrow G_1(q) = 0, \quad \text{o que é absurdo.}$$

Exercício 1.79. Considere $X = \left\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 | a_0^2 + a_2^2 = a_1^2\right\}$ e $g : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ dada por

$$p = [a_0 : a_1 : a_2] \longmapsto \begin{cases} [a_0 : a_1 - a_2], & \text{se } p \neq [0:1:1], \\ [0:1]\,, & \text{se } p = [0:1:1]. \end{cases}$$

É g um morfismo?

Morfismo dominante

Sejam X, Y conjuntos algébricos quase afins ou quase projetivos. Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ é *dominante* se $\overline{\mathrm{Im}(f)} = Y$.

Exemplo 1.77. O morfismo $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{A}^1$ dado por $p \longmapsto 0$ não é dominante (visto que $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ é um fechado e não denso em $\mathbb{A}^1$).

Exemplo 1.78. A função $f : \mathcal{Z}(xy - 1) \longrightarrow \mathbb{A}^1$ dada por $(a, b) \longmapsto a$ é um morfismo dominante. De fato, note que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{A}^1 - \{0\}$ e $\overline{\mathbb{A}^1 - \{0\}} = \mathbb{A}^1$.

Proposição 1.33. *Considere a notação do Teorema 1.6. Sejam $X \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ variedades afins. Verifica-se que*

$$f : X \longrightarrow Y \text{ é um morfismo dominante} \iff f^* : A(Y) \longrightarrow A(X) \text{ é injetor.}$$

Demonstração. Vamos usar o isomorfismo entre o anel de coordenadas de uma variedade afim e a $\mathbb{K}$-álgebra determinada pelas funções regulares sobre essa variedade afim (Teorema 1.2). Assim, temos

$$\begin{array}{ccc} A(Y) & & A(X) \\ \wr\| & & \wr\| \\ \mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{O}(X) \end{array} \qquad \text{dada por } \ \psi \longmapsto \psi \circ f.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Considere $\psi \in \mathcal{O}(Y)$ tal que $f^*(\psi) = \widehat{0}$ $(x \overset{\widehat{0}}{\longmapsto} 0)$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} f^*(\psi)(x) = 0, \ \forall\, x \in X & \Longrightarrow & \psi(f(x)) = 0, \ \forall\, x \in X \\ & \underset{\overline{g} \in A(Y)}{\overset{\psi \longleftrightarrow \overline{g}}{\Longrightarrow}} & g(f(x)) = 0, \ \forall\, x \in X \\ & \Longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathcal{Z}(g) \\ & \overset{f\ dominante}{\Longrightarrow} & Y = \overline{\mathrm{Im}(f)} \subseteq \mathcal{Z}(g) \\ & \Longrightarrow & g \in \mathcal{I}(Y) \\ & \Longrightarrow & \overline{g} = \overline{0} \\ & \Longrightarrow & \psi = \widehat{0} \quad (Y \ni y \overset{\widehat{0}}{\longmapsto} 0) \end{array}$$

Portanto, f^* é injetora.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Lembre que para todo $W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ verifica-se que $\overline{W} = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(W))$.

Assim, precisamos mostrar que $Y = \overline{\mathrm{Im}(f)} = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathrm{Im}(f)))$.

Assuma que $f : X \longrightarrow Y$ é dada por $x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Lembre que $f_i = \widehat{x_i} \circ f = f^*(\widehat{x_i})$ sendo $\widehat{x_i} \in \mathcal{O}(Y)$ dada pela projeção na i-ésima coordenada, ou seja, $(b_1, \ldots, b_n) \longmapsto b_i$.

Considere $\mathrm{p} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e observe que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{p} \in \mathcal{I}(\mathrm{Im}(f)) & \Longleftrightarrow & \mathrm{p}(f(x)) = 0, \quad \forall\, x \in X \\ & \Longleftrightarrow & \mathrm{p}(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 0, \quad \forall\, x \in X \\ & \Longleftrightarrow & \mathrm{p}\big(f^*(\widehat{x_1}), \ldots, f^*(\widehat{x_n})\big)(x) = 0, \quad \forall\, x \in X \\ & \Longleftrightarrow & f^*(\mathrm{p}(\widehat{x_1}, \ldots, \widehat{x_n}))(x) = 0, \quad \forall\, x \in X \\ & \Longleftrightarrow & f^*(\mathrm{p}(\widehat{x_1}, \ldots, \widehat{x_n})) = \widehat{0} \in \mathcal{O}(X) \\ & \overset{f\ injetora}{\Longleftrightarrow} & \mathrm{p}(\widehat{x_1}, \ldots, \widehat{x_n}) = \widehat{0} \in \mathcal{O}(Y) \\ & \overset{A(Y) \cong \mathcal{O}(Y)}{\Longrightarrow} & \overline{\mathrm{p}} = \overline{0} \in A(Y) \\ & \Longrightarrow & \mathrm{p} \in \mathcal{I}(Y). \end{array}$$

Assim,

$$\mathcal{I}(\mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathcal{I}(Y) \Longrightarrow Y = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathrm{Im}(f))) = \overline{\mathrm{Im}(f)} \Longrightarrow Y = \overline{\mathrm{Im}(f)}.$$

Portanto, f é dominante. $\square$

Exercício 1.80. Considere $X = \mathcal{Z}(xy - z^2) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. A função $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ dada por $(x, y, z) \longmapsto (x, y)$ é um morfismo dominante?

Exercício 1.81. Seja $\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ uma base de S_1, sendo $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. A função $f : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ dada por $p \longmapsto [L_1(p) : L_2(p) : L_3(p) : L_4(p)]$ é um morfismo dominante?

Observação 1.19. O conceito de morfismo dominante foi introduzido por ser o pré-requisito que um morfismo deve atender para podermos usar o *Teorema da dimensão das fibras* (cf. Teorema 1.7). Esse Teorema é importante (em nosso contexto) pois nos permitirá concluir o seguinte resultado

Sejam $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F)$ é uma superfície não singular em $\mathbb{P}^3$ tal que $\mathcal{I}(\mathrm{X}) = \langle F \rangle$ com $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ homogêneo de grau $d \geqslant 1$ e

$$\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = \Big\{\ell \subset \mathbb{P}^3 | \ell \text{ é uma reta contida em X}\Big\}.$$

Então $\mathfrak{L}(\mathrm{X})$ é um conjunto finito se $d \geqslant 3$. Ou seja, toda superfície não singular em $\mathbb{P}^3$ de grau $d \geqslant 3$ contém um quantidade finita de retas (podendo não conter nenhuma reta se $d \geqslant 4$).

Uma classe importante de isomorfismos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ são as mudanças de coordenadas projetivas (MCP), que iremos introduzir a seguir. Cabe salientar que tais isomorfismos preservam variedades lineares, entre outras propriedades, motivo pelo qual são muito utilizadas para facilitar certas contas.

Mudanças de coordenadas projetivas

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, então denotaremos por

$$\mathrm{Iso}(V) = \Big\{T : V \longrightarrow V | T \text{ é um isomorfismo } \mathbb{K}\text{-linear}\Big\}.$$

Uma função $f : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ será denominada de *mudanças de coordenadas projetivas* (MCP) se existe $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^{n+1})$ tal que $f([\mathrm{v}]) = [T(\mathrm{v})]$ para todo $[\mathrm{v}] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Exemplo 1.79. A função $f : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ dada por
$[a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \longmapsto [a_0 + a_1 - a_2 + a_3 : a_1 - 2a_2 + 3a_3 : a_2 - a_3 : a_3]$
é uma MCP, pois existe $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{C}^4)$ dada por

$$T(x, y, z, t) = (x + y - z + t, y - 2z + t_3, z - t, t)$$

tal que $f([\mathrm{v}]) = [T(\mathrm{v})]$ para todo $[\mathrm{v}] \in \mathbb{P}^3$.

Exemplo 1.80. Se ℓ é uma reta em $\mathbb{P}^3$, então existe uma (MCP) $f : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $f(\ell) = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$.

Se $\ell = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$ considere $f = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^3}$ (a função identidade em $\mathbb{P}^3$). Do contrário, considere $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$ tal que $\ell = \mathbb{P}(W)$ e fixe uma base $\{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2\}$ de W. A seguir, escolha $\mathrm{w}_3, \mathrm{w}_4 \in \mathbb{C}^4$ de modo que $\alpha = \{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3, \mathrm{w}_4\}$ seja uma base de $\mathbb{C}^4$. Observe que $\mathcal{Z}(x_0, x_1) = \mathbb{P}(U)$, sendo $U = [e_3, e_4]$ com $\beta = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^4$. Lembremos que existe um único isomorfismo linear

$$\begin{array}{rccll} T: & \mathbb{C}^4 & \longrightarrow & \mathbb{C}^4 & \\ & \mathrm{w}_i & \longmapsto & e_{i+2} & i = 1, 2, \\ & \mathrm{w}_i & \longmapsto & e_{i-2} & i = 3, 4. \end{array}$$

E neste caso $T(W) = U$. Assim, a (MCP) $f : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ definida a partir de T satisfaz a condição $f(\ell) = \mathcal{Z}(x_0, x_1)$.

Exercício 1.82. Considere $\mathrm{p} \in \mathbb{P}^3$. Mostre que existe uma (MCP) $f : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $f(\mathrm{p}) = [1 : 0 : 0 : 0]$.

Exercício 1.83. Sejam $\ell_i = \mathbb{P}(W_i)$ com $W_i \in G_2(\mathbb{C}^3)$ retas em $\mathbb{P}^2$, $i = 1, 2$. Se $\ell_1 \neq \ell_2$ determine uma MCP $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$, tal que $f(\ell_1) = \mathcal{Z}(x_1)$ e $f(\ell_2) = \mathcal{Z}(x_2)$.

Observação 1.20. Usaremos a seguinte notação

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}) := \left\{ f : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} | f \text{ é uma mudanças de coordenadas projetivas} \right\}.$$

Verifica-se que

(a) As mudanças de coordenadas projetivas são funções bijetoras.[92]

(b) As mudanças de coordenadas projetivas são isomorfismos.[93]

(c) As mudanças de coordenadas projetivas preservam variedades projetivas lineares.

Se $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ é uma variedade projetiva linear não vazia de dimensão d, $0 \leqslant d \leqslant n$, então existe $W \in G_{d+1}(\mathbb{K}^{n+1})$ tal que $\Lambda = \mathbb{P}(W)$.

Observe que para todo $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^{n+1})$ verifica-se que $T(W) \in G_{d+1}(\mathbb{K}^{n+1})$. De fato, se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$ for determinada a partir de $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^{n+1})$, então $f(\Lambda) = \mathbb{P}(T(W))$ sendo $\mathbb{P}(T(W))$ uma variedade projetiva linear de dimensão d.

(d) $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$ é um grupo se considerarmos a operação composição.

A seguir mostraremos que mudanças de coordenadas projetivas preservam conjuntos algébricos projetivos, o grau das hipersuperfícies e pontos singulares. Para isso, vamos introduzir uma ação do grupo $\mathrm{Iso}(\mathbb{K}^{n+1})$ em $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$.

[92]De fato se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$ for determinada por $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^{n+1})$, então $f^{-1}([\mathrm{u}]) = [T^{-1}(\mathrm{u})]$.

[93]O ponto chave é entender que as funções coordenadas f_i de uma MCP $f(\mathrm{p}) = [L_0(\mathrm{p}) : L_1(\mathrm{p}) : \ldots : L_n(\mathrm{p})]$ são funcionais lineares nas coordenadas homogêneas do ponto p, tais que $\mathcal{Z}(L_0, \ldots, L_n) = \emptyset$. Assim, a Proposição 1.32 nos garante que f e sua inversa f^{-1} são morfismos.

Ação de $\mathrm{Iso}(\mathbb{K}^{n+1})$ **em** $\mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$

Para cada $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^{n+1})$ e $F \in \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ definimos $T_\bullet F \in \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ por

$$T_\bullet F(x_0,\ldots,x_n := F(T^{-1}(x_0,\ldots,x_n)).$$

Exemplo 1.81. Considere $F = 1 + x_1 - x_0x_2 \in \mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]$ e $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{C}^3)$ dado por $T(x,y,z) = (x,-z,y)$.

Observe que $T^{-1}(x,y,z) = (x,z,-y)$. Logo,

$$\begin{aligned} T_\bullet F(x_0,x_1,x_2) = F(T^{-1}(x_0,x_1,x_2)) &= F(x_0,x_2,-x_1) \\ &= 1 + x_2 - x_0(-x_1) \\ &= 1 + x_2 + x_0x_1. \end{aligned}$$

Observação 1.21. A função

$$\bullet : \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^{n+1}) \times \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n] \longrightarrow \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n] \quad \text{dada por } (T,F) \longmapsto T_\bullet F.$$

define uma ação pela esquerda do grupo $\mathrm{Iso}(\mathbb{K}^{n+1})$ em $\mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$.

De fato, se $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{n+1}}$ é a função identidade em $\mathbb{K}^{n+1}$, então $\mathrm{id}_\bullet F = F$ para todo $F \in \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$.

A seguir, considere $F \in \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ e $T,S \in \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^{n+1})$. Note que:

$$\begin{aligned} (S\circ T)_\bullet F(x_0,\ldots,x_n) &= F((S\circ T)^{-1}(x_0,\ldots,x_n)) \\ &= F(T^{-1}\circ S^{-1}(x_0,\ldots,x_n)) \\ &= F(T^{-1}(S^{-1}(x_0,\ldots,x_n))) \\ &= T_\bullet F(S^{-1}(x_0,\ldots,x_n)) \\ &= S_\bullet(T_\bullet F)(x_0,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

Portanto, $(S\circ T)_\bullet F = S_\bullet(T_\bullet F)$.

Proposição 1.34. *Seja* $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^{n+1})$ *tal que*

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & \cdots & b_{0n} \\ b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n0} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

é a matriz de T^{-1} *da base canônica na base canônica. Considere*

$$L_0 = b_{00}x_0 + b_{01}x_1 \cdots + b_{0n}x_n,\ \ldots\ , L_n = b_{n0}x_0 + b_{n1}x_1 \cdots + b_{nn}x_n.$$

Então $\mathbf{T} : \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n] \longrightarrow \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ *dado por* $x_i \longmapsto L_i$ *para* $i = 0,\ldots,n$ *e* $a \longmapsto a$ *se,* $a \in \mathbb{K}$ *é um o isomorfismo de* $\mathbb{K}$*-álgebras tal que:*

(i) $\mathbf{T}(F) = T_\bullet F$.

(ii) $T_\bullet(F+G) = T_\bullet F + T_\bullet G$ *e* $T_\bullet(F\cdot G) = T_\bullet F \cdot T_\bullet G \quad \forall\, F, G \in \mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$.

(iii) *Se* F *é homogêneo de grau* d *então* $T_\bullet F$ *é homogêneo de grau* d.

Demonstração. Segue do item (ii) do Lema 1.14 que existe um único homomorfismo de anéis satisfazendo as condições $x_i \longmapsto L_i$ para $i = 0,\dots,n$ e $a \longmapsto a$ se, $a \in \mathbb{K}$. Observe que $\mathbf{T}(F) = T_\bullet F$. Além disso,

T é injetora.[94]

T é sobrejetora. Dado $F \in \mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$, basta considerar $G = (T^{-1})_\bullet F$.

Portanto **T** é um isomorfismo de anéis. De fato, **T** é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras.[95]

$\boxed{\text{(ii)}}$ Segue do fato de **T** ser um homomorfismo de anéis tal que $\mathbf{T}(F) = T_\bullet F$.

$\boxed{\text{(iii)}}$ É suficiente considerar o monômio $u = x_0^{i_0}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ tal que $i_0+i_1+\cdots+i_n = d$ e verificar que $\mathbf{T}(u) \in S_d$ sendo $S = \mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$.

De fato,

$$\mathbf{T}(u) = (\mathbf{T}(x_0))^{i_0}(\mathbf{T}(x_1))^{i_1}\cdots(\mathbf{T}(x_n))^{i_n} = L_0^{i_0}\cdot L_1^{i_1}\cdots L_n^{i_n} \text{ visto que } T_\bullet x_i = L_i,\ \forall\, i.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{grau}(\mathbf{T}(u)) &= i_0\cdot \mathrm{grau}(L_0) + i_1\cdot \mathrm{grau}(L_1) + \cdots + i_n \cdot \mathrm{grau}(L_n) \\ &= i_0 + i_1 + \cdots + i_n = d, \quad \text{pois } \mathrm{grau}(L_i) = 1,\ \forall\, i. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.35. *Seja* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$ *definido por* $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^{n+1})$. *Então*

$$\varphi(\mathcal{Z}(F)) = \mathcal{Z}(T_\bullet F), \quad \forall\, F \in S_d \ \textit{ sendo } S = \mathbb{K}[x_0,\dots,x_n].$$

Demonstração. Considere $\mathrm{p} \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e observe que

$$\begin{aligned} \mathrm{p} \in \varphi(\mathcal{Z}(F)) &\iff \mathrm{p} = \varphi([\mathrm{v}]) \ \text{ e } \ [\mathrm{v}] \in \mathcal{Z}(F) \\ &\iff \mathrm{p} = [T(\mathrm{v})] \ \text{ e } \ F(\mathrm{v}) = 0 \\ &\overset{\mathrm{w}=T(\mathrm{v})}{\iff} \mathrm{p} = [\mathrm{w}], \ \text{ e } \ F(T^{-1}(\mathrm{w})) = 0 \\ &\iff \mathrm{p} = [\mathrm{w}], \ \text{ e } \ T_\bullet F(\mathrm{w}) = 0 \\ &\iff \mathrm{p} \in \mathcal{Z}(T_\bullet F). \end{aligned}$$

□

[94] De fato, considere $F \in \ker(\mathbf{T})$, logo

$$T_\bullet F = 0 \overset{(T^{-1})_\bullet}{\Longrightarrow} (T^{-1})_\bullet(T_\bullet F) = (T^{-1})_\bullet 0 \overset{\text{ação}}{\Longrightarrow} \overbrace{(T^{-1}\circ T)}^{=\,\mathrm{id}}{}_\bullet F = \mathbf{0} \Longrightarrow F = \mathbf{0}.$$

[95] Basta observar que a estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra em $\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$ é dada pela inclusão $k \overset{\iota}{\longmapsto} k$ e $\mathbf{T}\circ\iota = \iota$.

Corolário 1.17. *Se $X = \mathcal{Z}(F_1, \dots, F_k) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ um conjunto algébrico projetivo sendo $F_1, \dots, F_k$ polinômios homogêneos, então $\varphi(X) = \mathcal{Z}(T_\bullet F_1, \dots, T_\bullet F_k)$ para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$. Em particular, se X for uma variedade projetiva, então $\varphi(X)$ também é uma variedade projetiva.*

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor.[96] □

Corolário 1.18. *Mudança de coordenadas projetivas preservam grau de hipersuperfícies.*

Demonstração. Se $\mathcal{Z}(F)$ é uma hipersuperfície de grau d e $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$, segue da Proposição 1.35 que $\varphi(\mathcal{Z}(F)) = \mathcal{Z}(T_\bullet F)$, que é uma hipersuperfície de grau $grau(T_\bullet F) = grau(F) = d$ (pelo item (iii) da Proposição 1.34). □

A seguir, mostraremos que as mudanças de coordenadas projetivas preservam *pontos singulares*.[97]

Proposição 1.36. *Seja $\mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ uma hipersuperfície e $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$. Considere $\mathrm{p} \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Verifica-se que*

$$\mathrm{p} \in \mathrm{Sing}(\mathcal{Z}(F)) \iff \varphi(\mathrm{p}) \in \mathrm{Sing}(\varphi(\mathbf{V}(F)))$$

Demonstração. Assuma que $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^{n+1})$ determina $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$ e $\mathrm{p} = [\mathrm{v}]$. Assim, queremos mostrar que

$$[\mathrm{v}] \in \mathrm{Sing}(\mathcal{Z}(F)) \iff [T(\mathrm{v})] \in \mathrm{Sing}(\mathcal{Z}(T_\bullet F)),$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathrm{v}) = 0, \quad \text{para todo } i \iff \frac{\partial (T_\bullet F)}{\partial x_i}(T(\mathrm{v})) = 0, \quad \text{para todo } i.$$

Observe que o funcional linear associado ao polinômio $T_\bullet F$ é dado pela composta

$$\mathbb{K}^{n+1} \xrightarrow{T^{-1}} \mathbb{K}^{n+1} \xrightarrow{F} \mathbb{K}.$$

Além disso, segue da regra da cadeia que

$$d(T_\bullet F)(\mathrm{u}) = dF(T^{-1}(\mathrm{u})) \cdot d(T^{-1})(\mathrm{u}), \quad \forall\, \mathrm{u} \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

[96] Lembre que as funções contínuas levam conjuntos irredutíveis em conjuntos irredutíveis e que todo morfismo é uma função contínua.

[97] Se $X = \mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ for uma hipersuperfície tal que $\mathcal{I}(X) = \langle F \rangle$ com $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ e $p \in X$. Dizemos que p é um *ponto singular* de X, se $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0$ para $i = 0, \dots, n$. Caso contrário, p é denominado *ponto não singular* de X. Usaremos a notação $\mathrm{Sing}(X)$ para indicar o conjunto de todos os pontos singulares da hipersuperfície X.

Entretanto, sendo T^{-1} uma transformação linear, vale que $d(T^{-1})(\mathrm{u}) = T^{-1}$. Assim, na sua forma matricial temos que:

$$\left[\frac{\partial(T_\bullet F)}{\partial x_0}(\mathrm{u}) \;\; \ldots \;\; \frac{\partial(T_\bullet F)}{\partial x_n}(\mathrm{u})\right] = \left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(T^{-1}(\mathrm{u})) \;\; \ldots \;\; \frac{\partial F}{\partial x_n}(T^{-1}(\mathrm{u}))\right] \cdot [T^{-1}].$$

Ao calcular a igualdade acima em $\mathrm{u} = T(\mathrm{v})$, obtemos

$$\left[\frac{\partial(T_\bullet F)}{\partial x_0}(T(\mathrm{v})) \;\; \ldots \;\; \frac{\partial(T_\bullet F)}{\partial x_n}(T(\mathrm{v}))\right] = \left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(\mathrm{v}) \;\; \ldots \;\; \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathrm{v})\right] \cdot [T^{-1}]. \tag{1.54}$$

Como $[T^{-1}]$ é invertível, segue de (1.54) que

$$[\mathrm{v}] \in \mathrm{Sing}(\mathcal{Z}(F)) \iff [T(\mathrm{v})] \in \mathrm{Sing}(\mathcal{Z}(T_\bullet F)).$$

□

Retas em superfícies projetivamente equivalentes em $\mathbb{P}^3$

Sejam X e Y conjuntos algébricos projetivos em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Dizemos que X e Y são *projetivamente equivalentes* se existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$ tal que $\varphi(X) = Y$.

Exemplo 1.82. Considere $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(x_0x_3 - x_1x_2)$, $\mathrm{Y} = \mathcal{Z}(x_0x_1)$ superfícies quádricas em $\mathbb{P}^3$.

(a) As superfícies quádricas $\mathcal{Z}(x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2)$ e X são projetivamente equivalentes. Considere $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ dada por

$$[a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \longmapsto [a_0 + ia_1 : -a_2 - ia_3 : a_2 - ia_3 : a_0 - ia_1].$$

Note que $\varphi(\mathcal{Z}(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)) = \mathrm{X}$.

(b) As superfícies quádricas $\mathcal{Z}(x_0^2 + x_1^2)$ e Y são projetivamente equivalentes. De fato, $\varphi : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ dada por

$$[a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \longmapsto [a_0 + ia_1 : a_0 - ia_1 : a_2 : a_3]$$

é uma MCP tal que $\varphi(\mathcal{Z}(x_0^2 + x_1^2)) = \mathrm{Y}$.

O exemplo acima traz à tona um resultado geral que diz respeito à classificação das hipersuperfícies quádricas em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ (cf. Teorema 4, p. 411 em Cox, Little e O'Shea (1997)) que utilizaremos no Capítulo 3 para contar retas em superfícies quádricas, uma vez que superfícies projetivamente equivalentes possuem a mesma quantidade de retas, conforme mostraremos a seguir.

Considere $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ um conjunto algébrico. Vamos denotar por $\mathfrak{L}(\mathrm{X})$ o conjunto de todas as retas contidas em X

$$\mathfrak{L}(\mathrm{X}) := \left\{\ell \subset \mathbb{P}^3 | \ell \text{ é uma reta contida em } X\right\}.$$

Fixada uma reta ℓ em $\mathbb{P}^3$, defina $\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) := \left\{ m \in \mathfrak{L}(\mathrm{X}) | \ell \cap m \neq \emptyset \right\}$. Ou seja, $\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X})$ é formado por todas as retas que estão contidas na superfície X e encontram à reta ℓ.

Proposição 1.37. *Com as notações acima. Para cada $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ verifica-se que*

$$\Omega : \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathrm{X}_1) \quad \textit{dada por } \ell \longmapsto \varphi(\ell) \quad \textit{sendo } \mathrm{X}_1 = \varphi(\mathrm{X})$$

é uma bijeção que satisfaz

(i) *Se $\ell, m \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$ então $\ell \cap m = \emptyset$ se, e somente se, $\varphi(\ell) \cap \varphi(m) = \emptyset$.*

(ii) *$\Omega(\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X})) = \mathfrak{L}_{\ell_1}(\mathrm{X}_1)$, sendo $\ell_1 = \varphi(\ell)$ e ℓ uma reta em $\mathbb{P}^3$.*

Demonstração. Note que:

- Ω está bem definida. Basta lembrar que as MCP preservam retas, ou seja, levam retas em retas.[98] Além disso, se $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ for determinada por $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{C}^4)$, e $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$, então $\mathrm{X}_1 = \varphi(\mathrm{X}) = \mathcal{Z}(T_\bullet F)$ é uma superfície em $\mathbb{P}^3$ definida por $T_\bullet F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$.
- Ω é uma bijeção. Observe que $\mathfrak{L}(\mathrm{X}_1) \ni m \longmapsto \varphi^{-1}(m) \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$ define a inversa de Ω sendo $\varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ a inversa da MCP φ.

$\boxed{\text{(i)}}$ Segue de forma direta ao aplicar φ (respectivamente, φ^{-1}) na igualdade $\ell \cap m = \emptyset$ (respectivamente, $\varphi(\ell) \cap \varphi(m) = \emptyset$).

$\boxed{\text{(ii)}}$ Observe que:

$$\begin{aligned} m_1 \in \Omega(\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X})) \quad &\Longleftrightarrow \quad m_1 = \varphi(m) \ \text{ para algum } \ m \in \mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) \\ &\overset{\ell \cap m \neq \emptyset}{\Longleftrightarrow} \quad m_1 \cap \varphi(\ell) \neq \emptyset \\ &\overset{\ell_1 = \varphi(\ell)}{\Longleftrightarrow} \quad m_1 \cap \ell_1 \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow \quad m_1 \in \mathfrak{L}_{\ell_1}(\mathrm{X}_1). \end{aligned}$$

□

Corolário 1.19. *Superfícies projetivamente equivalentes possuem a mesma quantidade de retas.*

Demonstração. Segue da definição de projetivamente equivalentes e da Proposição 1.37. □

Corolário 1.20. *Superfícies projetivamente equivalentes possuem a mesma quantidade de retas duas a duas disjuntas.*

Demonstração. Basta aplicar o Corolário 1.19 e o item (ii) da Proposição 1.37. □

[98] Visto que todo MCP preserva variedades lineares projetivas. De fato, se $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^3)$ for determinada por $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{C}^4)$ e $\Lambda = \mathbb{P}(W)$ é uma variedade linear projetiva, então $\varphi(\Lambda) = \mathbb{P}(T(W))$.

1.3.2 Teorema da dimensão das fibras

A seguir colocamos o enunciado do Teorema da dimensão das fibras (que iremos denominar também por **TDF**) e iremos discutir alguns exemplos calculando a dimensão das assim denominadas *fibras* $f^{-1}(y)$, de um dado morfismo $f : X \longrightarrow Y$. Por simplicidade faremos a demonstração no caso em que X e Y são variedades afins, mas que o resultado também é válido para variedades quase projetivas como indicado a seguir.

Teorema 1.7. **(TDF)** *Se X e Y são variedades quase projetivas e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo dominante, então*

(i) $\dim Y \leqslant \dim X$.

(ii) *Para todo $y \in \mathrm{Im}(f)$ e $Z \subseteq f^{-1}(y)$ componente irredutível de $f^{-1}(y)$, verifica--se que* $\dim Z \geqslant \dim X - \dim Y$.

(iii) *Existe $U \subseteq Y$ aberto não vazio tal que*

$$\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y, \quad \forall\, y \in U.$$

$\boxed{\text{ATENÇÃO:}}$ Toda variedade quase afim pode ser considerada como uma variedade quase projetiva (via o homemorfismo φ_0 cf. Proposição 1.25), visto que, se Y é uma variedade quase afim em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, então $Y = Y_1 \cap V$ sendo Y_1 fechado em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e $V \overset{ab}{\subseteq} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Assim, ao considerarmos o homeomorfismo

$$\varphi_0^{-1} : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \longrightarrow U_0 \quad \text{dado por} \quad (b_1, \ldots, b_n) \longmapsto [1 : b_1, \ldots, b_n],$$

obtemos $W = \varphi_0^{-1}(V)$ aberto de U_0 (logo W é aberto de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$) e $X_1 = \varphi_0^{-1}(Y_1)$ fechado de U_0, ou seja, $X_1 = X \cap U_0$ sendo X fechado em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Logo,

$$\varphi_0^{-1}(Y) = \varphi_0^{-1}(Y_1) \cap \varphi_0^{-1}(V) = X_1 \cap W = (X \cap U_0) \cap W = X \cap W.$$

De onde concluímos que $\varphi_0^{-1}(Y)$ é uma variedade quase projetiva em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Exemplo 1.83. Considere $f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ dado por $(a, b) \longmapsto (a, b, ab)$.

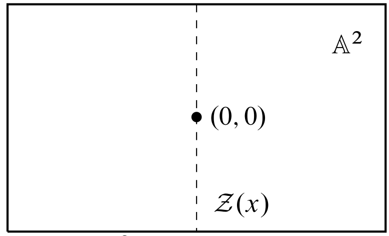
Observe que f é um morfismo tal que $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{Z}(z - xy)$. Assim, f não é dominante. Agora, $g : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{Z}(z - xy) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ definida por $g(p) = f(p)$ é uma bijeção, logo g é dominante e para todo $q \in \mathrm{Im}(g)$ tem-se que $\dim g^{-1}(q) = 0$.

Exemplo 1.84. Considere o morfismo $f : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$ dado por $(a, b) \longmapsto (b, ab)$.

Note que:

- f é dominante.

Vamos mostrar que $\mathrm{Im}(f) =$
$= (\mathbb{A}^2 - \mathcal{Z}(x)) \bigcup \{(0,0)\}$



Observe que: $(0,y) \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists\,(a,b) \in \mathbb{A}^2$ tal que $f(a,b) = (b,ab) = (0,y)$. Logo, $b = 0$ e $y = 0$, ou seja, $\mathrm{Im}(f) \cap \mathcal{Z}(x) = \{(0,0)\}$. Agora, se considerarmos $(u,v) \in \mathbb{A}^2 - \mathcal{Z}(x)$ verifica-se que $f\left(\frac{v}{u}, u\right) = (u,v)$. Portanto,

$$\mathrm{Im}(f) = (\mathbb{A}^2 - \mathcal{Z}(x)) \bigcup \{(0,0)\} \Longrightarrow \overline{\mathrm{Im}(f)} = \mathbb{A}^2.$$

• Vamos determinar as fibras de f (ou seja, $f^{-1}(u,v)$).

Sabemos que $f\left(\frac{b}{a}, a\right) = (a,b)$ se, $a \neq 0$ e que $f(a,0) = (0,0)$ para todo $a \in \mathbb{C}$. Logo,

$$f^{-1}(u,v) = \begin{cases} \left\{\left(\dfrac{v}{u}, u\right)\right\}, & \text{se } u \neq 0 \\ \mathcal{Z}(y), & \text{se } u = v = 0 \\ \emptyset, & \text{se } u = 0,\ v \neq 0. \end{cases}$$

Neste exemplo as fibras são irredutíveis tais que $\dim f^{-1}(0,0) = 1$ e $\dim f^{-1}(u,v) = 0$ se $u \neq 0$. Além disso, no aberto $U = \mathbb{A}^2 - \mathcal{Z}(x)$ verifica-se que

$$\dim f^{-1}(u,v) = \dim \mathbb{A}^2 - \dim \mathbb{A}^2 = 0 \quad \forall\,(u,v) \in U.$$

Exercício 1.84. Considere $f : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{Z}(x_3) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ dada por $(a,b,c) \longmapsto (ab, bc, 0)$.
(a) f é dominante?
(b) Existe U aberto não vazio de $\mathcal{Z}(x_3)$ tal que $\dim f^{-1}(q) = 1, \ \forall\, q \in U$?

Preliminares para prova do item (i) do TDF

Lema 1.21. *Sejam k um corpo e A, B domínios de integridade que são k-álgebras. Se $\psi : B \longrightarrow A$ for um homomorfismo de k-álgebras injetor, então*

$$\psi_1 : \mathrm{Frac}(B) \longrightarrow \mathrm{Frac}(A) \quad \textit{dado por } \frac{b}{s} \longmapsto \frac{\psi(b)}{\psi(s)}$$

também é um homomorfismo de k-álgebras injetor. Ou seja, obtemos uma extensão de corpos $\mathrm{Frac}(B) \hookrightarrow \mathrm{Frac}(A)$.

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor a verificação de que ψ_1 está bem definida e é um homomorfismo de anéis. Observe que:

• ψ_1 é um homomorfismo de k-álgebras.

Sejam $\varphi_A : k \longrightarrow A$ e $\varphi_B : k \longrightarrow B$ os homomorfismos de anéis que definem a estrutura de k-álgebra em A e B. Então

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\varphi_A}: & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(A) \\ & \kappa & \longmapsto & \dfrac{\varphi_A(\kappa)}{1_A} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \widetilde{\varphi_B}: & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathrm{Frac}(B) \\ & \kappa & \longmapsto & \dfrac{\varphi_B(\kappa)}{1_B} \end{array}$$

são os homomorfismo de anéis que definem a estrutura de k-álgebra em $\mathrm{Frac}(A)$ e $\mathrm{Frac}(B)$. Lembre que $\psi \circ \varphi_B = \varphi_A$, visto que ψ é um homomorfismo de k-álgebras. Ou seja, é comutativo o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\psi"] & A \\ & k \arrow[ul, "\varphi_B"] \arrow[u, "\varphi_A"'] \end{tikzcd}$$

Assim, temos que

$$\psi_1 \circ \widetilde{\varphi_B}(\kappa) = \psi_1\left(\frac{\varphi_B(\kappa)}{1_B}\right) = \frac{\psi(\varphi_B(\kappa))}{\psi(1_B)} = \frac{\varphi_A(\kappa)}{1_A} = \widetilde{\varphi_A}(\kappa), \quad \forall\, \kappa \in k.$$

• ψ_1 é injetora.

Considere $\dfrac{b}{s} \in \ker(\psi_1)$. Assim,

$$\psi_1\left(\frac{b}{s}\right) = \frac{0}{1_A} \iff \frac{\psi(b)}{\psi(s)} = \frac{0}{1_A} \iff \psi(b) = 0 \overset{\psi\ inj.}{\Longrightarrow} b = 0 \Longrightarrow \frac{b}{s} = \frac{0}{1_B} \in \mathrm{Frac}(B).$$

$\square$

Demonstração do item (i) do **TDF**

Demonstração. Sejam X, Y variedades afins e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo dominante. Nosso objetivo é mostrar que $\dim Y \leqslant \dim X$.

Segue da Proposição 1.33 que $f^* : A(Y) \longrightarrow A(X)$ é injetor. Portanto, $f^* : A(Y) \longrightarrow A(X)$ é um homomorfismo injetor de $\mathbb{K}$-álgebras. Assim, a partir do Lema 1.21 obtemos as extensões de corpos

$$\mathbb{K} \hookrightarrow \mathrm{Frac}(A(Y)) \hookrightarrow \mathrm{Frac}(A(X)).$$

Segue da definição de grau de transcendência que

$$\mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathrm{Frac}(A(Y)) \leqslant \mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathrm{Frac}(A(X)).$$

Agora, a partir do Lema 1.16, segue que

$$\dim_{Krull} A(Y) = \mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathrm{Frac}(A(Y)) \leqslant \mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathrm{Frac}(A(X)) = \dim_{Krull} A(X).$$

Por outro lado, a Proposição 1.10 nos garante que $\dim_{Krull} A(Y) = \dim Y$ e $\dim_{Krull} A(X) = \dim X$. Portanto, $\dim Y \leqslant \dim X$. $\square$

Preliminares para prova dos itens (ii) e (iii) do TDF

Vamos começar fazendo algumas observações e introduzindo algumas notações e definições. Considere Z e X variedades afins em $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

(i) Sejam $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e I ideal, defina

$$\mathcal{Z}_X(f) := \Big\{x \in X | f(x) = 0\Big\} = X \cap \mathcal{Z}(f).$$
$$\mathcal{Z}_X(I) := \Big\{x \in X | f(x) = 0, \ \forall f \in I\Big\} = X \cap \mathcal{Z}(I).$$

(ii) Se $Z \subseteq X$, então $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathcal{I}(Z)$. Assim, pela correspondência entre $V(\mathcal{I}(X))$ e $\mathrm{Spec}(A(X))$ dada por $\mathfrak{p} \longmapsto \overline{\mathfrak{p}} = \{\overline{a} \in A(X) | a \in \mathfrak{p}\}$, obtemos o ideal $\overline{\mathcal{I}(Z)}$ o qual denotaremos por $\mathcal{I}_X(Z)$. Ou seja,

$$\mathcal{I}_X(Z) := \overline{\mathcal{I}(Z)} = \Big\{\overline{g} \in A(X) | g \in \mathcal{I}(Z)\Big\} \in \mathrm{Spec}(A(X)).$$

(iii) Se $Z \subseteq X$ então $\Psi : A(X) \longrightarrow A(Z)$ dada por $\overline{g} \longmapsto g + \mathcal{I}(Z)$ está bem definida e é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras sobrejetor. Além disso, o núcleo de Ψ é dado por

$$\ker(\Psi) = \Big\{\overline{g} \in A(X) | g \in \mathcal{I}(Z)\Big\} = \overline{\mathcal{I}(Z)} = \mathcal{I}_X(Z).$$

Portanto,

$$\frac{A(X)}{\mathcal{I}_X(Z)} \cong A(Z).$$

(iv) Se $Z \subseteq X$ então definimos a *codimensão* de Z em X por

$$\mathrm{codim}_X Z := \dim X - \dim Z.$$

(v) Se $W \subseteq Z \subseteq X$ são conjuntos algébricos, então

$$\mathrm{codim}_X W = \mathrm{codim}_Z W + \mathrm{codim}_X Z \tag{1.55}$$

Teorema 1.8 (Teorema do ideal principal de Krull)**.** *Sejam A um anel noetheriano e $x \in A - \{0\}$ não invertível. Então todo ideal primo minimal dentre os que contém x possui altura igual a um.*

Demonstração. Veja a seção (12.I), p. 77 em Matsumura (1970). □

Proposição 1.38. *Sejam $Z \subseteq X$ variedades afins. Então*

$$\mathrm{codim}_X Z = 1 \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \exists\ \bar{\mathrm{f}} \neq \bar{0} \text{ em } A(X) \text{ não invertível tal que} \\ Z \text{ é componente irredutível de } \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}). \end{array}$$

Demonstração. $\boxed{\Longrightarrow}$ Como $\operatorname{codim}_X Z = 1$ então $Z \subset X$. Assim,

$$\mathcal{I}(X) \subset \mathcal{I}(Z) \Longrightarrow \mathcal{I}_X(Z) = \overline{\mathcal{I}(Z)} \in \operatorname{Spec}(A(X)) \;\text{ e }\; \mathcal{I}_X(Z) \neq \{\overline{0}\}.$$

Assim, podemos escolher $\bar{\mathrm{f}} \neq \overline{0}$ em $\mathcal{I}_X(Z)$. Note que

• $\bar{\mathrm{f}}$ não é invertível, visto que $\mathcal{I}_X(Z)$ é um ideal primo de $A(X)$.

• $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}) \subset X$.[99]

• $Z \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}) \subset X$.
De fato, como $\bar{\mathrm{f}} \in \mathcal{I}_X(Z) = \overline{\mathcal{I}(Z)}$, segue-se que $\mathrm{f} \in \mathcal{I}(Z)$. Assim,

$$Z \subseteq \mathcal{Z}(\mathrm{f}) \underset{Z \subset X}{\overset{\cap X}{\Longrightarrow}} Z \subseteq \mathcal{Z}(\mathrm{f}) \cap X = \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}).$$

A seguir, assuma que $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}) = Z_1 \cup \cdots \cup Z_k$, sendo $Z_1, \ldots, Z_k$ as componentes irredutíveis de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f})$. Como Z é irredutível e $Z \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{f})$ existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $Z \subseteq Z_i$. Assim, temos que

$$Z \subseteq Z_i \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}) \subset X \Longrightarrow \dim Z \leqslant \dim Z_i \leqslant \dim \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}) \overset{Ex.1.26}{<} \dim X. \qquad (1.56)$$

Agora, como $\operatorname{codim}_X Z = \dim X - \dim Z = 1$, a partir de (1.56) concluímos que

$$\dim Z \leqslant \dim Z_i \leqslant \dim \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}) < \dim Z + 1 \Longrightarrow \dim Z = \dim Z_i = \dim \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}).$$

Tendo em consideração que $Z \subseteq Z_i$ e Z_i é irredutível, (cf. Exercício 1.28) segue que $Z = Z_i$. Portanto, Z é uma componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f})$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Considere $\bar{\mathrm{f}} \neq \overline{0}$ em $A(X)$ não invertível. Seja Z uma componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f})$. Assim, temos

$$Z \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}) = \mathcal{Z}(\mathrm{f}) \cap X \Longrightarrow Z \subseteq \mathcal{Z}(\mathrm{f}) \Longrightarrow \mathrm{f} \in \mathcal{I}(Z) \Longrightarrow \bar{\mathrm{f}} \in \mathcal{I}_X(Z) \in \operatorname{Spec}(A(X)).$$

Queremos mostrar que $\mathcal{I}_X(Z)$ é um primo minimal dentre os que contêm $\bar{\mathrm{f}}$. Considere $\mathfrak{q}$ ideal primo contendo $\mathcal{I}(X)$ tal que

$$\bar{\mathrm{f}} \in \bar{\mathfrak{q}} \subseteq \mathcal{I}_X(Z) = \overline{\mathcal{I}(Z)}.$$

De fato, $\mathrm{f} \in \mathfrak{q}$ (visto que $\bar{\mathrm{f}} = \bar{a}$ com $a \in \mathfrak{q}$, logo $\mathrm{f} - a \in \mathcal{I}(X) \subseteq \mathfrak{q}$) e $\mathfrak{q} \subseteq \mathcal{I}(Z)$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{f} \in \mathfrak{q} \subseteq \mathcal{I}(Z) \quad &\Longrightarrow \quad Z \subseteq \mathcal{Z}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathrm{f}) \\ &\overset{\cap X}{\Longrightarrow} \quad Z \subseteq \overbrace{\mathcal{Z}_X(\mathfrak{q}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{q})}^{fech.irred.} \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}) \\ &\Longrightarrow \quad Z = \mathcal{Z}(\mathfrak{q}). \end{aligned}$$

---

[99] Se $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}) = X$ então $\mathcal{Z}(\mathrm{f}) \cap X = X$. Logo, $X \subseteq \mathcal{Z}(\mathrm{f})$ que implica em $\mathrm{f} \in \mathcal{I}(X)$, ou seja, $\bar{\mathrm{f}} = \overline{0}$, o que é absurdo.

(visto que Z é componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f})$). Assim, $\mathcal{I}(Z) = \mathfrak{q}$, de onde concluímos que $\mathcal{I}_X(Z) = \overline{\mathcal{I}(Z)} = \overline{\mathfrak{q}}$. Portanto, $\mathcal{I}_X(Z)$ é um ideal primo de $A(X)$ minimal entre os ideais primos que contêm $\overline{\mathrm{f}}$. Segue do *Teorema do ideal principal de Krull* (cf. Teorema 1.8) que $\mathrm{ht}(\mathcal{I}_X(Z)) = 1$.

Para finalizar, observe que

$$\begin{array}{rcl} \dim Z & = & \dim_{Krull} A(Z) \\ & \overset{isom.}{=} & \dim_{Krull} \dfrac{A(X)}{\mathcal{I}_X(Z)} \\ & \overset{Lema\ 1.5}{=} & \dim_{Krull} A(X) - \mathrm{ht}(\mathcal{I}_X(Z)) \\ & = & \dim X - 1. \end{array}$$

Portanto, $\mathrm{codim}_X Z = 1$. □

Corolário 1.21. *Sejam Z e X variedades afins tais que $Z \subseteq X$. Se* $\mathrm{codim}_X Z = r \geqslant 1$, *então existe uma cadeia de variedades afins*

$$Z_r = Z \subset Z_{r-1} \subset \cdots \subset Z_2 \subset Z_1 \subset X$$

tais que $\mathrm{codim}_X Z_i = i$ *para cada* $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Demonstração. Faremos por indução em r.

$\boxed{r = 1}$ O resultado segue visto que $Z_1 = Z \subset X$ e $\mathrm{codim}_X Z_1 = 1$.

$\boxed{\text{H. I.: } r = k}$ Se W e Y são variedades afins tais que $W \subseteq Y$ e $\mathrm{codim}_Y W = k \geqslant 1$, então existe uma cadeia de variedades afins

$$W_k = W \subset W_{k-1} \subset \cdots \subset W_2 \subset W_1 \subset Y$$

tais que $\mathrm{codim}_Y W_i = i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

$\boxed{\text{Tese: } r = k+1}$ Sejam $Z \subseteq X$ variedades afins tais que $\mathrm{codim}_X Z = k + 1 \geqslant 1$.

Como $Z \subset X$, tem-se que $\mathcal{I}(X) \subset \mathcal{I}(Z)$. Desse modo podemos escolher $\mathrm{f} \in \mathcal{I}(Z)$-$- \mathcal{I}(X)$. Observe que:

- $\overline{\mathrm{f}} \neq \overline{0}$ em $A(X)$ (visto que $\mathrm{f} \notin \mathcal{I}(X)$). Além disso, $\overline{\mathrm{f}}$ não é invertível.[100]
- $Z \subseteq \mathcal{Z}(\mathrm{f})$ (visto que $\mathrm{f} \in \mathcal{I}(Z)$).
- Existe W componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f})$ contendo Z.

De fato, se $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}) = W_1 \cup \cdots \cup W_\ell$, sendo $W_1, \ldots, W_\ell$ as componentes irredutíveis de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f})$. Como Z é um subconjunto irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f})$, segue-se que $Z \subseteq W_j$ para algum $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Considere $W := W_j$.

[100]Suponha, por absurdo, que $\overline{\mathrm{f}} \in A(X)$ é invertível, logo existe $\overline{\mathrm{h}} \in A(X)$ tal que $\overline{\mathrm{fh}} = \overline{1}$, o que implica em $\mathrm{fh} - 1 \in \mathcal{I}(X) \subset \mathcal{I}(Z)$. Agora, como $\mathrm{f} \in \mathcal{I}(Z)$ segue-se que $1 \in \mathcal{I}(Z)$, o que é absurdo.

Segue da Proposição 1.38 que $\operatorname{codim}_X W = 1$. Assim temos $Z \subseteq W \subseteq X$ e segue de (1.55) que

$$\operatorname{codim}_X Z = \operatorname{codim}_W Z + \operatorname{codim}_X W \iff k+1 = \operatorname{codim}_W Z + 1 \implies \operatorname{codim}_W Z = k.$$

Assim, segue da hipótese de indução (H.I.) que existe uma cadeia de variedades afins

$$Y_k = Z \subset Y_{k-1} \subset \cdots \subset Y_2 \subset Y_1 \subset W \tag{1.57}$$

tais que $\operatorname{codim}_W Y_i = i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Entretanto a partir de (1.57) obtemos a cadeia de variedades afins

$$Z_{k+1} = Z \subset Z_k := Y_{k-1} \subset \cdots \subset Z_2 := Y_1 \subset Z_1 := W \subset X$$

tais que $\operatorname{codim}_X Z_i = i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k+1\}$, visto que $\operatorname{codim}_X Z_1 = \operatorname{codim}_X W = 1$ e para $i \geqslant 2$ tem-se que

$$\operatorname{codim}_X Z_i = \operatorname{codim}_X Z_1 + \operatorname{codim}_{Z_1} Z_i = \operatorname{codim}_X W + \operatorname{codim}_W Y_{i-1} = 1 + i - 1 = i.$$

$\square$

Corolário 1.22. *Considere X uma variedade afim e $\overline{\mathrm{f}_1}, \ldots, \overline{\mathrm{f}_r} \in A(X)$ tais que*

$$\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r) \neq \emptyset$$

Se Z é uma componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r)$, então $\operatorname{codim}_X Z \leqslant r$.

Demonstração. Faremos indução em r.

$\boxed{r = 1}$ Neste caso, Z é uma componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1) = \mathcal{Z}(\mathrm{f}_1) \cap X$. Note que:

• Se $\overline{\mathrm{f}_1} = \overline{0}$, então $Z = X$. Logo, $\operatorname{codim}_X Z = 0 \leqslant r = 1$.

De fato, se $\overline{\mathrm{f}_1} = \overline{0}$ então $\mathrm{f}_1 \in \mathcal{I}(X)$. Logo $X \subseteq \mathcal{Z}(\mathrm{f}_1)$ e $Z \overset{comp.}{\subseteq} \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1) = X$. Portanto, $Z = X$ e $\operatorname{codim}_X Z = 0 \leqslant r = 1$.

• Se $\overline{\mathrm{f}_1} \in A(X)$ é invertível então $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1) = \emptyset$.

Se $\overline{\mathrm{f}_1} \in A(X)$ é invertível então existe $\overline{\mathrm{h}} \in A(X)$ tal que $\overline{\mathrm{f}_1 \cdot \mathrm{h}} = \overline{1}$, o que implica em $\mathrm{f}_1 \cdot \mathrm{h} - 1 \in \mathcal{I}(X)$. Logo,

$$X \subseteq \mathcal{Z}(\mathrm{f}_1 \cdot \mathrm{h} - 1) \overset{\mathcal{Z}(\mathrm{f}_1) \cap}{\Longrightarrow} \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1) \subseteq \mathcal{Z}(\mathrm{f}_1) \cap \mathcal{Z}(\mathrm{f}_1 \cdot \mathrm{h} - 1) = \emptyset \implies \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1) = \emptyset.$$

• Se $\overline{\mathrm{f}_1} \in A(X)$ é não nulo e não é invertível, então $\operatorname{codim}_X Z = 1 \leqslant r = 1$ (conforme Proposição 1.38).

$\boxed{\text{H. I.: } r = k}$ Considere X uma variedade afim e $\overline{\mathrm{f}_1}, \ldots, \overline{\mathrm{f}_k} \in A(X)$ tais que

$$\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_k) \neq \emptyset$$

Então toda componente irredutível Z de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_k)$ satisfaz $\operatorname{codim}_X Z \leqslant k$.

$\boxed{\text{Tese: } r = k+1}$ Seja X uma variedade afim e $\overline{\mathrm{f}_1}, \ldots, \overline{\mathrm{f}_{k+1}} \in A(X)$ tais que

$$\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_{k+1}) \neq \emptyset$$

Considere Z componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_{k+1})$. Assim,

$$Z \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_{k+1}) = \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1) \cap \cdots \cap \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_{k+1}) \Longrightarrow Z \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_i), \ \forall\, i \in \{1, \ldots, k+1\}.$$

De fato, como $Z \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1)$ e Z é irredutível, existe $Y \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1)$ componente irredutível contendo Z.

Afirmação 1: $\operatorname{codim}_X Y \leqslant 1$.

Segue do caso $r = 1$ (na indução), visto que Y é componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1)$. Com isso concluímos a prova da Afirmação 1.

Por outro lado, observe que Y é uma variedade afim contida em X e $\mathrm{f}_1 \in \mathcal{I}(Y)$. Assim, podemos considerar o homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras sobrejetor

$$\Psi : A(X) \longrightarrow A(Y) \quad \text{dado por } \overline{\mathrm{h}} \longmapsto \mathrm{h} + \mathcal{I}(Y) := \widetilde{\mathrm{h}}$$

Considere $\widetilde{\mathrm{f}_2}, \ldots, \widetilde{\mathrm{f}_{k+1}} \in A(Y)$ e observe que

$$Z \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1) \cap \mathcal{Z}(\mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_{k+1}) \overset{Y\cap}{\Longrightarrow} Z \subseteq Y \cap \mathcal{Z}(\mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_{k+1}).$$

De fato,

$$Z \subseteq Y \cap \mathcal{Z}(\mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_{k+1}) \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots \mathrm{f}_{k+1})$$

Afirmação 2: Z é componente irredutível de $\mathcal{Z}_Y(\mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_{k+1}) = Y \cap \mathcal{Z}(\mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_{k+1})$.

De fato, assuma que

$$\mathcal{Z}_Y(\mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_{k+1}) = W_1 \cup \cdots \cup W_s \quad \text{e} \quad \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_{k+1}) = Z \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_t$$

sendo $W_1, \ldots, W_s$ as componentes irredutíveis de $\mathcal{Z}_Y(\mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_{k+1})$ tais que $W_i \not\subseteq W_j$ sempre que $i \neq j$, e $Z_0 = Z, Z_1, \ldots, Z_t$ as componentes irredutíveis de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_{k+1})$ tais que $Z_i \not\subseteq Z_j$ para todo $i \neq j$.

Como Z é irredutível e $Z \subseteq \mathcal{Z}_Y(\mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_{k+1})$ segue que existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $Z \subseteq W_i$. Analogamente, como W_i é irredutível e $W_i \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_{k+1})$ segue que $W_i \subseteq Z$ ou $W_i \subseteq Z_j$ para algum $j \in \{1, \ldots, t\}$. Portanto,[101] $Z = W_i$.

Assim temos que Z é componente irredutível de $\mathcal{Z}_Y(\mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_{k+1})$. Segue da hipótese de indução (H. I.) que $\operatorname{codim}_Y Z \leqslant k$. Visto que $Z \subseteq Y \subseteq X$, segue de (1.55) que

$$\operatorname{codim}_X Z = \operatorname{codim}_Y Z + \operatorname{codim}_X Y \overset{Af.\,1}{\Longrightarrow} \operatorname{codim}_X Z \leqslant k+1.$$

$\square$

[101] Do contrário, teríamos que $W_i \subseteq Z_j$ para algum $j \in \{1, \ldots, t\}$, o que implica em $Z \subseteq W_i \subseteq Z_j$, o que é absurdo.

Corolário 1.23. *Sejam $Z \subseteq X$ variedades afins. Se* $\operatorname{codim}_X Z = r \geqslant 1$*, então existem* $\overline{\mathrm{f}_1}, \ldots, \overline{\mathrm{f}_r} \in A(X)$ *tais que Z é uma componente irredutível de* $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r)$ *e toda componente irredutível de* $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r)$ *tem codimensão r em X.*

Demonstração. Faremos indução em r.

$\boxed{r = 1}$ Neste caso, temos $Z \subseteq X$ variedades afins tais que $\operatorname{codim}_X Z = 1$. Segue da Proposição 1.38 que existe $\overline{\mathrm{f}} \neq \overline{0}$ em $A(X)$ não invertível tal que Z é componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f})$. Além disso, a mesma proposição nos garante que toda componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f})$ tem codimensão 1 em X.

$\boxed{\text{H. I.:}}$ Sejam $Z \subseteq X$ variedades afins tais que $\operatorname{codim}_X Z = j$, com $2 \leqslant j \leqslant r$. Então existem $\overline{\mathrm{f}_1}, \ldots, \overline{\mathrm{f}_j} \in A(X)$ tais que Z é uma componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_j)$, e toda componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_j)$ tem codimensão j em X.

$\boxed{\text{Tese:}}$ Sejam $Z \subseteq X$ variedades afins tais que $\operatorname{codim}_X Z = r + 1$.

Como $\operatorname{codim}_X Z = r + 1 \geqslant 1$ segue do Corolário 1.21 que existe uma cadeia de variedades afins

$$Z_{r+1} = Z \subset Z_r \subset \cdots \subset Z_2 \subset Z_1 \subset X$$

tais que $\operatorname{codim}_X Z_i = i$, para cada $i \in \{1, \ldots, r+1\}$.

Observe que $Z_{r+1} = Z \subset Z_r \subset X$. Assim, $\operatorname{codim}_X Z = \operatorname{codim}_X Z_r + \operatorname{codim}_{Z_r} Z$, ou seja,

$$r + 1 = r + \operatorname{codim}_{Z_r} Z \Longrightarrow \operatorname{codim}_{Z_r} Z = 1. \tag{1.58}$$

Agora, como $\operatorname{codim}_X Z_r = r$ segue da hipótese de indução (H.I.) que existem $\overline{\mathrm{q}_1}$, ..., $\overline{\mathrm{q}_r} \in A(X)$ tais que Z_r é uma componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r)$, e toda componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r)$ tem codimensão r em X.

Assuma que $\mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r) = Y_1 \cup \cdots \cup Y_\ell$, sendo $Y_1 = Z_r, \ldots, Y_\ell$ as componentes irredutíveis de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r)$ tais que $Y_i \nsubseteq Y_j$ para todo $i \neq j$. Note que

$$\begin{aligned} Z_{r+1} = Z \subset Z_r = Y_1 \quad &\Longrightarrow \dim Z < \dim Y_1 \\ &\Longrightarrow \dim Z < \dim Y_1 = \dim X - \operatorname{codim}_X Y_1 \\ &\Longrightarrow \dim Z < \dim Y_1 = \dim X - r. \end{aligned}$$

Afirmação 1: Para todo $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ verifica-se que $Y_j \nsubseteq Z$.

De fato, suponha que existe $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ tal que $Y_j \subseteq Z$. Se $j = 1$ segue que $Y_1 \subseteq Z$ sendo que $Z \subset Y_1$, o que é absurdo. Agora, se $j \geqslant 2$ concluímos que $Y_j \subseteq Z \subset Y_1$ com $j \neq 1$ (Absurdo, visto que $Y_i \nsubseteq Y_j$ para todo $i \neq j$).

Segue da Afirmação 1 que $\mathcal{I}(Z) \nsubseteq \mathcal{I}(Y_j)$, para todo $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. De onde concluímos que $\mathcal{I}_X(Z) \nsubseteq \mathcal{I}_X(Y_j)$ para todo $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Sendo $\mathcal{I}_X(Y_j)$ ideais primos para todo $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, concluímos que[102]

$$\mathcal{I}_X(Z) \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{\ell} \mathcal{I}_X(Y_j).$$

Assim, podemos escolher $\overline{\mathrm{q}_{r+1}} \in \mathcal{I}_X(Z)$ (mais precisamente $\mathrm{q}_{r+1} \in \mathcal{I}(Z)$) tal que $\overline{\mathrm{q}_{r+1}} \notin \mathcal{I}_X(Y_j)$ para todo $j \in \{1, \ldots, \ell\}$.

Afirmação 2: Z é uma componente irredutível de $\mathcal{Z}_{Y_1}(\mathrm{q}_{r+1}) = \mathcal{Z}(\mathrm{q}_{r+1}) \cap Y_1$ tal que $\operatorname{codim}_{Y_1} Z = 1$.

Assuma que, $\mathcal{Z}_{Y_1}(\mathrm{q}_{r+1}) = W_1 \cup \cdots \cup W_t$ sendo $W_1, \ldots, W_t$ as componentes irredutíveis de $\mathcal{Z}_{Y_1}(\mathrm{q}_{r+1})$ tais que $W_i \not\subseteq W_j$ para todo $i \neq j$.

Como $Z \subset Y_1$ e $\mathrm{q}_{r+1} \in \mathcal{I}(Z)$ segue-se que $Z \subseteq \mathcal{Z}_{Y_1}(\mathrm{q}_{r+1})$. Sendo Z irredutível concluímos que existe $i \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $Z \subseteq W_i$. Por outro lado, tendo em consideração que $\mathrm{q}_{r+1} \notin \mathcal{I}(Y_1)$ (caso contrário, $\overline{\mathrm{q}_{r+1}} \in \mathcal{I}_X(Y_1)$) e $\mathrm{q}_{r+1} + \mathcal{I}(Y_1) := \widetilde{\mathrm{q}_{r+1}}$ não é invertível em $A(Y_1)$ [103], segue da Proposição 1.38 que $\operatorname{codim}_{Y_1} W_j = 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, t\}$. Visto que $Z \subseteq W_i \subseteq Y_1$, podemos concluir que

$$\operatorname{codim}_{Y_1} Z = \operatorname{codim}_{W_i} Z + \operatorname{codim}_{Y_1} W_i \underset{Y_1 = Z_r}{\overset{(1.58)}{\iff}} \operatorname{codim}_{W_i} Z = 0 \iff \dim Z = \dim W_i.$$

Assim, temos $Z \subseteq W_i$, $\dim Z = \dim W_i$ e W_i irredutível. Portanto, $Z = W_i$. Logo, Z é uma componente irredutível de $\mathcal{Z}_{Y_1}(\mathrm{q}_{r+1}) = \mathcal{Z}(\mathrm{q}_{r+1}) \cap Y_1$ e $\operatorname{codim}_{Y_1} Z = 1$.

Lembre que $\mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r) = Y_1 \cup \cdots \cup Y_\ell$, sendo $Y_1 = Z_r, \ldots, Y_\ell$ as componentes irredutíveis de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r)$ tais que $Y_i \not\subseteq Y_j$ para todo $i \neq j$.

Assim, $\langle \mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r \rangle \subseteq \mathcal{I}(Y_1) \cap \cdots \cap \mathcal{I}(Y_\ell)$. Portanto, $\mathrm{q}_{r+1} \notin \langle \mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r \rangle$.

Afirmação 3: Se W é uma componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r, \mathrm{q}_{r+1})$, então $\operatorname{codim}_X W = r + 1$.

O Corolário 1.22 nos garante que $\operatorname{codim}_X W \leqslant r + 1$. A seguir mostraremos que $\operatorname{codim}_X W \geqslant r + 1$.

Observe que $W \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r, \mathrm{q}_{r+1}) = \mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r) \cap \mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_{r+1})$. Assim,

$$W \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r) = \overbrace{Y_1 \cup \cdots \cup Y_\ell}^{Comp.irred.} \quad \text{com } \operatorname{codim}_X Y_j = r, \quad \forall\, j.$$

Logo, $W \subseteq Y_\mu$ para algum $\mu \in \{1, \ldots, \ell\}$. Portanto,

$$W \subseteq Y_\mu \cap \mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_{r+1}) = \mathcal{Z}_{Y_\mu}(\mathrm{q}_{r+1}).$$

[102] Sejam A um anel comutativo com unidade, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\ell$ ideais primos de A. Se I é um ideal de A tal que $I \subseteq \bigcup_{j=1}^{\ell} \mathfrak{p}_j$ então $I \subseteq \mathfrak{p}_j$ para algum $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ (cf. Proposição 1.11, p. 8 em Atiyah e Macdonald (1969))

[103] Suponha que $\widetilde{\mathrm{q}_{r+1}}$ é invertível em $A(Y_1)$. Logo existe $\widetilde{\mathrm{h}} \in A(Y_1)$ tal que $\widetilde{\mathrm{q}_{r+1}} \cdot \widetilde{\mathrm{h}} = \widetilde{1}$, o que implica em $\mathrm{q}_{r+1} \cdot \mathrm{h} - 1 \in \mathcal{I}(Y_1) \subset \mathcal{I}(Z)$. Agora, como $\mathrm{q}_{r+1} \in \mathcal{I}(Z)$ segue-se que $1 \in \mathcal{I}(Z)$, o que é absurdo.

Sendo W irredutível, existe $W_\mu \subseteq \mathcal{Z}_{Y_\mu}(\mathrm{q}_{r+1})$ componente irredutível contendo W. Assim, $W \subseteq W_\mu \subseteq Y_\mu \subseteq X$, implica em

$$\operatorname{codim}_X W_\mu = \operatorname{codim}_{Y_\mu} W_\mu + \operatorname{codim}_X Y_\mu \Longrightarrow \operatorname{codim}_X W_\mu = 1 + r.$$

Como $W \subseteq W_\mu$ segue que $r + 1 = \operatorname{codim}_X W_\mu \leqslant \operatorname{codim}_X W$.

Afirmação 4: Z é uma componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(\mathrm{h}_1, \ldots, \mathrm{h}_r, \mathrm{q}_{r+1})$.

Observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r, \mathrm{q}_{r+1}) &= \mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r) \cap \mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_{r+1}) \\ &= \overbrace{(Y_1 \cup \cdots \cup Y_\ell)}^{Comp.irred.} \cap \mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_{r+1}) \\ &= (Y_1 \cap \mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_{r+1})) \cup \cdots \cup (Y_\ell \cap \mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_{r+1})), \end{aligned}$$

e segue da Afirmação 2 que é Z é uma componente irredutível de $Y_1 \cap \mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_{r+1})$. Assim, $Z \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r, \mathrm{q}_{r+1})$. Tendo em consideração que Z irredutível, existe $W \subseteq \mathcal{Z}_X(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_r, \mathrm{q}_{r+1})$ componente irredutível contendo Z.

Agora a partir da Afirmação 3 temos que $\operatorname{codim}_X W = r+1$ e por hipótese $\operatorname{codim}_X Z = r + 1$. Portanto, $\dim Z = \dim W$. Entretanto, a Z está contida na componente irredutível W, o que implica em $Z = W$. □

Demonstração do item (ii) do **TDF**

Demonstração. Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo dominante entre variedades afins. A seguir mostraremos que todo $y \in \operatorname{Im}(f)$ e $Z \subseteq f^{-1}(y)$ componente irredutível de $f^{-1}(y)$, verifica-se que $\dim Z \geqslant \dim X - \dim Y$.

Segue do item (i) do Teorema 1.7 (**TDF**) que $\dim X - \dim Y \geqslant 0$.

Afirmação: Sejam $r = \dim X - \dim Y$ e $W \subseteq Y$ fechado irredutível. Se Z é uma componente irredutível de $f^{-1}(W)$, tal que $\overline{f(Z)} = W$, então $\dim Z \geqslant \dim W + r$.

De fato, seja $s = \operatorname{codim}_Y W$. Segue do Corolário 1.23 que existem $\overline{\mathrm{f}_1}, \ldots, \overline{\mathrm{f}_s} \in A(Y)$ tais que W é uma componente irredutível de $\mathcal{Z}_Y(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_s)$.

A seguir considere o homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras

$$\begin{array}{ccc} A(Y) & & A(X) \\ \wr\| & & \wr\| \\ \mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{O}(X) \end{array} \qquad \text{dada por } \psi \longmapsto \psi \circ f.$$

Seja $g_i = f^*(\mathrm{f}_i)$ para $i = 1, \ldots, s$ (lembre que $\overline{\mathrm{f}_i} \in A(Y)$ determina a função regular $y \overset{\mathrm{f}_i}{\longmapsto} \mathrm{f}_i(y)$). Agora, sendo Z componente irredutível de $f^{-1}(W)$ temos que

$$f(Z) \subseteq W \subseteq \mathcal{Z}_Y(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_s) = Y \cap \mathcal{Z}(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_s) \Longrightarrow Z \subseteq f^{-1}(\mathcal{Z}_Y(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_s)).$$

Entretanto, $f^{-1}(\mathcal{Z}_Y(\mathrm{f}_1,\dots,\mathrm{f}_s)) = X \cap \mathcal{Z}(g_1,\dots,g_s) = \mathcal{Z}_X(g_1,\dots,g_s)$. Assim, $Z \subseteq \mathcal{Z}_X(g_1,\dots,g_s)$. Tendo em conta que Z é irredutível, segue que existe Z_0 componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(g_1,\dots,g_s)$ contendo Z. Assim,

$$\begin{aligned} Z \subseteq Z_0 \subseteq \mathcal{Z}_X(g_1,\dots,g_s) &\Longrightarrow f(Z) \subseteq f(Z_0) \subseteq f(\mathcal{Z}_X(g_1,\dots,g_s)) \\ &\Longrightarrow \overline{f(Z)} \subseteq \overline{f(Z_0)} \subseteq \overline{f(\mathcal{Z}_X(g_1,\dots,g_s))} \\ &\Longrightarrow \overline{f(Z)} = W \subseteq \overline{f(Z_0)} \subseteq \mathcal{Z}_Y(\mathrm{f}_1,\dots,\mathrm{f}_s) \\ &\overset{(*)}{\Longrightarrow} \overline{f(Z)} = W = \overline{f(Z_0)} \quad (W \text{ é comp. irred.}) \end{aligned}$$

$(*)$ Z_0 irredutível $\Longrightarrow$ $f(Z_0)$ irredutível $\Longrightarrow$ $\overline{f(Z_0)}$ irredutível.

Assim,

$$f(Z_0) \subseteq W \Longrightarrow Z_0 \subseteq f^{-1}(W) \overset{Z \subseteq Z_0}{\Longrightarrow} Z \subseteq Z_0 \subseteq f^{-1}(W) \underset{comp.irred.}{\overset{Z}{\Longrightarrow}} Z = Z_0$$

Observe que se $\overline{f(Z)} = W$, então $\dim Z \geqslant \dim W + r$.

Como Z_0 é componente irredutível de $\mathcal{Z}_X(g_1,\dots,g_s)$, segue do Corolário 1.22 que $\operatorname{codim}_X Z \leqslant s$ $(Z = Z_0)$. Para concluir, observe que

$$\dim Z = \dim X - \operatorname{codim}_X Z \geqslant \dim X - s = r + \dim Y - \operatorname{codim}_Y W = r + \dim W.$$

Para finalizar, considere $y \in \operatorname{Im}(f)$ e $Z \subseteq f^{-1}(y)$ componente irredutível de $f^{-1}(y)$. Vamos aplicar a afirmação acima escolhendo $W = \{y\}$, que é um fechado irredutível de Y. Agora, note que

$$Z \subseteq f^{-1}(y) \Longrightarrow f(Z) = \{y\} \Longrightarrow \overline{f(Z)} = \overline{\{y\}} = \{y\} = W.$$

Portanto, $\dim Z \geqslant \dim W + r \overset{\dim W = 0}{\Longrightarrow} \dim Z \geqslant r = \dim X - \dim Y$. □

Demonstração do item (iii) do **TDF**

Demonstração. Sejam X, Y variedades afins e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo dominante. A seguir vamos mostrar que existe $U \subseteq Y$ aberto não vazio tal que

$$\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y, \quad \forall\, y \in U.$$

Usaremos as seguintes notações

$$K(Y) := \operatorname{Frac}(A(Y)) \text{ e } K(X) := \operatorname{Frac}(A(X))$$

para indicar os corpos de frações de $A(Y)$ e $A(X)$. Lembre que:

- O Lema 1.16 nos garante que $\dim X = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} K(X)$ e $\dim Y = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} K(Y)$.

• Segue da Proposição 1.33 que $f^* : A(Y) \longrightarrow A(X)$ é um homomorfismo injetor de $\mathbb{K}$-álgebras. Assim, a partir do Lema 1.21, obtemos as extensões de corpos

$$\mathbb{K} \hookrightarrow K(Y) \hookrightarrow K(X).$$

Portanto, $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} K(X) = \operatorname{trdeg}_{K(Y)} K(X) + \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} K(Y)$. [104] De onde concluímos que

$$\operatorname{trdeg}_{K(Y)} K(X) = \dim X - \dim Y.$$

Assuma que $X \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$ e $A(X) = \dfrac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]}{\mathcal{I}(X)} \simeq \mathbb{K}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m}]$, sendo $\overline{x_i} = x_i + \mathcal{I}(X) \in A(X)$ para cada i. Assim, $K(X) = \mathbb{K}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m})$,[105] ou seja, $K(X)$ é gerado por $\{\alpha_1 = \overline{x_1}, \ldots, \alpha_m = \overline{x_m}\}$ sobre $\mathbb{K}$ [106]. Assim, temos as extensões de corpos

$$\mathbb{K} \hookrightarrow K(Y) \hookrightarrow K(X) = \mathbb{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m).$$

Entretanto, observe que $K(X) = K(Y)(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ visto que $K(Y)$ é um subcorpo de $K(X)$ contendo $\mathbb{K}$ e $K(X) = \mathbb{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Assim, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ também é um conjunto de geradores de $K(X)$ sobre $K(Y)$.

Nessas condições, podemos escolher $\beta \subseteq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ base de transcendência de $K(X)$ sobre $K(Y)$.[107]

Por simplicidade na demonstração, vamos assumir que $\beta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$. Logo,

$$r = \operatorname{trdeg}_{K(Y)} K(X) = \dim X - \dim Y$$

e α_i é algébrico sobre $K(Y)(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ para todo $i > r$. Isto implica na existência de polinômios não nulos $h_{r+1}(t), \ldots, h_m(t) \in K(Y)(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)[t]$ tais que $h_i(\alpha_i) = 0$ para todo $i = r+1, \ldots, m$.

Note que podemos escrever cada $h_i(t)$ na forma

$$h_i(t) = \frac{\mathrm{p}_i(t)}{\mathrm{q}_i(t)} \quad \text{com } \mathrm{p}_i(t),\ \mathrm{q}_i(t) \in A(Y)[\alpha_1, \ldots, \alpha_r][t] \text{ não nulos e } \mathrm{p}_i(\alpha_i) = 0.$$

A seguir, considere $P_i \in A(Y)[t_1, \ldots, t_r, t]$ satisfazendo a condição

$$P_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, t) = \mathrm{p}_i(t) \in A(Y)[\alpha_1, \ldots, \alpha_r][t].$$

---

[104] Se L, L_1 e L_2 são corpos tais que $L \hookrightarrow L_1 \hookrightarrow L_2$. Então $\operatorname{trdeg}_L L_2 = \operatorname{trdeg}_{L_1} L_2 + \operatorname{trdeg}_L L_1$.

[105] Lembre que se k e L são corpos tais que $k \subseteq L$ (ou seja, L é uma extensão de k) e $\Gamma \subseteq L$, então $k(\Gamma)$ denota o menor subcorpo de L contendo k e Γ. De fato, $k(\Gamma) = \bigcap\limits_{K \in \Sigma} K$ sendo $\Sigma = \{$ subcorpos de L contendo k e Γ $\}$.

[106] Também tenha em mente que todo elemento de $K(X)$ pode ser pensado como um quociente da forma $\dfrac{\mathrm{p}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)}{\mathrm{q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)}$ com $\mathrm{p}, \mathrm{q} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$.

[107] Seja $k \hookrightarrow K$ uma extensão de corpos. Se Γ é um conjunto de geradores de K sobre k (isto é, $K = k(\Gamma)$) e $T \subseteq \Gamma$ é algebricamente independente sobre k, então existe uma base de transcendência β de K sobre k tal que $T \subseteq \beta \subseteq \Gamma$. (Lembre que $\operatorname{trdeg}_k K = \#\beta$)

Ou seja, P_i é obtido a partir de $\mathrm{p}_i(t)$ ao substituir α_i por t_i no polinômio $\mathrm{p}_i(t)$.

Como $P_i(t_1, \ldots, t_r, t)$ é não nulo, ao considerarmos uma ordem no anel

$$A(Y)[t_1, \ldots, t_r, t]$$

podemos escolher $\overline{g_i} \in A(Y) - \{\overline{0}\}$, coeficiente líder de P_i. Assim, para todo $i \in \{r + 1, \ldots, m\}$ temos

$$P_i(t_1, \ldots, t_r, t) = \overline{g_i} m_i + \text{ monômios de menor grau}$$

Seja $Y_i = \mathcal{Z}_Y(g_i)$ para cada $i \in \{r+1, \ldots, m\}$ e $U = Y - (Y_{r+1} \cup \cdots \cup Y_m)$. Note que

• $Y_i \subset Y$.[108]

• U é aberto não vazio de Y.

Sendo $Y_{r+1} \cup \cdots \cup Y_m$ uma união finita de fechados em Y, segue que U é aberto de Y. Suponha que $U = \emptyset$. Assim,

$$Y = Y_{r+1} \cup \cdots \cup Y_m \underset{irred.}{\overset{Y}{\Longrightarrow}} Y = Y_i, \text{ para algum } i \in \{r+1, \ldots, m\}, \text{ o que é absurdo.}$$

• Para todo $y \in U$ verifica-se que $\dim f^{-1}(y) = r$.

O item (ii) do *Teorema da dimensão das fibras* nos garante que $\dim f^{-1}(y) \geqslant r$ para todo $y \in U$. Assim, basta mostrar que $\dim f^{-1}(y) \leqslant r$ se $y \in U$.

Considere $y \in U$. Note que $f^{-1}(y)$ é um subconjunto fechado de X e $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathcal{I}(f^{-1}(y))$. Logo, se $\iota : f^{-1}(y) \hookrightarrow X$ é a inclusão, obtemos

$$\begin{array}{ccc} A(X) & & A(f^{-1}(y)) \\ \wr\| & & \wr\| \\ \iota^* : \mathcal{O}(X) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(f^{-1}(y)) \end{array} \qquad \text{dada por } \psi \longmapsto \psi \circ \iota = \psi_{|_{f^{-1}(y)}}$$

homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras sobrejetor. De fato, ι^* induz o isomorfismo

$$\frac{A(X)}{\mathcal{I}_X(f^{-1}(y))} \cong A(f^{-1}(y)) \Longleftrightarrow \frac{\mathbb{K}[\alpha_1, \ldots, \alpha_m]}{\mathcal{I}_X(f^{-1}(y))} \cong A(f^{-1}(y)).$$

Seja $Z_y \subseteq f^{-1}(y)$ uma componente irredutível de $f^{-1}(y)$ tal que

$$\dim Z_y = \dim f^{-1}(y)$$

De forma análoga, ao considerarmos a inclusão de Z_y em X, obtemos o homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras sobrejetor

$$A(X) \twoheadrightarrow A(Z_y) \qquad \text{dado por } \overline{\mathrm{f}} \longmapsto \mathrm{f} + \mathcal{I}(Z_y) \text{ (ou } \psi \longmapsto \psi_{|Z_y}).$$

[108] Suponha que $Y_i = Y$. Logo, $\mathcal{Z}_Y(g_i) = Y \cap \mathcal{Z}(g_i) = Y$ que implica em $Y \subseteq \mathcal{Z}(g_i)$. De onde concluímos que $g_i \in \mathcal{I}(Y)$. Portanto, $\overline{g_i} = \overline{0}$, o que é absurdo.

Que induz o isomorfismo

$$\frac{A(X)}{\mathcal{I}_X(Z_y)} \cong A(Z_y) \Longleftrightarrow \frac{\mathbb{K}[\alpha_1,\ldots,\alpha_m]}{\mathcal{I}_X(Z_y)} \cong A(Z_y).$$

Observe que $\alpha_i = \overline{x_i} \longmapsto \widetilde{\alpha_i} := x_i + \mathcal{I}(Z_y) \in A(Z_y)$, logo

$$K(Z_y) = \mathbb{K}(\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_m}).$$

Por outro lado, para todo $i \in \{r+1,\ldots,m\}$ temos

$$P_i(t_1,\ldots,t_r,t) = \overline{g_i} m_i + \text{ monômios de menor grau}$$

com $\overline{g_i} \in A(Y)$ e m_i monômio nas variáveis $t_1,\ldots,t_r,t$, tal que $P_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,t) = \mathrm{p}_i(t) \in A(Y)[\alpha_1,\ldots,\alpha_r][t]$. Logo, $P_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha_i) = \mathrm{p}_i(\alpha_i) = 0$.

Observe que $0 = P_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha_i) \in A(Y)[\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha_i]$ para cada $i \in \{r+1,\ldots,m\}$. Assim, $P_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha_i)$ é uma expressão polinomial em $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha_i$ com coeficientes em $A(Y)$, ou se preferir, com coeficientes sendo funções regulares em Y.

Portanto, ao calcularmos esses coeficientes (essas funções regulares) em $y \in U$ obtemos os polinômios não nulos $(P_i)_y \in \mathbb{K}[t_1,\ldots,t_r,t]$

$$(P_i)_y(t_1,\ldots,t_r,t) = \underbrace{g_i(y)}_{\neq 0} m_i + \text{ monômios de menor grau}$$

tais que $(P_i)_y(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha_i) = 0$. O que implica em que $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha_i\}$ são algebricamente dependentes sobre $\mathbb{K}$. Entretanto, ao restringir cada função regular α_i à subvariedade $Z_y \subseteq X$, na expressão $(P_i)_y(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\alpha_i) = 0$, concluímos que

$$(P_i)_y(\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_r},\widetilde{\alpha_i}) = 0.$$

Portanto, para cada $i \in \{r+1,\ldots,m\}$ tem-se que $\{\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_r},\widetilde{\alpha_i}\}$ é algebricamente dependente sobre $\mathbb{K}$. Como também, conclui-se que cada α_i é algébrico sobre $\mathbb{K}(\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_r})$, para $i > r$. Portanto, $K(X_y) = \mathbb{K}(\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_m})$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{K}(\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_r})$, o que implica em $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}(\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_r})} K(X_y) = 0$. Logo, a partir das extensões

$$\mathbb{K} \hookrightarrow K(\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_r}) \hookrightarrow K(X_y) = \mathbb{K}(\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_m})$$

concluímos que $\dim X_y \leqslant r$, visto que

$$\dim X_y = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} K(X_y) = \underbrace{\operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}(\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_r})} K(X_y)}_{=0} + \underbrace{\operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_r})}_{\leqslant r}.$$

Lembre que $r = \dim X - \dim Y$ e X_y é uma componente irredutível de $f^{-1}(y)$ tal que $\dim X_y = \dim f^{-1}(y)$.

Assim, $\dim f^{-1}(y) \leqslant \dim X - \dim Y,\ \forall\, y \in U$. Para concluir, lembre que o item (ii) do Teorema da dimensão da fibra nos garante que $\dim f^{-1}(y) \geqslant \dim X - \dim Y$ para todo $y \in \operatorname{Im}(f)$. Portanto,

$$\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y,$$

para todo $y \in U$. □

Sobre a imagem de um morfismo

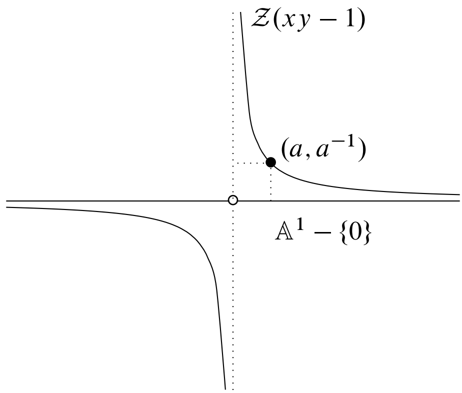
Sabendo que todo morfismo é uma função contínua, então a imagem inversa de conjuntos algébricos projetivos (ou afins) é também um conjunto algébrico projetivo (afim). O que podemos afirmar com relação a imagem direta de conjuntos algébricos projetivos (ou afins)? Mais precisamente

Pergunta

Sejam X e Y conjuntos algébricos quase projetivos (ou quase afins) e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo. Se $Z \subseteq X$ for um conjunto algébrico (ou seja, um fechado) podemos concluir que $f(Z)$ é um conjunto algébrico?

Vamos analisar alguns exemplos.

Exemplo 1.85. Considere o morfismo $f : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1$ dado por $f(a,b) = a$ e $Z = \mathcal{Z}(xy-1) \subset \mathbb{A}^2$. Então $f(Z) = \mathbb{A}^1 - \{0\}$ e $f(Z)$ não é um fechado em $\mathbb{A}^1$, embora X seja uma variedade afim.



Exemplo 1.86. Se X for uma variedade projetiva, $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ uma variedade quase afim e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo dado por $x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, ao considerarmos $\pi_i \in \mathcal{O}(Y)$ dada pela projeção na i-ésima coordenada, segue-se que $\pi_i \circ f = f_i \in \mathcal{O}(X), \ \forall\, i$. Logo, f_i é uma função constante (cf. Teorema 3.4, p. 18 em Hartshorne (1977)).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & Y \arrow[d, "\pi_i"] \\ & k \end{tikzcd}$$

Portanto, os únicos morfismos que existem de uma variedade projetiva numa variedade quase afim são as funções constantes, que são *morfismos fechados*.[109]

[109] A imagem de um subconjunto fechado do domínio é um fechado no contradomínio.

De fato, um resultado que generaliza o resultado que acabamos de comentar, é o seguinte.

Proposição 1.39. *Se X e Y são variedades projetivas e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo, então f é um morfismo fechado.*

Demonstração. Veja o Teorema 1.10, p. 57 em Shafarevich (1974). □

A seguir vamos mostrar o que poderíamos pensar como uma "recíproca" da Proposição 1.39, sob a condição de que todas as fibras são irredutíveis e tem a mesma dimensão.

Proposição 1.40. *Sejam X um conjunto algébrico projetivo, Y uma variedade projetiva e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo fechado tal que $f^{-1}(y)$ é irredutível de dimensão r para todo $y \in Y$. Então X é irredutível.*

Demonstração. Assuma que $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$, sendo $X_1, \ldots, X_k$ as componentes irredutíveis de X.

Como todas as fibras têm a mesma dimensão, segue que f é sobrejetora. Assim,

$$Y = f(X) = f(X_1) \cup \cdots \cup f(X_k).$$

Agora, como f é contínua e fechada, segue que $f(X_i)$ é um fechado irredutível de Y para cada i. A irredutibilidade de Y nos garante que $Y = f(X_j)$ para algum $j \in \{1, \ldots, k\}$.

A seguir, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ considere $f_i : X_i \longrightarrow Y$ o morfismo restrição de f a X_i. A partir de cada f_i vamos determinar um aberto não vazio U_i de Y, da seguinte forma

- Se $f(X_i) \subset Y$, então considere $U_i = Y - f(X_i)$.
- Se $f(X_i) = Y$, então f_i é sobrejetora e o *Teorema da dimensão das fibras* nos garante a existência de aberto não vazio U_i de Y tal que

$$\dim f_i^{-1}(y) = \dim X_i - \dim Y, \quad \forall\, y \in U_i. \tag{1.59}$$

Como Y é irredutível, podemos considerar o aberto não vazio $U = U_1 \cap \cdots \cap U_k$ de Y. A seguir, considere $u \in U$ e observe que

$$f^{-1}(u) \subseteq X = X_1 \cup \cdots \cup X_k, \quad X_i \subseteq X \text{ componente irredutível } \forall\, i.$$

Sendo $f^{-1}(y)$ irredutível de dimensão r para todo $y \in Y$, concluímos que existe $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $f^{-1}(u) \subseteq X_\ell$.

Afirmação 1: $f_\ell : X_\ell \longrightarrow Y$ é sobrejetora.

Suponha, pelo absurdo, que f_ℓ não é sobrejetora. Neste caso, $f(X_\ell) \subset Y$.

Como $f^{-1}(u) \subseteq X_\ell$, segue que $u \in f(X_\ell)$. Agora, $u \in U \subseteq U_\ell = Y - f(X_\ell)$, o que é absurdo.

Afirmação 2: $X = X_\ell$.

Sendo f_ℓ sobrejetora $f_\ell^{-1}(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in Y$. Além disso, para todo $y \in Y$ tem-se que

$$f_\ell^{-1}(y) = \Big\{x \in X_\ell | f_\ell(x) = y\Big\} = \Big\{x \in X_\ell | f(x) = y\Big\} = X_\ell \cap f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y).$$

Em particular, $f_\ell^{-1}(u) = f^{-1}(u)$ visto que $f^{-1}(u) \subseteq X_\ell$. Como $u \in U \subseteq U_\ell$ segue de (1.59) que

$$r = \dim f^{-1}(u) = \dim f_\ell^{-1}(u) = \dim X_\ell - \dim Y. \tag{1.60}$$

Por outro lado, segue do *Teorema da dimensão das fibras* e (1.60) que

$$\dim f_\ell^{-1}(y) \geqslant \dim X_\ell - \dim Y = r, \quad \forall\, y \in Y.$$

Entretanto, $\dim f_\ell^{-1}(y) \leqslant r$ (pois $f_\ell^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y)$). Assim,

$$\dim f_\ell^{-1}(y) = \dim f^{-1}(y) = r, \;\; \forall y \in Y.$$

Agora tendo em consideração que $f_\ell^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y)$ e $f^{-1}(y)$ é irredutível, concluímos que

$$f_\ell^{-1}(y) = f^{-1}(y), \;\; \forall\, y \in Y \Longrightarrow X_\ell = X,$$

visto que $X_\ell = \bigcup\limits_{y \in Y} f_\ell^{-1}(y) = \bigcup\limits_{y \in Y} f^{-1}(y) = X$. Logo, X é irredutível. □

Proposição 1.41. *Sejam X um conjunto algébrico projetivo, Y uma variedade projetiva e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo tal que $f^{-1}(y)$ é irredutível de dimensão r para todo $y \in Y$. Então existe uma componente irredutível Z de X que é união de fibras de f e cuja imagem é densa em Y. Além disso,* $\dim Z = \dim X$.

Demonstração. Assuma que $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$, sendo $X_1, \ldots, X_k$ as componentes irredutíveis de X.

Como todas as fibras tem a mesma dimensão, segue que f é sobrejetora. Assim,

$$Y = f(X) = f(X_1) \cup \cdots \cup f(X_k).$$

Além disso, $\overline{f(X_i)}$ é um fechado irredutível de Y para cada i, visto que f é contínua. Assim temos,

$$Y = \overline{f(X_1)} \cup \cdots \cup \overline{f(X_k)}.$$

A irredutibilidade de Y nos garante que $Y = \overline{f(X_j)}$ para algum $j \in \{1, \ldots, k\}$.

A seguir, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ considere o morfismo restrição $f_i : X_i \longrightarrow Y$ e seja U_i um aberto não vazio de Y, determinado da seguinte forma:

- Se $\overline{f(X_i)} \subset Y$ então considere $U_i = Y - \overline{f(X_i)}$.

- Se $\overline{f(X_i)} = Y$ então f_i é dominante e o *Teorema da dimensão das fibras* nos garante a existência de aberto não vazio U_i de Y tal que

$$\dim f_i^{-1}(y) = \dim X_i - \dim Y, \ \ \forall\, y \in U_i. \tag{1.61}$$

Como Y é irredutível, podemos considerar o aberto não vazio $U = U_1 \cap \cdots \cap U_k$ de Y. A seguir, considere $u \in U$ e observe que

$$f^{-1}(u) \subseteq X = X_1 \cup \cdots \cup X_k, \quad X_i \subseteq X \text{ componente irredutível } \forall\, i.$$

Sendo $f^{-1}(y)$ irredutível de dimensão r para todo $y \in Y$, concluímos que existe $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $f^{-1}(u) \subseteq X_\ell$.

Afirmação 1: $f_\ell : X_\ell \longrightarrow Y$ é dominante.

Suponha, pelo absurdo, que f_ℓ não é dominante. Neste caso, $\overline{f(X_\ell)} \subset Y$.

Como $f^{-1}(u) \subseteq X_\ell$ segue que $u \in f(X_\ell) \subseteq \overline{f(X_\ell)}$. Agora, $u \in U \subseteq U_\ell = Y$-$- \overline{f(X_\ell)}$, o que é absurdo.

Afirmação 2: $X_\ell = \bigcup_{y \in \mathrm{Im}(f_\ell)} f^{-1}(y)$.

Observe que para todo $y \in Y$ tem-se que

$$f_\ell^{-1}(y) = \Big\{x \in X_\ell | f_\ell(x) = y\Big\} = \Big\{x \in X_\ell | f(x) = y\Big\} = X_\ell \cap f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y).$$

Em particular, $f_\ell^{-1}(u) = f^{-1}(u)$ visto que $f^{-1}(u) \subseteq X_\ell$. Como $u \in U \subseteq U_\ell$ segue de (1.61) que

$$r = \dim f^{-1}(u) = \dim f_\ell^{-1}(u) = \dim X_\ell - \dim Y. \tag{1.62}$$

Por outro lado, segue do *Teorema da dimensão das fibras* e (1.62) que

$$\dim f_\ell^{-1}(y) \geqslant \dim X_\ell - \dim Y = r, \quad \forall\, y \in \mathrm{Im}(f_\ell).$$

Entretanto, para todo $y \in \mathrm{Im}(f_\ell)$, temos que $\dim f_\ell^{-1}(y) \leqslant r$ (pois $f_\ell^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y)$). Assim, $\dim f_\ell^{-1}(y) = \dim f^{-1}(y) = r$ para todo $y \in \mathrm{Im}(f_\ell)$. Agora, tendo em consideração que $f_\ell^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y)$ e $f^{-1}(y)$ é irredutível, concluímos que

$$f_\ell^{-1}(y) = f^{-1}(y), \quad \forall\, y \in \mathrm{Im}(f_\ell) \Longrightarrow X_\ell = \bigcup_{y \in \mathrm{Im}(f_\ell)} f_\ell^{-1}(y) = \bigcup_{y \in \mathrm{Im}(f_\ell)} f^{-1}(y).$$

Afirmação 3: $\dim X_\ell = \dim X$.

Segue de (1.62) que $\dim X_\ell = r + \dim Y$. Por outro lado, segue do *Teorema da dimensão das fibras* que existe um aberto não vazio V de Y tal que

$$r = \dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y, \ \ \forall\, y \in V \Longrightarrow r = \dim X - \dim Y.$$

Portanto, $\dim X_\ell = \dim X$. □

2 Toda superfície contém retas?

Agora estamos munidos da linguagem e resultados básicos do universo da Geometria Algébrica Clássica que nos permitirão explorar, antes mesmo de nos debruçar na contagem, a seguinte

Pergunta

Toda superfície no espaço projetivo complexo contém retas?

Para isso, a partir deste momento, vamos considerar nosso espaço ambiente como sendo o espaço projetivo complexo $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ e, por simplicidade, assumir que $S := \mathbb{C}[x, y, z, t]$ é o anel de coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^3$.

Os principais pontos que abordaremos neste capítulo, que nos conduzirão na resposta da questão previamente formulada, são

- Mostrar que o conjunto constituído pelas retas em $\mathbb{P}^3$ pode ser identificado com uma hipersuperfície de grau 2 em $\mathbb{P}^5$, denominada *quádrica de Plücker*.

- Tendo em vista que uma superfície no espaço projetivo complexo é o conjunto dos zeros de um polinômio em S_d, sendo $d \geqslant 1$ (e que um múltiplo escalar não nulo de tal polinômio define a mesma superfície), é natural pensar nas superfícies de grau d em $\mathbb{P}^3$ como pontos em $\mathbb{P}(S_d)$, a projetivização de S_d. Isso motiva a revisão dos espaços projetivos $\mathbb{P}(V)$, sendo V um espaço vetorial complexo de dimensão finita $m+1$, no que se refere à topologia que utilizaremos (reflexo da topologia de Zariski no espaço projetivo $\mathbb{P}^m$), como também o conceito de conjunto algébrico em $\mathbb{P}(V)$ e sua dimensão.

- Após estabelecer a identificação de $\mathbb{P}(S_d)$ com o espaço projetivo $\mathbb{P}^{N_d}$ sendo $N_d :=$ dim $S_d - 1$ e sabendo que dispomos também da noção de conjunto algébrico no produto cartesiano de espaços projetivos, especificamente em $\mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^5$, introduzimos os conjuntos algébricos e morfismos (essencialmente morfismos dados por projeção numa das coordenadas) que utilizaremos no momento de aplicar o *teorema da dimensão das fibras*, para concluirmos que se $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície de grau $d \geqslant 1$ e
$$\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = \left\{\ell \subset \mathbb{P}^3 | \ell \text{ é uma reta contida em X}\right\},$$
então $\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \neq \emptyset$, se $d \leqslant 3$. Como também concluímos que superfícies de grau $d \geqslant 4$ nem sempre contêm retas (cf. Teorema 2.1).

Concluímos este capítulo, com um prelúdio para contagem de retas em superfícies não singulares em $\mathbb{P}^3$, onde serão apresentados resultados que são válidos para superfícies não singulares de grau $d \geqslant 3$, o que possibilitará que o leitor compreenda uma dentre as abordagens utilizadas para a contagem de retas em grau 4 (cf. Rams e Schütt (2015)), e porque não, plausível de ser utilizada em grau $d \geqslant 5$. Por exemplo, consta nesse prelúdio, que as retas numa superfície não singular X que são incidentes a uma reta prefixada $\ell \subset \mathrm{X}$, podem ser contadas a partir dos planos H que contém a reta ℓ. De fato, tais retas aparecem como componentes irredutíveis de uma curva C, tal que $\mathrm{H} \cap \mathrm{X} = \ell \cup C$, denominada *curva residual* à reta ℓ no plano H.

2.1 Retas em $\mathbb{P}^3$ e quádrica de Plücker

A seguir, mostraremos que $\Sigma := \{$ retas em $\mathbb{P}^3\}$ está em bijeção com os pontos de uma hipersuperfície não singular de grau 2 em $\mathbb{P}^5$ (cf. Proposição 2.1).

Lema 2.1. *Sejam $\Sigma = \{$ retas em $\mathbb{P}^3\}$ e $G_2(\mathbb{C}^4)$ é a 2-grassmanniana em $\mathbb{C}^4$. Para cada $\ell \in \Sigma$, considere $C(\ell)$ o cone afim*[1] *sobre ℓ.*

Então
$$\mathcal{C} : \Sigma \longrightarrow G_2(\mathbb{C}^4), \quad \text{dada por } \ell \longmapsto C(\ell),$$
é uma bijeção.

Demonstração. Observe que:

- $\mathcal{C}$ está bem definida.

  Afirmação: Se ℓ é uma reta em $\mathbb{P}^3$ tal que $\ell = \mathbb{P}(W)$ para algum $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$, então $C(\ell) = W$.

---

[1] Se $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ é um conjunto algébrico projetivo, então o *cone afim sobre* Y é o conjunto algébrico afim dado por $C(Y) := \left\{(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}} | [a_0 : \ldots : a_n] \in Y\right\} \bigcup \left\{(0, \ldots, 0)\right\}$.

De fato, temos que $\ell = \Big\{[\mathrm{w}] \in \mathbb{P}^3 | \mathrm{w} \in W - \{(0,0,0,0)\}\Big\}$. Ou seja, se considerarmos $a = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^3$ e $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^4$ temos que

$$\vec{a} \in C(\ell) - \{(0,0,0,0)\} \Longleftrightarrow a \in \ell \Longleftrightarrow \vec{a} \in W - \{(0,0,0,0)\}.$$

Portanto, a função $\mathcal{C}$ está bem definida.

- $\mathcal{C}$ é injetora. Deixamos a cargo do leitor.
- $\mathcal{C}$ é sobrejetora.

  Dado $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$, basta considerar $\ell = \mathbb{P}(W) \in \Sigma$.

$\square$

Lema 2.2. *A função $\omega : G_2(\mathbb{C}^4) \longrightarrow \mathbb{P}^5$, dada por*

$$[\mathrm{u}, \mathrm{v}] \longmapsto [\mathrm{w}_{01} : \mathrm{w}_{02} : \mathrm{w}_{03} : \mathrm{w}_{12} : \mathrm{w}_{13} : \mathrm{w}_{23}]$$

sendo $\mathrm{w}_{ij} := u_i v_j - u_j v_i$ para $0 \leqslant i < j \leqslant 3$, se $\mathrm{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ e $\mathrm{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ é injetora e tem por imagem $\mathcal{Q} = \mathcal{Z}(y_0 y_5 - y_1 y_4 + y_2 y_3)$.

Demonstração. Observe que:

- ω está bem definida.

  Primeiro observe que sendo $\mathrm{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ e $\mathrm{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ linearmente independentes, algum $\mathrm{w}_{i,j} \neq 0$. Além disso, se $\mathrm{u}' = (u'_0, u'_1, u'_2, u'_3)$ e $\mathrm{v}' = (v'_0, v'_1, v'_2, v'_3)$ são tais que $[\mathrm{u}, \mathrm{v}] = [\mathrm{u}', \mathrm{v}'] \in G_2(\mathbb{C}^4)$, então existem $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ tais que

  $$\mathrm{u} = \alpha \cdot \mathrm{u}' + \beta \cdot \mathrm{v}', \quad \mathrm{v} = \gamma \cdot \mathrm{u}' + \delta \cdot \mathrm{v}' \quad \text{com } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

  Ou seja, temos o sistema nas coordenadas dos vetores $\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{u}', \mathrm{v}'$

  $$u_i = \alpha u'_i + \beta v'_i, \quad v_i = \gamma u'_i + \delta v'_i, \quad \forall\, i, j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

  Assim, para todo $0 \leqslant i < j \leqslant 3$, temos que

  $$\mathrm{w}_{ij} = u_i v_j - u_j v_i = (\alpha\delta - \beta\gamma)(u'_i v'_j - u'_j v'_i) = (\alpha\delta - \beta\gamma)\mathrm{w}'_{ij}.$$

  Como $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, segue que $\omega([\mathrm{u}, \mathrm{v}]) = \omega([\mathrm{u}', \mathrm{v}'])$. Portanto, ω está bem definida.

- $\text{Im}(\omega) = \mathcal{Q}$, sendo $\mathcal{Q} = \mathcal{Z}(y_0y_5 - y_1y_4 + y_2y_3)$.

  $\boxed{\subseteq}$ Todo elemento de $\text{Im}(\omega)$ é da forma $\omega(\pi)$, para algum $\pi \in G_2(\mathbb{C}^4)$. Assim, considere $\pi = [\text{u}, \text{v}] \in G_2(\mathbb{C}^4)$ sendo $\text{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ e $\text{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)$. Então

  $$\omega(\pi) = [\text{w}_{01} : \text{w}_{02} : \text{w}_{03} : \text{w}_{12} : \text{w}_{13} : \text{w}_{23}]$$

  sendo $\text{w}_{ij} = u_iv_j - u_jv_i$ para $0 \leqslant i < j \leqslant 3$. Queremos mostrar que $\omega(\pi) \in \mathcal{Q} = \mathcal{Z}(y_0y_5 - y_1y_4 + y_2y_3)$, ou seja, $\text{w}_{01}\text{w}_{23} - \text{w}_{02}\text{w}_{13} + \text{w}_{03}\text{w}_{12} = 0$. De fato, note que

  $$\begin{aligned}
  \text{w}_{01}\text{w}_{23} &= (u_0v_1 - u_1v_0)(u_2v_3 - u_3v_2)\\
  &= u_0u_2v_1v_3 - u_0u_3v_1v_2 - u_1u_2v_0v_3 + u_1u_3v_0v_2,\\
  \text{w}_{02}\text{w}_{13} &= (u_0v_2 - u_2v_0)(u_1v_3 - u_3v_1)\\
  &= u_0u_1v_2v_3 - u_0u_3v_1v_2 - u_1u_2v_0v_3 + u_2u_3v_0v_1,\\
  \text{w}_{03}\text{w}_{12} &= (u_0v_3 - u_3v_0)(u_1v_2 - u_2v_1)\\
  &= u_0u_1v_2v_3 - u_0u_2v_1v_3 - u_1u_3v_0v_2 + u_2u_3v_0v_1.
  \end{aligned}$$

  Assim, verifica-se que $\text{w}_{01}\text{w}_{23} - \text{w}_{02}\text{w}_{13} + \text{w}_{03}\text{w}_{12} = 0$. Portanto, $\omega(\pi) \in \mathcal{Q}$.

  $\boxed{\supseteq}$ Dado $\text{q} = [\text{w}_{01} : \text{w}_{02} : \text{w}_{03} : \text{w}_{12} : \text{w}_{13} : \text{w}_{23}] \in \mathcal{Q}$. Vamos determinar v_1 e v_2 em $\mathbb{C}^4$ linearmente independentes, tais que $\omega([\text{v}_1, \text{v}_2]) = \text{q}$.
  Considere $\text{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ e $\text{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ em $\mathbb{C}^4$ e observe que:

  $$\begin{aligned}
  v_0\text{u} - u_0\text{v} &= (0, -\text{w}_{01}, -\text{w}_{02}, -\text{w}_{03});\\
  v_1\text{u} - u_1\text{v} &= (\text{w}_{01}, 0, -\text{w}_{12}, -\text{w}_{13});\\
  v_2\text{u} - u_2\text{v} &= (\text{w}_{02}, \text{w}_{12}, 0, -\text{w}_{23});\\
  v_3\text{u} - u_3\text{v} &= (\text{w}_{03}, \text{w}_{13}, -\text{w}_{23}, 0).
  \end{aligned} \tag{2.1}$$

  A seguir vamos considerar uma partição (ou estratificação) de $\mathbb{P}^5$ que poderá ser utilizada para a contagem de retas em superfícies, como veremos mais adiante. De fato,

  $$\mathbb{P}^5 = V_0 \dot\cup V_1 \dot\cup V_2 \dot\cup V_3 \dot\cup V_4 \dot\cup V_5 \quad \text{sendo}$$

  $$\begin{array}{ll}
  V_0 = \mathbb{P}^5 - \mathcal{Z}(y_0) & V_3 = \mathcal{Z}(y_0, y_1, y_2) - \mathcal{Z}(y_3)\\
  V_1 = \mathcal{Z}(y_0) - \mathcal{Z}(y_1) & V_4 = \mathcal{Z}(y_0, y_1, y_2, y_3) - \mathcal{Z}(y_4)\\
  V_2 = \mathcal{Z}(y_0, y_1) - \mathcal{Z}(y_2) & V_5 = \{[0:0:0:0:0:1]\}.
  \end{array} \tag{2.2}$$

  Assim, $\text{q} = [\text{w}_{01} : \text{w}_{02} : \text{w}_{03} : \text{w}_{12} : \text{w}_{13} : \text{w}_{23}] \in \mathcal{Q} \cap V_i$ para um único valor de $i \in \{0, \ldots, 5\}$. Vamos analisar cada possibilidade a seguir:

(i) $\text{q} \in V_0$, ou seja, $\text{w}_{01} \neq 0$.

  Neste caso, a partir de (2.1) obtemos os vetores linearmente independentes $\text{v}_1 = (0, -\text{w}_{01}, -\text{w}_{02}, -\text{w}_{03})$ e $\text{v}_2 = (\text{w}_{01}, 0, -\text{w}_{12}, -\text{w}_{13})$. Consideremos o plano $\pi = [\text{v}_1, \text{v}_2] \in G_2(\mathbb{C}^4)$. Note que:

$$\omega(\pi) = [\mathrm{w}_{01}^2 : \mathrm{w}_{01}\mathrm{w}_{02} : \mathrm{w}_{01}\mathrm{w}_{03} : \mathrm{w}_{01}\mathrm{w}_{12} : \mathrm{w}_{01}\mathrm{w}_{13} : \mathrm{w}_{02}\mathrm{w}_{13} - \mathrm{w}_{03}\mathrm{w}_{12}].$$

Como $\mathrm{q} \in \mathcal{Q}$, então $\mathrm{w}_{02}\mathrm{w}_{13} - \mathrm{w}_{03}\mathrm{w}_{12} = \mathrm{w}_{01}\mathrm{w}_{23}$. Assim $\omega(\pi) = \mathrm{q}$.

(ii) $\mathrm{q} \in V_1$, ou seja, $\mathrm{w}_{01} = 0$ e $\mathrm{w}_{02} \neq 0$.

A partir de (2.1), obtemos os vetores L.I. $\mathrm{v}_1 = (0, 0, -\mathrm{w}_{02}, -\mathrm{w}_{03})$ e $\mathrm{v}_2 = (\mathrm{w}_{02}, \mathrm{w}_{12}, 0, -\mathrm{w}_{23})$. Consideremos o plano $\pi = [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] \in G_2(\mathbb{C}^4)$. Note que:

$$\omega(\pi) = [0 : \mathrm{w}_{02}^2 : \mathrm{w}_{02}\mathrm{w}_{03} : \mathrm{w}_{02}\mathrm{w}_{12} : \mathrm{w}_{03}\mathrm{w}_{12} : \mathrm{w}_{02}\mathrm{w}_{23}] = \mathrm{q},$$

visto que $\mathrm{w}_{03}\mathrm{w}_{12} = \mathrm{w}_{02}\mathrm{w}_{13}$.

(iii) $\mathrm{q} \in V_i$ com $i \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Nesses casos, a partir de (2.1) obtemos os vetores L.I.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{q} \in V_2: \ \mathrm{v}_1 = (0, 0, 0, -\mathrm{w}_{03}) \ \text{ e } \ \mathrm{v}_2 = (\mathrm{w}_{03}, \mathrm{w}_{13}, \mathrm{w}_{23}, 0)\\
&\mathrm{q} \in V_3: \ \mathrm{v}_1 = (0, 0, -\mathrm{w}_{12}, -\mathrm{w}_{13}) \ \text{ e } \ \mathrm{v}_2 = (0, \mathrm{w}_{12}, 0, -\mathrm{w}_{23})\\
&\mathrm{q} \in V_4: \ \mathrm{v}_1 = (0, 0, 0, -\mathrm{w}_{13}) \ \text{ e } \ \mathrm{v}_2 = (0, \mathrm{w}_{13}, \mathrm{w}_{23}, 0)\\
&\mathrm{q} \in V_5: \ \mathrm{v}_1 = (0, 0, 1, 0) \ \text{ e } \ \mathrm{v}_2 = (0, 0, 0, 1).
\end{aligned}$$

Deixamos como exercício a verificação de que $\omega([\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2]) = \mathrm{q}$.

Logo, $\mathcal{Q} \subseteq \mathrm{Im}(\omega)$. Portanto $\mathcal{Q} = \mathrm{Im}(\omega)$.

- ω é injetora.

  Sejam $\pi = [\mathrm{u}, \mathrm{v}]$ e $\pi' = [\mathrm{u}', \mathrm{v}']$ em $G_2(\mathbb{C}^4)$ tais que $\omega(\pi) = \omega(\pi') \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^5$. Assim, $\mathrm{w}_{ij} = \lambda \mathrm{w}'_{ij}$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo e para todo $0 \leqslant i < j \leqslant 3$.

  Se $\mathrm{w}_{ij} = \lambda \mathrm{w}'_{ij} \neq 0$, então

$$\begin{aligned}
\pi &= [\mathrm{u}, \mathrm{v}]\\
&= [v_i \cdot \mathrm{u} - u_i \cdot \mathrm{v}, v_j \cdot \mathrm{u} - u_j \cdot \mathrm{v}]\\
&= \left[\frac{1}{\lambda}(v_i \cdot \mathrm{u} - u_i \cdot \mathrm{v}), \frac{1}{\lambda}(v_j \cdot \mathrm{u} - u_j \cdot \mathrm{v})\right]\\
&= [v'_i \cdot \mathrm{u}' - u'_i \cdot \mathrm{v}', v'_j \cdot \mathrm{u}' - u'_j \cdot \mathrm{v}']\\
&= [\mathrm{u}', \mathrm{v}'] = \pi'
\end{aligned}$$

Portanto ω é uma bijeção entre $G_2(\mathbb{C}^4)$ e $\mathcal{Q} = \mathcal{Z}(y_0y_5 - y_1y_4 + y_2y_3) \subset \mathbb{P}^5$. □

Observação 2.1. A função ω, definida no Lema 2.2, é denominada *mergulho de Plücker* e $\mathcal{Q} = \mathcal{Z}(y_0y_5 - y_1y_4 + y_2y_3) \subset \mathbb{P}^5$ *quádrica de Plücker*.

Exercício 2.1. Mostre que a quádrica de Plücker $\mathcal{Q} = \mathcal{Z}(y_0y_5 - y_1y_4 + y_2y_3) \subset \mathbb{P}^5$ é não singular.

Proposição 2.1. *O conjunto $\Sigma = \{$ retas em $\mathbb{P}^3\}$ está em bijeção com a quádrica de Plücker $\mathcal{Q} = \mathcal{Z}(y_0y_5 - y_1y_4 + y_2y_3) \subset \mathbb{P}^5$.*

Demonstração. Basta considerar a composta das bijeções $\mathcal{C}$ e ω nos Lemas 2.1 e 2.2. Assim, $\ell \overset{\Psi}{\longmapsto} \omega(C(\ell))$ define uma bijeção entre Σ e quádrica de Plücker $\mathcal{Q}$. $\square$

Observação 2.2. Se ℓ é uma reta em $\mathbb{P}^3$, tal que $\ell = \mathbb{P}(W)$ com $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$ gerado pelos vetores $\mathrm{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ e $\mathrm{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)$. Então a bijeção $\Psi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{Q}$ é dada por:

$$\Psi(\ell) = [\mathrm{w}_{01} : \mathrm{w}_{02} : \mathrm{w}_{03} : \mathrm{w}_{12} : \mathrm{w}_{13} : \mathrm{w}_{23}], \quad \text{sendo } \mathrm{w}_{ij} = u_iv_j - u_jv_i.$$

E neste caso, $\mathrm{w}_{01}, \mathrm{w}_{02}, \mathrm{w}_{03}, \mathrm{w}_{12}, \mathrm{w}_{13}, \mathrm{w}_{23}$ são denominadas *coordenadas de Plücker da reta* ℓ. Naturalmente, essas coordenadas não são únicas, pois são as coordenadas homogêneas de um ponto em $\mathbb{P}^5$.

Exemplo 2.1. Considere a reta $\ell = \mathbb{P}(W)$ em $\mathbb{P}^3$, sendo $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$ gerado pelos vetores $\mathrm{u} = (1, 2, 3, -1)$ e $\mathrm{v} = (2, 0, 3, 1)$. Sabemos que $\Psi(\ell)$ é determinada pelos menores 2×2 da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $\Psi(\ell) = [-4 : -3 : 3 : 6 : 2 : 6]$ e $-4, -3, 3, 6, 2, 6$ são as coordenadas de Plücker da reta ℓ.

Exercício 2.2. Considere a reta $\ell = \mathcal{Z}(x - 5y + t, z + t - 7y) \subset \mathbb{P}^3$. Determine as coordenadas de Plücker de ℓ.

Exemplo 2.2. Considere $\mathrm{q} = [1 : 2 : 1 : 2 : 1 : 0] \in \mathcal{Q} = \mathcal{Z}(y_0y_5 - y_1y_4 + y_2y_3) \subset \mathbb{P}^5$. Vamos determinar a reta ℓ em $\mathbb{P}^3$, tal que $\Psi(\ell) = \mathrm{q}$.

Como a primeira coordenada de q é não nula, podemos assumir que $\ell = \mathbb{P}(W)$ e W tem por base vetores da forma $\mathrm{u} = (1, 0, a, b)$ e $\mathrm{v} = (0, 1, c, d)$. Além disso, $\Psi(\ell)$ é determinada pelos menores 2×2 da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{bmatrix}$$

Assim, $\Psi(\ell) = [1 : c : d : -a : -b : ad - bc] = [1 : 2 : 1 : 2 : 1 : 0]$. De onde concluímos que

$$c = 2,\ d = 1,\ a = -2 \text{ e } b = -1.$$

Portanto, $\ell = \mathbb{P}(W)$, sendo $W = [(1, 0, -2, -1), (0, 1, 2, 1)]$.

Sobre a dimensão de Σ e $G_2(\mathbb{C}^4)$

Por conta das bijeções $\mathcal{C}$ e ω, temos que $\dim \Sigma = \dim G_2(\mathbb{C}^4) = \dim \mathcal{Q} = 4$, visto que $\mathcal{Q}$ é uma hipersuperfície em $\mathbb{P}^5$.

Uma forma mais intuitiva de enxergar que $\dim \Sigma = 4$ é por meio do que os geômetras algébricos denominam de *contagem de parâmetros*. Por exemplo, nós sabemos que $\dim \mathbb{A}^3 = 3$, visto que todo ponto $a \in \mathbb{A}^3$ se representa por meio de três parâmetros, digamos a_1, a_2 e a_3 que são suas coordenadas, isto é, $a = (a_1, a_2, a_3)$.

No caso projetivo, precisamos ser mais cuidadosos e fazermos a contagem de parâmetros em abertos. Usualmente, no caso de subconjuntos de $\mathbb{P}^m$ se usa a cobertura aberta $\{U_i\}_{i=0}^m$ sendo $U_i = (\mathbb{P}^m - \mathcal{Z}(x_i)) \cong \mathbb{A}^m$ (cf. Proposição 1.25). Por exemplo, $\dim \mathbb{P}^2 = 2$ pois no aberto U_0 todo ponto se representa de forma única utilizando dois parâmetros.[2]

Retornando ao caso das retas em $\mathbb{P}^3$. Como aparecem os 4 parâmetros?

Se $\ell \in \Sigma$ é tal que $\ell = \mathbb{P}(W)$ com $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$ gerado pelos vetores $\mathrm{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ e $\mathrm{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)$, então $\Psi(\ell)$ é determinada pelos menores 2×2 da matriz

$$\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Agora, se $\Psi(\ell)$ está no aberto $V_0 = \mathbb{P}^5 - \mathcal{Z}(y_0)$, ou seja, se a coordenada de Plücker w_{01} da reta ℓ é diferente de zero, então

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ v_0 & v_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Assim, ao realizar operações linhas (que é equivalente, a modificar a base de W) obtemos uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{bmatrix}$$

sendo *a, b, c e d os parâmetros* que determinam uma reta ℓ tal que $\Psi(\ell)$ pertence ao aberto V_0.

Superfícies de grau d como pontos de um espaço projetivo

A seguir, considere $N_d = \dim S_d - 1$, para cada $d \geqslant 0$.[3] Assim, (cf. Exercício 1.41)

$$N_d = \binom{3+d}{3} - 1 = \frac{(d+1)(d+2)(d+3)}{6} - 1.$$

---

[2]De fato, $U_0 \ni a = [a_0 : a_1 : a_2] = \left[1 : \dfrac{a_1}{a_0} : \dfrac{a_2}{a_0}\right]$ e, neste caso, os parâmetros $\dfrac{a_1}{a_0}$ e $\dfrac{a_2}{a_0}$ são unicamente determinados (não dependem do representante do ponto a).

[3]Lembre que S_d é um subespaço vetorial de S gerado pelos monômios de grau total d. Assim, $S_0 = \mathbb{C} = [1]$, $S_1 = [x, y, z, t]$, $S_2 = [x^2, xy, xz, xt, y^2, \ldots, t^2]$ e assim por diante.

Ao fixar a base

$$\alpha = \left\{x^d, x^{d-1}y, x^{d-1}z, x^{d-1}t, \ldots, z^d, z^{d-1}t, z^{d-2}t^2, \ldots, zt^{d-1}, t^d\right\}$$

ordenada lexicograficamente[4] de S_d, podemos definir o isomorfismo linear $T_\alpha : S_d \longrightarrow \mathbb{C}^{N_d+1}$ como em (2.4). O que nos leva a identificar $\mathbb{P}(S_d)$ com $\mathbb{P}^{N_d}$. De fato, se $F \in S_d$ for não nulo, e representarmos

$$F = \sum_{i+j+k+l=d} a_{i,j,k,l} x^i y^j z^k t^l$$

então

$$\mathbb{P}(S_d) \ni [F] \longmapsto [a_{d,0,0,0} : a_{d-1,1,0,0} : \ldots : a_{0,0,0,d}] \in \mathbb{P}^{N_d}.$$

Observação 2.3. Observe que a identificação entre $\mathbb{P}(S_d)$ e $\mathbb{P}^{N_d}$ nos permite definir uma topologia em $\mathbb{P}(S_d)$, como também o conceito de conjunto algébrico e sua dimensão.

A seguir, mostraremos o conceito de conjunto algébrico em $\mathbb{P}(V)$ que vamos introduzir via a identificação de $\mathbb{P}(V)$ com $\mathbb{P}^m$ induzida por uma base ordenada α de um espaço vetorial complexo V de dimensão $m+1$ a qual independe da base fixada.

Identificação de $\mathbb{P}(V)$ com $\mathbb{P}^m$ se $\dim V = m+1$

Sejam V é um espaço vetorial complexo e $\alpha = \{\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_m\}$ uma base ordenada de V. Então existe um único isomorfismo $\mathbb{C}$-linear

$$\begin{array}{rccc} T_\alpha : & V & \longrightarrow & \mathbb{C}^{m+1} \\ & \mathrm{v}_i & \longmapsto & e_i \end{array} \tag{2.4}$$

sendo $\{e_0, e_1, \ldots, e_m\}$ a base canônica ordenada de $\mathbb{C}^{m+1}$. Assim, T_α induz a bijeção

$$\mathcal{B}_\alpha : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}^m \quad \text{dada por } [\mathrm{v}] \longmapsto [T_\alpha(\mathrm{v})]$$

sendo $\mathbb{P}(V)$ a projetivização de V.

De fato, se $\mathrm{v} = a_0\mathrm{v}_0 + a_1\mathrm{v}_1 + \cdots + a_m\mathrm{v}_m$ então $T_\alpha(\mathrm{v}) = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$. Logo, a bijeção $\mathcal{B}_\alpha$ é dada por

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{B}_\alpha : & \mathbb{P}(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}^m \\ & [\mathrm{v}] & \longmapsto & [a_0 : a_1 : \ldots : a_m]. \end{array} \tag{2.5}$$

Observação 2.4. Com as notações acima. Se $\beta = \{\mathrm{u}_0, \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_m\}$ é uma outra base ordenada de V. Então obtemos o isomorfismo linear $T_\beta : V \longrightarrow \mathbb{C}^{m+1}$ tal que $\mathrm{u}_i \longmapsto e_i$. Além disso, temos o isomorfismo linear

$$\begin{array}{rccc} T_{\alpha,\beta} : & V & \longrightarrow & V \\ & \mathrm{v}_i & \longmapsto & \mathrm{u}_i \end{array}$$

[4] As variáveis são ordenadas por $x < y < z < t$. Assim, $x^d < x^{d-1}y < x^{d-1}z < x^{d-1}t < \cdots < t^d$.

satisfazendo a condição $T_\alpha = T_\beta \circ T_{\alpha,\beta}$. Observe que $T_{\alpha,\beta}$ induz a bijeção $\mathcal{B}_{\alpha,\beta} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ dada por $[\mathrm{v}] \longmapsto [T_{\alpha,\beta}(\mathrm{v})]$. Desse modo, temos que $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\beta \circ \mathcal{B}_{\alpha,\beta}$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_{\alpha,\beta}"] \arrow[dr, "T_\alpha"'] & V \arrow[d, "T_\beta"] \\ & \mathbb{C}^{m+1} \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} \mathbb{P}(V) \arrow[r, "\mathcal{B}_{\alpha,\beta}"] \arrow[dr, "\mathcal{B}_\alpha"'] & \mathbb{P}(V) \arrow[d, "\mathcal{B}_\beta"] \\ & \mathbb{P}^m \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Topologia em } \mathbb{P}(V)}$

Sejam V é um espaço vetorial complexo de dimensão $m+1$ e α uma base de V.

Dizemos que $Y \subseteq \mathbb{P}(V)$ é *aberto* (resp. *fechado*) se, e somente se, $\mathcal{B}_\alpha(Y) \subseteq \mathbb{P}^m$ é um conjunto aberto (resp. fechado) sendo $\mathcal{B}_\alpha$ definida em (2.5).

Assim, obtemos uma topologia em $\mathbb{P}(V)$ denominada *topologia induzida por* α.

Observe que, independentemente da base que escolhermos para V, temos que os conjuntos unitários, $\emptyset$ e o próprio $\mathbb{P}(V)$ são fechados em $\mathbb{P}(V)$.

De fato, para quaisquer α e β bases de V e $Y \subseteq \mathbb{P}(V)$ verifica-se que
$\mathcal{B}_\alpha(Y)$ é aberto (resp. fechado) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{B}_\beta(Y)$ é aberto (resp. fechado).[5]

$\boxed{\text{Conjuntos algébricos em } \mathbb{P}(V)}$

Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão $m+1$ e α uma base de V. Dizemos que $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ é um *conjunto algébrico* se, e somente se, $\mathcal{B}_\alpha(X) \subseteq \mathbb{P}^m$ é um conjunto algébrico. Além disso, se X é um conjunto algébrico em $\mathbb{P}(V)$, então definimos $\dim X = \dim \mathcal{B}_\alpha(X)$.

Exercício 2.3. Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão $m+1$ e $X \subseteq \mathbb{P}(V)$. Considere α, β bases de V e a notação em (2.5). Mostre que:[6]

(a) $\mathcal{B}_\alpha(X) \subseteq \mathbb{P}^m$ é conjunto algébrico $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{B}_\beta(X) \subseteq \mathbb{P}^m$ é conjunto algébrico.

(b) $\dim \mathcal{B}_\alpha(X) = \dim \mathcal{B}_\beta(X)$, se $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ é um conjunto algébrico.

---

[5] De fato, se $\mathcal{B}_\alpha(Y)$ é fechado em $\mathbb{P}^m$, então existem polinômios homogêneos $F_1, \ldots, F_k \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_m]$, tais que $\mathcal{B}_\alpha(Y) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{Z}(F_i)$, logo $Y = \Big\{[\mathrm{v}] \in \mathbb{P}(V) | F_i(T_\alpha(\mathrm{v})) = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, k\}\Big\}$. Observe que, $F_i(T_\alpha(\mathrm{v})) = F_i((T_\alpha \circ T_\beta^{-1})(T_\beta(\mathrm{v})))$ para todo i e $T_\alpha \circ T_\beta^{-1} \in \mathrm{Iso}(\mathbb{C}^{m+1})$. Logo, $G_i = (T_\beta \circ T_\alpha^{-1})_\bullet F_i$ são homogêneos, tais que $Y = \Big\{[\mathrm{v}] \in \mathbb{P}(V) | G_i(T_\beta(\mathrm{v})) = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, k\}\Big\}$. Portanto, $\mathcal{B}_\beta(Y) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{Z}(G_i)$. A outra implicação é análoga e fica a cargo do leitor.

[6] Observe que $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$ é um homeomorfismo se considerarmos no domínio a topologia induzida por α e no contradomínio a topologia induzida por β.

Exemplo 2.3. Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão $m+1$ e U um subespaço de V. Então $\mathbb{P}(U)$ é um conjunto algébrico irredutível de dimensão $\dim U - 1$ ao considerarmos a topologia induzida em $\mathbb{P}(V)$ por uma base α de V.

De fato, se U é um subespaço vetorial de V de dimensão N, então $T_\alpha(U)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}^{m+1}$ de dimensão N. Assim,

$$\mathcal{B}_\alpha(\mathbb{P}(U)) = \mathbb{P}(T_\alpha(U)) \subseteq \mathbb{P}^m$$

é uma variedade linear de dimensão $N-1$.

2.2 Aplicando o teorema da dimensão das fibras

Considere $\Gamma = \Big\{([F], \ell) | \ell \subseteq \mathcal{Z}(F)\Big\} \subset \mathbb{P}^{N_d} \times \mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^5$. Essencialmente, o que faremos a seguir é aplicar o *teorema da dimensão das fibras* para os morfismos definidos pelas projeções de Γ em $\mathbb{P}^{N_d}$ e em $\mathbb{P}^5$, respectivamente (cf. Teorema 2.1). Para isto, vamos mostrar que Γ é um conjunto algébrico e calcular sua dimensão.

Estudando o conjunto Γ

Lema 2.3. *Se* $W = [\mathrm{u}, \mathrm{v}] \in G_2(\mathbb{C}^4)$, *com* $\mathrm{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ *e* $\mathrm{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)$, *então tem-se que:*

(i) $W = \Big\{\mathrm{u}L(\mathrm{v}) - \mathrm{v}L(\mathrm{u}) \in \mathbb{C}^4 | L \in S_1\Big\}$,[7]

(ii) *Se* $w_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$ *com* $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ *e* $L = \alpha_0 x + \alpha_1 y + \alpha_2 z + \alpha_3 t$, *então* $\mathrm{u}L(\mathrm{v}) - \mathrm{v}L(\mathrm{u}) = (z_0, z_1, z_2, z_3)$ *sendo*

$$z_i = \sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{ij}.$$

Demonstração. $\boxed{\text{(i)}}$ Observe que $L(\mathrm{u}), L(\mathrm{v}) \in \mathbb{C}$ para todo $L \in S_1$. Logo, $\mathrm{u}L(\mathrm{v}) - \mathrm{v}L(\mathrm{u}) \in [\mathrm{u}, \mathrm{v}] = W$.

Para provar a outra inclusão considere $\mathrm{w} \in W$. Assim, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais $\mathrm{w} = \alpha\mathrm{u} + \beta\mathrm{v}$. A seguir, escolha $L \in S_1$ tal que $L(\mathrm{v}) = \alpha$ e $L(\mathrm{u}) = -\beta$.[8]

---

[7] Se $L = \alpha_0 x + \alpha_1 y + \alpha_2 z + \alpha_3 t$, então $L(\mathrm{u}) = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$.

[8] De fato, como u e v são L.I existem $i < j$ tais que $w_{ij} = u_i v_j - u_j v_i \neq 0$. Agora, se $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ então existem únicos α_i e α_j em $\mathbb{C}$ tais que $\alpha_i u_i + \alpha_j u_j = -\beta$ e $\alpha_i v_i + \alpha_j v_j = \alpha$. Neste caso, escolha $L = \alpha_i x_i + \alpha_j x_j \in S_1$ sendo $x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z$ e $x_3 = t$.

$\boxed{\text{ii}}$ Considere $L = \alpha_0 x + \alpha_1 y + \alpha_2 z + \alpha_3 t \in S_1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{u}L(\mathrm{v}) - \mathrm{v}L(\mathrm{u}) &= \Big(u_0(\sum_{j=0}^{3} \alpha_j v_j) - v_0(\sum_{j=0}^{3} \alpha_j u_j), \ldots, u_3(\sum_{j=0}^{3} \alpha_j v_j) - v_3(\sum_{j=0}^{3} \alpha_j u_j)\Big) \\
&= \Big(\sum_{j=0}^{3} \alpha_j (u_0 v_j - u_j v_0), \ldots, \sum_{j=0}^{3} \alpha_j (u_3 v_j - u_j v_3)\Big) \\
&= \Big(\sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{0j}, \sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{1j}, \sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{2j}, \sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{3j}\Big).
\end{aligned}$$

Assim, $\mathrm{u}L(\mathrm{v}) - \mathrm{v}L(\mathrm{u}) = (z_0, z_1, z_2, z_3)$. □

Proposição 2.2. *O conjunto*

$$\Gamma = \Big\{([F], \ell) | \ell \subseteq \mathcal{Z}(F)\Big\} \subset \mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^5$$

é um conjunto algébrico projetivo.

Demonstração. Considere $F = \sum_I a_I x^{i_0} y^{i_1} z^{i_2} t^{i_3} \in S_d$ não nulo e $\ell = \mathbb{P}(W)$ sendo $W = [\mathrm{u}, \mathrm{v}] \in G_2(\mathbb{C}^4)$ com $\mathrm{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ e $\mathrm{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)$. Assim,

$$([F], \ell) \longmapsto ([a_{d,0,0,0} : a_{d-1,1,0,0} : \ldots : a_{0,0,0,d}], [w_{01} : w_{02} : w_{03} : w_{12} : w_{13} : w_{23}])$$

sendo $w_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$.

Lembre que $\mathrm{p} \in \ell$ se, e somente se, $\mathrm{p} = [\mathrm{w}]$ para algum $\mathrm{w} \in W$. Assim, o Lema 2.3 nos garante que existem $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ nem todos nulos tais que

$$\mathrm{p} = \Big[\sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{0j} : \sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{1j} : \sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{2j} : \sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{3j}\Big].$$

Como $w_{ji} = -w_{ij}$ se $i < j$, concluímos que as coordenadas homogêneas do ponto $\mathrm{p} \in \ell$ são expressões lineares nas coordenadas de Plücker w_{ij} da reta ℓ.

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\ell \subseteq \mathcal{Z}(F) &\iff F(\mathrm{p}) = 0, \quad \forall\, \mathrm{p} \in \ell \\
&\iff F\left(\sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{0j}, \sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{1j}, \sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{2j}, \sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{3j}\right) = 0, \\
&\qquad\qquad \forall\, [\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3] \in \mathbb{P}^3 \\
&\iff \sum_I a_I \Big(\sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{0j}\Big)^{i_0} \Big(\sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{1j}\Big)^{i_1} \Big(\sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{2j}\Big)^{i_2} \Big(\sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{3j}\Big)^{i_3} = 0, \\
&\qquad\qquad \forall\, [\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3] \in \mathbb{P}^3.
\end{aligned}$$

Observe que $P_i = \sum_{j=0}^{3} \alpha_j w_{ij}$ é uma expressão polinomial bihomogênea de grau 1 nas coordenadas $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e também de grau 1 nas coordenadas de Plücker

$$w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{12}, w_{13}, w_{23}, \qquad \text{para cada} i \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Assim, $P_0^{i_0} P_1^{i_1} P_2^{i_2} P_3^{i_3}$ é uma expressão polinomial bihomogêneo de bigrau (d, d) nas coordenadas $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e nas coordenadas de Plücker $w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{12}, w_{13}, w_{23}$ da reta ℓ.

Portanto, podemos escrever

$$P_0^{i_0} P_1^{i_1} P_2^{i_2} P_3^{i_3} = \sum_J b_J(w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{12}, w_{13}, w_{23}) \alpha_0^{j_0} \alpha_1^{j_1} \alpha_2^{j_2} \alpha_3^{j_3}$$

com $b_J \in \mathbb{C}[y_0, \ldots, y_5]$ homogêneo de grau d. Concluímos que,

$$\ell \subseteq \mathcal{Z}(F) \Longleftrightarrow \sum_I a_I \Big(\sum_J b_J(w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{12}, w_{13}, w_{23}) \alpha_0^{j_0} \alpha_1^{j_1} \alpha_2^{j_2} \alpha_3^{j_3} \Big) = 0$$

para todo $[\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3] \in \mathbb{P}^3$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \ell \subseteq \mathcal{Z}(F) \quad &\Longleftrightarrow \textstyle\sum_I a_I \Big(\sum_J b_J(w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{12}, w_{13}, w_{23}) z_0^{j_0} z_1^{j_1} z_2^{j_2} z_3^{j_3} \Big) = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{em } \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2, z_3] \\ &\Longleftrightarrow \textstyle\sum_I a_I b_J(w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{12}, w_{13}, w_{23}) = 0, \quad \forall\, J. \end{aligned}$$

Observe que para cada J o polinômio acima é bihomogêneo de grau 1 nas coordenadas $a_{d,0,0,0}, \ldots, a_{0,0,0,d}$ de $[F]$ e de grau d nas coordenadas de Plücker w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{12}, w_{13}, w_{23} da reta ℓ. Portanto, Γ é um conjunto algébrico projetivo (conforme o Teorema 1.3). □

Proposição 2.3. *Considere $d \geqslant 1$ inteiro. Se ℓ é uma reta em $\mathbb{P}^3$ então*

$$\Gamma_\ell = \Big\{ [F] \in \mathbb{P}(S_d) | \ell \subseteq \mathcal{Z}(F) \Big\}$$

é um conjunto algébrico irredutível de dimensão $\dim \mathcal{I}(\ell)_d - 1$.[9]

Demonstração. Assuma que $\ell = \mathcal{Z}(L_1, L_2)$ com $L_1, L_2 \in S_1$ linearmente independentes. Considere $F \in S_d$ não nulo. Lembre que

$$\ell \subseteq \mathcal{Z}(F) \Longleftrightarrow F \in \mathcal{I}(\ell).$$

[9]Lembre-se que $\mathcal{I}(\ell)_d := \mathcal{I}(\ell) \cap S_d$ é subespaço vetorial de S_d e estamos calculando a dimensão deste subespaço.

Como grau$(F) = d$, temos que $\ell \subseteq \mathcal{Z}(F) \iff F \in \mathcal{I}(\ell)_d$. De onde concluímos que

$$\Gamma_\ell = \Big\{[F] \in \mathbb{P}(S_d) | F \in \mathcal{I}(\ell)_d\Big\} = \mathbb{P}(\mathcal{I}(\ell)_d).$$

Logo, o Exemplo 2.3 nos garante que Γ_ℓ é um conjunto algébrico irredutível de dimensão $\dim \mathcal{I}(\ell)_d - 1$. $\square$

Observe que, se ℓ é uma reta em $\mathbb{P}^3$ tal que $\mathcal{I}(\ell) = \langle L_1, L_2\rangle$, então $\mathcal{I}(\ell)_0 = \{0\}$ e $\mathcal{I}(\ell)_1 = [L_1, L_2]$. Logo, $\dim \mathcal{I}(\ell)_0 = 0$ e $\dim \mathcal{I}(\ell)_1 = 2$.

Lema 2.4. *Se $d \geqslant 2$ inteiro e ℓ é uma reta em $\mathbb{P}^3$, então*

$$\dim \mathcal{I}(\ell)_d = \frac{d(d+1)(d+5)}{6}.$$

Demonstração. Assuma que $\ell = \mathcal{Z}(L_1, L_2)$ com $L_1, L_2 \in S_1$ linearmente independentes. Considere

$$\Psi : S_{d-1} \times S_{d-1} \longrightarrow \mathcal{I}(\ell)_d, \text{ dada por } (A, B) \longmapsto A \cdot L_1 + B \cdot L_2.$$

Observe que Ψ é uma transformação $\mathbb{C}$-linear sobrejetora, cujo núcleo é dado por

$$\ker(\Psi) = \Big\{(A, B) \in S_{d-1} \times S_{d-1} | A \cdot L_1 + B \cdot L_2 = 0\Big\}.$$

Afirmação: $\ker(\Psi) = \Big\{(-C \cdot L_2, C \cdot L_1) \in S_{d-1} \times S_{d-1} | C \in S_{d-2}\Big\}$.

$\boxed{\subseteq}$ Considere $(A, B) \in S_{d-1} \times S_{d-1}$ e note que

$$(A, B) \in \ker(\Psi) \iff A \cdot L_1 = -B \cdot L_2 \underset{L_1 \mid B}{\overset{mdc(L_1,L_2)=1}{\Longrightarrow}} \begin{cases} B = C \cdot L_1 \\ A = -C \cdot L_2 \end{cases}, \quad \text{com } C \in S_{d-2}.$$

$\boxed{\supseteq}$ Deixamos a cargo do leitor.

Observe que $S_{d-2} \ni C \longmapsto (-C \cdot L_2, C \cdot L_1) \in \ker(\Psi)$ define um isomorfismo linear. Assim, $\dim \ker(\Psi) = \dim S_{d-2}$.

Por outro lado, (visto que Ψ é linear e sobrejetora) segue do teorema do núcleo e da imagem que

$$\dim \mathcal{I}(\ell)_d = \dim(S_{d-1} \times S_{d-1}) - \dim \ker(\Psi).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{I}(\ell)_d &= 2 \cdot \dim S_{d-1} - \dim S_{d-2} \\ &= 2 \cdot \binom{3+d-1}{3} - \binom{3+d-2}{3} \\ &= \frac{2d(d+1)(d+2)}{6} - \frac{(d-1)d(d+1)}{6} \\ &= \frac{d(d+1)(2d+4-d+1)}{6} \\ &= \frac{d(d+1)(d+5)}{6}.\end{aligned}$$

□

Corolário 2.1. *Se $d \geqslant 1$ inteiro e ℓ é uma reta em $\mathbb{P}^3$, então*

$$\dim \Gamma_\ell = \frac{d(d+1)(d+5)}{6} - 1.$$

Demonstração. Segue da Proposição 2.3 que $\dim \Gamma_\ell = \dim \mathcal{I}(\ell)_d - 1$, se $d \geqslant 1$ inteiro. Observe que a expressão $\dfrac{d(d+1)(d+5)}{6}$ é igual a $\dim \mathcal{I}(\ell)_d$, se $d \geqslant 2$ (conforme o Lema 2.4). Por outro lado, para $d = 1$ essa expressão é igual a $2 = \dim \mathcal{I}(\ell)_1$. Assim, o resultado segue. □

Proposição 2.4. *O conjunto algébrico $\Gamma = \Big\{([F], \ell) | \ell \subseteq \mathcal{Z}(F)\Big\} \subset \mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^5$ tem dimensão igual a $\dfrac{d(d+1)(d+5)}{6} + 3$.*

Demonstração. Considere o morfismo $\pi_2 : \Gamma \longrightarrow \Sigma \simeq G_2(\mathbb{C}^4) \subset \mathbb{P}^5$ dado pela projeção na segunda coordenada, isto é, $([F], \ell) \longmapsto \ell$.

Observe que

- π_2 é sobrejetora.

De fato, dada a reta $\ell = \mathcal{Z}(L_1, L_2)$ com $L_1, L_2 \in S_1$ linearmente independentes, então $F = L_1^d - L_2^d \in S_d$ é diferente de zero e satisfaz a condição $\ell \subset \mathcal{Z}(F)$.[10] Assim, $([F], \ell) \in \Gamma$ e $\pi_2(([F], \ell)) = \ell$. Portanto, π_2 é sobrejetora.

- $\pi_2^{-1}(\ell)$ é uma variedade projetiva de dimensão $\dim \mathcal{I}(\ell)_d - 1, \ \forall \ \ell \in \Sigma$.

Observe que $\pi_2^{-1}(\ell) = \Gamma_\ell \times \{\ell\}$ sendo

$$\Gamma_\ell := \Big\{[F] \in \mathbb{P}(S_d) | \ell \subseteq \mathcal{Z}(F)\Big\}.$$

[10]Visto que, $\ell = \mathcal{Z}(L_1, L_2) \subseteq \mathcal{Z}(F) \Longleftrightarrow F \in \mathcal{I}(\ell) = \langle L_1, L_2 \rangle$.

Como $\Gamma_\ell \times \{\ell\} \cong \Gamma_\ell$ (via o isomorfismo $([F], \ell) \longmapsto [F]$, lembre que ℓ foi fixada).

Assim, segue da Proposição 2.3, que $\pi_2^{-1}(\ell)$ é uma variedade projetiva de dimensão $\dim \mathcal{I}(\ell)_d - 1$.

Segue do *teorema da dimensão das fibras* (cf. Teorema 1.7) que existe $U \subseteq \Sigma$ aberto não vazio, tal que
$$\dim {\pi_2}^{-1}(\ell) = \dim \Gamma - \dim \Sigma, \quad \forall\, \ell \in U.$$

De onde concluímos que
$$\dim \Gamma = \dim {\pi_2}^{-1}(\ell) + \dim \Sigma.$$

Agora, sabemos que $\dim {\pi_2}^{-1}(\ell) = \dim \mathcal{I}(\ell)_d - 1 = \dfrac{d(d+1)(d+5)}{6} - 1$ (veja o Corolário 2.1) e já comentamos que $\dim \Sigma = 4$. Assim,
$$\dim \Gamma = \frac{d(d+1)(d+5)}{6} - 1 + 4 = \frac{d(d+1)(d+5)}{6} + 3.$$

□

Utilizaremos na demonstração do próximo teorema o exemplo a seguir.

Exemplo 2.4. A superfície $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$, sendo $F = x^d + yzt^{d-2}$ com $d \geqslant 3$, é singular e contém exatamente 3 retas. De fato,

- X é uma superfície singular.

  Seja $a = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^3$. Assim,
  $$a \in \mathrm{Sing}(\mathrm{X}) \iff \frac{\partial F}{\partial u}(a) = 0, \quad u \in \{x, y, z, t\} \iff \left\{ \begin{aligned} da_0^{d-1} &= 0, \\ a_2 a_3^{d-2} &= 0, \\ a_1 a_3^{d-2} &= 0, \\ (d-2)a_1 a_2 a_3^{d-3} &= 0. \end{aligned} \right.$$

  Portanto,
  $$\mathrm{Sing}(\mathrm{X}) = \begin{cases} \{[0:1:0:0],\ [0:0:1:0],\ [0:0:0:1]\}, & \text{se } d = 3; \\ \mathcal{Z}(x,t) \cup \{[0:0:0:1]\}, & \text{se } d \geqslant 4. \end{cases}$$

- As retas $\ell_1 = \mathcal{Z}(x, y)$, $\ell_2 = \mathcal{Z}(x, z)$ e $\ell_3 = \mathcal{Z}(x, t)$ estão contidas na superfície X.[11]

- A seguir vamos mostrar que $\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$.

  Seja ℓ uma reta contida na superfície X. Considere os planos coordenados $H_0 = \mathcal{Z}(x)$, $H_1 = \mathcal{Z}(y)$, $H_2 = \mathcal{Z}(z)$ e $H_3 = \mathcal{Z}(t)$.

[11] Lembre que $\ell \subseteq \mathrm{S} \iff \mathcal{I}(\mathrm{S}) \subseteq \mathcal{I}(\ell)$. Ou seja, $\ell \subseteq \mathrm{S} \iff F \in \mathcal{I}(\ell)$.

Temos duas possibilidades:[12]

$$\underbrace{\ell \subset H_i, \quad \text{para algum } i}_{(a)} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\ell \not\subset H_i, \quad \forall\, i}_{(b)}$$

(a) $\underline{\ell \subset H_0}$. Neste caso, $\ell = \mathcal{Z}(x, L)$ com $L = b_1 y + b_2 z + b_3 t$ e $b_i \in \mathbb{C}$ nem todos nulos. Agora,

$$\ell \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow F = x^d + yzt^{d-2} \in \langle x, L\rangle \Longleftrightarrow F = A \cdot x + B \cdot L$$

com $A, B \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$. De onde concluímos que $L \in \langle u\rangle$ para algum $u \in \{y, z, t\}$.[13] Portanto, $\ell = \ell_i$ para algum $i \in \{1, 2, 3\}$.

$\underline{\ell \subset H_i}$ para algum $i \in \{1, 2, 3\}$.

Neste caso, podemos assumir que $\ell = \mathcal{Z}(u, L)$ para algum $u \in \{y, z, t\}$ e L uma forma linear na qual não comparece a variável u. Logo, a condição $\ell \subset \mathrm{X}$ nos leva a concluir que

$$F = x^d + yzt^{d-2} = A \cdot u + B \cdot L \overset{u=0}{\Longrightarrow} x^d = B_1 \cdot L \Longrightarrow L = ax \overset{a\neq 0}{\Longrightarrow} \ell = \ell_i.$$

(b) Neste caso, a reta ℓ encontra o plano $H_0 = \mathcal{Z}(x)$ num único ponto. Digamos que $\ell \cap H_0 = \{\mathrm{p}\}$ sendo $\mathrm{p} = [0 : p_1 : p_2 : p_3]$. Agora, $\mathrm{p} \in \mathrm{X}$ (visto que $\ell \subset \mathrm{X}$) implica que $F(\mathrm{p}) = p_1 p_2 p_3^{d-2} = 0$, ou seja, $\mathrm{p} \in \ell_i$ para algum $i \in \{1, 2, 3\}$. Além disso, se $\mathrm{q} = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3] \in \ell$ e $\mathrm{q} \neq \mathrm{p}$, então $q_i \neq 0$ para todo $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. De onde concluímos que a reta ℓ não encontra todos os outros planos coordenados H_i para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ (o que é um absurdo, pois toda reta está contida ou intersecta um dos planos coordenados).

Teorema 2.1. *Considere o morfismo $\pi_1 : \Gamma \longrightarrow \mathbb{P}(S_d) \simeq \mathbb{P}^{N_d}$ dado pela projeção na primeira coordenada, isto é, $([F], \ell) \longmapsto [F]$. Então*

(i) *Toda superfície $\mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$ com $F \in S_d$ contém pelo menos uma reta se, e somente se, π_1 for sobrejetor.*

(ii) *Se $d \geqslant 3$ então* $\dim \Gamma = \dim \mathrm{Im}(\pi_1)$.

(iii) *π_1 é sobrejetor se, e somente se, $d \leqslant 3$.*

---

[12] De fato, ao considerarmos um plano H e uma reta ℓ em $\mathbb{P}^3$, então existem duas possibilidades para a posição relativa: $\ell \subset H$ ou $\ell \cap H$ consiste de um único ponto (cf. Exercício 1.50).

[13] Observe que,

$$x^d + yzt^{d-2} = A \cdot x + B \cdot L \overset{x=0}{\Longrightarrow} yzt^{d-2} = B(0, y, z, t) \cdot L,$$

sendo L um fator irredutível (no lado direito) da última igualdade, concluímos que $L \in \langle u\rangle$ para algum $u \in \{y, z, t\}$ (visto que $\mathbb{C}[y, z, t]$ é um DFU *domínio de fatoração única*).

Demonstração. $\boxed{\text{(i)}}$ Deixamos a cargo do leitor.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Considere $Y = \overline{\mathrm{Im}(\pi_1)}$ e $p_1 : \Gamma \longrightarrow Y \subset \mathbb{P}(S_3) \simeq \mathbb{P}^{19}$, definida por $([F], \ell) \longmapsto [F]$ (ou seja, p_1 é definida a partir de π_1).

Observe que para cada $[F] \in \mathrm{Im}(\pi_1)$ tem-se que

$$p_1^{-1}([F]) = \pi_1^{-1}(F) = \{[F]\} \times \mathfrak{L}(\mathcal{Z}(F)).$$

Por outro lado, se $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(G) \subseteq \mathbb{P}^3$ sendo $G = x_0^d + x_1x_2x_3^{d-2}$, então o Exemplo 2.4 nos garante que $\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X})) = 3$. Portanto, $p_1^{-1}([G]) = \pi_1^{-1}([G])$ é um conjunto finito, logo

$$\dim p_1^{-1}([G]) = \dim \pi_1^{-1}([G]) = 0.$$

Entretanto, sendo p_1 um morfismo dominante, o *teorema da dimensão das fibras* nos garante que:

- $\dim \Gamma - \dim Y \geqslant 0$.
- Para todo $[F] \in \mathrm{Im}(p_1) = \mathrm{Im}(\pi_1)$ verifica-se que

$$\dim p_1^{-1}([F]) \geqslant \dim \Gamma - \dim Y.$$

Assim, ao escolher $G = x_0^d + x_1x_2x_3^{d-2}$, concluímos que

$$0 = \dim p_1^{-1}([G]) \geqslant \dim \Gamma - \dim Y \geqslant 0 \Longrightarrow \dim \Gamma = \dim Y.$$

Como $\dim Y = \dim \mathrm{Im}(\pi_1)$ (visto que $Y = \overline{\mathrm{Im}(\pi_1)}$) segue que $\dim \Gamma = \dim \mathrm{Im}(\pi_1)$.

$\boxed{\text{(iii)} \Longrightarrow}$ Se π_1 é sobrejetora segue do item (i) do teorema da dimensão das fibras (cf. Teorema 1.7) que $\dim \Gamma \geqslant \dim \mathbb{P}(S_d)$. Agora, sendo

$$\dim \mathbb{P}(S_d) = N_d = \binom{3+d}{d} - 1 = \frac{(d+1)(d+2)(d+3)}{6} - 1,$$

segue que

$$\dim \Gamma = \frac{d(d+1)(d+5)}{6} + 3 \geqslant \dim \mathbb{P}(S_d) = \frac{(d+1)(d+2)(d+3)}{6} - 1.$$

Portanto,

$$\frac{d(d+1)(d+5)}{6} - \frac{(d+1)(d+2)(d+3)}{6} + 4 \geqslant 0 \Longrightarrow d \leqslant 3.$$

$\boxed{\text{(iii)} \Longleftarrow}$

No próximo capítulo veremos que os planos ($d = 1$) e as quádricas ($d = 2$) contém infinitas retas. Logo, π_1 é sobrejetor nesses casos.

Se $d = 3$, então $\dim \Gamma = 19$ e $N_3 = 20$. Além disso, segue do item (ii) que $\dim \Gamma = 19 = \dim(\mathrm{Im}(\pi_1))$. Logo, $\dim(\mathrm{Im}(\pi_1)) = \dim \mathbb{P}^{19}$.

Lembre que Γ é irredutível, logo $\mathrm{Im}(\pi_1) \subseteq \mathbb{P}^{19}$ é um subconjunto fechado (cf. Proposição 1.39) irredutível de dimensão 19. Assim, $\mathrm{Im}(\pi_1) = \mathbb{P}^{19}$. Portanto, π_1 é sobrejetor. □

Corolário 2.2. *Toda superfície de grau 3 em $\mathbb{P}^3$ contém pelo menos uma reta.*

Demonstração. O Teorema 2.1 nos garante que se $d = 3$ então $\pi_1 : \Gamma \longrightarrow \mathbb{P}(S_d) \simeq \mathbb{P}^{N_d}$ dada pela projeção na primeira coordenada $([F], \ell) \longmapsto [F]$ é sobrejetor. Assim, para toda superfície $\mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$ com $F \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$ homogêneo de grau 3, verifica-se que $\pi_1^{-1}([F]) \neq \emptyset$. Logo, existe uma reta ℓ contida na superfície $\mathcal{Z}(F)$. □

Observação 2.5. O Teorema 2.1 mostra que se $d \geqslant 4$, então π_1 não é sobrejetor. Desta forma, existem superfícies em $\mathbb{P}^3$ de grau d que *não contém retas*.

Por exemplo, se $d \geqslant 4$ e $F = t^d + xy^{d-1} + yz^{d-1} + zx^{d-1} \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$, então $\mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície não singular que não contém retas (cf. Shioda (1981) e Rêgo (2016)). No Apêndice B, fornecemos alguns procedimentos utilizando o software de computação algébrica Maxima, cujo referencial teórico é o método de estratificação das retas em $\mathbb{P}^3$ (que será explicado na Seção 3.2.1), que o leitor poderá utilizar, no caso de grau $d = 4$, para verificar que tal superfície não contém retas (cf. Exercício B.3), como também no caso $d \geqslant 5$ (um desafio para o leitor).

No caso em que a superfície venha conter retas, somos levados a pensar nas seguintes

Perguntas

Quantas retas uma superfície de grau $d \geqslant 4$ pode conter? Em particular, existe um limite superior para o número de retas que uma superfície de grau d pode conter?

Outro aspecto que merece destaque, é que as superfícies de grau d que contém retas, formam uma subvariedade de dimensão $N_d - d + 3$ e grau

$$\binom{d+1}{4} \cdot \frac{3d^4 + 6d^3 + 17d^2 + 22d + 24}{24}$$

(cf. Maia et al. (2013)).

Antes de começar a explorar a cardinalidade máxima de $\mathfrak{L}(X)$, sendo X uma superfície de grau d em $\mathbb{P}^3$, vamos apresentar alguns resultados que nos permitirão abordar a contagem de retas em superfícies não singulares em $\mathbb{P}^3$, especialmente no caso cúbicas não singulares, como também nos auxiliar na tarefa de deduzir cotas para superfícies não singulares em $\mathbb{P}^3$ de grau maior que 4.

2.3 Prelúdio para contagem de retas em superfícies não singulares

Sobre a posição relativa entre uma reta e uma superfície em $\mathbb{P}^3$

Sejam $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície reduzida[14] de grau $d \geqslant 1$ e $\ell \subset \mathbb{P}^3$ uma reta. Ao analisar a posição relativa entre ℓ e X, temos que $\ell \subset \mathrm{X}$ ou $\ell \not\subseteq \mathrm{X}$. Mais precisamente, se $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$, com $F \in S_d$ livre de quadrados, então para essas possibilidades temos

$\boxed{\ell \subset \mathrm{X}}$ O *teorema dos zeros de Hilbert* (cf. Teorema 1.4) nos garante que $\mathcal{I}(\mathrm{X}) = \sqrt{\langle F \rangle}$. Entretanto, como F é livre de quadrados, conclui-se que $\mathcal{I}(\mathrm{X}) = \langle F \rangle$. Logo,

$$\ell \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \mathcal{I}(\ell) \supset \mathcal{I}(\mathrm{X}) = \langle F \rangle \Longleftrightarrow F \in \mathcal{I}(\ell). \tag{2.6}$$

$\boxed{\ell \not\subseteq \mathrm{X}}$ Neste caso, verifica-se que[15]

$$\ell \not\subseteq \mathrm{X} \Longleftrightarrow F \notin \mathcal{I}(\ell) \Longleftrightarrow 1 \leqslant \#(\ell \cap \mathrm{X}) \leqslant d. \tag{2.7}$$

Sobre retas concorrentes em $\mathfrak{L}(\mathrm{X})$

Seja $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície tal que $\mathcal{I}(\mathrm{X}) = \langle F \rangle$ com $F \in S_d$ e $d \geqslant 3$. Para cada ponto $\mathrm{p} \in \mathrm{X} - \mathrm{Sing}(\mathrm{X})$, o *plano tangente* à superfície X no ponto p é $T_{\mathrm{p}}\mathrm{X} = \mathcal{Z}(L_{\mathrm{p}})$ no qual

$$L_{\mathrm{p}} := \partial_x F(\mathrm{p}) \cdot x + \partial_y F(\mathrm{p}) \cdot y + \partial_z F(\mathrm{p}) \cdot z + \partial_t F(\mathrm{p}) \cdot t. \tag{2.8}$$

Lema 2.5. *Seja ℓ uma reta contida na superfície reduzida $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ que passa pelo ponto $\mathrm{p} \in \mathrm{X} - \mathrm{Sing}(\mathrm{X})$, então $\ell \subset T_{\mathrm{p}}\mathrm{X}$.*

Demonstração. Assuma que $\ell = \mathcal{Z}(L_1, L_2)$, sendo L_1 e L_2 formas lineares L.I., dadas por $L_i = \alpha_{i,0}x + \alpha_{i,1}y + \alpha_{i,2}z + \alpha_{i,3}t$ para $i = 1, 2$. Como $\ell \subset \mathrm{X}$, existem $A, B \in S$ tais que $F = A \cdot L_1 + B \cdot L_2$. Visto que $L_i(\mathrm{p}) = 0$ para $i = 1, 2$ (pois $\mathrm{p} \in \ell$), segue que

$$\begin{aligned} \partial_x F(\mathrm{p}) &= A(\mathrm{p}) \cdot \alpha_{1,0} + B(\mathrm{p}) \cdot \alpha_{2,0}, & \partial_z F(\mathrm{p}) &= A(\mathrm{p}) \cdot \alpha_{1,2} + B(\mathrm{p}) \cdot \alpha_{2,2}, \\ \partial_y F(\mathrm{p}) &= A(\mathrm{p}) \cdot \alpha_{1,1} + B(\mathrm{p}) \cdot \alpha_{2,1}, & \partial_t F(\mathrm{p}) &= A(\mathrm{p}) \cdot \alpha_{1,3} + B(\mathrm{p}) \cdot \alpha_{2,3}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ao substituirmos os valores em (2.9) na forma linear que define $T_{\mathrm{p}}\mathrm{X}$ em (2.8), concluímos que

$$L_{\mathrm{p}} = A(a) \cdot L_1 + B(a) \cdot L_2.$$

Portanto, $\ell \subset T_{\mathrm{p}}\mathrm{X}$. □

---

[14] $\mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$ é dita *reduzida* se o polinômio $F \in S_d$ é livre de quadrados.

[15] A menos de uma MCP podemos assumir que $\ell = \mathcal{Z}(z, t)$. Visto que $\ell \not\subseteq \mathrm{X}$, segue que $G(x, y) := F(x, y, 0, 0)$ é um polinômio não nulo e homogêneo de grau d em $\mathbb{C}[x, y]$. Assim, o Lema 1.8 nos garante que o conjunto $\ell \cap \mathrm{X} = \mathcal{Z}(z, t, G(x, y))$ é finito e sua cardinalidade varia entre 1 e d.

Lema 2.6. *Seja* $\mathrm{H} = \mathcal{Z}(F)$ *um plano em* $\mathbb{P}^3$. *Verifica-se que*
$$\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{H}) \iff \mathcal{I}(\ell) = \langle F, L\rangle, \text{ com } \{F, L\} \subset S_1 \text{ linearmente independente.}$$

Demonstração. Seja ℓ uma reta em $\mathbb{P}^3$ tal que $\mathcal{I}(\ell) = \langle L_1, L_2\rangle$, sendo L_1 e L_2 em S_1 linearmente independentes. Se $\ell \subset \mathrm{H}$, segue de (2.6) que $F = \alpha L_1 + \beta L_2$, sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos. A seguir vamos analisar os seguintes casos:

$\underline{\alpha = 0 :}$ Neste caso, $F = \beta L_2$ com $\beta \in \mathbb{C}$ não nulo. Assim,
$$\mathcal{I}(\ell) = \langle L_1, L_2\rangle = \langle L_1, \beta L_2\rangle = \langle L_1, F\rangle.$$
Observe que L_1 e F são linearmente independentes.[16]

$\underline{\alpha \neq 0 :}$ Neste caso, segue que $L_1 = \alpha^{-1}F - \alpha^{-1}\beta L_2$. Assim,
$$\mathcal{I}(\ell) = \langle L_1, L_2\rangle = \langle \alpha^{-1}F - \alpha^{-1}\beta L_2, L_2\rangle = \langle \alpha^{-1}F, L_2\rangle = \langle F, L_2\rangle$$
com F, L_2 linearmente independentes.

Reciprocamente, se ℓ for uma reta tal que $\mathcal{I}(\ell) = \langle F, L\rangle$, então $F \in \mathcal{I}(\ell)$. Logo (2.6) nos garante que $\ell \subset \mathrm{H}$. □

Exercício 2.4. Considere a reta $\ell = \mathcal{Z}(x, y)$. Seja
$$\Omega_\ell = \{H \subset \mathbb{P}^3 | H \text{ é um plano contendo a reta } \ell\}.$$
Mostre que:

(*a*) $H \in \Omega_\ell \iff H = \mathcal{Z}(\nu x + \mu y)$, com $[\nu : \mu] \in \mathbb{P}^1$.

(*b*) A função $\Psi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Omega_\ell$, dada por $[\nu : \mu] \longmapsto \mathcal{Z}(\nu x + \mu y)$, é uma bijeção.

Proposição 2.5. *Seja* $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ *uma superfície não singular de grau* $d \geqslant 3$. *Se* $\ell_1, ..., \ell_r \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$ *com* $r \geqslant 2$ *são concorrentes,*[17] *então* $\ell_1, ..., \ell_r$ *são coplanares*[18] *e* $r \leqslant d$.

Demonstração. Sendo $\ell_1, ..., \ell_r$ retas concorrentes com $r \geqslant 2$, então existe um ponto comum $\mathrm{p} \in \ell_i$ para todo $i \in \{1, ..., r\}$. Seja $H = T_{\mathrm{p}}\mathrm{X}$ o plano tangente à superfície X no ponto p. Segue do Lema 2.5, que $\ell_i \subset H$ para cada $i \in \{1, ..., r\}$. Portanto, as retas $\ell_1, ..., \ell_r$ são coplanares.

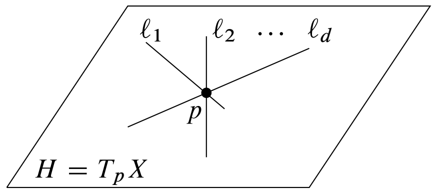
Por outro lado, como $H = T_{\mathrm{p}}\mathrm{X} = \mathcal{Z}(L_{\mathrm{p}})$ sendo L_{p} a forma linear definida em (2.8) e $\ell_i \subset H$ para cada $i \in \{1, ..., r\}$. Então o Lema 2.6 nos garante que existem $L_1, ..., L_r \in S_1$, tais que $\ell_i = \mathcal{Z}(L_{\mathrm{p}}, L_i)$ para cada $i \in \{1, ..., r\}$. Assim,
$$\begin{aligned} \ell_1 \cup \cdots \cup \ell_r = \mathcal{Z}(L_{\mathrm{p}}, L_1 \cdot L_2 \cdots L_r) \subset \mathrm{X} = \mathcal{Z}(F) \quad &\Longrightarrow \quad F \in \big\langle L_{\mathrm{p}}, L_1 \cdot L_2 \cdots L_r\big\rangle \\ &\overset{L_{\mathrm{p}} \nmid F}{\Longrightarrow} \quad r \leqslant d = \mathrm{grau}(F). \end{aligned}$$

[16] De fato, caso não o fossem, existiria $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $L_1 = \gamma F$ ou $F = \gamma L_1$. Em ambos os casos concluiríamos que L_1 e L_2 seriam linearmente dependentes, o que é um absurdo.

[17] Sejam $\ell_1, ..., \ell_r$ retas distintas em $\mathbb{P}^n$ com $r, n \geqslant 2$. Dizemos que as retas $\ell_1, ..., \ell_r$ são *concorrentes* se todas passam por um ponto p, ou seja, $\ell_1 \cap \cdots \cap \ell_r = \{\mathrm{p}\}$.

[18] Se $\ell_1, ..., \ell_r$ com $r \geqslant 2$ forem retas distintas em $\mathbb{P}^n$ com $n, r \geqslant 2$, então dizemos que $\ell_1, ..., \ell_r$ são *coplanares* se existe um plano H em $\mathbb{P}^n$ contendo as retas $\ell_1, ..., \ell_r$.

□



Corolário 2.3. *Uma superfície não singular* X *em* $\mathbb{P}^3$ *de grau* $d \geqslant 3$ *contém no máximo* d *retas concorrentes.*

Curvas residuais a uma reta num dado plano

Vamos começar mostrando que a família de planos contendo uma reta pré-fixada está em bijeção com a reta projetiva complexa.

Para cada reta ℓ em $\mathbb{P}^3$, considere

$$\Omega(\ell) := \left\{ H \subset \mathbb{P}^3 \,\middle|\, H \text{ é um plano contendo a reta } \ell \right\}.$$

Lema 2.7. $\Omega(\ell)$ *está em bijeção com* $\mathbb{P}^1$.

Demonstração. Assuma que a reta $\ell = \mathcal{Z}(L_1, L_2)$, com $L_1, L_2 \in S_1$ linearmente independentes. Note que, se $H \subset \mathbb{P}^3$ é um plano, então $H = \mathcal{Z}(L)$ com $L \in S_1$ não nulo. Além disso, se $H \in \Omega(\ell)$, segue de (2.6) que

$$L \in \langle L_1, L_2 \rangle = \mathcal{I}(\ell) \iff \exists \underbrace{\alpha,\ \beta \in \mathbb{C},}_{\alpha \neq 0 \, ou \, \beta \neq 0} \text{ tais que } L = \alpha L_1 + \beta L_2. \tag{2.10}$$

Essa descrição dos planos que contêm a reta ℓ nos leva a definir

$$\Psi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Omega(\ell) \qquad \text{dada por } [\alpha : \beta] \longmapsto \mathcal{Z}(\alpha L_1 + \beta L_2).$$

Observe que Ψ está bem definida.[19] Além disso, segue de (2.10) que Ψ é sobrejetora. A seguir, vamos mostrar que Ψ é injetora.

Considere $a = [a_0 : a_1]$ e $b = [b_0 : b_1] \in \mathbb{P}^1$ tais que $\Psi(a) = \Psi(b)$, ou seja,

$$\mathcal{Z}(a_0 L_1 + a_1 L_2) = \mathcal{Z}(b_0 L_1 + b_1 L_2).$$

---

[19] De fato, se $\mathbb{P}^1 \ni a = [\alpha : \beta] = [\lambda\alpha : \lambda\beta]$ então $\Psi([\alpha : \beta]) = \mathcal{Z}(\alpha L_1 + \beta L_2) = \mathcal{Z}(\lambda\alpha L_1 + \lambda\beta L_2) = \Psi([\lambda\alpha : \lambda\beta])$, ou seja, o valor de $\Psi(a)$ é independente do representante escolhido para o ponto a. Além disso, segue de (2.10) que $\Psi(a) = \mathcal{Z}(\alpha L_1 + \beta L_2) \in \Omega(\ell)$.

Ao calcularmos o ideal associado dos planos acima e aplicarmos o *teorema dos zeros Hilbert* (cf. Teorema 1.4), obtemos $\sqrt{\langle a_0L_1 + a_1L_2\rangle} = \sqrt{\langle b_0L_1 + b_1L_2\rangle}$. Entretanto, esses ideais são primos. Logo,

$$\begin{aligned}\langle a_0L_1 + a_1L_2\rangle = \langle b_0L_1 + b_1L_2\rangle \quad &\Longrightarrow \quad a_0L_1 + a_1L_2 = \lambda(b_0L_1 + b_1L_2),\\ &\qquad\qquad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\\ &\Longrightarrow \quad a_i = \lambda b_i, \quad \text{para } i = 0, 1\\ &\Longrightarrow \quad a = b.\end{aligned}$$

□

Proposição 2.6. *Seja* $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F)$ *uma superfície não singular em* $\mathbb{P}^3$ *com* $F \in S$ *homogêneo de grau* $d \geqslant 3$. *Se* $\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$ *e* H *é um plano em* $\mathbb{P}^3$ *contendo* ℓ*, então*

$$H \cap \mathrm{X} = \ell \cup C_H,$$

sendo C_H *uma curva plana reduzida*[20] *de grau* $d - 1$.

Demonstração. A menos de uma MCP podemos assumir que $\ell = \mathcal{Z}(z, t)$. Como $\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$, podemos escrever F na forma

$$F = A \cdot t + B \cdot z \qquad \text{com } A \in S = \mathbb{C}[x, y, z, t] \text{ e } B \in \mathbb{C}[x, y, z]$$

homogêneos de grau $d - 1$.

Por ouro lado, como o plano H contém a reta ℓ, então existe $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$ tal que $H = \mathcal{Z}(\alpha \cdot z + \beta \cdot t)$. Temos duas possibilidades para o valor de β ($\beta = 0$ ou $\beta \neq 0$).

$\boxed{\beta = 0}$ Neste caso, $H = \mathcal{Z}(z)$. Logo,

$$H \cap \mathrm{X} = \mathcal{Z}(z, F) = \mathcal{Z}(z, A \cdot t) = \underbrace{\mathcal{Z}(z, t)}_{=\ell} \cup \underbrace{\mathcal{Z}(z, A)}_{:=C_H}.$$

Observe que $A \neq 0$ e z A visto que F é irredutível (cf. Lema 1.13). Assim, $C_H = \mathcal{Z}(z, A)$ é uma curva plana. A seguir, vamos mostrar que C_H é reduzida.

Suponha, pelo absurdo, que curva $C_H = \mathcal{Z}(z, A)$ não é reduzida, então A não é livre de quadrados, ou seja, $A = R^2 \cdot T$ com $R, T \in S$ homogêneos tais que $\mathrm{grau}(A) = d - 1 = 2\mathrm{grau}(R) + \mathrm{grau}(T)$. Neste caso, $F = R^2 \cdot T \cdot t + B \cdot z$, logo

$$\begin{aligned}\partial_x F &= 2(\partial_x R) \cdot R \cdot T \cdot t + (\partial_x T) \cdot R^2 \cdot t + (\partial_x B) \cdot z\\ \partial_y F &= 2(\partial_y R) \cdot R \cdot T \cdot t + (\partial_y T) \cdot R^2 \cdot t + (\partial_y B) \cdot z\\ \partial_z F &= 2(\partial_z R) \cdot R \cdot T \cdot t + (\partial_z T) \cdot R^2 \cdot t + (\partial_z B) \cdot z + B\\ \partial_t F &= 2(\partial_t R) \cdot R \cdot T \cdot t + (\partial_t T) \cdot R^2 \cdot t + (\partial_t B) \cdot z + R^2 \cdot T.\end{aligned} \tag{2.11}$$

[20] Seja $C \subset \mathbb{P}^3$ um conjunto algébrico projetivo. Dizemos que C é um *curva plana* se existe H plano em $\mathbb{P}^3$ contendo C e $\dim C = 1$. De fato, se a curva $C \subset H = \mathcal{Z}(L)$ então $C = \mathcal{Z}(L, G)$ com G homogêneo não nulo tal que L G. A curva plana $C = \mathcal{Z}(L, G)$ é dita *reduzida* se $\mathcal{I}(C) = \langle L, G\rangle$ (ou seja, G é livre de quadrados). Neste caso, o grau da curva C é dado por $\mathrm{grau}(C) = \mathrm{grau}(G)$.

Agora, visto que $R \neq 0$ e $z \quad R$ (lembre que $z \quad A$), segue que $C = \mathcal{Z}(z, R)$ é uma curva plana. Além disso,

$$\mathcal{Z}(z, R, B) = \begin{cases} C, & \text{se } z|B, \\ C \cap D, & \text{se } z \quad B, \text{ sendo } D = \mathcal{Z}(z, B) \text{ uma curva plana.} \end{cases}$$

Em ambos dos casos[21] acima, chegamos na conclusão que $\mathcal{Z}(z, R, B) \neq \emptyset$. Assim, ao escolher $\mathrm{p} \in \mathcal{Z}(z, R, B)$, segue de (2.11) que $\mathrm{p} \in \mathrm{Sing(X)}$, o que é um absurdo.

Portanto, $C_H = \mathcal{Z}(z, A)$ é uma curva plana reduzida de grau $d-1$ (visto que $\mathrm{grau}(A) = d - 1$).

$\boxed{\beta \neq 0}$ Neste caso, $H = \mathcal{Z}(t - \mu z)$. Logo,

$$\begin{aligned} H \cap \mathrm{X} = \mathcal{Z}(t - \mu z, A \cdot t + B \cdot z) &= \mathcal{Z}(t - \mu z, (\mu A + B)z) \\ &= \underbrace{\mathcal{Z}(t - \mu z, z)}_{=\ell} \cup \underbrace{\mathcal{Z}(t - \mu z, \mu A + B)}_{:=C_H}. \end{aligned}$$

Note que $\mu A + B \neq 0$ e $t - \mu z \quad \mu A + B$.[22] Assim, $C_H = \mathcal{Z}(t - \mu z, \mu A + B)$ é uma curva plana. Suponha, pelo absurdo, que curva $C_H = \mathcal{Z}(t - \mu z, \mu A + B)$ não é reduzida, então $\mu A + B$ não é livre de quadrados, ou seja, $\mu A + B = R^2 \cdot T$ com $R, T \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$ homogêneos.

Neste caso, $F = A \cdot t + (R^2 \cdot T - \mu A) \cdot z = A \cdot (t - \mu z) + R^2 \cdot T \cdot z$. Logo,

$$\begin{aligned} \partial_x F &= (\partial_x A) \cdot (t - \mu z) + R \cdot (2(\partial_x R) \cdot T + (\partial_x T) \cdot R) \cdot z \\ \partial_y F &= (\partial_y A) \cdot (t - \mu z) + R \cdot \big(2(\partial_y R) \cdot T + (\partial_y T) \cdot R\big) \cdot z \\ \partial_z F &= (\partial_z A) \cdot (t - \mu z) + R \cdot (2(\partial_z R) \cdot T + (\partial_z T) \cdot R) \cdot z - \mu A + R^2 \cdot T \\ \partial_t F &= (\partial_t A) \cdot (t - \mu z) + R \cdot (2(\partial_t R) \cdot T + (\partial_t T) \cdot R) \cdot z + A \end{aligned} \tag{2.12}$$

Sendo F irredutível (cf. Lema 1.13), segue que $R \neq 0$ e $t - \mu z$ não divide R. L,ogo $C = \mathcal{Z}(t - \mu z, R)$ é uma curva plana. Além disso,

$$\mathcal{Z}(t - \mu z, R, A) = \begin{cases} C, & \text{se } t - \mu z|A \\ C \cap D, & \text{se } t - \mu z \quad A, \text{ sendo } D = \mathcal{Z}(t - \mu z, A). \end{cases}$$

De forma análoga ao caso anterior ($\beta = 0$), segue-se que $\mathcal{Z}(t - \mu z, R, A) \neq \emptyset$. Assim, ao escolher $\mathrm{p} \in \mathcal{Z}(t - \mu z, R, A)$, segue de (2.12) que $\mathrm{p} \in \mathrm{Sing(S)}$, o que é um absurdo. Portanto, $C_H = \mathcal{Z}(t - \mu z, \mu A + B)$ é uma curva plana reduzida de grau $d - 1$. □

[21] O segundo caso segue do *Teorema de Bézout* para curvas planas projetivas. O qual nos garante que se $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ são curvas projetivas, então $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Além disso, $\#(C_1 \cap C_2) \leqslant d_1 \cdot d_2$ sendo $d_i = \mathrm{grau}(C_i)$.

[22] (a) Suponha que $\mu A + B = 0$. Logo, $B = -\mu A$ e $F = A \cdot t + B \cdot z = A(t - \mu z)$ é redutível, o que é um absurdo. (b) Suponha que $\mu A + B = (t - \mu z)G$ para algum $G \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$. Neste caso, $F = A \cdot t + B \cdot z = A \cdot t + (t - \mu z)G \cdot z - \mu A \cdot z = (t - \mu z)(G \cdot z + A)$ é redutível, o que é um absurdo.

A curva C_H na Proposição 2.6 é denominada *curva residual* à reta ℓ no plano H.

A seguir vamos apresentar um exemplo que elucidará alguns aspectos que aparecerão na contagem de retas no caso geral.

Exemplo 2.5. Seja $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(G) \subset \mathbb{P}^3$ sendo $G = x^3 + y^3 + z^3 + t^3 \in S$. Fixe a reta $\ell = \mathcal{Z}(x + y, z + t) \subset \mathrm{X}$. A seguir vamos determinar a curva residual à reta ℓ para cada plano contendo ℓ.

Lembremos que se H é um plano em $\mathbb{P}^3$, então

$$\ell \subset H \iff H = \mathcal{Z}(\alpha(x + y) - \beta(z + t)), \quad \text{com } [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1.$$

Entretanto a curva residual a ℓ no plano $H = \mathcal{Z}(\alpha(x+y)-\beta(z+t))$ aparece ao calcular a interseção $H \cap \mathrm{X}$. De fato,

$$H \cap \mathrm{X} = \mathcal{Z}\left(\alpha(x + y) - \beta(z + t), x^3 + y^3 + z^3 + t^3\right) = \ell \cup C_H.$$

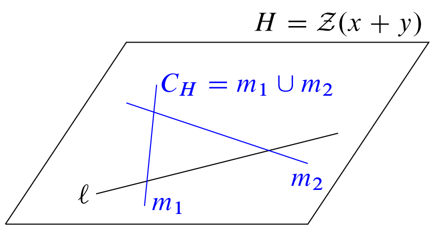
Vamos analisar os casos $\beta = 0$ e $\beta \neq 0$.

$\underline{\beta = 0}$. Neste caso, $H = \mathcal{Z}(x + y)$.

Observe que

$$\begin{aligned} H \cap \mathrm{X} &= \mathcal{Z}(x + y, x^3 + y^3 + z^3 + t^3) \\ &= \mathcal{Z}(x + y, z^3 + t^3) \\ &= \mathcal{Z}(x + y, (z + t)(z^2 - zt + t^2)) \\ &= \underbrace{\mathcal{Z}(x + y, z + t)}_{\ell} \cup \underbrace{\mathcal{Z}(x + y, z^2 - zt + t^2)}_{C_H} \end{aligned}$$

Observe que a curva residual $C_H = m_1 \cup m_2$ é uma cônica singular no plano $H = \mathcal{Z}(x + y)$, visto que $z^2 - zt + t^2 = (z + \xi t)(z + \xi^2 t)$ com $\xi \in \mathbb{C}$ tal que $\xi^3 = 1$ e $\xi \neq 1$.

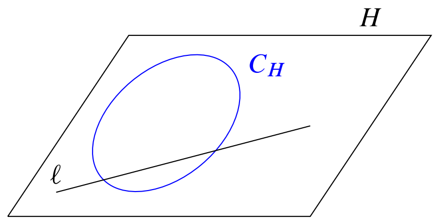


$\underline{\beta \neq 0}$. Neste caso, $H = \mathcal{Z}(t + z - \lambda(x + y))$ sendo $\lambda = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Logo,

$$\begin{aligned} H \cap \mathrm{X} &= \mathcal{Z}(t + z - \lambda(x + y), x^3 + y^3 + z^3 + t^3) \\ &= \mathcal{Z}(t + z - \lambda(x + y), (x + y) \cdot f_\lambda) \\ &= \underbrace{\mathcal{Z}(t + z, x + y)}_{\ell} \cup \underbrace{\mathcal{Z}(t + z - \lambda(x + y), f_\lambda)}_{C_H} \end{aligned}$$

sendo $f_\lambda = (\lambda^3+1)x^2 + (2\lambda^3-1)xy - 3\lambda^2 xz + (\lambda^3+1)y^2 - 3\lambda^2 yz + 3\lambda z^2$.

Agora, sendo C_H uma cônica reduzida no plano H, temos duas possibilidades: $C_H = m_1 \cup m_2$ união de retas distintas (como no caso $\beta = 0$) ou C_H é uma cônica não singular.



Vamos determinar os pontos singulares da cônica $\mathcal{Z}(f_\lambda) \subset \mathbb{P}^2 \cong H$.[23]

Considere $a = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2$. Note que

$$a \in \operatorname{Sing}(\mathcal{Z}(f_\lambda)) \Longleftrightarrow \begin{cases} \partial_x f_\lambda(a) = 2(\lambda^3+1)a_0 + (2\lambda^3-1)a_1 - 3\lambda^2 a_2 = 0, \\ \partial_y f_\lambda(a) = (2\lambda^3-1)a_0 + 2(\lambda^3+1)a_1 - 3\lambda^2 a_2 = 0 \\ \partial_z f_\lambda(a) = -3\lambda^2 a_0 - 3\lambda^2 a_1 + 6\lambda a_2 = 0. \end{cases}$$

Ou seja, $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2)$ está no núcleo do operador linear $T_\lambda : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ dado por $\vec{a} \longmapsto \big(\partial_x f_\lambda(\vec{a}), \partial_y f_\lambda(\vec{a}), \partial_z f_\lambda(\vec{a})\big)$. Se $[T_\lambda]$ é a matriz associada a T_λ da base canônica na base canônica, tem-se que

$$\det[T_\lambda] = 18\lambda(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1).$$

Assim,

$$\mathcal{Z}(f_\lambda) \subset \mathbb{P}^2 \cong H \text{ é singular } \Longleftrightarrow \lambda \in \left\{0, -1, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right\}.$$

Observação 2.6. Na superfície não singular $X = \mathcal{Z}(x^3+y^3+z^3+t^3) \subset \mathbb{P}^3$, sendo $\ell = \mathcal{Z}(x+y, z+t) \subset X$, existem **exatamente 5 planos** contendo a reta ℓ tais que a cônica residual é união de duas retas distintas. Assim, obtemos $2 \cdot 5$ retas distintas na superfície X. Este não é um fato que só vale para essa superfície cúbica. Com efeito, mostraremos no Capítulo 3 que a existência de exatamente 5 planos nos quais a cônica residual é união de retas distintas, vale para toda superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$.

Exercício 2.5. Sejam ℓ_1 e ℓ_2 retas distintas em $\mathbb{P}^3$. Seja $\langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ a menor subvariedade linear de $\mathbb{P}^3$ contendo $\ell_1 \cup \ell_2$. Mostre que

(*a*) Se $\ell_1 \cap \ell_2 \neq \emptyset$ (i.e. ℓ_1 e ℓ_2 são concorrentes), então $\langle \ell_1, \ell_2 \rangle$ é um plano.

[23] Observe que $\varphi : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ dada por $a \longmapsto [a_0 : a_1 : a_2 : a_3 + a_2 - \lambda(a_0+a_1)]$ é um MCP tal que $\varphi(H) = \mathcal{Z}(t)$ e $\varphi(C_H) = \mathcal{Z}(t, f_\lambda)$. Além disso, $H \cong \mathcal{Z}(t) \cong \mathbb{P}^2$.

(b) Se $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ (ou seja, ℓ_1 e ℓ_2 são transversais), então $\langle \ell_1, \ell_2 \rangle = \mathbb{P}^3$.

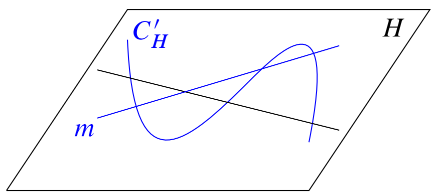
Lembre que fixada uma reta ℓ em $\mathbb{P}^3$,

$$\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) := \left\{ m \in \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \,\middle|\, \ell \cap m \neq \emptyset \right\}.$$

Proposição 2.7. *Seja* $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F)$ *uma superfície não singular em* $\mathbb{P}^3$ *com* $F \in S$ *homogêneo de grau* $d \geqslant 3$ *e* $\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$. *Se* H *é um plano em* $\mathbb{P}^3$ *contendo* ℓ *tal que* $H \cap \mathrm{X} = \ell \cup C_H$, *então*

(i) ℓ *não é uma componente irredutível da curva residual* C_H.

(ii) *Se* $m \in \mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) - \{\ell\}$ *e* $H = \langle \ell, m \rangle$ *então* m *é uma componente irredutível de* C_H. *Mais ainda,* $C_H = m \cup C'_H$ *sendo* C'_H *determinada pela união de todas as componentes irredutíveis de* C_H *distintas de* m.



Demonstração. $\boxed{\text{(i)}}$ A menos de uma MCP podemos assumir que $\ell = \mathcal{Z}(z, t)$. Como $\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$, podemos escrever F na forma

$$F = A \cdot t + B \cdot z, \quad \text{com } A \in \mathbb{C}[x, y, z, t] \text{ e } B \in \mathbb{C}[x, y, z]$$

homogêneos de grau $d - 1$. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} \partial_x F &= \partial_x A \cdot t + \partial_x B \cdot z \\ \partial_y F &= \partial_y A \cdot t + \partial_y B \cdot z \\ \partial_z F &= \partial_z A \cdot t + \partial_z B \cdot z + B \\ \partial_t F &= \partial_t A \cdot t + A. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Agora, se H é um plano contendo a reta ℓ, então existe $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$ tal que $H = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t)$. Assim,

$$H = \mathcal{Z}(t - \mu z), \text{ sendo } \mu = -\frac{\alpha}{\beta} \text{ ou } H = \mathcal{Z}(z).$$

- Se $H = \mathcal{Z}(t - \mu z)$, então $C_H = \mathcal{Z}(t - \mu z, \mu A + B)$.

Suponha, pelo absurdo, que a reta ℓ é uma componente da curva C_H. Neste caso, $\ell \subset C_H$ implica em

$$\mu A(\mathrm{p}) + B(\mathrm{p}) = 0, \quad \forall\ \mathrm{p} \in \ell. \tag{2.14}$$

Note que $A \neq 0$, visto que F é irredutível (cf. Lema 1.13). Logo $\mathcal{Z}(A)$ é uma superfície em $\mathbb{P}^3$. Considere $\mathrm{q} \in \ell \cap \mathcal{Z}(A)$ (pois segue de (2.7) que $\ell \cap \mathcal{Z}(A) \neq \emptyset$). Logo, de (2.14) segue que $B(\mathrm{q}) = 0$. Assim, segue do sistema em (2.13) que $\mathrm{q} \in \mathrm{Sing}(\mathrm{X})$, o que é um absurdo.

- Se $H = \mathcal{Z}(z)$, então $C_H = \mathcal{Z}(z, A)$.

  Suponha, pelo absurdo, que a reta ℓ é uma componente da curva C_H. Neste caso, $\ell \subset C_H$ implica em

$$A(\mathrm{p}) = 0, \quad \forall\ \mathrm{p} \in \ell. \tag{2.15}$$

  Neste caso $B \neq 0$ (visto que F é irredutível segundo o Lema 1.13), logo $\mathcal{Z}(B)$ é uma superfície em $\mathbb{P}^3$. Considere $\mathrm{q} \in \ell \cap \mathcal{Z}(B)$ ($\ell \cap \mathcal{Z}(B) \neq \emptyset$ por conta de (2.7)). Mais uma vez, a partir de (2.13), segue que q é um ponto singular da superfície X, o que é um absurdo.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Como $m \in \mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X})$ e $m \neq \ell$, então $H = \langle \ell, m \rangle$ é o único plano em $\mathbb{P}^3$ contendo as retas ℓ e m (cf. Exercício 2.5). Agora, sabendo que $\ell \subset H$, então

$$H \cap \mathrm{X} = \ell \cup C_H,$$

sendo C_H uma curva plana reduzida de grau $d - 1$ (cf. Proposição 2.6). Por outro lado,

$$m \subset H \cap \mathrm{X} = \ell \cup C_H \Longrightarrow m = m \cap \ell \cup m \cap C_H \overset{m\, irred.}{\Longrightarrow} m \subset C_H.$$

Assim,[24] $C_H = m \cup C'_H$ sendo

$$C'_H = \bigcup_{i=1}^{k} C_i,$$

no qual $C_i \neq m$ é componente irredutível de C_H. □

Corolário 2.4. *Seja $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície não singular de grau $d \geqslant 3$ contendo as retas distintas ℓ_1 e ℓ_2. Se ℓ_1 e ℓ_2 são concorrentes e $H = \langle \ell_1, \ell_2 \rangle$, então*

$$H \cap \mathrm{X} = \ell_1 \cup \ell_2 \cup C'_H, \quad \text{sendo } C'_H \textit{ uma curva plana reduzida de grau } d-2.$$

[24]Sendo m irredutível e C_H uma curva plana reduzida, segue que todas suas componentes irredutíveis tem dimensão 1. Assim, m é uma componente irredutível de C_H.

Demonstração. Ao considerar o plano $H = \langle \ell_1, \ell_2 \rangle$, segue da Proposição 2.6 que

$$H \cap \mathrm{X} = \ell_1 \cup C_H$$

sendo C_H uma curva plana reduzida de grau $d-1$. Assim, $C_H = \mathcal{Z}(L, G)$, com $H = \mathcal{Z}(L)$ e G homogêneo de grau $d-1$, livre de quadrados, tais que L G.

Por outro lado, a partir do item (ii) da Proposição 2.7, segue que $C_H = \ell_2 \cup C'_H$ sendo a reta ℓ_2 uma componente irredutível de C_H. De fato, as condições $\ell_2 \subset C_H$ componente irredutível e C_H reduzida de grau $d-1$, nos leva a concluir que $C'_H = \mathcal{Z}(L, Q)$ sendo Q homogêneo de grau $d-2$ e livre de quadrados.[25] Portanto, C'_H é uma curva plana reduzida de grau $d-2$. $\square$

Considere $\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$ e C_H a curva residual à reta ℓ no plano H (cf. Proposição 2.6). Usaremos a notação

$$\mathfrak{L}_{C_H}(\mathrm{X}) := \left\{ m \in \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \,\middle|\, C_H \cap m \neq \emptyset \right\}.$$

Proposição 2.8. *Seja* X *uma superfície não singular em* $\mathbb{P}^3$ *de grau* $d \geqslant 3$ *e* $\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$. *Se* H *é um plano em* $\mathbb{P}^3$ *contendo* ℓ *e* C_H *é a curva residual à reta* ℓ *no plano* H *(i.e.* $H \cap \mathrm{X} = \ell \cup C_H$*). Então* $\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = \mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) \cup \mathfrak{L}_{C_H}(\mathrm{X})$.

Demonstração. Das definições de $\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X})$ e $\mathfrak{L}_{C_H}(\mathrm{X})$, segue que $\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) \cup \mathfrak{L}_{C_H}(\mathrm{X}) \subseteq \mathfrak{L}(\mathrm{X})$. Assim, basta mostrar a inclusão oposta.

Considere $m \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$. Temos duas possibilidades

$\underline{m \subset H.}$ Neste caso, as retas m e ℓ estão contidas no plano H. Logo, $m = \ell$ ou $m \cap \ell = \{\mathrm{p}\}$. Em qualquer um desses casos, segue que $m \in \mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X})$.

$\underline{m \not\subseteq H.}$ Neste caso, $m \cap H = \{\mathrm{q}\}$. Assim, a partir da igualdade $H \cap \mathrm{X} = \ell \cup C_H$ ao interceptar com a reta $m \subset \mathrm{X}$, concluímos que

$$H \cap m = (\ell \cap m) \cup (C_H \cap m) \overset{m \cap H = \{\mathrm{q}\}}{\Longrightarrow} \mathrm{q} \in \ell \cap m \ \text{ ou } \ \mathrm{q} \in C_H \cap m.$$

Portanto, $m \in \mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) \cup \mathfrak{L}_{C_H}(\mathrm{X})$. $\square$

Corolário 2.5. *Sejam* $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ *uma superfície não singular de grau* $d \geqslant 3$ *e* $\ell_1, \ldots, \ell_r \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$ *retas coplanares distintas com* $r \geqslant 2$*. Então,*

$$\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = \mathfrak{L}_{\ell_1}(\mathrm{X}) \cup \cdots \cup \mathfrak{L}_{\ell_r}(\mathrm{X}).$$

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor. $\square$

[25]Note que, $\ell_2 \subset C_H$ é equivalente a $\mathcal{I}(C_H) = \langle L, G \rangle \subset \mathcal{I}(\ell_2) := \langle L, M \rangle$. De onde concluímos que $G = L \cdot P + M \cdot Q$ com P e Q homogêneos de grau $d-2$. Além disso, $\mathcal{I}(C_H) = \langle L, G \rangle = \langle L, L \cdot P + M \cdot Q \rangle = \langle L, M \cdot Q \rangle$ com Q livre de quadrados, visto que $\mathcal{I}(C_H)$ é um ideal radical.

Curvas residuais como fibras de um morfismo

A seguir, mostraremos que as curvas residuais à reta ℓ nos planos em $\Omega(\ell)$, aparecem como as fibras de um morfismo $\pi_\ell : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ (cf. (2.16)). Além disso, vamos estabelecer que o conjunto

$$\mathcal{C} := \left\{ C_H \;\middle|\; C_H \text{ é uma curva singular residual à reta } \ell \text{ no plano } H \in \Omega(\ell) \right\}$$

é finito. Este fato será muito importante na hora de mostrarmos que uma superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$ contém exatamente 27 retas.

Lema 2.8. *Sejam ℓ uma reta e* p *um ponto em $\mathbb{P}^n$, com $n \geqslant 2$. Então*

$$\mathrm{p} \notin \ell \iff \exists!\ H \subseteq \mathbb{P}^n \textit{ plano contendo a reta } \ell \textit{ e o ponto } \mathrm{p}.$$

Demonstração. Assuma que $\ell = \mathbb{P}(W)$, com $W \in G_2(\mathbb{C}^{n+1})$ e $\mathrm{p} = [\mathrm{v}]$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ A condição $\mathrm{p} \notin \ell$ é equivalente a $\mathrm{v} \notin W$. Assim,

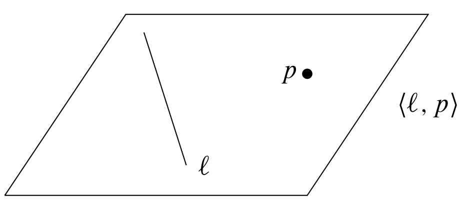
$$\dim(W + [\mathrm{v}]) = \dim W + \dim [\mathrm{v}] - \dim W \cap [\mathrm{v}] = 2 + 1 - 0 = 3.$$

Portanto, $H = \mathbb{P}(W + [\mathrm{v}])$ é um plano contendo a reta ℓ e o ponto p. De fato, tal plano é único.[26]

$\boxed{\Longleftarrow}$ Suponha, pelo absurdo, que $\mathrm{p} \in \ell$. Neste caso, $\mathrm{v} \in W$. Logo, para todo vetor $\vec{u} \notin W$, tem-se que $U = W \oplus [\mathrm{u}] \in G_3(\mathbb{C}^{n+1})$ define um plano contento a reta ℓ e o ponto p (visto que $\mathrm{p} \in \ell$). Assim, obtemos infinitos planos contento a reta ℓ e o ponto p (o que contradiz a unicidade). □

Definição do morfismo $\pi_\ell : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$.

A seguir, $\langle \ell, \mathrm{p} \rangle$ denotará o plano determinado pelo ponto p e a reta ℓ sempre que $\mathrm{p} \notin \ell$ (cf. Lema 2.8). Conforme ilustra a figura



[26]Se $H_1 = \mathbb{P}(U)$ for um plano contendo a reta ℓ e o ponto p, então $U \in G_3(\mathbb{C}^{n+1})$, $W \subset U$ e $\mathrm{v} \in U$. Logo, $W + [\mathrm{v}] \subseteq U$ com $\dim(W + [\mathrm{v}]) = 3 = \dim U$. De onde concluímos que $U = W + [\mathrm{v}]$. Portanto, $H_1 = H$.

Seja X uma superfície não singular em $\mathbb{P}^3$ de grau $d \geqslant 3$ contendo a reta ℓ. Considere $\sigma_\ell : \mathrm{X} \longrightarrow \Omega(\ell)$ dada por

$$\mathrm{p} \longmapsto H_\mathrm{p} \;\text{ sendo } H_\mathrm{p} = \begin{cases} \langle \ell, \mathrm{p}\rangle, & \text{se } \mathrm{p} \notin \ell, \\ T_\mathrm{p}\mathrm{X}, & \text{se } \mathrm{p} \in \ell. \end{cases}$$

Defina,

$$\pi_\ell : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{por} \quad \mathrm{p} \longmapsto \Psi^{-1}(H_\mathrm{p}) \tag{2.16}$$

sendo $\Psi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Omega(\ell)$ a bijeção dada por $[\alpha : \beta] \longmapsto \mathcal{Z}(\alpha L_1 + \beta L_2)$, se $\ell = \mathcal{Z}(L_1, L_2)$ (cf. Lema 2.7). Assim, $\pi_\ell = \Psi^{-1} \circ \sigma_\ell$.

Proposição 2.9. *Com as notações acima. A função $\pi_\ell : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ é um morfismo, tal que $\pi_\ell^{-1}(a)$ é a curva residual à reta ℓ no plano $H_a = \mathcal{Z}(a_0 L_1 + a_1 L_2)$ para todo $a = [a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade vamos assumir[27] que $\ell = \mathcal{Z}(t, z)$.

Assuma que $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F,)$ com $F \in S_d$ irredutível (visto que X é não singular, cf. Lema 1.13). Como $\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$, segue que $F \in \mathcal{I}(\ell) = \langle t, z\rangle$. Logo,

$$F = A \cdot t + B \cdot z, \qquad \text{com } A \in \mathbb{C}[x, y, z, t] \text{ e } B \in \mathbb{C}[x, y, z]$$

homogêneos de grau $d - 1$. Além disso, calculando as derivadas parciais de F, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_x F &= \partial_x A \cdot t + \partial_x B \cdot z \\ \partial_y F &= \partial_y A \cdot t + \partial_y B \cdot z \\ \partial_z F &= \partial_z A \cdot t + \partial_z B \cdot z + B \\ \partial_t F &= \partial_t A \cdot t + A. \end{aligned}$$

A seguir, considere $\mathrm{p} \in \mathrm{X}$ tal que $\mathrm{p} \in \ell = \mathcal{Z}(t, z)$. A partir do sistema acima, obtemos que

$$\partial_x F(\mathrm{p}) = 0, \;\; \partial_y F(\mathrm{p}) = 0, \;\; \partial_z F(\mathrm{p}) = B(\mathrm{p}) \;\text{ e }\; \partial_t F(\mathrm{p}) = A(\mathrm{p}).$$

Visto que X é não singular, então $[B(\mathrm{p}) : A(\mathrm{p})] \in \mathbb{P}^1$ e $\mathrm{L_p} = B(\mathrm{p})z + A(\mathrm{p})t$ é a forma linear que define o plano tangente $T_\mathrm{p}\mathrm{X}$ (cf. equação L_p (2.8)). Portanto, se $\mathrm{p} = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3] \in \mathrm{X}$ segue que

$$H_\mathrm{p} = \begin{cases} \langle \ell, \mathrm{p}\rangle = \mathcal{Z}(p_3 z - p_2 t) = \Psi([p_3 : -p_2]),^{28} & \text{se } \mathrm{p} \notin \ell, \\ T_\mathrm{p}\mathrm{X} = \mathcal{Z}(B(\mathrm{p})z + A(\mathrm{p})t) = \Psi([B(\mathrm{p}) : A(\mathrm{p})]), & \text{se } \mathrm{p} \in \ell. \end{cases}$$

Portanto, se $\mathrm{p} = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3] \in \mathrm{X} = \mathcal{Z}(A \cdot t + B \cdot z)$, então

$$\pi_\ell(\mathrm{p}) = \begin{cases} [p_3 : -p_2], & \text{se } \mathrm{p} \notin \ell, \\ [B(\mathrm{p}) : A(\mathrm{p})], & \text{se } \mathrm{p} \in \ell. \end{cases} \tag{2.17}$$

Afirmação 1: A função $\pi_\ell : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ definida em (2.17) é um morfismo.

De fato, considere $\mathrm{q} \in \mathrm{X}$.

---

[27] Do contrário, escolha $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ tal que $\varphi(\ell) = \mathcal{Z}(t, z)$ e troque X por $\mathrm{X}_1 = \varphi(\mathrm{X})$.

(*a*) Se $\mathrm{q} \notin \ell$, então escolha o aberto $U_{\mathrm{q}} = \mathrm{X} - \ell \subset \mathrm{X}$ e $G_0 = t$, $G_1 = -z \in S$. Note que

$$\mathcal{Z}(G_0, G_1) = \ell \Longrightarrow \mathcal{Z}(G_0, G_1) \cap U_{\mathrm{q}} = \emptyset.$$

Além disso, $\pi_\ell(\mathrm{p}) = [G_0(\mathrm{p}) : G_1(\mathrm{p})]$ para todo $\mathrm{p} \in U_{\mathrm{q}}$.

(*b*) Se $\mathrm{q} \in \ell$, então escolha o aberto $U_{\mathrm{q}} = \mathrm{X} - \mathcal{Z}(A, B) \subset \mathrm{X}$ e $G_0 = B$, $G_1 = A \in S$. Note que $\mathcal{Z}(G_0, G_1) \cap U_{\mathrm{q}} = \emptyset$. Além disso, $\pi_\ell(\mathrm{p}) = [G_0(\mathrm{p}) : G_1(\mathrm{p})]$ para todo $\mathrm{p} \in U_{\mathrm{q}}$,[29]

$$\pi_\ell(\mathrm{p}) = [G_0(\mathrm{p}) : G_1(\mathrm{p})] = \begin{cases} [p_3 : -p_2], & \text{se } \mathrm{p} \in U_{\mathrm{q}} - \ell, \\ [B(\mathrm{p}) : A(\mathrm{p})], & \text{se } \mathrm{p} \in \ell \cap U_{\mathrm{p}}. \end{cases}$$

Portanto, segue da Proposição 1.32, que π_ℓ é um morfismo.

Afirmação 2: $\pi_\ell^{-1}(a)$ é a curva residual à reta ℓ no plano $H_a = \mathcal{Z}(a_0 z + a_1 t)$ para todo $a = [a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1$.

De fato, lembre que

$$H_a \cap \mathrm{X} = \mathcal{Z}(a_0 z + a_1 t, A \cdot t + B \cdot z) = \ell \cup C_a$$

sendo C_a é a curva residual à reta ℓ no plano H_a. Assim, temos que:

- Se $a_1 \neq 0$, então $H = \mathcal{Z}(t - \mu z)$ sendo $\mu = -\dfrac{a_0}{a_1}$ e $C_a = \mathcal{Z}(t - \mu z, \mu A + B)$. Ou seja,

$$C_a = \mathcal{Z}(a_0 z + a_1 t, a_0 A - a_1 B), \quad \text{se } a = [a_0 : a_1] \text{ e } a_1 \neq 0.$$

- Se $a_1 = 0$, então $H = \mathcal{Z}(z)$ e $C_a = \mathcal{Z}(z, A)$.

Portanto, se $a = [a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1$, então a curva residual à reta ℓ no plano $H_a = \mathcal{Z}(a_0 z + a_1 t)$ é igual a $C_a = \mathcal{Z}(a_0 z + a_1 t, a_0 A - a_1 B)$.

Por outro lado, se $a = [a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1$ e $\mathrm{p} = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3] \in \mathrm{X}$ então

$$\begin{aligned}
\pi_\ell^{-1}(a) &= \left\{\mathrm{p} \in \mathrm{X} \,\middle|\, \pi_\ell(\mathrm{p}) = a\right\} \\
&= \left\{\mathrm{p} \in \ell \,\middle|\, \pi_\ell(\mathrm{p}) = a\right\} \bigcup \left\{\mathrm{p} \in \mathrm{X} - \ell \,\middle|\, \pi_\ell(\mathrm{p}) = a\right\} \\
&= \left\{\mathrm{p} \in \ell \,\middle|\, [B(\mathrm{p}) : A(\mathrm{p})] = a\right\} \bigcup \left\{\mathrm{p} \in \mathrm{X} - \ell \,\middle|\, [p_3 : -p_2] = a\right\} \\
&= \underbrace{\left\{\mathrm{p} \in \ell \,\middle|\, a_0 A(\mathrm{p}) - a_1 B(\mathrm{p}) = 0\right\}}_{\text{(I)}} \bigcup \underbrace{\left\{\mathrm{p} \in \mathrm{X} - \ell \,\middle|\, a_0 p_2 + a_1 p_3 = 0\right\}}_{\text{(II)}}
\end{aligned}$$

[29] Visto que, se $\ell \not\ni \mathrm{p} = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3] \in \mathrm{X} = \mathcal{Z}(A \cdot t + B \cdot z)$, então $[p_3 : -p_2] \in \mathbb{P}^1$ e $0 = A(\mathrm{p}) p_3 + B(\mathrm{p}) p_2$. Logo, $[p_3 : -p_2] = [B(\mathrm{p}) : A(\mathrm{p})]$.

A seguir vamos mostrar que $\pi_\ell^{-1}(a) = \mathcal{Z}(a_0 z + a_1 t, a_0 A - a_1 B)$.

$\boxed{\subseteq}$ Considere $\mathrm{p} = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3] \in \pi_\ell^{-1}(a)$.

No caso (I), segue que $\mathrm{p} = [p_0 : p_1 : 0 : 0]$ e $a_0 A(\mathrm{p}) - a_1 B(\mathrm{p}) = 0$. Portanto, $\mathrm{p} \in C_a = \mathcal{Z}(a_0 z + a_1 t, a_0 A - a_1 B)$.

Entretanto, no caso (II) temos que $\mathrm{p} = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3]$ com $[p_2 : p_3] \in \mathbb{P}^1$, satisfazendo a equação $a_0 p_2 + a_1 p_3 = 0$, o que implica em $[p_3 : -p_2] = a$. Agora, como $\mathrm{p} \in \mathrm{X}$, segue que $F(\mathrm{p}) = A(\mathrm{p})p_3 + B(\mathrm{p})p_2 = 0$. Logo, $A(\mathrm{p})a_0 - B(\mathrm{p})a_1 = 0$ visto que $[p_3 : -p_2] = a$. Portanto, $\mathrm{p} \in C_a = \mathcal{Z}(a_0 z + a_1 t, a_0 A - a_1 B)$.

$\boxed{\supseteq}$ Considere $\mathrm{p} = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3] \in C_a = \mathcal{Z}(a_0 z + a_1 t, a_0 A - a_1 B)$.

Se $\mathrm{p} \in \ell$, então $\mathrm{p} \in \pi_\ell^{-1}(a) \cap \ell$ (cf. (I)). Caso contrário, $\mathrm{p} \in \mathrm{X} - \ell$ e satisfaz a equação $a_0 p_2 + a_1 p_3 = 0$. Portanto, $\mathrm{p} \in \pi_\ell^{-1}(a) - \ell$ (cf. (II)). □

Proposição 2.10. *Considere o morfismo $\pi_\ell : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ em (2.16). Existe um aberto não vazio $V \subseteq \mathbb{P}^1$, tal que $\pi_{\ell|_V} : \pi_\ell^{-1}(V) \longrightarrow V$ induzida por π_ℓ é suave.*[30]

Demonstração. Segue do Corolário 10.7, na p. 272 do Hartshorne (1977). □

Corolário 2.6. *Com as notações acima. O conjunto*

$$\Sigma = \left\{ C_a \;\middle|\; C_a \text{ é uma curva singular residual à reta } \ell \text{ no plano } H_a \in \Omega(\ell) \right\}$$

é finito.

Demonstração. Segue da Proposição 2.9 que $C_a = \pi_\ell^{-1}(a)$ é uma fibra do morfismo π_ℓ definido em (2.16). Por outro lado, a Proposição 2.10 nos garante que existe um aberto não vazio $V \subseteq \mathbb{P}^1$ tal que $\pi_{\ell|_V} : \pi_\ell^{-1}(V) \longrightarrow V$ é suave. Temos duas possibilidades para V: $V = \mathbb{P}^1$ ou $V = \mathbb{P}^1 - \{\mathrm{b}_1, ..., \mathrm{b}_k\}$, para algum $k \geqslant 1$ inteiro.

Tendo em consideração que as fibras $C_a = \pi_\ell^{-1}(a)$ são curvas não singulares para todo $a \in V$ (visto que $\pi_{\ell|_V}$ é suave), segue que $\Sigma = \emptyset$ ou $\Sigma \subseteq \{\mathrm{b}_1, ..., \mathrm{b}_k\}$. Portanto, Σ é finito. □

---

[30]A definição formal para um morfismo *suave* pode ser encontrada na p. 268 do texto Hartshorne (1977). Vale salientar que neste momento não dispomos dos pré-requisitos necessários para abordar essa definição. Entretanto, uma ideia é a seguinte: Se $f : X \longrightarrow Y$ é um morfismo sobrejetivo entre variedades não singulares, então f é suave se todas as fibras são não singulares da mesma dimensão.

3 Contagem de retas em superfícies de grau $d \leqslant 4$

Como foi mencionado na introdução, o problema de determinar a quantidade máxima de retas que uma superfície de grau d em $\mathbb{P}^3$ pode conter é um problema em aberto para $d \geqslant 5$, a despeito da superfície ser singular ou não singular. Neste capítulo, o leitor poderá apreciar o desenvolvimento de mais de um século de pesquisa, destacando nesse cronograma histórico

$\boxed{1849}$ Arthur Cayley e George Salmon provaram que "Toda superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$ contém exatamente 27 retas".

$\boxed{1882}$ Friedrich Schur exibe a superfície quártica $\mathcal{Z}(x^4 - xy^3 - z^4 + zt^3) \subset \mathbb{P}^3$ não singular contendo 64 retas.

$\boxed{1943}$ Beniamino Segre demonstrou que "Uma superfície quártica não singular contém no máximo 64 retas".

Vale salientar que em 2015 Slawoir Rams e Matthias Shütt publicaram um artigo onde exibem um contraexemplo para um dos pressupostos utilizados por B. Segre para concluir que superfícies quárticas não singulares contém no máximo 64 retas. Entretanto, utilizando algumas técnicas desenvolvidas pelo matemático japonês Kunihiko Kodaira (por volta de 1950), Rams–Schüt contornaram o erro de Segre, e mostraram que de fato "Toda superfície quártica não singular contém no máximo 64 retas".

Levando em consideração a natureza introdutória deste texto, como também a contagem de retas neste capítulo se remete ao caso de superfícies de grau d, com $d \in \{1, 2, 3, 4\}$, dividimos o estudo em três seções

- **Retas em superfícies de grau 1 e 2.** Nesta seção mostramos $\mathfrak{L}(\mathrm{H})$ está em bijeção com $\mathbb{P}^2$ se $\mathrm{H} \subset \mathbb{P}^3$ for um plano, concluindo assim que todo plano contém infinitas retas. A seguir, utilizamos o teorema da classificação de quádricas módulo mudanças de coordenadas projetivas para descrever as retas em superfícies quádricas em $\mathbb{P}^3$. Por exemplo, no caso de uma superfície quádrica não singular em $\mathbb{P}^3$, suas retas constituem duas famílias disjuntas parametrizadas por pontos de $\mathbb{P}^1$ (cf. Proposição 3.3), que terão um rol preponderante na determinação de cotas para o número máximo de retas em superfícies de grau $d \geqslant 5$ em $\mathbb{P}^3$ (cf. Seção 4.3 do Capítulo 4).

- **Retas em superfícies de grau 3.** Nesta seção será introduzido um procedimento de contagem de retas que denominamos *contagem por estratificação*, o qual foi implementado utilizando o pacote de computação Maxima (cf. Apêndice B) e pode ser utilizado para contagem de retas numa superfície de grau d qualquer em $\mathbb{P}^3$. Agora, a demonstração de que toda superfície cúbica não singular contém 27 retas, tem como base o arcabouço teórico da última seção do Capítulo 2.

- **Retas em superfícies de grau 4.** Esta seção tem um caráter mais exploratório. Nesse sentido, são apresentados variados exemplos de superfícies quárticas, que levam a novos questionamentos, como também diversos exercícios para o leitor praticar a arte da contagem de retas. Concluímos essa seção comentando qual foi o erro de Segre com relação a contagem de retas em superfícies de grau 4.

3.1 Retas em superfícies de graus 1 e 2

Retas num plano

Lembremos que um plano em $\mathbb{P}^3$ é uma superfície dada por $\mathcal{Z}(F)$, com $F \in S_1$ não nulo.[1] Considere $\mathrm{H} \subset \mathbb{P}^3$ um plano e

$$\mathfrak{L}(\mathrm{H}) = \Big\{ \ell \subset \mathbb{P}^3 | \ell \text{ é uma reta contida em H} \Big\}.$$

Proposição 3.1. *Se* $\mathrm{H} \subset \mathbb{P}^3$ *é um plano, então existe uma bijeção entre* $\mathfrak{L}(\mathrm{H})$ *e* $\mathbb{P}^2$.

Demonstração. Assuma que $\mathrm{H} = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$. Defina $\Psi : \mathfrak{L}(\mathrm{H}) \longrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{S_1}{[F]}\right)$ por $\ell \longmapsto [\overline{L}]$ se $\mathcal{I}(\ell) = \langle F, L \rangle$ (cf. Lema 2.6). Observe que

[1] Observe que $\mathcal{Z}(F)$ é superfície reduzida e irredutível pois F tem grau 1 e portanto, é livre de quadrados.

- Ψ está bem definida.

  Como $\{F, L\}$ é L.I., $L \notin [F]$ e assim, $\overline{L} \neq \overline{0}$ em $\frac{S_1}{[F]}$. Suponha que $M \in S_1$ é tal que $\langle F, L\rangle = \langle F, M\rangle$. Então $M \in \langle F, L\rangle$, de onde concluímos que $M \in [F, L]$ e assim, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ não ambos nulos, tais que $M = \alpha F + \beta L$. Na verdade, $\beta \neq 0$, caso contrário $\{M, F\}$ seria linearmente dependente, o que é um absurdo. Assim, temos:

$$\overline{M} = \overline{\beta L} = \beta \overline{L} \Longrightarrow \overline{M} \in [\overline{L}] \Longrightarrow [\overline{M}] = [\overline{L}].$$

- Ψ é injetora.

  Sejam $\ell = \mathcal{Z}(F, L)$ e $m = \mathcal{Z}(F, M)$ retas em $\mathfrak{L}(\mathrm{H})$, tais que $\Psi(\ell) = \Psi(m)$. Note que:

$$\Psi(\ell) = \Psi(m) \Longleftrightarrow [\overline{L}] = [\overline{M}] \Longleftrightarrow \overline{L} \in [\overline{M}] \;\text{ e }\; \overline{M} \in [\overline{L}].$$

  Agora,

$$\begin{aligned}
\overline{L} \in [\overline{M}] \quad &\Longleftrightarrow \quad \overline{L} = \gamma \overline{M}, \text{ para algum } \gamma \in \mathbb{C} - \{0\} \\
&\Longleftrightarrow \quad \overline{L - \gamma M} = \overline{0} \text{ em } \frac{S_1}{[F]} \\
&\Longleftrightarrow \quad L - \gamma M \in [F] \\
&\Longleftrightarrow \quad L - \gamma M = \delta F, \text{ para algum } \delta \in \mathbb{C} - \{0\} \\
&\Longleftrightarrow \quad L \in \langle F, M\rangle = \mathcal{I}(m).
\end{aligned}$$

  De forma análoga, a condição $\overline{M} \in [\overline{L}]$ implica em $M \in \langle F, L\rangle = \mathcal{I}(\ell)$. De onde concluímos que $\mathcal{I}(\ell) = \mathcal{I}(m)$. Portanto, $\ell = m$.

- Ψ é sobrejetora.

  Seja $[\overline{M}] \in \mathbb{P}\left(\frac{S_1}{[F]}\right)$. Assim $\overline{M} \neq \overline{0}$, o que implica em $M \notin [F]$, ou seja, M e F são linearmente independentes. Logo, a reta $\ell = \mathcal{Z}(F, M) \subset \mathcal{Z}(F)$ é tal que $\Psi(\ell) = [\overline{M}]$.

Finalmente, observe que fixada a base $\{F, F_1, F_2, F_3\}$ de S_1

$$[\alpha : \beta : \gamma] \longmapsto [\overline{\alpha F_1 + \beta F_2 + \gamma F_3}]$$

define uma bijeção de $\mathbb{P}^2$ em $\mathbb{P}\left(\frac{S_1}{[F]}\right)$. □

Corolário 3.1. *Qualquer plano em $\mathbb{P}^3$ contém infinitas retas.*

Retas numa superfície quádrica

Lembremos que superfícies projetivamente equivalentes[2] em $\mathbb{P}^3$ possuem a mesma quantidade de retas (cf. Corolário 1.19). Assim, o teorema de classificação que enunciaremos a seguir, reduz nosso estudo à contagem de retas nas seguintes superfícies quádricas $\mathcal{Z}(x^2)$, $\mathcal{Z}(x^2+y^2)$, $\mathcal{Z}(x^2+y^2+z^2)$ e $\mathcal{Z}(x^2+y^2+z^2+t^2)$ (cf. Corolário 3.2).

Teorema 3.1 (Forma normal das quádricas). *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo com característica diferente de 2 e $F = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_ix_j \in \mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$ um polinômio homogêneo não nulo de grau total 2. Então $\mathcal{Z}(F)$ é projetivamente equivalente a uma quádrica definida por uma equação da forma*

$$c_0x_0^2 + c_1x_1^2 + \cdots + c_nx_n^2, \quad \textit{com} \quad c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \quad \textit{não todos nulos.}$$

Demonstração. Veja Teorema 4, p. 411, em Cox, Little e O'Shea (1997). □

No espaço projetivo complexo temos o seguinte corolário.

Corolário 3.2 (Classificação das quádricas em $\mathbb{P}^3$). *Uma superfície quádrica em $\mathbb{P}^3$, a menos de uma mudança de coordenadas projetivas, é definida por um polinômio que assume uma das seguintes formas*

(i) $F_1 = x^2$,

(ii) $F_2 = x^2 + y^2$,

(iii) $F_3 = x^2 + y^2 + z^2$,

(iv) $F_4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.

Além disso, toda quádrica não singular é projetivamente equivalente a $\mathcal{Z}(F_4)$.

Demonstração. Se $F \in \mathbb{C}[x,y,z,t]$ for homogêneo de grau 2, então o teorema acima nos garante que a menos de uma mudança de coordenadas projetivas $F = c_0x^2 + c_1y^2 + c_2z^2 + c_3t^2$ sendo $c_1,\dots,c_3$ números complexos nem todos nulos. Agora, considere $b_i \in \mathbb{C}$ tal que $b_i^2 = c_i$ para $i = 0,\dots,3$. Desta forma, podemos escrever $F = (b_0x)^2 + (b_1y)^2 + (b_2z)^2 + (b_3t)^2$, e considerar $\varphi : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ a MCP dada por $[a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \longmapsto [b_0a_0 : b_1a_1 : b_2a_2 : b_3a_3]$. Assim, $\varphi(\mathcal{Z}(F)) = \mathcal{Z}(F_i)$ sendo $i = \#\{j \,|\, b_j \neq 0\}$ (ou seja, i é a quantidade de coeficientes não nulos de F). Para concluir, observe que a única quádrica não singular na lista é $\mathcal{Z}(F_4)$.[3] Como as mudanças de coordenadas projetivas preservam pontos singulares, toda quádrica não singular é projetivamente equivalente a $\mathcal{Z}(F_4)$. □

---

[2]As superfícies X, Y em $\mathbb{P}^3$ são ditas *projetivamente equivalentes* se existe uma MCP $\mathbf{T} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $\mathbf{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{Y}$.

[3]As derivadas parciais de F_4 são $\partial_x F_4 = 2x$, $\partial_y F_4 = 2y$, $\partial_z F_4 = 2z$ e $\partial_t F_4 = 2t$. Lembre que $\mathrm{p} = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^3$ é um ponto singular da superfície $\mathcal{Z}(F_4)$ se, e somente se, $\partial_u F_4(\mathrm{p}) = 0$ para todo $u \in \{x,y,z,t\}$. Neste caso, p é um ponto singular se, e somente se, $a_i = 0$ para todo i. Portanto, $\mathcal{Z}(F_4)$ não possui pontos singulares.

Assim basta analisar os casos listados no Corolário 3.2 (ilustrados na Figura 3.1)

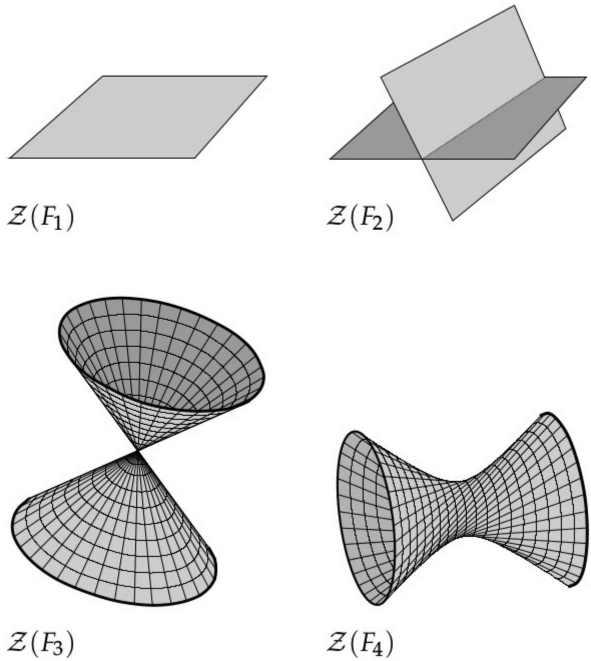


Figura 3.1: Superfícies quádricas em $\mathbb{P}^3$.

(i) $F_1 = x^2$ define a quádrica não reduzida $\mathcal{Z}(F_1)$. Observe que $\mathcal{Z}(x^2) = \mathcal{Z}(x)$ é um plano. Logo contém infinitas retas.

(ii) $F_2 = x^2 + y^2$ define uma quádrica reduzida, redutível e singular ao longo da reta $\mathcal{Z}(x, y)$.[4] Como $F_2 = (x+iy)(x-iy)$, segue que $\mathcal{Z}(F_2) = \mathcal{Z}(x+iy) \cup \mathcal{Z}(x-iy)$. Ou seja, é a união dos planos $\mathcal{Z}(x + iy)$ e $\mathcal{Z}(x - iy)$ (logo é redutível). Portanto, contém infinitas retas.

(iii) $F_3 = x^2+y^2+z^2$ define uma quádrica irredutível[5] e singular no ponto $\mathcal{Z}(x, y, z)$.[6]

[4]As derivadas parciais de F_2 são $\partial_x F_2 = 2x$, $\partial_y F_2 = 2y$ e $\partial_z F_2 = \partial_t F_2 = 0$. Portanto, $\mathrm{p} = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^3$ é um ponto singular da superfície $\mathcal{Z}(F_2)$ se, e somente se, $a_0 = a_1 = 0$. Ou seja, $\mathrm{p} \in \mathcal{Z}(x, y)$.

[5]Pelo absurdo, suponha que F_3 é um polinômio redutível. Logo, $F_3 = L \cdot M$ sendo L e M formas lineares. Assuma que $L = A_1x+A_2y+A_3z+A_4t$ e $M = B_1x+B_2y+B_3z+B_4t$. Então $A_i B_4 = 0 = B_i A_4$ para todo i, o que implica em $A_4 = B_4 = 0$. Se $B_i \neq 0$, segue que $A_j = A_k = 0$ e $A_i \neq 0$, sendo $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Neste caso, $B_j = B_k = 0$ o que implica em $F_3 = A_i B_i u^2$ para um determinado $u \in \{x, y, z\}$, o que é um absurdo.

[6]As derivadas parciais de F_3 são $\partial_x F_3 = 2x$, $\partial_y F_3 = 2y$, $\partial_z F_3 = 2z$ e $\partial_t F_3 = 0$. Portanto,

Proposição 3.2. *$\mathcal{Z}(F_3)$ contém infinitas retas.*

Demonstração. Considere v $= [0:0:0:1] \in \mathcal{Z}(F_3)$ (o único ponto singular de $\mathcal{Z}(F_3)$). Para cada ponto q $\in \mathcal{Z}(F_3)$, q $\neq$ v, denotaremos por $\ell_{\mathrm{v,q}}$ a única reta em $\mathbb{P}^3$ que passa por v e q.

Afirmação 1: A reta $\ell_{\mathrm{v,q}}$ esta contida na superfície $\mathcal{Z}(F_3)$.

De fato, assuma que q $= [q_0 : q_1 : q_2 : q_3] \in \mathcal{Z}(F_3)$. Assim, os pontos da reta $\ell_{\mathrm{v,q}}$ podem ser representados na forma

$$\ell_{\mathrm{v,q}} = \left\{[\beta q_0 : \beta q_1 : \beta q_2 : \alpha + \beta q_3] \in \mathbb{P}^3 \,\middle|\, [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\right\}.$$

Além disso,

$$F_3([\beta q_0 : \beta q_1 : \beta q_2 : \alpha + \beta q_3]) = \beta^2(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2) = 0, \ \forall\, [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1,$$

visto que q $= [q_0 : q_1 : q_2 : q_3] \in \mathcal{Z}(F_3)$. Portanto, $\ell_{\mathrm{v,q}} \subset \mathcal{Z}(F_3)$.

A seguir, considere a curva plana $\mathcal{C} = \mathcal{Z}(F_3, t)$. Observe que todo ponto q $\in \mathcal{C}$ pertence à superfície $\mathcal{Z}(F_3)$ e é distinto de v. Se

$$\mathcal{L} :\,= \{\ell \subset \mathbb{P}^3 | \ell \text{ é uma reta contida em } \mathcal{Z}(F_3) \text{ e v} \in \ell\},$$

então

$$\begin{array}{rccc} \Omega : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\ & \mathrm{q} & \longmapsto & \ell_{\mathrm{v,q}} \end{array}$$

é uma função bem definida. De fato, é uma bijeção, conforme mostraremos a seguir.

- Ω é injetora. De fato, considere p, q $\in \mathcal{C}$ tais que $\ell_{\mathrm{v,q}} = \ell_{\mathrm{v,p}}$. Mas p, q $\in \mathcal{C}$, daí temos q $= [q_0 : q_1 : q_2 : 0]$ e p $= [p_0 : p_1 : p_2 : 0]$. Visto que p $\in \ell_{\mathrm{v,q}}$, p $= [\beta q_0 : \beta q_1 : \beta q_2 : \alpha]$ para algum $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Logo, $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$. Portanto, q = p.

- Ω é sobrejetora. Sejam $\ell \in \mathcal{L}$ e p $\in \ell \cap \mathcal{Z}(t)$. Então p $\neq$ v, o que implica em $\ell = \ell_{\mathrm{v,p}}$. Agora, como a reta ℓ está contida na superfície $\mathcal{Z}(F_3)$, segue que F_3(p) = 0. Logo p $\in \mathcal{Z}(F_3, t) = \mathcal{C}$.

Como $\mathcal{C}$ é um conjunto infinito, existem infinitas retas contidas na superfície $\mathcal{Z}(F_3)$. □

(iv) $F_4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^4$ define uma quádrica não singular em $\mathbb{P}^3$ (em particular, F_4 é um polinômio irredutível).

---

v $= [a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^3$ é um ponto singular da superfície $\mathcal{Z}(F_2)$ se, e somente se, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Ou seja, v $= [0:0:0:1]$.

Verifica-se que a superfície quádrica $\mathcal{Z}(F_4)$ contém duas famílias de retas $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ parametrizadas por $\mathbb{P}^1$, definidas da seguinte forma.

Para cada $p = [p_0 : p_1]$ em $\mathbb{P}^1$ considere as retas

- $L_p \in \mathcal{L}$, dada por

$$L_p = \left\{ [i(\alpha p_0 + \beta p_1) : \alpha p_0 - \beta p_1 : i(\alpha p_0 + \beta p_1) : \alpha p_1 - \beta p_0] \,\middle|\, [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1 \right\}.$$

- $M_p \in \mathcal{M}$, dada por

$$M_p = \left\{ [i(\alpha p_0 - \beta p_1) : \alpha p_0 - \beta p_1 : i(-\alpha p_1 + \beta p_0) : \alpha p_1 + \beta p_0] \,\middle|\, [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1 \right\}.$$

Exercício 3.1. Verifique que as retas L_p e M_p estão contidas na superfície quádrica $\mathcal{Z}(F_4)$.

De fato, a proposição que enunciaremos a seguir nos permite concluir que $\mathfrak{L}(\mathcal{Z}(F_4)) = \mathcal{L} \,\dot{\cup}\, \mathcal{M}$.

Proposição 3.3. *As famílias de retas $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ contidas na superfície quádrica $\mathcal{Z}(F_4)$ satisfazem as seguintes propriedades*

(i) *Retas de mesma família não se intersectam.*

(ii) *Retas de famílias diferentes se intersectam em um único ponto.*

(iii) *Se* $\mathrm{r} \in \mathcal{Z}(F_4)$, *existem únicas retas* L_{p_r} *e* M_{q_r} *tais que* $L_{p_\mathrm{r}} \cap M_{q_\mathrm{r}} = \{\mathrm{r}\}$.

(iv) *Dada uma reta* $\ell \subset \mathcal{Z}(F_4)$, *tem-se que* $\ell \in \mathcal{L}$ *ou* $\ell \in \mathcal{M}$.

Demonstração. Confira as páginas 66, 67 em Mendoza e Rojas (2009). □

Corolário 3.3. *A superfície quádrica $\mathcal{Z}(F_4)$ contém infinitas retas.*

Demonstração. Segue do item (i) na Proposição 3.3 que $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{L}$ dada por $p \longmapsto L_p$ é uma bijeção. Logo, a superfície quádrica $\mathcal{Z}(F_4)$ contém infinitas retas. □

De acordo com as análises feitas acima, concluímos que

Proposição 3.4. *Toda superfície quádrica em $\mathbb{P}^3$ contém infinitas retas.*

3.2 Retas em superfícies de grau 3

Considere $F \in S_3$ não nulo e livre de quadrados. Assim, $\mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície cúbica reduzida. Temos duas possibilidades a serem analisadas:

- F é redutível. Neste caso, $F = LG$ com $L \in S_1$ e $G \in S_2$. Assim,

$$\mathcal{Z}(F) = \mathcal{Z}(LG) = \mathcal{Z}(L) \cup \mathcal{Z}(G).$$

  Como $\mathcal{Z}(L)$ é plano, concluímos que $\mathcal{Z}(F)$ contém infinitas retas.

- F é irredutível. Temos a seguinte proposição.

Proposição 3.5. *Seja* X $\subset \mathbb{P}^3$ *uma superfície cúbica reduzida e irredutível. Verifica-se que o conjunto* Sing(X) *é exatamente uma das seguintes possibilidades*

(i) $\emptyset$, *i.e.* X *é não singular,*

(ii) *um conjunto finito de pontos em* $\mathbb{P}^3$,

(iii) *uma reta em* $\mathbb{P}^3$.

Demonstração. Se X $\subset \mathbb{P}^3$ é não singular, então Sing$(X) = \emptyset$. Caso contrário, o Teorema 3.1, p. 10 em Assis (2011), nos garante que Sing(X) é um conjunto finito de pontos ou uma reta em $\mathbb{P}^3$. □

Exemplo 3.1. Seja X $\subset \mathbb{P}^3$ a superfície cúbica definida por $F = txy + z(x^2 - y^2) + \gamma \in S_3$ sendo $\gamma = c_0x^3 + c_1x^2y + c_2xy^2 + c_3y^3$. Observe que

(a) X é reduzida.[7]

(b) X é irredutível.[8]

---

[7] Pelo absurdo, suponha que F não é livre de quadrados. Neste caso, $F = L^2M$ com $L, M \in S_1$. Agora, visto que a reta $\ell = \mathcal{Z}(x, y) \subset$ X, segue de (2.6) que $L^2M \in \mathcal{I}(\ell) = \langle x, y\rangle$. Logo, $L \in \mathcal{I}(\ell)$ ou $M \in \mathcal{I}(\ell)$ (visto que $\mathcal{I}(\ell)$ é um ideal primo). Por outro lado, se calcularmos a derivada parcial de F em relação a t, chegamos em: $2(\partial_t L)LM = xy$, se $M \in \mathcal{I}(\ell)$, o que implica em $L, M \in \langle x, y\rangle$. Ou seja, as únicas variáveis que comparecem em F são x e y, o que é um absurdo. Caso contrário, $(\partial_t M)L^2 = xy$, o que também é um absurdo.

[8] Pelo absurdo, suponha que F é redutível. Neste caso, $F = LG$ com $L \in S_1$ e $G \in S_2$. Tendo em consideração que a reta $\ell = \mathcal{Z}(x, y) \subset$ X, segue de (2.6) que $LG \in \mathcal{I}(\ell) = \langle x, y\rangle$. Logo, $L \in \mathcal{I}(\ell)$ ou $G \in \mathcal{I}(\ell)$ (visto que $\mathcal{I}(\ell)$ é um ideal primo). Observe que se $L \in \mathcal{I}(\ell)$, então $\partial_t F = xy = L(\partial_t G)$ e $\partial_z F = x^2 + y^2 = L(\partial_z G)$ o que é absurdo (visto que $x, y, x - y, x + y$ são dois a dois primos entre si). Do contrário (i.e. $L \notin \mathcal{I}(\ell)$), segue que $\partial_t F = xy = (\partial_t L)G$ e $\partial_z F = x^2 + y^2 = (\partial_z L)G$, o que é absurdo (visto que $\partial_t L$ e $\partial_z L$ são ambas não nulas, uma vez que as variáveis t e z comparecem em F).

(c) $\mathrm{Sing}(\mathrm{X}) = \mathcal{Z}(x, y)$. Lembre que os pontos singulares são determinados por $\mathcal{Z}(\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F, \partial_t F)$, ou seja, pelas soluções do sistema

$$\begin{cases} \partial_x F = ty + 2zx + 3c_0x^2 + 2c_1xy + c_2y^2 = 0, \\ \partial_y F = tx - 2zy + c_1x^2 + 2c_2xy + 3c_3y^2 = 0, \\ \partial_z F = x^2 - y^2 = 0, \\ \partial_t F = xy = 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$\mathrm{p} = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \in \mathrm{Sing}(\mathrm{X}) \iff a_0 = a_1 = 0 \iff \mathrm{p} \in \mathcal{Z}(x, y).$$

(d) X contém infinitas retas. Para cada $\mu \in \mathbb{C}$ considere o plano $H_\mu = \mathcal{Z}(x - \mu y)$ contendo a reta $\ell = \mathcal{Z}(x, y)$ (cf. notações no Exercício 2.4). Note que

$$H_\mu \cap \mathrm{X} = \mathcal{Z}(x - \mu y, F) = \mathcal{Z}\left(x - \mu y, y^2[\mu t + (\mu^2 - 1)z + \gamma(\mu, 1)y]\right) = \ell \cup \ell_\mu$$

sendo

$$\ell_\mu = \mathcal{Z}\left(x - \mu y, \mu t + (\mu^2 - 1)z + \gamma(\mu, 1)y\right).$$

Portanto, $\ell_\mu \subset \mathrm{X}$ são infinitas retas em X (cf. Exercício 2.4).

A menos de uma MCP, toda superfície cúbica irredutível reduzida, cujo conjunto de singularidades é uma reta, podemos assumir que tal reta é $\mathcal{Z}(x, y)$. De fato, o exemplo que acabamos de apresentar é um caso particular da seguinte proposição.

Proposição 3.6. *Seja* $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$ *uma superfície cúbica irredutível e reduzida, tal que* $\mathrm{Sing}(\mathrm{X}) = \mathcal{Z}(x, y) \subset \mathbb{P}^3$. *Então verifica-se que*

(i) $F = t \cdot \alpha(x, y) + z \cdot \beta(x, y) + \gamma(x, y)$, *para algum* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[x, y]$, *sendo* α, β *homogêneos de grau 2 e* γ *homogêneo de grau 3.*

(ii) X *contém infinitas retas.*

Demonstração. Confira a Proposição 3.1, p. 10 em Assis (2011). □

Exemplo 3.2. Considere $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$, sendo $F = xz^2 + x^2t + y^3$. Observe que

- X é uma superfície cúbica irredutível e reduzida.
- $\mathrm{Sing}(\mathrm{X}) = \{[0 : 0 : 0 : 1]\}$.[9]

[9] Seja $\partial_u F$ a derivada parcial de F em relação a $u \in \{x, y, z, t\}$. Assim, $\partial_x F = z^2 + 2xt$, $\partial_y F = 3y^2$, $\partial_z F = 2xz$ e $\partial_t F = x^3$. Portanto, $\mathrm{p} = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^3$ é um ponto singular da superfície $\mathcal{Z}(F)$ se e somente se $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Ou seja, $\mathrm{p} = [0 : 0 : 0 : 1]$.

Pergunta

A superfície X $= \mathcal{Z}(xz^2 + x^2t + y^3)$ é cúbica irredutível e reduzida, com uma singularidade. Observe que $\ell = \mathcal{Z}(x, y)$ está contida neste cúbica. Será que contém mais retas?

Para responder esta pergunta usaremos uma estratificação do conjunto das retas em $\mathbb{P}^3$, que apresentamos a seguir.

3.2.1 Contagem de retas via estratificação

A estratificação da família de retas em $\mathbb{P}^3$ que iremos introduzir a seguir, pode ser utilizada para a contagem de retas em diversas superfícies. De fato, para facilitar tais cálculos, poderemos eventualmente utilizar algum pacote de computação (tipo Maxima, Python, entre outros).

Inicialmente, precisamos lembrar que uma reta $\ell \subset \mathbb{P}^3$ é determinada por um subespaço $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$, mais precisamente, $\ell = \mathbb{P}(W)$ (cf. Corolário 1.9). Assuma que W é gerado pelos vetores $\mathrm{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ e $\mathrm{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)$, então $\Psi(\ell) \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^5$ é determinada[10] pelos menores 2×2 da matriz

$$\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

De fato,

$$\Psi(\ell) = [\mathrm{w}_{01} : \mathrm{w}_{02} : \mathrm{w}_{03} : \mathrm{w}_{12} : \mathrm{w}_{13} : \mathrm{w}_{23}]$$

sendo $\mathrm{w}_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$ para $0 \leqslant i < j \leqslant 3$. Assim, podemos definir a seguinte estratificação para $\Sigma = \{$ retas em $\mathbb{P}^3\}$

$$\Sigma = \mathcal{V}_0 \,\dot{\cup}\, \mathcal{V}_1 \,\dot{\cup}\, \mathcal{V}_2 \,\dot{\cup}\, \mathcal{V}_3 \,\dot{\cup}\, \mathcal{V}_4 \,\dot{\cup}\, \mathcal{V}_5 \tag{3.2}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_0 &= \{\ell \in \Sigma | \mathrm{w}_{01} \neq 0\}, \\
\mathcal{V}_1 &= \{\ell \in \Sigma | \mathrm{w}_{01} = 0,\ \mathrm{w}_{02} \neq 0\}, \\
\mathcal{V}_2 &= \{\ell \in \Sigma | \mathrm{w}_{01} = \mathrm{w}_{02} = 0,\ \mathrm{w}_{03} \neq 0\}, \\
\mathcal{V}_3 &= \{\ell \in \Sigma | \mathrm{w}_{01} = \mathrm{w}_{02} = \mathrm{w}_{03} = 0,\ \mathrm{w}_{12} \neq 0\}, \\
\mathcal{V}_4 &= \{\ell \in \Sigma | \mathrm{w}_{01} = \mathrm{w}_{02} = \mathrm{w}_{03} = \mathrm{w}_{12} = 0,\ \mathrm{w}_{13} \neq 0\}, \\
\mathcal{V}_5 &= \{\ell \in \Sigma | \mathrm{w}_{01} = \mathrm{w}_{02} = \mathrm{w}_{03} = \mathrm{w}_{12} = \mathrm{w}_{13} = 0,\ \mathrm{w}_{23} \neq 0\} = \{\mathcal{Z}(x, y)\}.
\end{aligned}$$

[10] Lembre que se $\Sigma = \{$ retas em $\mathbb{P}^3\}$ e $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^5$ é a quádrica de Plücker, então $\Psi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{Q}$ é a bijeção da Proposição 2.1.

Descrição das retas em cada estrato

- Se $\mathrm{w}_{01} \neq 0$, então a matriz em (3.1) é equivalente[11] a uma matriz da forma
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{bmatrix}.$$
Assim,
$$\ell \in \mathcal{V}_0 \iff \ell = \mathbb{P}(W), \text{ sendo } W = [(1,0,a,b),(0,1,c,d)], \text{ com } a,b,c,d \in \mathbb{C}.$$

- Se $\mathrm{w}_{01} = 0$ e $\mathrm{w}_{02} \neq 0$, então a matriz em (3.1) é equivalente a uma matriz da forma
$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}.$$
Assim,
$$\ell \in \mathcal{V}_1 \iff \ell = \mathbb{P}(W), \text{ sendo } W = [(1,a,0,b),(0,0,1,c)], \text{ com } a,b,c \in \mathbb{C}.$$

- Se $\mathrm{w}_{01} = \mathrm{w}_{02} = 0$ e $\mathrm{w}_{03} \neq 0$, então a matriz em (3.1) é equivalente a uma matriz da forma
$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Assim,
$$\ell \in \mathcal{V}_2 \iff \ell = \mathbb{P}(W), \text{ sendo } W = [(1,a,b,0),(0,0,0,1)], \text{ com } a,b \in \mathbb{C}.$$

- Se $\mathrm{w}_{01} = \mathrm{w}_{02} = \mathrm{w}_{03} = 0$ e $\mathrm{w}_{12} \neq 0$, então a matriz em (3.1) é equivalente a uma matriz da forma
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}.$$
Assim,
$$\ell \in \mathcal{V}_3 \iff \ell = \mathbb{P}(W), \text{ sendo } W = [(0,1,0,a),(0,0,1,b)], \text{ com } a,b \in \mathbb{C}.$$

- Se $\mathrm{w}_{01} = \mathrm{w}_{02} = \mathrm{w}_{03} = \mathrm{w}_{12} = 0$ e $\mathrm{w}_{13} \neq 0$, então a matriz em (3.1) é equivalente a uma matriz da forma
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Assim,
$$\ell \in \mathcal{V}_4 \iff \ell = \mathbb{P}(W), \text{ sendo } W = [(0,1,a,0),(0,0,0,1)], \text{ com } a \in \mathbb{C}.$$

[11] ao realizarmos operações elementares nas suas linhas

- Se $w_{01} = w_{02} = w_{03} = w_{12} = w_{13} = 0$ e $w_{23} \neq 0$, então a matriz em (3.1) é equivalente a uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\ell \in \mathcal{V}_5 \iff \ell = \mathcal{Z}(x, y) = \mathbb{P}(W), \text{ sendo } W = [(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)].$$

Observação 3.1. Sejam $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F)$ uma superfície reduzida de grau d e ℓ uma reta em $\mathbb{P}^3$. Assuma que $\ell = \mathbb{P}(W)$ com $W \in G_2(\mathbb{C}^4)$ gerado pelos vetores $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ e $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, então

$$\ell = \left\{ [up_0 + vq_0 : up_1 + vq_1 : up_2 + vq_2 : up_3 + vq_3] \in \mathbb{P}^3 \;\middle|\; [u : v] \in \mathbb{P}^1 \right\}.$$

Neste caso,

$$\ell \subset \mathrm{X} \iff F(up_0 + vq_0, up_1 + vq_1, up_2 + vq_2, up_3 + vq_3) = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1.$$

Mais precisamente, seja $G(u, v) := F(up_0 + vq_0, up_1 + vq_1, up_2 + vq_2, up_3 + vq_3)$. Note que $G(u, v)$ é uma expressão polinomial homogênea de grau d em u e v da forma

$$G(u, v) = A_0 u^d + A_1 u^{d-1} v + \cdots + A_{d-1} u v^{d-1} + A_d v^d$$

no qual $A_0, A_1, \ldots, A_d$ expressões polinomiais nas coordenadas de p e q. Portanto,

$$\ell \subset \mathrm{X} \iff G(u, v) = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \iff A_i = 0, \ \forall\, i \in \{0, \ldots, d\}. \tag{3.3}$$

Exemplo 3.3. Considere $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$ sendo $F = xz^2 + x^2 t + y^3$. Observe que a reta $\ell = \mathcal{Z}(x, y) \subseteq \mathrm{X}$, visto que $F \in \mathcal{I}(\ell) = \langle x, y \rangle$. A seguir mostraremos que ℓ é a única reta contida na superfície em questão. Isso é equivalente a mostrar que $\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_j = \emptyset$, para todo $j \in \{0, ..., 4\}$, sendo $\mathcal{V}_j$ o estrato definido em (3.2), uma vez que $\mathcal{V}_5 = \{\ell\}$. De fato, considere m uma reta em $\mathcal{V}_j$.

$\boxed{j = 0}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1, 0, a, b), (0, 1, c, d)])$ com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \iff \underbrace{F(u, v, au + cv, bu + dv)}_{(b+a^2)u^3 + (d+2ac)u^2 v + c^2 u v^2 + v^3} = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_0 = \emptyset.$$

$\boxed{j = 1}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1, a, 0, b), (0, 0, 1, c)])$ com $a, b, c \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \iff \underbrace{F(u, au, v, bu + cv)}_{(b+a^3)u^3 + cvu^2 + uv^2} = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_1 = \emptyset.$$

$\boxed{j = 2}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1, a, b, 0), (0, 0, 0, 1)])$ com $a, b \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \iff \underbrace{F(u, au, bu, v)}_{(b^2+a^3)u^3+u^2v} = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset.$$

$\boxed{j = 3}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0, 1, 0, a), (0, 0, 1, b)])$ com $a, b \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \iff \underbrace{F(0, u, v, au + bv)}_{u^3} = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_3 = \emptyset.$$

$\boxed{j = 4}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0, 1, a, 0), (0, 0, 0, 1)])$ com $a \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \iff \underbrace{F(0, u, au, v)}_{u^3} = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_4 = \emptyset.$$

No Exemplo B.4 no Apêndice B você encontrará como calcular os polinômios $G(u, v)$, da equação (3.3), em cada estrato no Maxima.

Exemplo 3.4. Considere a superfície de Cayley $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$ definida por $F = yzt + xzt + xyt + xyz$. Observe que

(a) $\#(\mathrm{Sing}(\mathrm{X})) = 4$. De fato, considere $\mathrm{p} = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \in \mathrm{Sing}(\mathrm{X})$.[12] Observe que

$$\partial_x F = yz + tz + ty, \quad \partial_z F = xy + ty + tx,$$
$$\partial_y F = xz + tz + tx, \quad \partial_t F = yz + xz + xy.$$

Temos duas possibilidades para a_0.

$\underline{a_0 = 0.}$ Neste caso,

$$\partial_y F(\mathrm{p}) = a_2 a_3 = 0, \ \partial_z F(\mathrm{p}) = a_1 a_3 = 0 \text{ e } \partial_t F(\mathrm{p}) = a_1 a_2 = 0.$$

Cujo conjunto de soluções é $\Big\{[0 : 1 : 0 : 0], [0 : 0 : 1 : 0], [0 : 0 : 0 : 1]\Big\}$.

$\underline{a_0 \neq 0.}$ Neste caso, podemos assumir que $\mathrm{p} = [1 : b_1 : b_2 : b_3]$ e obtemos:

$$\partial_x F(\mathrm{p}) = b_1 b_2 + b_3 b_2 + b_3 b_1 = 0, \quad \partial_z F(\mathrm{p}) = b_3(1 + b_1) + b_1 = 0,$$
$$\partial_y F(\mathrm{p}) = b_2 + b_3 b_2 + b_3 = 0, \quad \partial_t F(\mathrm{p}) = b_2(1 + b_1) + b_1 = 0.$$

[12] Lembre que os pontos singulares de X são determinados pelos pontos de $\mathcal{Z}(\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F, \partial_t F) \subset \mathbb{P}^3$.

Note que

$$\partial_z F(\mathrm{p}) - \partial_t F(\mathrm{p}) = (b_3 - b_2)(1 + b_1) = 0 \Longrightarrow b_2 = b_3.^{13}$$

$$\partial_x F(\mathrm{p}) - \partial_y F(\mathrm{p}) = (b_3 + b_2)(1 - b_1) = 0 \Longrightarrow b_2 = -b_3.^{14}$$

De onde concluímos que $b_2 = b_3 = 0$. Agora, segue de $\partial_t F(\mathrm{p}) = 0$ (após substituir $b_2 = 0$) que b_1 também é zero. Portanto, obtemos o ponto singular $[1 : 0 : 0 : 0]$ neste aberto ($a_0 \neq 0$).

Portanto,

$$\mathrm{Sing(X)} = \Big\{[1 : 0 : 0 : 0], [0 : 1 : 0 : 0], [0 : 0 : 1 : 0], [0 : 0 : 0 : 1]\Big\}.$$

(b) $\#\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = 9$. De fato, considere a reta m no estrato $\mathcal{V}_j$ conforme (3.2). Para cada $j \in \{0, ..., 5\}$ tem-se que

$\boxed{j = 0}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1, 0, a, b), (0, 1, c, d)])$ com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Logo, segundo (3.3)

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow F(u, v, au + cv, bu + dv) = 0, \ \forall [u : v] \in \mathbb{P}^1.$$

Note que $F(u, v, au + cv, bu + dv) = A_0 u^2 v + A_1 uv^2 + A_2 uv^2 + A_3 v^3$ sendo

$$\begin{cases} A_0 = ab, \\ A_1 = ad + bc + ab + b + a, \\ A_2 = cd + ad + d + bc + c, \\ A_3 = cd. \end{cases}$$

Assim, $m \subset \mathrm{X}$ se, e somente se, $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ é solução do sistema $A_i = 0$, com $i = 0, 1, 2, 3$, cujas soluções são dadas por[15]

a	b	c	d
0	0	0	0
0	-1	-1	0
-1	0	0	-1

[13] Visto que ao substituir $b_1 = -1$ em $\partial_z F(\mathrm{p}) = b_3(1+b_1)+b_1 = 0$, concluímos que $b_1 = 0$, chegando no absurdo $b_1 = -1 = 0$.

[14] Se $b_1 = 1$, então substituindo $b_1 = 1$ em $\partial_z F(\mathrm{p}) = 0$ e $\partial_t F(\mathrm{p}) = 0$, obtemos $b_2 = b_3 = -1/2$, que não é solução de $\partial_y F(\mathrm{p}) = 0$.

[15] Visto que $A_0 = ab = 0$ e $A_3 = cd = 0$. Temos as seguintes possibilidades para analisar: (I) Se $a = c = 0$, então ao substituirmos $a = c = 0$ em $A_1 = 0$ (resp. $A_2 = 0$), obtemos $b = 0$ (resp. $d = 0$). (II) Se $a = d = 0$ e $c \neq 0$, então ao substituirmos $a = d = 0$ em $A_1 = 0$ (resp. $A_2 = 0$), obtemos $b(c + 1) = 0$ (resp. $c(b + 1) = 0$). Como $c \neq 0$, concluímos que $b = c = -1$. (III) Se $b = c = 0$ e $a \neq 0$, então ao substituirmos $b = c = 0$ em $A_1 = 0$ (resp. $A_2 = 0$), obtemos $a(d + 1) = 0$ (resp. $d(a + 1) = 0$). Como $a \neq 0$, concluímos que $a = d = -1$. (IV) Se $b = d = 0$ e $a \neq 0$, então ao substituirmos $b = d = 0$ em $A_1 = 0$, obtemos $a = 0$, o que é um absurdo.

Portanto, $\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_0) = 3$.

$\boxed{j = 1}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1, a, 0, b), (0, 0, 1, c)])$ com $a, b, c \in \mathbb{C}$. Logo, segundo (3.3)

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow F(u, au, v, bu + cv) = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1.$$

Note que $F(u, au, v, bu + cv) = A_0 u^2 v + A_1 uv^2 + A_2 uv^2 + A_3 v^3$ sendo

$$A_0 = ab, \ A_1 = ac + ab + b + a, \ A_2 = (a + 1)c \ \text{ e } \ A_3 = 0.$$

Assim,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \begin{cases} ab = 0, \\ ac + ab + b + a = 0, \\ (a + 1)c = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow (a, b, c) \in \Big\{(0, 0, 0), (-1, 0, -1)\Big\}.$$

Portanto, $\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_1) = 2$.

$\boxed{j = 2}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1, a, b, 0), (0, 0, 0, 1)])$ com $a, b \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(u, au, bu, v)}_{abu^3 + (ab+b+a)u^2 v} = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_2) = 1.$$

$\boxed{j = 3}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0, 1, 0, a), (0, 0, 1, b)])$ com $a, b \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(0, u, v, au + bv)}_{au^2 v + buv^2} = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_3) = 1.$$

$\boxed{j = 4}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0, 1, a, 0), (0, 0, 0, 1)])$ com $a \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(0, u, au, v)}_{au^2 v} = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_4) = 1.$$

$\boxed{j = 5}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]) = \mathcal{Z}(x, y)$. Visto que $F \in \mathcal{I}(m) = \langle x, y \rangle$, segue que $m \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$.

Portanto,

$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_0)$	3	$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_2)$	1	$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_4)$	1
$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_1)$	2	$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_3)$	1	$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_5)$	1

Salientamos que a determinação dessas retas em cada estrato pode ser realizada de forma mais rápida utilizando o pacote de computação Maxima (on-line disponível em Maxima). Confira a implementação desses cálculos no Apêndice B, Exemplo B.5.

Exercício 3.2. Considere $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(yzt + xzt + xyt + xyz) \subset \mathbb{P}^3$ e seus pontos singulares $\mathrm{p}_1 = [1:0:0:0], \mathrm{p}_2 = [0:1:0:0], \mathrm{p}_3 = [0:0:1:0]$ e $\mathrm{p}_4 = [0:0:0:1]$. Denote por $\ell_{i,j}$ a reta determinada pelos pontos p_i e p_j, se $1 \leqslant i < j \leqslant 4$.

(a) Mostre que $\ell_{i,j} \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$ para todo i, j, tais que $1 \leqslant i < j \leqslant 4$.

(b) Determine $\mathcal{I}(\ell)$ para toda reta $\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$.

(c) Observe que as retas $\ell_{1,2}$ e $\ell_{3,4}$ são disjuntas. Determine

$$\max \left\{ \#C \;\middle|\; C \subseteq \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \text{ é constituído por retas duas a duas disjuntas} \right\}.$$

Exercício 3.3. Considere as superfícies cúbicas $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(yzt + xzt + xyt + xyz)$ e $\mathrm{Y} = \mathcal{Z}(G)$ definida por $G = 4(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) - (x + y + z + t)^3$ em $\mathbb{P}^3$. Mostre que

(a) $\mathrm{Sing}(\mathrm{Y}) = \Big\{[-1:1:1:1], [1:-1:1:1], [1:1:-1:1], [1:1:1:-1]\Big\}$.

(b) X e Y são projetivamente equivalentes.[16] Conclua que $\#\mathfrak{L}(\mathrm{Y}) = 9$.

Exemplo 3.5. Considere $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$ sendo $F = t(y^2 - xz) + y(x^2 - z^2)$. Observe que

(a) $\mathrm{Sing}(\mathrm{X}) = \{[0:0:0:1]\}$. Verifica-se que

$$\partial_x F = 2xy - tz,\ \partial_y F = 2ty + x^2 - z^2,\ \partial_z F = -2yz - tx \ \text{ e } \ \partial_t F = y^2 - xz.$$

Visto que a solução do sistema acima é dada por $x = y = z = 0$ e $t \in \mathbb{C}$, concluímos que $[0:0:0:1]$ é o único ponto singular da superfície X.

(b) $\#\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = 21$. Utilizando a estratificação em (3.2) verificamos que:

$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_0)$	10	$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_2)$	5	$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_4)$	0
$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_1)$	5	$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_3)$	0	$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_5)$	1

Conferir Exemplo B.6 no Apêndice B.

Exercício 3.4. Considere a superfície $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(t(y^2 - xz) + y(x^2 - z^2)) \subset \mathbb{P}^3$. Determine

[16] Sugestão: Determine uma MCP φ tal que $\varphi(\mathrm{q}_i) = \mathrm{p}_i$ para todo $i \in \{1,2,3,4\}$ sendo $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$ e p_4 os pontos definidos no Exercício 3.2 e q_i para $i = 1,2,3,4$ o ponto cuja i-ésima coordenada homogênea é -1 e todas as outras são iguais a 1.

(a) as 21 retas da contidas na superfície X.

(b) as retas em $\mathfrak{L}(\mathrm{X})$ que passam pelo ponto singular $[0:0:0:1]$.

(c) a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas no conjunto $\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_1$.

Nos Exemplos 3.3 a 3.5 apresentamos superfícies cúbicas, cujo conjunto de singularidades é finito, contendo exatamente 1, 9 e 21 retas, respectivamente. De fato, as superfície cúbicas singulares com finitas singularidades podem conter 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 21 retas (cf. Assis (2011)).

Exemplo 3.6. Considere a superfície $\mathcal{F}_3 = \mathcal{Z}(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) \subset \mathbb{P}^3$. Observe que:

(a) $\mathcal{F}_3$ é uma superfície cúbica não singular.[17]

(b) $\#\mathfrak{L}(\mathcal{F}_3) = 27$. Utilizando a estratificação em (3.2) verificamos que:

$\#(\mathfrak{L}(\mathcal{F}_3) \cap \mathcal{V}_0)$	18	$\#(\mathfrak{L}(\mathcal{F}_3) \cap \mathcal{V}_2)$	0	$\#(\mathfrak{L}(\mathcal{F}_3) \cap \mathcal{V}_4)$	0
$\#(\mathfrak{L}(\mathcal{F}_3) \cap \mathcal{V}_1)$	9	$\#(\mathfrak{L}(\mathcal{F}_3) \cap \mathcal{V}_3)$	0	$\#(\mathfrak{L}(\mathcal{F}_3) \cap \mathcal{V}_5)$	0

De fato, se $\omega \in \mathbb{C}$ for uma raiz cúbica primitiva da unidade (ou seja, $\omega^3 = 1$ e $\omega \neq 1$), as 27 retas em $\mathcal{F}_3$ são dadas por:

$$\begin{aligned} x + t\omega^k &= y + z\omega^j = 0, \quad \text{com } j,k \in \{0,1,2\}, \\ x + z\omega^k &= t + y\omega^j = 0, \quad \text{com } j,k \in \{0,1,2\}, \\ x + y\omega^k &= t + z\omega^j = 0, \quad \text{com } j,k \in \{0,1,2\}. \end{aligned}$$

A superfície cúbica $\mathcal{F}_3 = \mathcal{Z}(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) \subset \mathbb{P}^3$ é denominada superfície de Fermat de grau 3,[18] em homenagem a ao matemático francês Pierre de Fermat (1607–1665). Uma imagem com a representação dos pontos reais num modelo 3D, encontra-se no link Wikipedia - Cúbica de Fermat. Para ver as contas pelo Maxima, confira o Exemplo B.7 no Apêndice B.

Exercício 3.5. Considere a superfície $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(x^3+y^3+z^3+t^3-(x+y+z+t)^3) \subset \mathbb{P}^3$. Mostre que X é não singular e $\#\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = 27$.

A superfície cúbica não singular no Exercício 3.5 foi estudada pelo matemático alemão Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833–1872) por volta de 1870 (cf. Clebsch (1871)) e uma das suas peculiaridades é que as 27 retas podem ser definidas por equações (lineares) com coeficientes reais.[19] Na imagem a seguir são representadas as 27 retas na superfície cúbica de Clebsch.

[17] De fato, se $\partial_u F$ é a derivada parcial de F em relação a $u \in \{x,y,z,t\}$, então $\partial_u F = 3u^2$ para cada $u \in \{x,y,z,t\}$, e a única solução desse sistema é a origem. Portanto, $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}_3) = \emptyset$.

[18] No Capítulo 4 vamos abordar a contagem de retas nas superfícies de Fermat de grau d, definidas por $x^d + y^d + z^d + t^d \in S_d$ para $d \geqslant 5$.

[19] O leitor pode conferir este fato utilizando a estratificação em (3.2).

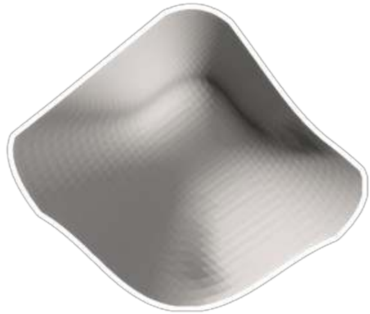


Figura 3.2: Cúbica de Fermat.

Observação 3.2. As superfícies cúbicas de Fermat (cf. Exemplo 3.6) e de Clebsch (cf. Exercício 3.5) contêm 27 retas. Na verdade, veremos na próxima subseção que toda superfície cúbica não singular contém exatamente 27 retas. Esse resultado é considerado um dos mais famosos teoremas de Geometria Algébrica do século XIX.

3.2.2 Retas em superfícies cúbicas não singulares

O teorema a seguir foi provado pelo matemático britânico Arthur Cayley (1821–1895) e o matemático inglês George Salmon (1819–1904) em 1847 (cf. Cayley (1849) e Salmon (1849)). E posteriormente também pelo matemático alemão Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833–1872) (cf. Clebsch (1861))

Teorema 3.2. *Toda superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$ contém exatamente 27 retas.*

A demonstração do Teorema 3.2, que vamos expor a seguir, tem como base o Capítulo 7 do Reid (1988).

Lembre que o Corolário 2.2 nos garante que toda superfície cúbica não singular contém pelo menos uma reta.

Teorema 3.3. *Seja $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície cúbica não singular e $\ell \in \mathfrak{L}(X)$. Então existem exatamente cinco planos $H_1, \ldots, H_5$ contendo a reta ℓ, tais que a curva residual C_i à reta ℓ no plano H_i é uma cônica singular, isto é,*

$$H_i \cap \mathrm{X} = \ell \cup C_i, \quad \text{com} \quad C_i = \ell_i \cup \ell_i' \quad (\ell_i \neq \ell_i').$$

Demonstração. Assuma que $\mathcal{I}(\mathrm{X}) = \langle F \rangle$. Note que, a menos de uma MCP podemos assumir que $\ell = \mathcal{Z}(z, t)$. Como $\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$, podemos escrever F na forma

$$F = A_1 \cdot x^2 + B_1 \cdot xy + C_1 \cdot y^2 + A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + A_3,$$

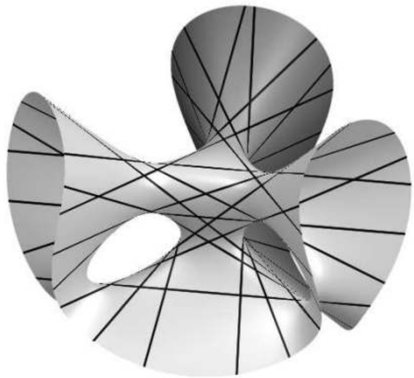


Figura 3.3: A Cúbica de Clebsch e suas 27 retas

com A_i, B_i e $C_i \in \mathbb{C}[z,t]$ homogêneos de grau i.

Agora, se o plano H contém a reta ℓ, então existe $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$ tal que $H = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t)$. Temos assim duas possibilidades.

$\boxed{\beta \neq 0}$ Neste caso, $H = \mathcal{Z}(t - \mu z)$ com $\mu = -\frac{\alpha}{\beta}$. Observe que

$$A_i(z, \mu z) = z^i A_i(1, \mu), \quad B_i(z, \mu z) = z^i B_i(1, \mu) \text{ e } C_1(z, \mu z) = z C_1(1, \mu).$$

Assim,

$$H \cap \mathrm{X} = \mathcal{Z}(t - \mu z, z \cdot F_\mu) \Longrightarrow C_H = \mathcal{Z}(t - \mu z, F_\mu)$$

sendo

$$F_\mu := a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot xy + c_1 \cdot y^2 + a_2 \cdot xz + b_2 \cdot yz + a_3 \cdot z^3,$$

com $a_i := A_i(1, \mu)$ para $i = 1, 2, 3$, $b_i := B_i(1, \mu)$ para $i = 1, 2$ e $c_1 := C_1(1, \mu)$.

$\boxed{\beta = 0}$ Neste caso, $H = \mathcal{Z}(z)$. Assim, $C_H = \mathcal{Z}(z, F_\infty)$ sendo

$$F_\infty := a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot xy + c_1 \cdot y^2 + a_2 \cdot xz + b_2 \cdot yz + a_3 \cdot z^3$$

com $a_i := A_i(0, 1)$ para $i = 1, 2, 3$, $b_i := B_i(0, 1)$ para $i = 1, 2$ e $c_1 := C_1(0, 1)$.

Agora, note que em ambos dos casos ($\beta \neq 0$ ou $\beta = 0$), tem-se que:

$$C_H \text{ é singular} \overset{Exerccio\ 1.54}{\iff} \begin{vmatrix} 2a_1 & b_1 & a_2 \\ b_1 & 2c_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 & 2a_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.4}$$
$$\iff 4a_1c_1a_3 - b_1^2a_3 - a_1b_2^2 + b_1a_2b_2 - a_2^2c_1 = 0.$$

Afirmação 1: Considere o polinômio

$$P = 4A_1C_1A_3 - B_1^2A_3 - A_1B_2^2 + B_1A_2B_2 - A_2^2C_1 \in \mathbb{C}[z,t]. \tag{3.5}$$

Verifica-se que P é um polinômio não nulo, homogêneo de grau 5 tal que C_H é singular sendo $H = \mathcal{Z}(\alpha z + \beta t)$, se $P(\beta, -\alpha) = 0$.

De fato, observe que:

- No caso $\beta \neq 0$, temos que $A_i(\beta, -\alpha) = \beta^i a_i(1, \mu)$ para $i = 1, 2, 3$, $B_i(\beta, -\alpha) = \beta^i b_i(1, \mu)$ para $i = 1, 2$ e $C_1(\beta, -\alpha) = \beta c_1(1, \mu)$. Portanto,

  $$P(\beta, -\alpha) = \beta^5 \cdot (4a_1c_1a_3 - b_1^2a_3 - a_1b_2^2 + b_1a_2b_2 - a_2^2c_1).$$

  Assim, por (3.4) temos que

  $$P(\beta, -\alpha) = 0 \iff C_H \text{ é singular.}$$

- No caso $\beta = 0$, temos que $[\beta : -\alpha] = [0 : 1]$. Assim,

  $$P(\beta, -\alpha) = P(0, 1) = 4a_1c_1a_3 - b_1^2a_3 - a_1b_2^2 + b_1a_2b_2 - a_2^2c_1.$$

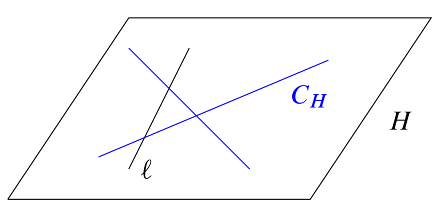
  E também segue de (3.4) que

  $$P(0, 1) = 0 \iff C_H \text{ é singular.}$$

Suponha, por absurdo, que $P = 0$. Então o conjunto Σ formado pelas curvas residuais C_H singulares seria infinito, o que é um absurdo (cf. o Corolário 2.6).

Assim, P é um polinômio não nulo, homogêneo de grau 5 em $\mathbb{C}[z,t]$, visto que A_i, B_i são homogêneos de grau i e C_1 é homogêneo de grau 1.

Portanto, segue da Afirmação 1 que cada zero de P (em $\mathbb{P}^1$), determina um plano contendo a reta ℓ cuja curva residual é singular. Como tal curva é uma cônica reduzida singular, então ela é a união de um par de retas (distintas), conforme ilustra a figura a seguir

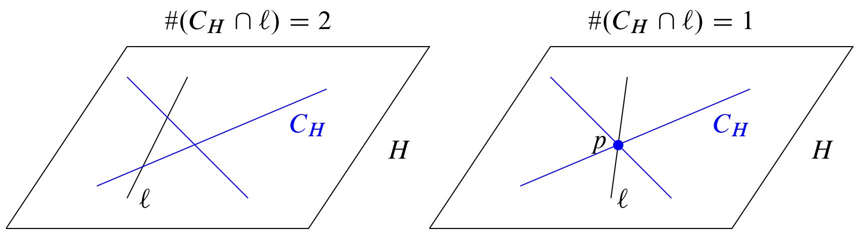


Afirmação 2: O polinômio P em (3.5) só possui raízes simples.

Suponha que $[0:1] \in \mathbb{P}^1$ é um zero de P, ou seja $z|P$. Observe que, $[0:1]$ é uma raiz simples de P se, e somente se, $z^2 \quad P$. Agora, sendo $[0:1]$ uma raiz de P, segue que no plano $H = \mathcal{Z}(z)$ a curva residual C_H é singular. Ou seja, $C_H = \mathcal{Z}(z, L_1L_2)$ com $L_1, L_2 \in \mathbb{C}[x,y,z,t]$ formas lineares LI. Por outro lado, como $H \cap \mathrm{X} = \ell \cup C_H$, podemos representar F da seguinte forma:

$$F = L_1 \cdot L_2 \cdot t + B \cdot z, \quad \text{com } L_i \in \mathbb{C}[x,y,z,t] \text{ e } B \in \mathbb{C}[x,y,z]$$

Temos duas possibilidades para analisar.



$\boxed{\text{Caso 1:}}$ Neste caso, $\{L_1, L_2, z, t\}$ é LI. Assim, podemos escolher $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{C}^4)$ tal que $T_\bullet L_1 = x$, $T_\bullet L_2 = y$, $T_\bullet z = z$ e $T_\bullet t = t$. Logo,

$$T_\bullet F = xyt + \widetilde{B}z, \ \text{ com } \ \widetilde{B} = T_\bullet B,$$

dado por $\widetilde{B} = \gamma_0 x^2 + \gamma_1 xy + \gamma_2 y^2 + x(\gamma_3 z + \gamma_4 t) + y(\gamma_5 z + \gamma_6 t) + R(z,t)$. Portanto,

$$G := T_\bullet F = A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + A_2x + B_2y + A_3 \tag{3.6}$$

com $A_1 := \gamma_0 z$, $B_1 := t + \gamma_1 z$, $C_1 := \gamma_2 z$, $A_2 := (\gamma_3 z + \gamma_4 t)z$, $B_2 := (\gamma_5 z + \gamma_6 t)z$ e $A_3 := zR(z,t)$. Observe que:

$$z^3|A_1C_1A_3, \ \ z^3|A_1B_2^2, \ \ z^3|A_2^2C_1 \quad \text{e} \quad z^2|B_1A_2B_2.$$

Logo, P em (3.5) pode ser escrito na forma

$$P = 4A_1C_1A_3 - B_1^2A_3 - A_1B_2^2 + B_1A_2B_2 - A_2^2C_1 = z^2P_1 - zR(t+\gamma_1 z)^2.$$

Suponha, por absurdo que $z^2|P$. Como $z \quad (t+\gamma_1 z)$, segue da última igualdade acima que $z|R(z,t)$. Logo $R(z,t) = zR_1(z,t)$. De onde concluímos que $A_3 = z^2R_1(z,t)$.

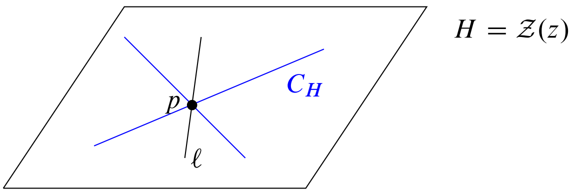
Entretanto, ao calcularmos as derivadas parciais de G em (3.6), temos que:

$$\begin{aligned}
\partial_x G &= 2A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + A_2 \\
\partial_y G &= 2C_1 \cdot y + B_1 \cdot x + B_2 \\
\partial_z G &= \partial_z A_1 \cdot x^2 + \partial_z B_1 \cdot xy + \partial_z C_1 \cdot y^2 + \partial_z A_2 \cdot x + \partial_z B_2 \cdot y + \partial_z A_3 \\
\partial_t G &= \partial_t A_1 \cdot x^2 + \partial_t B_1 \cdot xy + \partial_t C_1 \cdot y^2 + \partial_t A_2 \cdot x + \partial_t B_2 \cdot y + \partial_t A_3.
\end{aligned}$$

Note que z divide $A_2 = (\gamma_3 z + \gamma_4 t)z$, $B_2 = (\gamma_5 z + \gamma_6 t)z$ e $\partial_t A_3$ (visto que $A_3 = z^2 R_1(z,t)$). Logo, $[0 : 0 : 0 : 1] \in \mathrm{Sing}(G)$, que implica em X singular, o que é um absurdo.[20]

Portanto, $[0 : 1]$ é uma raiz simples de P, se $\#(C_H \cap \ell) = 2$.

$\boxed{\text{Caso 2:}}$ Assuma que $C_H \cap \ell = \{\mathrm{p}\}$, sendo $C_H = \mathcal{Z}(z, L_1 \cdot L_2)$, $\mathrm{p} = \mathcal{Z}(t, z, L_1)$ e $L_2 = at + bL_1$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.



Assim, ao trocar L_1 por $M_1 = \dfrac{b}{a} L_1$ e L_2 por $M_2 = \dfrac{1}{a} L_2$ tem-se que

$$C_H = \mathcal{Z}(z, M_1 \cdot M_2), \ \mathrm{p} = \mathcal{Z}(t, z, M_1) \ \text{ e } \ M_2 = t + M_1.$$

Sabemos que existe $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{C}^4)$, tal que $T_\bullet M_1 = y$ e $T_\bullet u = u$ para $u \in \{z, t\}$. Logo, $T_\bullet M_2 = t + y$ e

$$T_\bullet F = y(t+y)t + \widetilde{B} z, \quad \text{com } \widetilde{B} = T_\bullet B$$

dado por $\widetilde{B} = \gamma_0 x^2 + \gamma_1 xy + \gamma_2 y^2 + x(\gamma_3 z + \gamma_4 t) + y(\gamma_5 z + \gamma_6 t) + R(z,t)$. Portanto,

$$G := T_\bullet F = A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + A_2 x + B_2 y + A_3 \tag{3.7}$$

com $A_1 := \gamma_0 z$, $B_1 := \gamma_1 z$, $C_1 := t + \gamma_2 z$, $A_2 := (\gamma_3 z + \gamma_4 t)z$, $B_2 := t^2 + (\gamma_5 z + \gamma_6 t)z$ e $A_3 := zR(z,t)$. Observe que

$$z^2 | A_1 C_1 A_3, \ \ z^3 | B_1^2 A_3, \ \ z^2 | B_1 A_2 B_2 \ \text{ e } \ z^2 | A_2^2 C_1.$$

Logo,

$$P = 4A_1 C_1 A_3 - B_1^2 A_3 - A_1 B_2^2 + B_1 A_2 B_2 - A_2^2 C_1 = z^2 Q_1 - \gamma_0 z (t^2 + (\gamma_5 z + \gamma_6 t)z)^2.$$

Suponha, por absurdo, que $z^2 | P$. Como $z \quad B_2$, segue da última igualdade acima que $\gamma_0 = 0$. Logo $A_1 = 0$ e de (3.7) ao calcularmos as derivadas parciais de G, temos que:

$$\begin{aligned}
\partial_x G &= B_1 \cdot y + A_2 \\
\partial_y G &= 2C_1 \cdot y + B_1 \cdot x + B_2 \\
\partial_z G &= \gamma_1 xy + \gamma_2 y^2 + \partial_z A_2 \cdot x + \partial_z B_2 \cdot y + \partial_z A_3 \\
\partial_t G &= y^2 + \partial_t A_2 \cdot x + \partial_t B_2 \cdot y + \partial_t A_3.
\end{aligned}$$

[20] Lembre que MCP preservam pontos singulares.

Note que z divide $A_2 = (\gamma_3 z + \gamma_4 t)z$ e $B_1 = \gamma_1 z$. Além disso, A_2, B_2 e $A_3 \in \mathbb{C}[z,t]$ são homogêneos de grau maior ou igual que 2. Logo suas derivadas parciais pertencem ao anel $\mathbb{C}[z,t]$. Assim, $[1:0:0:0] \in \mathrm{Sing}(G)$, o que é um absurdo, visto que X não é singular.

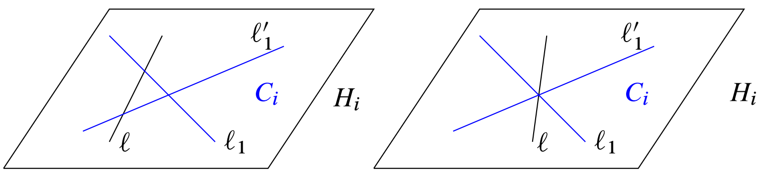
Portanto, $[0:1]$ é uma raiz simples de P, se $C_H \cap \ell = \{\mathrm{p}\}$.

Para finalizar, observe que a Afirmação 1 nos garante que cada raiz $[\beta : -\alpha]$ de P determina exatamente um plano contendo a reta ℓ (a saber, $\mathcal{Z}(\alpha z + \beta t)$), cuja curva residual é união de duas retas distintas. Por outro lado, a Afirmação 2 estabelece que $P \in \mathbb{C}[z,t]$ só possui raízes simples. Assim, concluímos que existem exatamente cinco planos $H_1, \ldots, H_5$ contendo a reta ℓ e cuja curva residual é uma cônica singular (reduzida), isto é, $H_i \cap \mathrm{X} = \ell \cup C_i$, com $C_i = \ell_i \cup \ell_i'$ $(\ell_i \neq \ell_i')$. $\square$

Observação 3.3. Seja $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície cúbica não singular contendo a reta ℓ. Sejam $H_1, \ldots, H_5$ os cinco planos contendo a reta ℓ tais que a curva residual C_i à reta ℓ no plano H_i é uma cônica singular. Assim,

$$H_i \cap \mathrm{X} = \ell \cup C_i, \quad \text{com} \quad C_i = \ell_i \cup \ell_i' \ \ (\ell_i \neq \ell_i') \quad i = 1,2,3,4,5.$$

(a) Segue da Proposição 2.7 que ℓ não é componente irredutível de C_i, ou seja, $\ell \neq \ell_i$ e $\ell \neq \ell_i'$ para todo $i \in \{1, ..., 5\}$. Assim, para cada i temos as seguintes possibilidades



(b) $H_i = \langle \ell, \ell_i \rangle = \langle \ell, \ell_i' \rangle = \langle \ell_i, \ell_i' \rangle$, para todo $i = 1,2,3,4,5$.

Lema 3.1. *Com as notações do Teorema 3.3. Verifica-se que*

(i) *As retas ℓ, ℓ_1, ℓ_1', ℓ_2, ℓ_2', ℓ_3, ℓ_3' ℓ_4, ℓ_4', ℓ_5, ℓ_5' são distintas.*

(ii) $\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) - \{\ell\} = \{\ell_1, \ell_1', \ell_2, \ell_2', \ell_3, \ell_3', \ell_4, \ell_4', \ell_5, \ell_5'\}$.

Demonstração. $\boxed{\text{(i)}}$ Basta observar que para cada i as retas ℓ, ℓ_i, ℓ_i' são duas a duas distintas e estão contidas no plano H_i. Agora, como $H_i = \langle \ell_i, \ell_i' \rangle \neq H_j = \langle \ell_j, \ell_j' \rangle$ e $H_i \cap H_j = \ell$, se $i \neq j$. Segue que $\ell_i \neq \ell_j$ e $\ell_i \neq \ell_j'$ para todo $i \neq j$.[21]

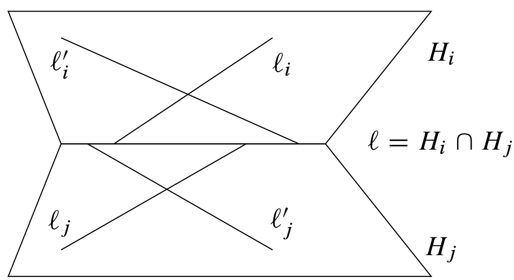
$\boxed{\text{(ii)}}$ Se $m \in \mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X})$ e $m \neq \ell$, então existe um único plano contendo ℓ e m. Assim, $\langle m, \ell \rangle = H_i$ para algum i. Logo, $m \subset H_i \cap \mathrm{X} = \ell \cup \ell_i \cup \ell_i'$, sendo $m \neq \ell$ segue (por conta da irredutibilidade de m) que $m = \ell_i$ ou $m = \ell_i'$. $\square$

[21] Suponha que $\ell_i = \ell_j$ com $i \neq j$, então $\ell_i \subset H_i \cap H_j = \ell$. Logo, $\ell_i = \ell$, o que é absurdo.

Lema 3.2. *Com as notações supracitadas. Verifica-se que* $\ell_i \cap \ell_j = \ell'_i \cap \ell'_j = \ell_i \cap \ell'_j = \emptyset$*, para todo* $i \neq j$ *com* $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Demonstração. Suponha, pelo absurdo, que $i \neq j$ e $\ell_i \cap \ell_j \neq \emptyset$. Como as retas ℓ_i e ℓ_j são distintas, segue que $\ell_i \cap \ell_j = \{\mathrm{p}\}$. Agora, como $\ell_k \subset H_k$ para todo k, segue que $\{\mathrm{p}\} = \ell_i \cap \ell_j \subset H_i \cap H_j = \ell$. Assim, as retas ℓ, ℓ_i e ℓ_j estão contidas na superfície X e passam pelo ponto p. Neste caso, segue da Proposição 2.5 que as retas ℓ, ℓ_i e ℓ_j são coplanares, isto é, elas estão contidas no mesmo plano. Se tal plano é H, então $H = \langle \ell, \ell_i \rangle = \left\langle \ell, \ell_j \right\rangle$. Logo, $H = H_i = H_j$, o que é um absurdo. Analogamente, prova-se que $\ell'_i \cap \ell'_j = \ell_i \cap \ell'_j = \emptyset$, se $i \neq j$. Deixamos a cargo do leitor. $\square$

Observação 3.4. As retas nos planos H_i e H_j, com $i \neq j$ estão distribuídas conforme a figura a seguir. Salientamos que pode acontecer que $\ell \cap \ell_i \cap \ell'_i \neq \emptyset$ e/ou $\ell \cap \ell_j \cap \ell'_j \neq \emptyset$.



Proposição 3.7. *Se* $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ *é uma superfície cúbica não singular, então ela contém pelo menos 27 retas distintas.*

Demonstração. O Corolário 2.2 nos garante que a superfície cúbica X contém pelo menos uma reta. Assim, ao considerar a reta ℓ contida em X, a partir do Teorema 3.3 obtemos 5 planos H_i tais que $H_i \cap \mathrm{X} = \ell \cup \ell_i \cup \ell'_i$ e a partir do Lema 3.1, obtemos as 11 retas distintas (listadas na tabela 3.1).

Plano	Retas no plano e X
H_1	ℓ, ℓ_1 e ℓ'_1
H_2	ℓ, ℓ_2 e ℓ'_2
H_3	ℓ, ℓ_3 e ℓ'_3
H_4	ℓ, ℓ_4 e ℓ'_4
H_5	ℓ, ℓ_5 e ℓ'_5

Tabela 3.1:

O próximo passo será aplicar o Teorema 3.3 para determinar os 5 planos que contêm retas ℓ_1 e ℓ'_1, respectivamente, cuja curva residual é uma união de retas distintas (ou seja, uma cônica singular reduzida).

Lembre que H_1 é um dos planos que contém a reta ℓ_1. Logo o Teorema 3.3 garante a existência dos 5 planos H_1, H_1', H_2', H_3' e H_4', tais que $H_1 \cap \mathrm{X} = \ell \cup \ell_1 \cup \ell_1'$ e $H_i' \cap \mathrm{X} = \ell \cup m_i \cup m_i'$. Assim, obtemos as 11 retas incidentes à reta ℓ_1, listadas na tabela a seguir.

Plano	Retas no plano e X
H_1	ℓ, ℓ_1 e ℓ_1'
H_1'	m_1, ℓ_1 e m_1'
H_2'	m_2, ℓ_1 e m_2'
H_3'	m_3, ℓ_1 e m_3'
H_4'	m_4, ℓ_1 e m_4'

Novamente, segue-se do Lema 3.1 que as retas

$$\ell, \ell_1, \ell_1', m_1, m_1', m_2, m_2', m_3, m_3', m_4, m_4'$$

são distintas.

Considere

$$\Phi = \left\{\ell, \ell_1, \ell_1', \ell_2, \ell_2', \ell_3, \ell_3', \ell_4, \ell_4', \ell_5, \ell_5'\right\}$$

e

$$\Phi_1 = \left\{m_1, m_1', m_2, m_2', m_3, m_3', m_4, m_4'\right\}.$$

Afirmação 1: $\Phi \cap \Phi_1 = \emptyset$. Logo, $\#\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \geqslant 11 + 8 = 19$.

Sabemos que $\Phi_1 \cap \{\ell, \ell_1, \ell_1'\} = \emptyset$. Assim, basta mostrar que: m_i e m_i' não pertencem ao conjunto $\{\ell_2, \ell_2', \ell_3, \ell_3', \ell_4, \ell_4', \ell_5, \ell_5'\}$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Suponha, por absurdo, que existe i tal que $m_i = \ell_j$ para algum $j \in \{2, 3, 4, 5\}$. Logo,

$$\ell_j \subset H_i' = \langle m_i, \ell_1 \rangle \Longrightarrow \ell_j \cap \ell_1 \neq \emptyset \overset{Lema\ 3.1}{\Longrightarrow} j = 1 \Longrightarrow m_i = \ell_1,$$

o que é um absurdo. De forma análoga, suponha que existe i tal que $m_i = \ell_j'$ para algum $j \in \{2, 3, 4, 5\}$. Logo,

$$\ell_j' \subset H_i' = \langle m_i, \ell_1 \rangle \Longrightarrow \ell_j' \cap \ell_1 \neq \emptyset \overset{Lema\ 3.1}{\Longrightarrow} j = 1 \Longrightarrow m_i = \ell_1',$$

o que é um absurdo.

O mesmo raciocínio pode ser usado para concluir que $m_i' \notin \{\ell_2, \ell_2', \ell_3, \ell_3', \ell_4, \ell_4', \ell_5, \ell_5'\}$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, lembrando que $H_i' = \left\langle m_i', \ell_1 \right\rangle$.

Lembre que H_1 também é um dos planos que contém a reta ℓ_1'. Assim, a partir do Teorema 3.3 obtemos os 5 planos H_1, H_1'', H_2'', H_3'' e H_4'' tais que $H_1 \cap \mathrm{X} = \ell \cup \ell_1 \cup \ell_1'$ e $H_i'' \cap \mathrm{X} = \ell \cup n_i \cup n_i'$. Assim, obtemos as 11 retas incidentes à reta ℓ_1', listadas na tabela a seguir.

Plano	Retas no plano e X
H_1	$\ell,\ \ell_1$ e ℓ_1'
H_1''	$n_1,\ \ell_1$ e n_1'
H_2''	$n_2,\ \ell_1$ e n_2'
H_3''	$n_3,\ \ell_1$ e n_3'
H_4''	$n_4,\ \ell_1$ e n_4'

Observe que as retas $\ell, \ell_1, \ell_1', m_1, m_1', m_2, m_2', m_3, m_3', m_4, m_4'$ são todas retas distintas (cf. Lema 3.1).

Considere $\Phi_2 = \{n_1, n_1', n_2, n_2', n_3, n_3', n_4, n_4'\}$.

Afirmação 2: $(\Phi \cup \Phi_1) \cap \Phi_2 = \emptyset$. Logo, $\#\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \geqslant 11 + 8 + 8 = 27$.
De fato, note que

- $\Phi \cap \Phi_2 = \emptyset$.

  Sabemos que $\Phi_2 \cap \{\ell, \ell_1, \ell_1'\} = \emptyset$. Assim, basta mostrar que: n_i e n_i' não pertencem ao conjunto $\{\ell_2, \ell_2', \ell_3, \ell_3', \ell_4, \ell_4', \ell_5, \ell_5'\}$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.[22]

- $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$.

  Suponha que $\Phi_1 \cap \Phi_2 \neq \emptyset$. Logo, existem $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tais que $m_i = n_j$ (ou $m_i = n_j', m_i' = n_j, m_i' = n_j'$).

  Vamos analisar apenas o caso em que $m_i = n_j$. Os outros casos ficam a cargo do leitor.

  $\underline{m_i = n_j}$. Neste caso, $m_i \subset H_j'' = \langle n_j, \ell_1' \rangle$ e $n_j \subset H_i' = \langle m_i, \ell_1 \rangle$. Assim,

  $$m_i \cap \ell_1' \neq \emptyset,\ m_i \cap \ell_1 \neq \emptyset \quad \text{e} \quad n_j \cap \ell_1' \neq \emptyset,\ n_j \cap \ell_1 \neq \emptyset.$$

  Nestas condições concluímos que $m_i \subset H_1$ e $n_j \subset H_1$.[23] O que implica em $m_i, n_j \in \{\ell, \ell_1, \ell_1'\}$, visto que $m_i \cup n_j \subset H_1 \cap \mathrm{X} = \ell \cup \ell_1 \cup \ell_1'$, o que é um absurdo.

[22] Suponha que existe i tal que $n_i = \ell_j$ para algum $j \in \{2, 3, 4, 5\}$. Logo,
$\ell_j \subset H_i'' = \langle n_i, \ell_1' \rangle \Longrightarrow \ell_j \cap \ell_1' \neq \emptyset \overset{Lema\ 3.1}{\Longrightarrow} j = 1 \Longrightarrow n_i = \ell_1'$, o que é um absurdo.
De forma análoga, suponha que existe i tal que $n_i = \ell_j'$ para algum $j \in \{2, 3, 4, 5\}$. Logo, $\ell_j' \subset H_i'' = \langle n_i, \ell_1' \rangle \Longrightarrow \ell_j' \cap \ell_1' \neq \emptyset \overset{Lema\ 3.1}{\Longrightarrow} j = 1 \Longrightarrow n_i = \ell_1'$, o que é um absurdo.
O mesmo raciocínio pode ser usado para concluir que $n_i' \notin \{\ell_2, \ell_2', \ell_3, \ell_3', \ell_4, \ell_4', \ell_5, \ell_5'\}$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, tendo em consideração que $H_i'' = \langle n_i', \ell_1' \rangle$.

[23] Note que a hipótese $m_i \cap \ell_1' \neq \emptyset,\ m_i \cap \ell_1 \neq \emptyset$ implica em $m_i \cap \ell_1 = \{\mathrm{p}_1\}$ e $m_i \cap \ell_1' = \{\mathrm{p}_2\}$. Se $\mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2$ então a reta m_i tem dois pontos distintos em comum com o plano $H_1 = \langle \ell_1, \ell_1' \rangle$, logo $m_i \subset H_1$. Caso contrário, (ou seja, se $\mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2$) segue que $m_i \cap \ell_1 \cap \ell_1' = \{\mathrm{p}_1\}$. Logo, essas 3 retas são coplanares (cf. Proposição 2.5). De onde concluímos que $m_i \subset H_1$.

Assim, $\Phi \cup \Phi_1 \cup \Phi_2 \subseteq \mathfrak{L}(\mathrm{X})$ com $\#(\Phi \cup \Phi_1 \cup \Phi_2) = 27$. Portanto, X contém pelo menos 27 retas distintas. $\square$

Teorema 3.4. *Se* $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ *é uma superfície cúbica não singular, então* X *contém exatamente 27 retas.*

Demonstração. Segue do Lema 3.1, aplicado às retas ℓ, ℓ_1 e ℓ_1', respectivamente, e das tabelas na demonstração da Proposição 3.7 que:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) &= \{\ell, \ell_1, \ell_1', \ell_2, \ell_2', \ell_3, \ell_3', \ell_4, \ell_4', \ell_5, \ell_5'\},\\
\mathfrak{L}_{\ell_1}(\mathrm{X}) &= \{\ell, \ell_1, \ell_1', m_2, m_2', m_3, m_3', m_4, m_4', m_5, m_5'\},\\
\mathfrak{L}_{\ell_1'}(\mathrm{X}) &= \{\ell, \ell_1, \ell_1', n_2, n_2', n_3, n_3', n_4, n_4', n_5, n_5'\}.
\end{aligned}$$

Por ouro lado, o Corolário 2.5 nos garante que

$$\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = \mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) \cup \mathfrak{L}_{\ell_1}(\mathrm{X}) \cup \mathfrak{L}_{\ell_1'}(\mathrm{X}).$$

Assim,

$$\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = \Phi \cup \Phi_1 \cup \Phi_2,$$

visto que $\Phi = \mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X})$, $\Phi_1 = \mathfrak{L}_{\ell_1}(\mathrm{X}) - \{\ell, \ell_1, \ell_1'\}$ e $\Phi_2 = \mathfrak{L}_{\ell_1'}(\mathrm{X}) - \{\ell, \ell_1, \ell_1'\}$. Portanto, $\#\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = \#(\Phi \cup \Phi_1 \cup \Phi_2) = 27$. $\square$

Diferentemente das cúbicas, para as superfícies quárticas não singulares em $\mathbb{P}^3$ não há um resultado análogo ao Teorema 3.4. Mais precisamente, existem superfícies quárticas não singulares que não contém retas, e dentre as que contém, o número máximo possível é 64 retas. Na próxima seção, iniciaremos a contagem de retas em superfícies de grau 4.

3.3 Retas em superfícies de grau 4

Vamos iniciar o estudo da contagem de retas em superfícies quárticas não singulares em $\mathbb{P}^3$ discutindo alguns exemplos dentre os analisados por Segre (1947).

Quárticas não singulares contendo 16, 32, 48, 64 retas

Observe que nos exemplos a seguir as superfícies em questão são definidas por polinômios da forma $\phi(x, y) - \psi(z, t)$ sendo $\phi, \psi \in \mathbb{C}[u, v]$ homogêneos de grau 4. Esses tipos de superfícies serão abordadas no Capítulo 4.

Exemplo 3.7. Superfície quártica não singular que contém 16 retas.

Considere $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$ sendo $F = z^4 + y^4 + x^3y + t^4$.

$\boxed{\text{X é não singular}}$ Calculando as derivadas parciais de F e igualando a zero, obtemos

$$\begin{cases} \partial_x F &= 3x^2y = 0 \\ \partial_y F &= 4y^3 + x^3 = 0 \\ \partial_z F &= 4z^3 = 0 \\ \partial_t F &= 4t^3 = 0 \end{cases}$$

é fácil ver que X é não singular.

$\boxed{\text{X contém 16 retas}}$ A seguir utilizaremos os estratos em (3.2). Assim, considere m uma reta em $\mathcal{V}_j$ com $j \in \{0, \dots, 5\}$.

$\boxed{j = 5}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0,0,1,0),(0,0,0,1)]) = \mathcal{Z}(x,y)$. Visto que $F \notin \mathcal{I}(m) = \langle x, y \rangle$, segue que $m \notin \mathfrak{L}(\mathrm{X})$.

$\boxed{j = 4}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0,1,a,0),(0,0,0,1)])$ com $a \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(0,u,au,v)}_{v^4+a^4u^4+u^4} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_4 = \emptyset.$$

$\boxed{j = 3}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0,1,0,a),(0,0,1,b)])$ com $a, b \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(0,u,v,au+bv)}_{(bv+au)^4+v^4+u^4} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_3 = \emptyset.$$

$\boxed{j = 2}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1,a,b,0),(0,0,0,1)])$ com $a, b \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(u,au,bu,v)}_{v^4+b^4u^4+a^4u^4+au^4} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset.$$

$\boxed{j = 1}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1,a,0,b),(0,0,1,c)])$ com $a, b, c \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(u,au,v,bu+cv)}_{(cv+bu)^4+v^4+a^4u^4+au^4} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_1) = 16.$$

Pois analisando o coeficiente de v^4, obtemos que $c^4 + 1 = 0$. Além disso, analisando o coeficiente de u^3v, obtemos que $b^3c = 0$. Segue que $b = 0$. Agora, analisando o coeficiente de u^4, concluímos que $a^4 + 1 = 0$. Portanto, existem 16 (4 valores de a por 4 valores de c) retas associadas a este estrato.

$\boxed{j = 0}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1,0,a,b),(0,1,c,d)])$ com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow F(u,v,au+cv,bu+dv) = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_0 = \emptyset$$

no qual $F(u,v,au+cv,bu+dv) = A_0u^4 + A_1u^3v + A_2u^2v^2 + A_3uv^3 + A_4v^4$ sendo

$$\begin{aligned} A_0 &= b^4 + a^4, \\ A_1 &= 4b^3d + 4a^3c + 1, \\ A_2 &= 6(b^2d^2 + a^2c^2), \\ A_3 &= 4(bd^3 + ac^3), \\ A_4 &= d^4 + c^4 + 1. \end{aligned}$$

A seguir indicamos as linhas de comando para *input* utilizadas no MAXIMA para mostrar que o sistema acima não possui soluções (conforme indicado no *output*)

```
f: x^3 * y + y^4 + z^4 + t^4;
ff: subst([x = u, y = v, z = u * a + v * c, t = u * b + v * d], f);
fE0: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
ff4: diff(fE0,u,4)/(4!); ff3: diff(diff(fE0,u,3),v)/(3!);
ff2: diff(diff(fE0,u,2),v,2)/(4); ff1: diff(diff(fE0,u),v,3)/(3!);
ff0: diff(fE0,v,4)/(4!);
s0: solve([ff4=0,ff3=0,ff2=0,ff1=0,ff0=0],[a,b,c,d]);
ss0: cardinality(setify(s0));
```

```
(%i10) ss0: cardinality(setify(s0));
(%o10) 0
```

Portanto, X contém 16 retas.

Exercício 3.6. Mostre que a quártica $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F)$, onde $F = x^3y - xy^3 + t^3z - z^4$ é não singular e contém 16 retas.

Exemplo 3.8. Superfície quártica não singular que contém 32 retas.

Considere $\mathrm{X} := \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$, onde $F := x^4 + x^2y^2 + y^4 + z^4 + t^2z^2 + t^4$. A superfície X é não singular e contém 32 retas. De fato,

$\boxed{\text{X é não singular}}$ Calculando as derivadas parciais de F e igualando a zero, obtemos

$$\begin{cases} \partial_x F = 2x(y^2 + 2x^2) = 0 & (1) \\ \partial_y F = 2y(2y^2 + x^2) = 0 & (2) \\ \partial_z F = 2z(2z^2 + t^2) = 0 \\ \partial_t F = 2t(z^2 + 2t^2) = 0 \end{cases}$$

As equações (1) e (2) garantem que $y = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Agora, suponhamos, por absurdo, que o sistema acima tem alguma solução com $y \neq 0$. Pela equação (2), concluímos que $2y^2 + x^2 = 0$. A equação (1) garante que $y^2 + 2x^2 = 0$ (desde que $x \neq 0$). Resolvendo estas duas últimas equações, chegamos em $x = y = 0$, o que é absurdo. Analogamente, prova-se que $z = t = 0$. Portanto, X é não singular.

$\boxed{\text{X contém 32 retas}}$ De fato, considere m uma reta em $\mathcal{V}_j$ com $j \in \{0, \ldots, 5\}$.

$\boxed{j=5}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0,0,1,0),(0,0,0,1)]) = \mathcal{Z}(x,y)$. Visto que $F \notin \mathcal{I}(m) = \langle x, y\rangle$, segue que $m \notin \mathfrak{L}(\mathrm{X})$.

$\boxed{j=4}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0,1,a,0),(0,0,0,1)])$ com $a \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(0,u,au,v)}_{v^4+a^2u^2v^2+a^4u^4+u^4} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_4 = \emptyset.$$

$\boxed{j=3}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0,1,0,a),(0,0,1,b)])$ com $a,b \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(0,u,v,au+bv)}_{(bv+au)^4+v^2(bv+au)^2+u^4+v^4} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_3 = \emptyset.$$

Pois analisando os coeficientes de u^4, u^3v e u^2v^2, concluímos que $a^4+1=0$, $6a^2b^2+a^2=0$ e $4a^3b=0$, o que é um absurdo (pois obtemos $a \neq 0$ na primeira equação, enquanto que $a=0$ nas duas últimas).

$\boxed{j=2}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1,a,b,0),(0,0,0,1)])$ com $a,b \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(u,au,bu,v)}_{v^4+(b^2v^2+b^4u^2+a^4u^2+a^2u^2+u^2)u^2} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset.$$

$\boxed{j=1}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1,a,0,b),(0,0,1,c)])$ com $a,b,c \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow F(u,au,v,bu+cv) = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_1) = 16.$$

Pois analisando os coeficientes de v^4 e u^3v de $F(u,au,v,bu+cv) = (cv+bu)^4 + v^2(cv+bu)^2 + v^4 + a^4u^4 + a^2u^4 + u^4$, concluímos que $c^4+c^2+1=0$ e $4b^3c=0$, respectivamente. Portanto, $b=0$. Assim, a equação principal é equivalente a $0 = (cv)^4 + v^2(cv)^2 + v^4 + a^4u^4 + a^2u^4 + u^4$, para todo $[u:v] \in \mathbb{P}^1$. Segue que $c^4+c^2+1 = 0$ e $a^4+a^2+1=0$. Portanto, existem 16 retas associadas a este estrato.

$\boxed{j=0}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1,0,a,b),(0,1,c,d)])$ com $a,b,c,d \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow F(u,v,au+cv,bu+dv) = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_0) = 16$$

no qual $F(u,v,au+cv,bu+dv) = A_0u^4 + A_1u^3v + A_2u^2v^2 + A_3uv^3 + A_4v^4$ sendo

$$\begin{aligned}
A_0 &= b^4 + a^2b^2 + a^4 + 1,\\
A_1 &= 2(2b^3d + a^2bd + ab^2c + 2a^3c),\\
A_2 &= 6b^2d^2 + a^2d^2 + 4abcd + b^2c^2 + 6a^2c^2 + 1,\\
A_3 &= 2(2bd^3 + acd^2 + bc^2d + 2ac^3),\\
A_4 &= d^4 + c^2d^2 + c^4 + 1.
\end{aligned}$$

Utilizando o mesmo *input* do Exemplo 3.7, apenas trocando a equação por $f : x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + x^2y^2 + z^2t^2$, obtemos exatamente 16 soluções (conforme indicado no *output*).

```
(%i10) ss0:cardinality(setify(s0));
(%o10) 16
```

Portanto, X contém 32 retas.

Exemplo 3.9. Superfície quártica não singular que contém 48 de retas: a quártica de Fermat $\mathcal{F}_4 := \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$, onde $F := x^4 + y^4 + z^4 + t^4$. De fato,

$\boxed{\mathcal{F}_4 \text{ é não singular}}$ Fica a cargo do leitor.

$\boxed{\mathcal{F}_4 \text{ contém 48 retas}}$ De fato, considere m uma reta em $\mathcal{V}_j$ com $j \in \{0, \dots, 5\}$.

$\boxed{j = 5}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0,0,1,0),(0,0,0,1)]) = \mathcal{Z}(x,y)$. Visto que $F \notin \mathcal{I}(m) = \langle x, y \rangle$, segue que $m \notin \mathfrak{L}(\mathcal{F}_4)$.

$\boxed{j = 4}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0,1,a,0),(0,0,0,1)])$ com $a \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathcal{F}_4 \iff \underbrace{F(0,u,au,v)}_{u^4+(au)^4+v^4} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathcal{F}_4) \cap \mathcal{V}_4 = \emptyset.$$

$\boxed{j = 3}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0,1,0,a),(0,0,1,b)])$ com $a, b \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathcal{F}_4 \iff \underbrace{F(0,u,v,au+bv)}_{u^4+v^4+(au+bv)^4} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathcal{F}_4) \cap \mathcal{V}_3 = \emptyset.$$

$\boxed{j = 2}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1,a,b,0),(0,0,0,1)])$ com $a, b \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathcal{F}_4 \iff \underbrace{F(u,au,bu,v)}_{(1+a^4+b^4)u^4+v^4} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathcal{F}_4) \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset.$$

$\boxed{j = 1}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1,a,0,b),(0,0,1,c)])$ com $a, b, c \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathcal{F}_4 \iff \underbrace{F(u,au,v,bu+cv)}_{u^4+(au)^4+v^4+(bu+cv)^4} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathcal{F}_4) \cap \mathcal{V}_1) = 16.$$

Se $[u : v] = [0 : 1]$, então $c^4 = -1$. Além disso, analisando o coeficiente de u^3v, concluímos que $b = 0$. Portanto, a equação acima pode ser reescrita como $0 = u^4 +$

$(au)^4 + v^4 + (cv)^4 = (1 + a^4)u^4$, para todo $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. De onde concluímos que $a^4 = -1$. Portanto, existem 16 (4 valores para a por 4 valores para c) retas associadas a este estrato.

$\boxed{j = 0}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1, 0, a, b), (0, 1, c, d)])$ com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathcal{F}_4 \Longleftrightarrow F(u, v, au+cv, bu+dv) = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathcal{F}_4) \cap \mathcal{V}_0) = 32.$$

no qual $F(u, v, au + cv, bu + dv) = A_0u^4 + A_1u^3v + A_2u^2v^2 + A_3uv^3 + A_4v^4$ sendo

$$\begin{aligned} A_0 &= b^4 + a^4 + 1, \\ A_1 &= 4(b^3d + a^3c), \\ A_2 &= 6(b^2d^2 + a^2c^2), \\ A_3 &= 4(bd^3 + ac^3), \\ A_4 &= d^4 + c^4 + 1. \end{aligned}$$

Utilizando o mesmo *input* do Exemplo 3.7, apenas trocando a equação por $f : x^4 + y^4 + z^4 + t^4$, obtemos exatamente 32 soluções (conforme indicado no *output*).

```
(%i10) ss0:cardinality(setify(s0));
(%o10) 32
```

Portanto, existem $16 + 32 = 48$ retas na superfície de Fermat $\mathcal{F}_4$.

Exercício 3.7. Mostre que a quártica $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F)$, onde $F = x^3y - xy^3 + zt^3 - z^3t$ é não singular e contém 48 retas.

O exemplo a seguir exibe uma superfície quártica não singular contendo 64 retas, apresentada pelo matemático alemão Friedrich Schur (1856–1932), no final do século XIX em Schur (1882), e em sua homenagem a superfície foi nomeada superfície de Schur.

Exemplo 3.10. Superfície quártica não singular que contém 64 retas: a quártica de Schur $\mathrm{X} := \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$, onde $F := x^4 - xy^3 + zt^3 - z^4$. De fato,

$\boxed{\text{X é não singular}}$ Fica a cargo do leitor.

$\boxed{\text{X contém 64 retas}}$ De fato, considere m uma reta em $\mathcal{V}_j$ com $j \in \{0, \dots, 5\}$.

$\boxed{j = 5}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]) = \mathcal{Z}(x, y)$. Visto que $F \notin \mathcal{I}(m) = \langle x, y \rangle$, segue que $m \notin \mathfrak{L}(\mathrm{X})$.

$\boxed{j = 4}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0, 1, a, 0), (0, 0, 0, 1)])$ com $a \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(0, u, au, v)}_{(au)v^3 - a^4u^4} = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_4) = 1.$$

$\boxed{j = 3}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0, 1, 0, a), (0, 0, 1, b)])$ com $a, b \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(0, u, v, au + bv)}_{v(au+bv)^3 - v^4} = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_3) = 3.$$

Pois analisando o coeficiente de $u^3 v$, concluímos que $a = 0$. Por outro lado, substituindo $u = 0, v = 1$ na mesma equação, concluímos que $b^3 = 1$. Portanto, existem 3 retas (uma para cada raiz cúbica da unidade) associadas a este estrato.

$\boxed{j = 2}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1, a, b, 0), (0, 0, 0, 1)])$ com $a, b \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(u, au, bu, v)}_{(1-a^3-b^4)u^4 + buv^3} = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_2) = 3.$$

Pois analisando os coeficientes de u^4 e uv^3, concluímos que $b = 0$ e $a^3 = 1$. Portanto, existem 3 retas (uma para cada raiz cúbica da unidade) associadas a este estrato.

$\boxed{j = 1}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1, a, 0, b), (0, 0, 1, c)])$ com $a, b, c \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(u, au, v, bu + cv)}_{u^4(1-a^3) + v(bu+cv)^3 - v^4} = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1$$

$$\overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_1) = 9.$$

Pois analisando o coeficiente de vu^3, concluímos que $b = 0$. Agora, comparando os coeficientes de u^4 e v^4, concluímos que $a^3 = 1$ e $c^3 = 1$. Portanto, existem 9 retas associadas a este estrato.

$\boxed{j = 0}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1, 0, a, b), (0, 1, c, d)])$ com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow F(u, v, au + cv, bu + dv) = 0, \ \forall\, [u : v] \in \mathbb{P}^1 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_0) = 16.$$

no qual $F(u, v, au + cv, bu + dv) = A_0 u^4 + A_1 u^3 v + A_2 u^2 v^2 + A_3 uv^3 + A_4 v^4$ sendo

$$\begin{aligned} A_0 &= ab^3 - a^4 + 1, \\ A_1 &= 3ab^2 + b^3 c - 4a^3 c, \\ A_2 &= 3(abd^2 + b^2 cd - 2a^2 c^2), \\ A_3 &= ad^3 + 3bcd^2 - 4ac^3 - 1, \\ A_4 &= c(d^3 - c^3). \end{aligned}$$

Aqui vale salientar que apenas substituindo a expressão por $F := x^4 - xy^3 + zt^3 - z^4$, o MAXIMA não resolve o sistema acima. Por outro lado, visto que $A_4 = c(c - d)(c - \xi d)(c - \xi^2 d)$ onde ξ é raiz cúbica primitiva da unidade, podemos adicionar cada um desses fatores no *input* do MAXIMA (conforme ilustrado a seguir para o fator $L_0 = c$)

```
f: x^4 - x * y^3 + z * t^3 - z^4;
ff: subst([x = u, y = v, z = u * a + v * c, t = u * b + v * d], f);
ff4: diff(fE0,u,4)/(4!); ff3: diff(diff(fE0,u,3),v)/(3!);
ff2: diff(diff(fE0,u,2),v,2)/(4); ff1: diff(diff(fE0,u),v,3)/(3!);
L0: c;
s0:solve([ff4=0,ff3=0,ff2=0,ff1=0,L0=0],[a,b,c,d]);
ss0: cardinality(setify(s0));
```

e obtemos assim o seguinte *output*

```
(%i9) ss0: cardinality(setify(s0));
(%o9) 12
```

obtendo 12 retas para cada fator linear, ou seja, encontramos um total de 48 retas associadas a este estrato. Portanto, existem $1 + 3 + 3 + 9 + 48 = 64$ retas na quártica de Schur. Uma outra maneira de calcular o número de retas nesta superfície, semelhante ao cálculo das 27 retas numa superfície cúbica não singular, pode ser encontrado em Lira e Rojas (2019).

A seguir mostraremos que existem superfícies quárticas não singulares que contém uma quantidade de retas diferente de 16, 32, 48 e 64. Mais precisamente, mostraremos que existe uma quártica não singular que contém exatamente quatro retas. Esse exemplo motiva a seguinte

Pergunta

Dentre as superfícies quárticas não singulares que contêm retas, qual é o número mínimo de retas que tais superfícies contêm?

Quártica não singular contendo 4 retas

Exemplo 3.11. Superfície quártica que contém 4 retas.

Considere $\mathrm{X} := \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^3$, onde $F := z^4 + y^4 + x^3y + t^3x$. A superfície X é não singular e contém 4 retas. De fato,

$\boxed{\text{X é não singular}}$ Fica a cargo do leitor.

$\boxed{\text{X contém 4 retas}}$ De fato, considere m uma reta em $\mathcal{V}_j$ com $j \in \{0, \ldots, 5\}$.

$\boxed{j = 5}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]) = \mathcal{Z}(x, y)$. Visto que $F \notin \mathcal{I}(m) = \langle x, y \rangle$, segue que $m \notin \mathfrak{L}(\mathrm{X})$.

$\boxed{j = 4}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0, 1, a, 0), (0, 0, 0, 1)])$ com $a \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(0,u,au,v)}_{(a^4+1)u^4} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \stackrel{(3.3)}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_4) = 4.$$

$\boxed{j=3}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(0,1,0,a),(0,0,1,b)])$ com $a,b \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(0,u,v,au+bv)}_{v^4+u^4} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \stackrel{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_3 = \emptyset.$$

$\boxed{j=2}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1,a,b,0),(0,0,0,1)])$ com $a,b \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(u,au,bu,v)}_{uv^3+(b^4+a^4+a)u^4} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \stackrel{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset.$$

$\boxed{j=1}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1,a,0,b),(0,0,1,c)])$ com $a,b,c \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(u,au,v,bu+cv)}_{u(cv+bu)^3+v^4+(a^4+a)u^4} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \stackrel{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_1 = \emptyset.$$

$\boxed{j=0}$ Neste estrato, $m = \mathbb{P}([(1,0,a,b),(0,1,c,d)])$ com $a,b,c,d \in \mathbb{C}$. Logo,

$$m \subset \mathrm{X} \Longleftrightarrow \underbrace{F(u,v,au+cv,bu+dv)}_{u(dv+bu)^3+(cv+au)^4+v^4+u^3v} = 0,\ \forall\,[u:v] \in \mathbb{P}^1 \stackrel{(3.3)}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{V}_0 = \emptyset.$$

Utilizando o mesmo *input* do Exemplo 3.7, apenas trocando a equação por $f : x^3y + y^4 + z^4 + t^3x$, obtemos exatamente nenhuma reta associada a este estrato (conforme indicado no *output*).

```
(%i10) ss0: cardinality(setify(s0));
(%o10) 0
```

Portanto, X contém 4 retas.

Observação 3.5. Considere a superfície quártica não singular $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F)$, com $F := z^4 + y^4 + x^3y + t^3x$. Note que

(*a*) o plano $H = \mathcal{Z}(x)$ é tal que $H \cap \mathrm{X} = \mathcal{Z}(x,F) = \mathcal{Z}(x, z^4+y^4) = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3 \cup \ell_4$, sendo $\ell_s = \mathcal{Z}(x, z - a_s y)$ com $\{a_1, \ldots, a_4\}$ tais que $a_s^4 = -1$.

(*b*) se H' é um plano diferente de H que contém alguma das retas ℓ_i, então $\mathrm{X} \cap H' = \ell_i \cup C$, onde C é uma cúbica plana irredutível.

Exercício 3.8. Considere $\mathrm{X} := \mathcal{Z}(z^4 + y^4 + x^3y + t^3x)$ e $H_a := \mathcal{Z}(z - ay) \subset \mathbb{P}^3$, onde $a^4 = -1$. Mostre que $\mathrm{X} \cap H_a = \ell_a \cup C$, onde ℓ_a é uma reta e C é uma cúbica singular e irredutível.

Exercício 3.9. Mostre que a quártica $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F)$, onde $F = tx^3 - xy^3 + t^3z - z^4$ é não singular e contém 4 retas.

Exercício 3.10. Mostre que a quártica $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F)$, onde $F = x^2yz - xy^3 + zt^3 - z^2ty$ é singular e contém 4 retas.

Exercício 3.11. Mostre que a quártica $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F)$, onde $F = t(z^3 - t^3) + x(z^2y - y^2z) + t^4 + x^4 + y^2t^2$ possui 2 pontos singulares singular e contém 1 reta.

Número máximo de retas numa superfície quártica

Vimos anteriormente que existem superfícies quárticas não singulares que contém as seguintes quantidades de retas: 4, 16, 32, 48 e 64. Desta forma, é natural fazer a seguinte

Pergunta

Existe uma superfície quártica não singular com mais de 64 retas, ou 64 é, realmente, o número máximo de retas?

Embora essa pergunta tenha sido mencionada por volta de 1908 pelo matemático alemão Friedrich Wilhelm Franz Meyer (1856–1934) (veja Meyer (1934)), foi somente em 1943 que o matemático italiano Beniamino Segre (1903–1977) estabeleceu o teorema a seguir em Segre (1943).

Teorema 3.5. *Toda superfície quártica não singular em* $\mathbb{P}^3$ *contém no máximo* 64 *retas.*

Dentre as argumentações para a prova deste teorema, no mesmo artigo, Segre utilizou o seguinte

Lema 3.3 (Este resultado é **Falso**!)**.** *Se* X *é uma superfície quártica não singular que contém uma reta* ℓ*, então* X *contém no máximo 18 retas que intersectam* ℓ*.*

Porém, em 2012 os matemáticos Sławomir Rams e Matthias Schütt mostraram que este lema não está correto. Apesar disso, eles conseguiram contornar este erro e verificar que a afirmação do Teorema 3.5 estava correta. A técnica que eles utilizaram foi a teoria das fibrações elípticas. É importante mencionar que esta teoria foi desenvolvida depois da publicação do artigo de Segre em 1943. O estudo moderno dessas fibrações iniciou-se no ano 1960 com os trabalhos de Kodaira (1960), Kodaira (1963a), Kodaira (1963b), Néron (1964) e Tate (1975). A quártica definida no Exercício 3.12 é um contraexemplo de Rams e Schütt (2015) para o Lema 3.3.

Exercício 3.12 (Rams e Schütt (2015))**.** Considere a quártica $\mathrm{X} = \mathcal{Z}(F)$, onde $F = x^3z + y^3t + xy(z^2 - t^2) + z(16t^3 - 16z^2t)/27$. Mostre que:

(a) X é não singular;

(b) X contém 60 retas;

(c) A reta $\ell = \mathcal{Z}(z,t)$ está contida em X;

(d) X contém 20 outras retas que intersectam a reta $\ell = \mathcal{Z}(z,t)$.

Observação 3.6. Seja $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ superfície quártica não singular que contém uma reta ℓ. Considere

$$\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) = \Big\{ m \in \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \,\Big|\, \ell \cap m \neq \emptyset \Big\}.$$

Assim, a firmação de Segre no Lema 3.3 é equivalente a dizer que

$$\#(\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) - \{\ell\}) \leqslant 18.$$

Neste ponto, o leitor pode se questionar qual a relação desta estimativa com respeito a contagem das retas contidas na superfície X. Para sentir sua importância convidamos o leitor para apreciar a próxima proposição.

Proposição 3.8. *Se* $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ *é uma superfície não singular de grau* 4 *contendo* 4 *retas coplanares tal que* $\#(\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) - \{\ell\}) \leqslant 18$*, para toda reta* $\ell \subset X$*. Segue que* $\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X})) \leqslant 64$.

Demonstração. Assuma que $\ell_1, \ldots, \ell_4$ são retas coplanares (distintas) contidas em X. Segue do Corolário 2.5 que $\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = \mathfrak{L}_{\ell_1}(\mathrm{X}) \cup \cdots \cup \mathfrak{L}_{\ell_4}(\mathrm{X})$. Assim, obtemos a seguinte partição para $\mathfrak{L}(\mathrm{X})$

$$\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = \Phi \,\dot{\cup}\, \mathfrak{L}^\star_{\ell_1}(\mathrm{X}) \,\dot{\cup} \cdots \dot{\cup}\, \mathfrak{L}^\star_{\ell_4}(\mathrm{X}), \tag{3.8}$$

sendo $\Phi := \{\ell_1, \ldots, \ell_4\}$ e $\mathfrak{L}^\star_{\ell_i}(\mathrm{X}) := \mathfrak{L}_{\ell_i}(\mathrm{X}) - \Phi$ para $i = 1, \ldots, 4$. Observe que $\#(\mathfrak{L}^\star_{\ell_i}(\mathrm{X})) \leqslant 15$ para todo $i \in \{1, \ldots, 4\}$. Assim, segue de (3.8) que

$$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X})) \leqslant 4 + 4 \cdot 15 = 64.$$

□

Assim, a proposição acima nos revela a importância do cálculo de cotas superiores para $\#(\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}))$, uma vez que as mesmas participam da estimativa do número máximo de retas contidas na superfície X. Por exemplo, como veremos no Capítulo 4, Rams–Schütt irão analisar $\#(\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) - \{\ell\})$ no caso de uma superfície quíntica não singular em $\mathbb{P}^3$, e, com isso, obter uma cota superior para quantidade máxima de retas em superfícies quínticas não singulares em $\mathbb{P}^3$.

No próximo capítulo, faremos uma revisão das cotas encontrada até o momento para este número máximo de retas em superfícies não singulares de grau $d \geqslant 5$, e quais técnicas foram utilizadas para encontrá-las.

4 Contagem de retas em superfícies de grau $d \geqslant 5$

Neste capítulo, vamos concentrar nossa atenção na contagem de retas em superfícies não singulares de grau $d \geqslant 5$ em $\mathbb{P}^3$. Vale salientar que dentre tais superfícies nem todas contêm retas (cf. Observação 2.5). Assim, nosso foco são as superfícies não singulares $X \subset \mathbb{P}^3$ de grau $d \geqslant 5$ tais que $\mathfrak{L}(X) \neq \emptyset$. Mais precisamente, queremos abordar a seguinte

Pergunta

Qual é a quantidade máxima de retas que uma superfície não singular de grau $d \geqslant 5$ em $\mathbb{P}^3$ contém?

Ou seja, o problema proposto é determinar

$$\mathrm{r}_d = \max\left\{\#(\mathfrak{L}(X)) | X \subset \mathbb{P}^3 \text{ é uma superfície não singular de grau } d \geqslant 5\right\}.$$

Apesar de todo o empenho de muitos matemáticos para determinar r_d, não existe, nenhum resultado na literatura que diga respeito ao cálculo de r_d (nem mesmo para $d = 5$). De fato, os resultados que existem nessa direção, dizem respeito à determinação de cotas (inferiores e superiores) para r_d.

Nas próximas seções vamos apresentar as contas que são conhecidas até o momento, começando por uma cota inferior.

4.1 Uma cota inferior: cortesia de Fermat

As superfícies de Fermat têm sido objeto de estudo não somente em Geometria Algébrica, mas também na área de aritmética. A *superfície de Fermat* de grau d em $\mathbb{P}^3$ é definida por

$$\mathcal{F}_d := \mathcal{Z}(x^d + y^d + z^d + t^d) \subset \mathbb{P}^3.$$

Observe que $\mathcal{F}_d$ é uma superfície não singular de grau d.[1] Além disso, ao fixar $\xi \in \mathbb{C}$ raiz primitiva d-ésima da unidade, $\eta \in \mathbb{C}$ tal que $\eta^d = -1$ e considerarmos $\omega_i = \eta\xi^i$ com $i \in \{0, \dots, d-1\}$, obtemos a seguinte fatoração para $u^d + v^d$ com $u, v \in \{x, y, z, t\}$.

$$u^d + v^d = (u - \omega_0 v)(u - \omega_1 v) \cdots (u - \omega_{d-1} v).$$

O que nos permite concluir que as $3d^2$ retas a seguir

$$\mathcal{Z}(x - \omega_i y, z - \omega_j t),\ \ \mathcal{Z}(x - \omega_i z, y - \omega_j t)\ \text{ e }\ \mathcal{Z}(x - \omega_i t, y - \omega_j z)$$

com $i, j \in \{0, \dots, d-1\}$ estão contidas na superfície $\mathcal{F}_d$. Portanto, $\#(\mathfrak{L}(\mathcal{F}_d)) \geqslant 3d^2$ que implica em

$$3d^2 \leqslant \mathfrak{r}_d.$$

Exercício 4.1. Mostre que $\#(\mathfrak{L}(\mathcal{F}_d)) = 3d^2$, para todo $d \geqslant 3$.

4.2 Sobre as cotas superiores

Em termos cronológicos a cota de Clebsch, que denotaremos por $\mathfrak{c}_d$, foi dada cerca de 80 anos antes da cota de Segre, que denotaremos por $\mathfrak{s}_d$. A qual só foi melhorada quase 80 anos depois por Bauer–Rams. Denotaremos esta última cota por $\mathfrak{b}_d$. É possível relacionar estas cotas, como veremos mais adiante, da seguinte forma

$$\mathfrak{r}_d \leqslant \mathfrak{b}_d \leqslant \mathfrak{s}_d \leqslant \mathfrak{c}_d, \quad \forall\ d \geqslant 3,$$

valendo a igualdade para $d = 3$ (i.e. $\mathfrak{r}_3 = 27 =\leqslant \mathfrak{b}_d = \mathfrak{s}_3 = \mathfrak{c}_3$).

[1] De fato, se $\boldsymbol{F} = x^d + y^d + z^d + t^d$, então $\partial_u \boldsymbol{F} = d u^{d-1}$ para todo $u \in \{x, y, z, t\}$. Para concluir, observe que $\mathcal{Z}(x^{d-1}, y^{d-1}, z^{d-1}, t^{d-1}) = \emptyset$.

A cota de Clebsch

A seguir apresentamos as principais ideias da estratégia utilizada no artigo de Clebsch (1861), e revisitada no livro do Eisenbud e Harris (2016), para mostrar que

$$\mathrm{r}_d \leqslant \mathrm{c}_d := d(11d-24), \quad \text{para todo } \ d \geqslant 3.$$

Abrimos um parênteses para observarmos a diferença da cota de Clebsch para o valor real no caso $d = 4$, i.e., $\mathrm{r}_4 = 64 < 80 = \mathrm{c}_4$.

A Estratégia de Clebsch

Considere $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície definida por $F \in S_d$ e ℓ uma reta em $\mathbb{P}^3$, tal que $\mathcal{I}(\ell) = \langle z, t\rangle$ (a menos de uma MCP). Observe que se a reta ℓ não está contida na superfície X, então $\ell \cap \mathrm{X} = \mathcal{Z}(z, t, G(x, y))$ sendo

$$G(x,y) := F(x,y,0,0) = \prod_{i=1}^{k}(b_i x - a_i y)^{m_i}, \ \text{ com } \ m_1 + \cdots + m_k = d. \tag{4.1}$$

Assim, $\ell \cap \mathrm{X} = \{\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_k\}$ sendo $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Define-se a *multiplicidade de interseção* da reta ℓ e X no ponto p, $(\ell, \mathrm{X})_\mathrm{p}$, por

$$(\ell,\mathrm{X})_\mathrm{p} := \begin{cases} m_i, & \text{se } \mathrm{p} = \mathrm{p}_i \in \ell \cap \mathrm{X}, \text{ cf. (4.1)}, \\ \infty, & \text{se } \ell \subset X \text{ e } \mathrm{p} \in \ell, \\ 0, & \text{se } \mathrm{p} \notin \ell \cap \mathrm{X}. \end{cases}$$

Exemplo 4.1. Considere a superfície cúbica de Fermat $\mathcal{F}_3 := \mathcal{Z}(x^3 + y^3 + z^3 + t^3)$ e a reta $\ell = \mathcal{Z}(z, t)$ em $\mathbb{P}^3$. Observe que

$$\ell \cap \mathcal{F}_3 = \mathcal{Z}(z, t, x^3 + y^3) = \{\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3\}$$

sendo $\mathrm{p}_i = [1 : -\xi^{i-1} : 0 : 0]$ com $\xi \neq 1$ tal que $\xi^3 = 1$. Visto que $x^3 + y^3 = (x+y)(x+\xi y)(x+\xi^2 y)$ segue que $(\ell, \mathcal{F}_3)_{\mathrm{p}_i} = 1$, para cada $i = 1, 2, 3$.

Lema 4.1. *Se* $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ *é um superfície não singular de grau* d *e* ℓ *uma reta não contida em* X*, então* $1 \leqslant (\ell, \mathrm{X})_\mathrm{p} \leqslant d$ *para cada* $\mathrm{p} \in \ell \cap \mathrm{X}$.

Demonstração. Após considerar uma MCP tal que $\ell = \mathcal{Z}(z, t)$. O resultado é uma consequência direta de (4.1) uma vez $1 \leqslant m_i \leqslant d$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. $\square$

A seguir considere $\Gamma = \left\{(\mathrm{p}, \ell) \,\middle|\, \mathrm{p} \in \ell\right\} \subset \mathbb{P}^3 \times G_2(\mathbb{C}^4)$ e $\pi_1 : \Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^3$ a projeção na primeira coordenada. Observe que a imagem por π_1 do conjunto

$$\mathcal{F} := \left\{(\mathrm{p}, \ell) \in \Gamma \,\middle|\, (\ell, \mathrm{X})_\mathrm{p} \geqslant 4\right\}$$

é igual a

$$\mathcal{F}_\mathrm{X} := \left\{\mathrm{p} \in \mathrm{X} \,\middle|\, \exists\ \ell \subset \mathbb{P}^3 \text{ reta tal que } (\ell, \mathrm{X})_\mathrm{p} \geqslant 4\right\}.$$

Observação 4.1. Cabe destacar que se a reta $\ell \in \mathfrak{L}(X)$, então $(p, \ell) \in \mathcal{F}$ para todo $p \in \ell$. Portanto,

$$\bigcup_{\ell \in \mathfrak{L}(X)} \ell \subseteq \mathcal{F}_X \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{F}_X \geqslant 1.$$

Exemplo 4.2. Seja X uma superfície cúbica não singular em $\mathbb{P}^3$. Observe que para toda reta $\ell \in \mathfrak{L}(X)$, o Lema 4.1 nos garante que $(\ell, X)_p \leqslant 3$. Assim, a Observação 4.1 nos garante que

$$\mathcal{F}_X = \bigcup_{\ell \in \mathfrak{L}(X)} \ell$$

é uma curva (dada pela união das 27 retas em X), cujo grau é 27.[2]

Proposição 4.1. *Se* $X \subset \mathbb{P}^3$ *é um superfície não singular de grau* $d \geqslant 3$*, então*

$$\mathcal{F} = \left\{(p, \ell) \in \Gamma \;\middle|\; (\ell, X)_p \geqslant 4\right\} \quad \textit{tem dimensão 1.}$$

Demonstração. Confira a Proposição 11.18 em Eisenbud e Harris (2016). □

Uma consequência da Proposição 4.1 é que $\dim \mathcal{F}_X = 1$. Ou seja, $\mathcal{F}_X$ é uma curva contendo todas as retas contidas em X (como componentes), o que nos permite concluir que $\mathrm{grau}(\mathcal{F}_X) \geqslant \#(\mathfrak{L}(X))$. Assim, o grau da curva $\mathcal{F}_X$ é uma cota superior para r_d. O próximo resultado estabelece qual é o grau dessa curva.

Proposição 4.2. *Se* $X \subset \mathbb{P}^3$ *é um superfície não singular de grau* $d \geqslant 3$*, então* $\mathrm{grau}(\mathcal{F}_X) = d(11d - 24)$.

Demonstração. Confira a Proposição 11.9 em Eisenbud e Harris (ibid.). □

Corolário 4.1. *Verifica-se que* $r_d \leqslant d(11d - 24)$*, para todo* $d \geqslant 3$.

A cota de Segre

Destacamos também a cota de Segre. Em Segre (1947) foi provado que

$$r_d \leqslant \mathfrak{s}_d := (d-2)(11d-6), \ \forall\, d \geqslant 3.$$

Observe que ao compararmos as duas cotas para $d = 4$ (cf. Clebsch (1861), Segre (1943) e Segre (1947)), temos que $r_4 = 64 < \mathfrak{s}_4 = 76 < 80 = c_4$.

[2] Basta observar que cada componente irredutível dessa curva é uma reta (logo tem grau 1). Além disso, ao intersectarmos qualquer par de retas, dentre as 27, obtemos vazio ou um ponto. Portanto, seu grau é a soma dos graus de cada componente/reta, isto é, 27 (cf. Proposição 7.6 em Hartshorne (1977)).

A Estratégia de Segre

Segre considerou $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ é um superfície não singular de grau $d \geqslant 4$ e explorou com mais atenção a curva

$$\mathcal{F}_{\mathrm{X}} = \left\{ \mathrm{p} \in \mathrm{X} \,\middle|\, \exists\ \ell \subset \mathbb{P}^3 \text{ reta tal que } (\ell, \mathrm{X})_{\mathrm{p}} \geqslant 4 \right\}$$

previamente introduzida por Clebsch. De fato, ele estabeleceu o seguinte lema (cf. p. 90 em Segre (ibid.)).

Lema 4.2. *Com as notações supracitadas. Se $\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$ é uma componente simples de $\mathcal{F}_{\mathrm{X}}$, então existe uma componente C de $\mathcal{F}_{\mathrm{X}}$ tal que* $\#(\ell \cap C) = 4d - 12$.

Com este resultado Segre chegou na cota $\mathfrak{s}_d := (d-2)(11d-6)$, conforme a proposição a seguir.

Proposição 4.3. *Se $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ é um superfície não singular de grau $d \geqslant 4$, então* $\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \leqslant (d-2)(11d-6)$.

Demonstração. Da Observação 4.1 segue que $\bigcup_{\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})} \ell \subseteq \mathcal{F}_{\mathrm{X}}$. Temos duas possibilidades.

(I) Toda reta $\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$ é componente múltipla de $\mathcal{F}_{\mathrm{X}}$. Observe que

$$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X})) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{grau}(\mathcal{F}_{\mathrm{X}}) \overset{Prop. 4.2}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathrm{X})) \leqslant \frac{1}{2}d(11d-24) \leqslant (d-2)(11d-6).$$

(II) Existe uma reta $\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$ que é componente simples de $\mathcal{F}_{\mathrm{X}}$.

Neste caso, segue do Lema 4.2 que existe uma componente C de $\mathcal{F}_{\mathrm{X}}$ tal que $\#(\ell \cap C) = 4d - 12$. De onde concluímos que $\mathrm{grau}(C) \geqslant 4d - 12$, o que implica em

$$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X})) \leqslant \mathrm{grau}(\mathcal{F}_{\mathrm{X}}) - \mathrm{grau}(C) \overset{Prop. 4.2}{\Longrightarrow} \#(\mathfrak{L}(\mathrm{X})) \leqslant \underbrace{d(11d-24) - (4d-12)}_{=(d-2)(11d-6)}.$$

□

Corolário 4.2. *Verifica-se que $\mathfrak{r}_d \leqslant (d-2)(11d-6)$, para todo $d \geqslant 3$.*

A cota de Bauer–Rams

Dentre as cotas superiores para $\mathfrak{r}_d$ ($d \geqslant 4$), que podem ser encontradas na literatura (até o momento) a de Bauer–Rams é a melhor. De fato, em Bauer e Rams (2022) foi provado que

$$\mathfrak{r}_d \leqslant \mathfrak{b}_d := 11d^2 - 30d + 18, \ \forall\, d \geqslant 3.$$

Observe que ao compararmos as três cotas para $d = 4$, temos que $\mathfrak{r}_4 = 64 < \mathfrak{b}_4 = 74 < \mathfrak{s}_4 = 76 < \mathfrak{c}_4 = 80$.

A Estratégia de Bauer–Rams

Seguindo a mesma linha de raciocínio de Segre, Bauer–Rams definem a curva

$$\mathcal{Z} := \mathcal{F}_X - \bigcup_{\ell \subset X} \ell$$

e mostram que $\mathrm{grau}(Z) = \mathrm{grau}(\mathcal{F}_X) - \#(\mathcal{L}(X)) \geqslant 6(d-3)$. Assim, segue da Proposição 4.2 que $\#(\mathcal{L}(X)) \leqslant \mathfrak{b}_d$, para todo $d \geqslant 3$.

Exercício 4.2. Verifique que $\mathfrak{b}_d \leqslant \mathfrak{s}_d \leqslant \mathfrak{c}_d$ para todo $d \geqslant 3$.

Na próxima seção vamos revisar alguns resultados que visam obter cotas inferiores "melhores" que as de Fermat para $d \in \{6, 8, 12, 20\}$.

4.3 Caçando cotas

A cota de Rams–Schütt para grau 5

Seja $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície não singular de grau 5 tal que $\mathfrak{L}(\mathrm{X}) \neq \emptyset$. Considere $\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$ e lembre que

$$\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) = \Big\{ m \in \mathfrak{L}(\mathrm{X}) \,\Big|\, \ell \cap m \neq \emptyset \Big\}.$$

Rams–Schütt mostraram o seguinte resultado

Teorema 4.1. *Verifica-se que* $\#(\mathfrak{L}_\ell(\mathrm{X}) - \{\ell\}) \leqslant 28$ *para toda reta* $\ell \in \mathfrak{L}(\mathrm{X})$.

Demonstração. Veja o Teorema 1.1 no artigo de Rams e Schütt (2020). □

Do qual segue o corolário.

Corolário 4.3. *Se* $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ *é uma superfície não singular de grau 5 contendo 5 retas coplanares, então* $\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X})) \leqslant 125$.

Demonstração. Assuma que $\ell_1, \ldots, \ell_5$ são retas coplanares (distintas) contidas em X. Segue do Corolário 2.5 que $\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = \mathfrak{L}_{\ell_1}(\mathrm{X}) \cup \cdots \cup \mathfrak{L}_{\ell_5}(\mathrm{X})$. Assim, obtemos a seguinte partição para $\mathfrak{L}(\mathrm{X})$

$$\mathfrak{L}(\mathrm{X}) = \varPhi \,\dot{\cup}\, \mathfrak{L}^\star_{\ell_1}(\mathrm{X}) \,\dot{\cup} \cdots \dot{\cup}\, \mathfrak{L}^\star_{\ell_5}(\mathrm{X}) \tag{4.2}$$

sendo $\varPhi := \{\ell_1, \ldots, \ell_5\}$ e $\mathfrak{L}^\star_{\ell_i}(\mathrm{X}) := \mathfrak{L}_{\ell_i}(\mathrm{X}) - \varPhi$ para $i = 1, \ldots, 5$. Observe que o Teorema 4.1 nos garante que $\#(\mathfrak{L}^\star_{\ell_i}(\mathrm{X})) \leqslant 24$ para todo $i \in \{1, \ldots, 5\}$. Assim, segue de (4.2) que

$$\#(\mathfrak{L}(\mathrm{X})) \leqslant 5 + 5 \cdot 24 = 125.$$

□

Rams–Schütt, após introduzir a k-ésima função racional $\mathfrak{q}_k$ (cf. Definição 3.3 em Rams e Schütt (ibid.)) e analisar minuciosamente as fibras de um certo morfismo, estabeleceram que

Teorema 4.2. *Se* $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^3$ *é uma superfície não singular de grau* 5*, então* $\mathfrak{r}_5 \leqslant 127$.

Demonstração. Veja o Teorema 1.2 no artigo de Rams e Schütt (ibid.). □

Observe que $\mathfrak{b}_5 = 143$. Assim, a cota de Rams–Schütt veio melhorar a cota de Bauer–Rams para superfícies não singulares de grau 5.

As cotas de Boissière–Sarti

Considere $\mathcal{S}_{\phi,\psi} \subset \mathbb{P}^3$ a superfície de grau d definida por

$$\mathcal{S}_{\phi,\psi} = \mathcal{Z}\left(\phi(x,y) - \psi(z,t)\right)$$

sendo $\phi, \psi \in \mathbb{C}[u,v]$ polinômios homogêneos de grau d. Se $d = 4$ e $\mathcal{S}_{\phi,\psi}$ for não singular, Segre mostrou que $\#(\mathfrak{L}(\mathcal{S}_{\phi,\psi})) \in \{16, 32, 48, 64\}$ (cf. Segre (1943)). Posteriormente, Caporaso–Harris–Mazur ao considerar

$$N_d = \max\left\{\#(\mathfrak{L}(\mathcal{S}_{\phi,\psi})) \,\middle|\, \mathcal{S}_{\phi,\psi} \text{ é não singular de grau } d\right\}.$$

Mostraram que (cf. Caporaso, Harris e Mazur (1995))

- $N_d \geqslant 3d^2$ para todo $d \geqslant 3$, $d \notin \{4, 6, 8, 12, 20\}$;
- $N_4 \geqslant 64$, $N_6 \geqslant 180$, $N_8 \geqslant 256$, $N_{12} \geqslant 864$ e $N_{20} \geqslant 1600$.

Em 2007, Boissière–Sarti estabeleceram que as desigualdades acima são de fato igualdades (cf. Boissière e Sarti (2007)). Uma revisão detalhada do cálculo de N_d encontra-se no texto de Sally Andria (2016).

A seguir, mostraremos que para o cálculo de N_d basta considerar a família de superfícies $\mathcal{S}_{\phi,\phi}$, no qual $\phi \in \mathbb{C}[u,v]$ é um polinômio homogêneo de grau d, seguindo as linhas do artigo de Andria e Rojas (2022).

Famílias geradas por d pontos na reta projetiva

Vamos analisar uma família de superfícies geradas a partir de d pontos distintos na reta projetiva $\mathbb{P}^1$. A essência desta construção repousa no seguinte fato: se C for um subconjunto da reta projetiva que consiste de d pontos distintos, então existe $\phi \in \mathbb{C}[u,v]$ polinômio homogêneo de grau d, cujo conjunto de zeros (ou raízes) em $\mathbb{P}^1$ é igual ao conjunto C. A partir deste momento utilizaremos a notação $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ para indicar os zeros de um polinômio homogêneo em duas variáveis em $\mathbb{P}^1$.

Exemplo 4.3. Se $C = \left\{[1 : \xi^j]\right\}_{j=1}^{d} \subset \mathbb{P}^1$ sendo ξ uma raiz primitiva d-ésima da unidade, então $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(u^d - v^d) = C$.

Para cada $\phi \in \mathbb{C}[u,v]$ homogêneo de grau d, considere a superfície de grau d em $\mathbb{P}^3$

$$\mathcal{S}_\phi := \mathcal{Z}\left(\phi(x,y) - \phi(z,t)\right).$$

Lema 4.3. *$\mathcal{S}_\phi$ é não singular.*

Demonstração. Ver Andria e Rojas (2022), p. 48. □

Esquema da contagem das retas na superfície $\mathcal{S}_\phi$

Para calcularmos $n_\phi := \#\left(\mathfrak{L}(\mathcal{S}_\phi)\right)$, considere a seguinte partição do conjunto das retas contidas na superfície $\mathcal{S}_\phi$

$$\mathfrak{L}(\mathcal{S}_\phi) = \underbrace{\left\{\ell \mid \ell \cap L \neq \emptyset\right\}}_{\mathcal{L}_\phi} \bigcup \underbrace{\left\{\ell \mid \ell \cap L = \emptyset\right\}}_{\mathcal{L}'_\phi}, \text{ sendo } L = \mathcal{Z}(z,t) \subset \mathbb{P}^3. \tag{4.3}$$

A seguir, assuma que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \left\{[a_i : b_i]\right\}_{i=1}^{d}$ e considere os pontos $\mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_d$ e $\mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_d$ em $\mathbb{P}^3$ dados por $\mathrm{p}_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $\mathrm{q}_i = [0 : 0 : a_i : b_i]$.

Pontos-chaves para determinar n_ϕ

Denotemos por $\ell_{i,j}$ a reta que passa pelos pontos p_i e q_j, para $i, j \in \{1, ..., d\}$.

(i) A reta $\ell_{i,j}$ está contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$ para todo i, j.

(ii) $\mathcal{L}_\phi = \left\{\ell_{i,j} \mid i, j \in \{1, \dots, d\}\right\}$. Logo, $\#(\mathcal{L}_\phi) = d^2$.

(iii) $\#(\mathcal{L}'_\phi) = d|\Gamma_C|$, sendo $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ e $\Gamma_C = \left\{\mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C\right\}$.

Portanto,

$$n_\phi = d^2 + d|\Gamma_C|.$$

Linhas para demonstrar que $n_\phi = d^2 + d|\Gamma_C|$.

A seguir demonstraremos as afirmações (i) e (ii) que fazem parte do esquema de contagem das retas na superfície $\mathcal{S}_\phi$. Entretanto, para o item (iii) só faremos um esboço com as principais ideias que são usadas para chegar nesse resultado. Para mais detalhes, consultar a dissertação de Sally Andria (2016).

$\boxed{\text{Afirmação 1:}}$ $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

Se $\mathrm{p} \in \ell_{i,j}$, então $\mathrm{p} = [ua_i : ub_i : va_j : vb_j]$ com $u, v \in \mathbb{C}$ não ambos nulos. Assim, se $f = \phi(x,y) - \phi(z,t)$, tem-se que

$$f(\mathrm{p}) = u^d \phi(a_i, b_i) - v^d \phi(a_j, b_j) = 0, \text{ pois } \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \Big\{[a_i : b_i]\Big\}_{i=1}^{d}.$$

Portanto, $\mathrm{p} \in \mathcal{S}_\phi$.

$\boxed{\text{Afirmação 2:}}$ $\mathcal{L}_\phi := \Big\{\ell \subset \mathcal{S}_\phi \;\Big|\; \ell \cap L \neq \emptyset\Big\} = \Big\{\ell_{i,j} \;\Big|\; i, j \in \{1, \ldots, d\}\Big\}$. Logo, $\#(\mathcal{L}_\phi) = d^2$.

Observe que $\mathrm{p}_i \in \ell_{i,j} \cap L$, logo $\ell_{i,j} \in \mathcal{L}_\phi$ (visto que $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$). Para mostrarmos a outra inclusão, precisamos da seguinte

Proposição 4.4. *Sejam $L = \mathcal{Z}(z,t)$ e $M = \mathcal{Z}(x,y)$ retas em $\mathbb{P}^3$. Se ℓ é uma reta contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$ com grau $d \geqslant 2$, então*

$$\ell \cap M \neq \emptyset \iff \ell \cap L \neq \emptyset.$$

Demonstração. Ver Proposição 4.1 em Andria e Rojas (2022), p. 49. □

Corolário 4.4. *Se ℓ for uma reta contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$ tal que $\ell \cap L \neq \emptyset$, então $\ell = \ell_{i,j}$ para algum $i, j \in \{1, \ldots, d\}$.*

Demonstração. Como a reta L não está contida na superfície $\mathcal{S}_\phi$, então $L \neq \ell$. Assim, $\ell \cap L$ consiste de um único ponto $\mathrm{p} = [a : b : 0 : 0]$ com a e b complexos não ambos nulos. Entretanto, a condição $\ell \subset \mathcal{S}_\phi$ nos leva à conclusão $\phi(a,b) = 0$. Assim, $\mathrm{p} = \mathrm{p}_i$ para algum i.

Por outro lado, a Proposição 4.4 implica em $\ell \cap M \neq \emptyset$. Como a reta M também não esta contida em $\mathcal{S}_\phi$, o raciocínio anterior nos permite concluir que $\ell \cap M = \{\mathrm{q}_j\}$ para algum j. Portanto, $\ell = \ell_{i,j}$ (ou seja, ℓ é determinada pelos pontos p_i e q_j). □

Corolário 4.5. *Com as notações em* (4.3). *Tem-se que* $\#(\mathcal{L}_\phi) = d^2$ *e* $n_\phi = d^2 + \#(\mathcal{L}'_\phi)$.

$\boxed{\text{Afirmação 3:}}$ $\#(\mathcal{L}'_\phi) = d|\Gamma_C|$, sendo $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ e

$$\Gamma_C = \Big\{\mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) | \mathbf{T}(C) = C\Big\}.$$

A ideia-chave para demonstrar a Afirmação 3 é associar a cada reta $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$ a um automorfismo em Γ_C, como faremos a seguir.

Proposição 4.5. *Se* $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$*, então* ℓ *induz um automorfismo* $\mathbf{T}_\ell \in \Gamma_C$*, no qual* $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$.

Demonstração. Sendo ℓ uma reta em $\mathbb{P}^3$, existem f_1 e f_2 homogêneos de grau 1 e L.I. tais que $\ell = \mathcal{Z}(f_1, f_2)$. Se $f_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i t$, então $\ell \cap L = \mathcal{Z}(f_1, f_2, z, t) = \mathcal{Z}(a_1 x + b_1 y, a_2 x + b_2 y, z, t)$. Agora, a condição $\ell \cap L = \emptyset$ assegura que o sistema $a_1 x + b_1 y = 0, a_2 x + b_2 y = 0$, possui solução única $x = y = 0$, e portanto $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Assim, podemos escolher para ℓ equações da forma: $x = \alpha z + \beta t \quad$ e $\quad y = \gamma z + \delta t$, com α, β, γ e δ em $\mathbb{C}$. Além disso, a condição $\ell \cap M = \emptyset$ (cf. Proposição 4.4) nos garante que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Assim, obtemos $\mathbf{T}_\ell \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ dada por $[z : t] \mapsto [\alpha z + \beta t : \gamma z + \delta t]$. Observe que $[\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta c : c : d] \in \ell$ para todo $[c : d] \in \mathbb{P}^1$. Entretanto, se considerarmos $[c : d] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ (neste caso $\phi(c, d) = 0$) concluímos que $\phi(\alpha c + \beta d, \gamma c + \delta c) = 0$, pois $\ell \subset \mathcal{S}_\phi$. Portanto, $\mathbf{T}_\ell([c : d]) \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$. Finalmente, como $\mathbf{T}_\ell$ é uma bijeção e $\#(\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)) = d$, o resultado segue. $\square$

Proposição 4.6. *Notações como na Proposição 4.5. A função* $\Omega : \mathcal{L}'_\phi \longrightarrow \Gamma_C$ *dada por* $\ell \longmapsto \mathbf{T}_\ell$ *é sobrejetora e* $\#(\Omega^{-1}(\mathbf{T})) = d$ *para todo* $\mathbf{T} \in \Gamma_C$.

Demonstração. Considere $\mathbf{T} \in \Gamma_C$ dado por $\mathbf{T}([z : t]) = [\alpha z + \beta t : \gamma z + \delta t]$.

O primeiro passo é associar ao automorfismo $\mathbf{T}$ a superfície quádrica

$$Q_{\mathbf{T}} := \mathcal{Z}(x(\gamma z + \delta t) - y(\alpha z + \beta t)) \subset \mathbb{P}^3.$$

A seguir, citamos (sem demonstrar) os fatos essenciais que relacionam a superfície quádrica $Q_{\mathbf{T}}$ com a contagem das retas na superfície $\mathcal{S}_\phi$.

Fato 1: $Q_{\mathbf{T}}$ *é uma superfície quádrica não singular.*[3]

Sabe-se que toda superfície quádrica não singular em $\mathbb{P}^3$ possui exatamente duas famílias de retas (p. 66 e 67 em Mendoza e Rojas (2009), p. 406 em Cox, Little e O'Shea (1997)). No caso da superfície quádrica $Q_{\mathbf{T}}$ essas famílias são dadas por:

Família $\mathcal{L}$: Para cada $\mathrm{r} = [c : d] \in \mathbb{P}^1$, $\mathcal{L}_\mathrm{r}$ é definida pelas equações:

$$(\gamma c + \delta d)x - (\alpha c + \beta d)y = 0 \quad \text{e} \quad dz - ct = 0. \tag{4.4}$$

Família $\mathcal{M}$: Para cada $\mathrm{s} = [a : b] \in \mathbb{P}^1$, $\mathcal{M}_\mathrm{s}$ é definida pelas equações:

$$ax = b(\alpha z + \beta t) \quad \text{e} \quad ay = b(\gamma z + \delta t). \tag{4.5}$$

Note que $\mathcal{M}_{[0:1]} = L = \mathcal{Z}(z, t)$ e $\mathcal{M}_{[1:0]} = M = \mathcal{Z}(x, y)$.

Fato 2: *Seja* $\mathcal{L}$ *a família de retas em* (4.4). *Temos que:*

[3] Note que o sistema $\partial_x Q_{\mathbf{T}} = \gamma z + \delta t = 0$, $\partial_y Q_{\mathbf{T}} = -(\alpha z + \beta t) = 0$, $\partial_z Q_{\mathbf{T}} = \gamma x - \alpha y = 0$, $\partial_t Q_{\mathbf{T}} = \delta x - \beta y = 0$, só admite a solução trivial $x = y = z = t = 0$, pois $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

(i) $\mathcal{L}_{\mathrm{r}} \cap M \neq \emptyset$ *para todo* $\mathrm{r} \in \mathbb{P}^1$.

(ii) $\mathcal{L}_{\mathrm{r}} \subset \mathcal{S}_\phi$ *se, e somente se,* $\mathrm{r} \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$. *Assim, existem* d *retas (distintas) da família* $\mathcal{L}$ *contidas em* $Q_{\mathbf{T}} \cap \mathcal{S}_\phi$ *(visto que* $\mathcal{L}_{\mathrm{r}} \in \mathcal{L}_\phi$*).*

$\boxed{\text{Fato 3:}}$ *Existem exatamente* d *retas da família* $\mathcal{M}$ *(em (4.5)) contidas em* $Q_{\mathbf{T}} \cap \mathcal{S}_\phi$ *e tais retas pertencem a* $\Omega^{-1}(\mathbf{T})$.

$\boxed{\text{Fato 4:}}$ *Sejam* $L_0, \ldots, L_{d-1}$ *e* $M_0, \ldots, M_{d-1}$ *as únicas retas da família* $\mathcal{L}$ *e* $\mathcal{M}$*, respectivamente, contidas em* $\mathcal{S}_\phi \cap Q_{\mathbf{T}}$*. Então*

$$\mathcal{S}_\phi \cap Q_{\mathbf{T}} = L_0 \cup \cdots \cup L_{d-1} \cup M_0 \cup \cdots \cup M_{d-1}.$$

Observe que o Fato 3 nos garante que Ω é sobrejetora e $\#(\Omega^{-1}(\mathbf{T})) \geqslant d$.

Se $\ell \in \Omega^{-1}(\mathbf{T})$ então $\mathbf{T}_\ell = \mathbf{T}$, e a partir de (i) na Proposição A.2 (Apêndice A) concluímos que $Q_{\mathbf{T}_\ell} = Q_{\mathbf{T}}$, que implica em $\ell \subset Q_{\mathbf{T}} \cap \mathcal{S}_\phi$ com $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$. Como $\{M_0, \ldots, M_{d-1}\}$ são as únicas retas que pertencem a $\mathcal{L}'_\phi$ e estão contidas em $Q_{\mathbf{T}} \cap \mathcal{S}_\phi$, a partir do Fato 4 concluímos que $\ell \in \{M_0, \ldots, M_{d-1}\}$. ☐

Corolário 4.6. *Verifica-se que* $\#(\mathcal{L}'_\phi) = d|\Gamma_C|$ *com* $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$.

Demonstração. Ver Corolário 4.3 em Andria e Rojas (2022), p. 52.

A sobrejetividade de Ω nos garante que $\mathcal{L}'_\phi = \bigcup_{\mathbf{T} \in \Gamma_C} \Omega^{-1}(\mathbf{T})$, sendo esta união disjunta (e finita), conclui-se que $\#(\mathcal{L}'_\phi) = \sum_{\mathbf{T} \in \Gamma_C} \#(\Omega^{-1}(\mathbf{T})) = d|\Gamma_C|$. ☐

Sobre a estimativa do valor máximo de n_ϕ

Tendo em consideração que $n_\phi = d^2 + d|\Gamma_C|$, segue-se que o valor máximo de n_ϕ depende da ordem do subgrupo Γ_C, ou de forma mais explicita, das escolhas de d pontos distintos em $\mathbb{P}^1$.

Sobre o valor máximo de $|\Gamma_C|$. Lembre que $|C| = d \geqslant 3$. De acordo com a paridade de d, temos:

- d ímpar: A Teorema A.2 nos garante que: $|\Gamma_C| \leqslant d$ se Γ_C for cíclico. Caso contrário, $\Gamma_C \cong D_k$ com $k \leqslant d$. Portanto, para d ímpar o valor máximo de $|\Gamma_C|$ é $2d$.[4]

- d par: Segue da Teorema A.2 e do Teorema A.1 (Teorema de Classificação de Klein), que o valor máximo de $|\Gamma_C|$ pertence ao conjunto $\{2d, 12, 24, 60\}$.

  Assim, para $d \geqslant 30$ o valor máximo de $|\Gamma_C|$ é $2d$.

  Agora, vamos analisar o caso d par, para $4 \leqslant d \leqslant 28$.

[4]Basta escolher $C = \{[1 : \xi^j]\}_{j=1}^d$, sendo ξ uma raiz primitiva d-ésima da unidade.

Note que, o Teorema de Classificação de Klein nos garante que $\Gamma_C \cong G$ com $G \in \{D_k, A_4, S_4, A_5\}$.[5] Neste caso, segue das tabelas (A.3) e (A.4) que:

G	$d = \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 + \delta\|G\|$
D_k	$d = \alpha k + \beta k + \gamma 2 + \delta 2k$
A_4	$d = \alpha 6 + \beta 4 + \gamma 4 + \delta 12$
S_4	$d = \alpha 12 + \beta 8 + \gamma 6 + \delta 24$
A_5	$d = \alpha 30 + \beta 20 + \gamma 12 + \delta 60$

(4.6)

com $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$ e $\delta \geqslant 0$ inteiro.

Se considerarmos somente o grupo diedral de ordem máxima, ao qual Γ_C pode ser isomorfo, segue do item (ii) no Teorema A.2 e da tabela em (4.6) que:

$4 \leqslant d \leqslant 28$ par	Γ_C pode ser isomorfo a	ordem máxima de Γ_C
$d = 4$	A_4, D_4	12
$d \in \{6, 8\}$	D_d, A_4, S_4	24
$d = 10$	D_{10}, A_4	20
$d = 12$	D_{12}, A_4, S_4, A_5	60
$d \neq 20, 14 \leqslant d \leqslant 28$	D_d, A_4, S_4	2d
$d = 20$	D_{20}, A_5	60

(4.7)

Por simplicidade, no que segue do texto usaremos a notação: $\infty = [0 : 1]$ e $a = [1 : a]$ com $a \in \mathbb{C}$.

$\underline{d = 4}$ A partir de (4.7) temos que $\Gamma_C \cong D_4$ ou $\Gamma_C \cong A_4$. Se escolhermos $C = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$, sendo ω raiz cúbica primitiva da unidade, tem-se que $[u : v] \longmapsto [\omega u : v]$ é um elemento de ordem 3 de Γ_C, logo $\Gamma_C \cong A_4$ e a ordem máxima é 12.

Para os outros valores de d, nos remetemos a citar a escolha do conjunto C tal que $|\Gamma_C|$ atinge o valor máximo listado em (4.7).

$\underline{d = 6}$ Considere $C = \{\infty, 0, 1, i, -1, -i\}$ sendo $i \in \mathbb{C}$ raiz quarta primitiva da unidade.

$\underline{d = 8}$ Considere $C = \{\kappa, i\kappa, -\kappa, -i\kappa, \kappa^{-1}, i\kappa^{-1}, -\kappa^{-1}, -i\kappa^{-1}\}$, sendo $\kappa \in \mathbb{C}$ uma raiz da equação $x^2 - (i + 1)x - i = 0$.

$\underline{d = 10}$ Considere C sendo o conjunto das raízes 10-ésimas da unidade.

$\underline{d = 12}$ Seja ω raiz quinta primitiva da unidade, $\theta = \omega^3 + \omega^2$ e considere

$$C = \{\infty, 0, \theta, \theta\omega, \theta\omega^2, \theta\omega^3, \theta\omega^4, -\theta^{-1}, -\theta^{-1}\omega, -\theta^{-1}\omega^2, -\theta^{-1}\omega^3, -\theta^{-1}\omega^4\}.$$

$\underline{d \neq 20, 14 \leqslant d \leqslant 28 \text{ par.}}$ Considere C sendo o conjunto das raízes d-ésimas da unidade.

$\underline{d = 20}$ Veja p. 47 em Andria (2016).

[5]Ao procurarmos o valor máximo de $|\Gamma_C|$, descartamos o caso em que Γ_C é cíclico.

Assim, se $N_d = n_\phi$ com ϕ de grau d escolhido de modo que $|\Gamma_C|$ tenha a maior ordem possível, então tem-se que:

$$\begin{cases} N_d = 3d^2, & \text{se } d \notin \{4, 6, 8, 12, 20\}, \\ N_4 = 64,\ N_6 = 180,\ N_8 = 256,\ N_{12} = 864 \text{ e } N_{20} = 1600. \end{cases} \tag{4.8}$$

Exemplos de superfícies $\mathcal{S}_\phi$ com $n_\phi = N_d$

A partir da descrição apresentada, tem-se que

- No caso $d \geqslant 3$, tal que $d \notin \{4, 6, 8, 12, 20\}$, basta considerar $C = \{[1 : \xi^i]\}_{i=0}^{d-1}$ sendo ξ uma raiz primitiva d-ésima da unidade. Visto que $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$, sendo $\phi(u, v) = u^d - v^d$, segue que $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(x^d - y^d - z^d + t^d)$. Observe que a superfície $\mathcal{S}_\phi$ é projetivamente equivalente à superfície de Fermat $\mathcal{F}_d = \mathcal{Z}(x^d + y^d + z^d + t^d)$.

- No caso de $d = 4$, obteve-se $C = \{[1 : 0], [1 : 1], [1 : \omega], [1 : \omega^2]\}$, com $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega \neq 1$ e $\omega^3 = 1$. Como $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ sendo $\phi(u, v) = v(v^3 - u^3)$, segue que $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(y(y^3 - x^3) - t(t^3 - z^3))$. Observe que $\mathcal{S}_\phi$ é projetivamente equivalente à superfície de Schur $\mathcal{Z}(x^4 - xy^3 + zt^3 - z^4)$.[6]

- Para $d = 6$, obteve-se o conjunto

  $$C = \{[0 : 1], [1 : 0], [1 : 1], [1 : i], [1 : -1], [1 : -i]\}.$$

  Uma vez que $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ com $\phi(u, v) = uv(v^4 - u^4)$, C dá origem à superfície sêxtica não singular

  $$\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(xy(y^4 - x^4) - zt(t^4 - z^4)).$$

- Se $d = 8$, então ao escolher $\kappa \in \mathbb{C}$ sendo uma raiz da equação $x^2 - (i+1)x - i = 0$, segue que $\phi(u, v) = u^8 + v^8 - (\kappa^4 + \kappa^{-4})u^4v^4$ tem por conjunto de zeros

  $$\mathcal{Z}(\phi) = \{[1 : a\kappa], [1 : a\kappa^{-1}] \mid a \in \mathcal{U}\} \quad \text{sendo } \mathcal{U} = \{1, -1, i, -i\}.$$

  De fato, ϕ dá origem à superfície não singular de grau 8

  $$\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(x^8 + y^8 - (\kappa^4 + \kappa^{-4})x^4y^4 - z^8 - t^8 + (\kappa^4 + \kappa^{-4})z^4t^4)$$

  contendo 256 retas.

[6] Na página 2 do artigo de Rams e Schütt (2015), os autores conjecturam que toda superfície quártica não singular contendo 64 retas é projetivamente equivalente à quártica de Schur.

- No caso $d = 12$, obtemos

$$\phi(u, v) = uv \prod_{j=0}^{4} (-\omega^{2j} u^2 + \omega^j uv + v^2)$$

sendo ω uma raiz quinta primitiva da unidade tal que

$$\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}\left(xy \prod_{j=0}^{4} (-\omega^{2j} x^2 + \omega^j xy + y^2) - zt \prod_{j=0}^{4} (-\omega^{2j} z^2 + \omega^j zt + t^2) \right)$$

é uma superfície não singular de grau 12 contendo 864 retas.

- No caso $d = 20$

$$\phi(u, v) = -(u^{20} + v^{20}) + 228(u^{15}v^5 - u^5 v^{15}) - 494u^{10}v^{10}.$$

dá origem à superfície $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$ não singular de grau 20 que contém 1600 retas.

Observação 4.2. Vamos fazer algumas comparações com os resultados obtidos até agora.

- Lembre que a cota de Fermat $\#(\mathfrak{L}(\mathcal{F}_d)) = 3d^2 \leqslant \mathfrak{r}_d \leqslant \mathfrak{b}_d = 11d^2 - 30d + 18$ para $d \geqslant 3$. Entretanto, para $d \in \{6, 8, 12, 20\}$ temos a seguinte tabela

d	$3d^2$	N_d	$\mathfrak{b}_d$
6	108	180	234
8	192	256	482
12	432	864	1242
20	1200	1600	3818

Assim, $3d^2 < N_d \leqslant \mathfrak{r}_d \leqslant \mathfrak{b}_d$ para $d \in \{6, 8, 12, 20\}$.

- Boissière e Sarti (2007) apresentaram a superfície de grau 8 dada pelo polinômio

$$x^8 + y^8 + z^8 + t^8 + 168x^2y^2z^2t^2 + 14(x^4y^4 + x^4z^4 + x^4t^4 + y^4z^4 + y^4t^4 + z^4t^4)$$

que contém 352 retas.

A Classificação dos automorfismos da reta projetiva

A.1 Ação de um grupo sobre um conjunto

Se $(G, *)$ for um grupo com elemento neutro e, considere $G^\star = G - \{e\}$.

Lembremos que o grupo G *age pela esquerda* num conjunto C, se existe uma função de $G \times C$ em C que associa a cada par (g, x) um único elemento em C, que denotaremos por $g \cdot \mathrm{x}$, satisfazendo às condições:

(i) $e \cdot \mathrm{x} = \mathrm{x}$, para todo $\mathrm{x} \in C$,

(ii) $h \cdot (g \cdot \mathrm{x}) = (h * g) \cdot \mathrm{x}$ para todo $\mathrm{x} \in C$, $h, g \in G$.

Para cada $\mathrm{x} \in C$, $G_{\mathrm{x}} = \{g \in G | g \cdot \mathrm{x} = \mathrm{x}\}$ é denominado de *estabilizador* de x em G e $\mathcal{O}_{\mathrm{x}} = \{g \cdot \mathrm{x} \in C | g \in G\}$ é denominado de *órbita* de x (relativa a ação definida por "$\cdot$").

Um resultado importante neste contexto é a seguinte

Proposição A.1. *Com as notações acima, verifica-se que:*

(i) $\mathcal{O}_{\mathrm{x}} = \mathcal{O}_{\mathrm{y}}$ *se, e somente se, existe* $g \in G$*, tal que* $\mathrm{y} = g \cdot \mathrm{x}$.

(ii) $\mathcal{O}_{\mathrm{x}} \cap \mathcal{O}_{\mathrm{y}} = \emptyset$ *ou* $\mathcal{O}_{\mathrm{x}} = \mathcal{O}_{\mathrm{y}}$.

(iii) *Para todo* $\mathrm{y} \in \mathcal{O}_{\mathrm{x}}$ *tem-se que* G_{y} *e* G_{x} *são grupos conjugados* (*logo isomorfos*).

(iv) $|\mathcal{O}_{\mathrm{x}}| = (G : G_{\mathrm{x}})$. *Portanto, se* G *for um grupo finito, o número de elementos de cada órbita, é um divisor da ordem do grupo* G.

Se C for um conjunto finito, a Proposição A.1 nos garante que podemos escolher uma quantidade finita de elementos em C, digamos $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_k$, tais que:

$$C = \mathcal{O}_{\mathrm{x}_1} \cup \mathcal{O}_{\mathrm{x}_2} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{\mathrm{x}_k} \text{ sendo que } \mathcal{O}_{\mathrm{x}_i} \cap \mathcal{O}_{\mathrm{x}_j} = \emptyset, \quad \forall\ i \neq j. \tag{A.1}$$

Neste caso, $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_k$ denomina-se *sistema de representantes* determinado pela ação de G em C. A partição em (A.1) é chamada de *decomposição de* C *em órbitas* (valendo a unicidade a menos de uma permutação dos índices).

A seguir, iniciamos o estudo dos automorfismos de $\mathbb{P}^1$ e seus subgrupos finitos, visto que desempenham um papel muito importante na contagem de retas que foi realizada no Capítulo 4.

A.2 Automorfismos da reta projetiva

Seja $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}^2)$ o grupo constituído pelos isomorfismos lineares de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$ sob a operação de composição de funções. Como cada aplicação $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{C}^2)$ leva retas pela origem em retas pela origem, T induz a função

$$\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1, \ \text{ dada por } \ \mathbf{T}([\mathrm{v}]) = [T(\mathrm{v})].$$

O conjunto formado por tais funções será denotado por $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ e seus elementos denominados *automorfismos* de $\mathbb{P}^1$ ou *mudança de coordenadas projetivas de* $\mathbb{P}^1$.

Sejam $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ o grupo (com o produto usual de matrizes) formado pelas matrizes 2×2 complexas invertíveis e $\mathrm{E}_2(\mathbb{C})$ o subgrupo normal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ formado por todas as matrizes múltiplas da identidade.

Lembre que a função de $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}^2)$ em $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por $T \longmapsto [T]$, sendo $[T] \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ a matriz associada a T da base canônica na base canônica, é um isomorfismo de grupos. Por exemplo, se $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{C}^2)$ é tal que $[T] \in \mathrm{E}_2(\mathbb{C})$, então $\mathbf{T} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$.

Listamos a seguir algumas das propriedades essenciais dos elementos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ que usaremos neste texto.

Proposição A.2. *Sejam* $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ *determinadas por* $T, S \in \mathrm{Iso}(\mathbb{C}^2)$, *respectivamente. Então verifica-se que:*

(i) $\mathbf{T} = \mathbf{S}$ *se, e somente se,* $T = \lambda S$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{C}$ *não nulo.*

(ii) *Dados os pontos* $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2$ *e* q_3 *em* $\mathbb{P}^1$ *tais que* $\mathrm{p}_i \neq \mathrm{p}_j$ *e* $\mathrm{q}_i \neq \mathrm{q}_j$ *para todo* $i \neq j$, *existe um único* $\mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$, *tal que* $\mathbf{T}(\mathrm{p}_i) = \mathrm{q}_i$ *para* $i = 1, 2, 3$.

(iii) $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ *com a composição de funções é um grupo, tendo* $\mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}$ *por elemento neutro.*

(iv) *A função* $\Psi : \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathrm{E}_2(\mathbb{C})$ *dada por* $\mathbf{T} \longmapsto [T] \cdot \mathrm{E}_2(\mathbb{C})$ *é um isomorfismo de grupos.*

Salientamos que a próxima subseção começa com a noção de ponto fixo, além de introduzir notações para certos automorfismos da reta projetiva complexa (que poderão ser utilizados pelo leitor na determinação do valor de $|\Gamma_C|$ para um dado subconjunto C de $\mathbb{P}^1$). A Proposição A.4 é o resultado que nos permitirá classificar os subgrupos finitos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ a partir da decomposição em órbitas de seus pontos fixos.

Teorema de classificação de Klein

O leitor poderá apreciar a importância do Teorema de classificação de Klein, para o desenvolvimento deste texto, no momento que formos estudar os conjuntos invariantes de pontos na reta projetiva, visto que o grupo $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ é isomorfo ao grupo dos automorfismos da reta projetiva (veja Proposição A.2).

Teorema A.1 (Teorema de classificação de Klein (TCK))**.** *Um subgrupo finito de* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ *é isomorfo a exatamente um dos seguintes grupos:*

(i) C_m *o grupo cíclico de ordem* m*;*

(ii) D_m *o grupo diedral de ordem* $2m$, $m \geqslant 2$*;*

(iii) A_4 *o grupo alternado de ordem 12;*

(iv) S_4 *o grupo das permutações de ordem 24;*

(v) A_5 *o grupo alternado de ordem 60.*

Se dois subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ *são isomorfos, então eles são conjugados.*

A.3 Ação de subgrupos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ sobre pontos fixos

Lembremos que $\mathrm{p} \in \mathbb{P}^1$ é um ponto fixo de $\mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ se $\mathbf{T}(\mathrm{p}) = \mathrm{p}$.

Notações: No que segue considere $\mathbf{e}_1 = [1:0]$ e $\mathbf{e}_2 = [0:1]$. Se $\kappa \in \mathbb{C}$ for não nulo, então $\mathbf{C}_\kappa$, $\mathbf{P}_\kappa$ e $\mathbf{R}_\kappa$ denotarão os automorfismos de $\mathbb{P}^1$ dados por: $\mathbf{C}_\kappa([x:y]) = [x+\kappa y : y]$, $\mathbf{P}_\kappa([x:y]) = [\kappa y : x]$ e $\mathbf{R}_\kappa([x:y]) = [\kappa x : y]$. Em particular, temos que $\mathbf{R}_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}$ (o qual possui infinitos pontos fixos). Observe que

Automorfismo	Pontos fixos	Valor em $\mathbf{e}_1$	Valor em $\mathbf{e}_2$	Ordem
$\mathbf{C}_\kappa$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$[\kappa : 1]$	infinita
$\mathbf{P}_\kappa$	$[\sqrt{\kappa}:1], [-\sqrt{\kappa}:1]$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	2
$\mathbf{R}_\kappa, \kappa \neq 1$	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$ord(\kappa)$ em $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$

(A.2)

Sobre pontos fixos. Seja $\mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$, com $\mathbf{T} \neq \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}$.

- **T** possui sempre pelo menos um ponto fixo e pode ter no máximo 2 pontos fixos. (cf. Lema 2.4, p. 15 em Andria (2016)).
- Se $\mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ é de ordem finita, então **T** possui exatamente dois pontos fixos diferentes (cf. Corolário 2.5, p. 17 em Andria (ibid.)).

A seguir para cada subgrupo G de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$, considere

$$\mathrm{Fix}(G) = \Big\{\mathrm{p} \in \mathbb{P}^1 \;\Big|\; \mathrm{p} \text{ é ponto fixo de algum elemento em } G^\star\Big\}.$$

Observe que

- Se $\mathrm{x} \in \mathrm{Fix}(G)$, então $\mathbf{T}(\mathrm{x}) \in \mathrm{Fix}(G)$ para todo $\mathbf{T} \in G$.[1]
- $(\mathbf{T}, \mathrm{x}) \longmapsto \mathbf{T}(\mathrm{x})$ define uma ação pela esquerda de G em $\mathrm{Fix}(G)$.

Na próxima proposição considere a ação pela esquerda $(\mathbf{T}, \mathrm{x}) \longmapsto \mathbf{T}(\mathrm{x})$, tanto para G quanto para H.

Proposição A.3. *Seja G um subgrupo finito de* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ *com* $|G| > 1$ *tal que* $\mathrm{Fix}(G) = \mathcal{O}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_k$ *é a decomposição em órbitas de* $\mathrm{Fix}(G)$. *Se H for um subgrupo de* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ *isomorfo ao grupo G, então existe* $\mathbf{L} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ *tal que* $\mathrm{Fix}(H) = \mathbf{L}(\mathcal{O}_1) \cup \cdots \cup \mathbf{L}(\mathcal{O}_k)$ *é a decomposição em órbitas de* $\mathrm{Fix}(H)$.

Demonstração. Ver Proposição 3.3, p.43 em Andria e Rojas (2022). □

A demonstração da Proposição A.4, que enunciaremos a seguir, encontra-se na seção 6.12 do texto de Artin (2010) (também na p. 3 de Dolgachev (2009)).

Proposição A.4. *Seja G é um subgrupo finito de* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ *de ordem* $N \geqslant 2$ *tal que*

$$\mathrm{Fix}(G) = \mathcal{O}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_k, \text{ na qual } \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{\mathrm{x}_i}$$

é a decomposição de $\mathrm{Fix}(G)$ *em órbitas induzida pela ação* $(\mathbf{T}, \mathrm{x}) \longmapsto \mathbf{T}(\mathrm{x})$ (*antes da Proposição A.3*). *Então*

(i) *Se* $\mathrm{x} \in \mathcal{O}_i$, *então* $|G_{\mathrm{x}}| = |G_{\mathrm{x}_i}| := E_i \geqslant 2$, *para cada* i.

(ii) $k \in \{2, 3\}$. *Além disso,*

- $k = 2$ *se, e somente se, G é cíclico.*
- *Se* $k = 3$ *e* $E_1 \leqslant E_2 \leqslant E_3$, *então só uma das seguintes possibilidades ocorre:*

E_1	E_2	E_3	*G é isomorfo ao grupo*
2	2	$m \geqslant 2$	D_m
2	3	3	A_4
2	3	4	S_4
2	3	5	A_5

[1] De fato, se $\mathrm{x} \in \mathrm{Fix}(G)$, então existe $\mathbf{S} \in G^\star$ tal que $\mathbf{S}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$. Agora, basta observar que $\mathbf{T} \circ \mathbf{S} \circ \mathbf{T}^{-1} \in G^\star$ e fixa $\mathbf{T}(\mathrm{x})$ se $\mathbf{T} \in G$.

E consequentemente, se $n_i = \frac{|G|}{E_i}$ *(é a cardinalidade das órbitas) para* $i = 1, 2, 3$*, temos:*

n_1	n_2	n_3	*G é isomorfo ao grupo*
m	m	2	D_m
6	4	4	A_4
12	8	6	S_4
30	20	12	A_5

(A.3)

Na próxima subseção será utilizada a proposição acima (junto com o Teorema de Classificação de Klein) para classificar os subgrupos finitos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ que deixam invariantes subconjuntos finitos da reta projetiva (cf. Teorema A.2). Sendo esse Teorema um dos resultados que nos permitem determinar a cota N_d em (4.8).

Classificando subgrupos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ que fixam um conjunto

Para cada subconjunto C de $\mathbb{P}^1$, considere

$$\Gamma_C = \left\{ \mathbf{T} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \;\middle|\; \mathbf{T}(C) = C \right\}.$$

Proposição A.5. *Γ_C é um subgrupo de* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$*, cuja ordem é finita se* $\#(C) \geqslant 3$.

Demonstração. Ver Proposição 3.5, p.45 em Andria e Rojas (2022). □

Exercício A.1. Se $C = \{\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3\}$, então cada $\sigma \in D_3$ determina $\mathbf{T}_\sigma \in \Gamma_C$ dado por $\mathbf{T}_\sigma(\mathrm{p}_i) = p_{\sigma(i)}$ ((ii) na Proposição A.2). Mostre que $\Psi : D_3 \longrightarrow \Gamma_C$ dada por $\sigma \longmapsto \mathbf{T}_\sigma$ é um isomorfismo de grupos.

A seguir, assuma que $\mathcal{O}_\mathrm{x}$ denota a órbita de x relativa à ação $(\mathbf{T}, \mathrm{p}) \longmapsto \mathbf{T}(\mathrm{p})$ de Γ_C em C, e que $C = \mathcal{O}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_k$ é a decomposição em órbitas relativa a essa ação. Lembre que $\mathrm{Fix}(\Gamma_C)$ é o conjunto formado pelos pontos fixos dos elementos de $(\Gamma_C)^\star$.

Proposição A.6. *Se* $\mathrm{x} \in C$ *e* $\#(C) = d \geqslant 3$*, temos:*

(i) $\mathcal{O}_\mathrm{x} \subseteq \mathrm{Fix}(\Gamma_C) \cap C$ *se* $\mathrm{x} \in \mathrm{Fix}(\Gamma_C)$*, caso contrário* $\mathcal{O}_\mathrm{x} \cap \mathrm{Fix}(\Gamma_C) \cap C = \emptyset$ *e* $\#(\mathcal{O}_\mathrm{x}) = |\Gamma_C|$.

(ii) *Se Γ_C não for cíclico e* $\mathrm{Fix}(\Gamma_C) = O_1 \cup O_2 \cup O_3$ *for a decomposição em órbitas de* $\mathrm{Fix}(\Gamma_C)$ *sob a ação de Γ_C (dada por* $(\mathbf{T}, \mathrm{p}) \longmapsto \mathbf{T}(\mathrm{p})$*), então:*

$$d = \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 + \delta |\Gamma_C|, \tag{A.4}$$

na qual $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$, $\delta \geqslant 0$ *e* $n_i = \#(O_i)$.

Demonstração. Ver Proposição 3.6, p.45 em Andria e Rojas (ibid.). □

O próximo Teorema contém os resultados mais importantes para a determinação de Γ_C (a menos de isomorfismo). Sua demonstração tem como base o Teorema de classificação de Klein (**TCK**), a Proposição A.4 e a equação (A.4) acima.

Teorema A.2. *Seja C um subconjunto de $\mathbb{P}^1$ com d pontos $(d \geqslant 3)$. Verifica-se que:*

(i) *Se Γ_C for cíclico então $|\Gamma_C| \leqslant d$.*

(ii) *Se $\Gamma_C \cong D_k$ o grupo diedral, sendo $k \geqslant 2$, então $k \mid d$ ou $k \mid (d-2)$. Em particular, $k \leqslant d$.*

(iii) *Se $C = \{[1 : \xi^j]\}_{j=1}^{d}$, sendo ξ uma raiz primitiva d-ésima da unidade, então $\Gamma_C \cong D_d$.*

(iv) *Se d é ímpar e Γ_C não é cíclico, então $\Gamma_C \cong D_k$ para algum k, $3 \leqslant k \leqslant d$.*

Demonstração. Ver Teorema 3.1, p.45 em Andria e Rojas (2022). □

Finalmente temos a base para determinar a ordem dos grupos Γ_C, se C for um subconjunto finito da reta projetiva. O que nos permitirá chegar na estimativa de N_d em (4.8), referente à quantidade máxima de retas que tais superfícies podem conter (Capítulo 4).

B Maxima

Reservamos este espaço para ajudar o leitor a compreender o uso do sistema de computação algébrica Maxima no propósito do livro, que é contar as retas em superfícies. Neste apêndice, também iremos implementar no Maxima alguns dos exemplos apresentados no Capítulo 3.

Você pode acessar o Maxima através de site Maxima on-line, pode instalar o programa no seu dispositivo Android pela Google Play (Maxima on Android), ou instalar o programa no seu computador (mais informações na página Download wxMaxima). E deixamos claro que todas as contas que fizemos no livro foram implementadas na versão online do software.

B.1 Linhas de comando utilizadas no Maxima

Um guia em português do programa Maxima é a apostila do professor Lenimar Andrade (2015).

As orientações iniciais para a escrita no software são

- toda linha de comando deve ser encerrada com um ponto e vírgula `;`.
- as operações aritméticas básicas são indicadas pelos símbolos `+`, `-`, `*` (multiplicação), `/` (divisão) e `^` (potenciação). As prioridades das operações são as mesmas da Matemática. Parênteses podem ser utilizados para dar prioridade a algum cálculo.

- é possível nomear equações e resultado de operações escrevendo o nome que se deseja dar seguido por dois pontos : antes do objeto a ser nomeado.
- após digitada a linha, deve-se pressionar a combinação de teclas [Shift] + [Enter] no computador ou o botão 'Clic' no Maxima on-line, para que o programa execute o comando digitado.

No aplicativo ou computador, à medida que os comandos vão sendo digitados, o Maxima vai colocando uma numeração **(%i1)**, **(%i2)**, **(%i3)**, ... no início de cada linha e numerando as respectivas respostas do programa com (%o1), (%o2), (%o3), ... Na versão online, é possível escrever vários comandos de uma só vez, e depois executá-los. As respostas virão com a repetição dos *inputs* seguidos dos seus respectivos *outputs*.

A seguir apresentaremos apenas os comandos que utilizaremos.

- `subst`($x = y$, expr): troca x por y em uma expressão expr que contenha x. Aqui, x ou y podem ser variáveis ou expressões algébricas.
- `coeff`(expressão, x, n): determina o coeficiente de x^n numa expressão polinomial com uma única variável x.
- `diff`(expressão, variável): Derivada da função definida pela expressão com relação à variável dada. Exemplo: `diff`($log(x), x$).
- `diff`(expressão,$var_1, n_1, var_2, n_2, \ldots, var_s, n_s$): Derivada parcial de ordem $n_1 + n_2 + \cdots + n_s$ da função definida pela expressão dada com relação às variáveis $var_1, var_2, \ldots, var_s$. A derivada com relação à variável var_k é de ordem n_k. Exemplo: `diff`(x^$2 + y, x, 2, y, 4$).
- `factor( )`: é o principal comando de fatoração, e pode ser utilizado para números inteiros, polinômios e frações que envolvam polinômios (funções racionais).
- `solve`(equação, variável) ou `solve`(equação): resolve uma equação polinomial. Se houver mais de uma variável envolvida, então devem ser fornecidas as variáveis cujos valores serão calculados.
- `solve`([lista de equações], [lista de variáveis]): resolve um sistema de equações polinomiais.
- `setify`(s): Constrói um conjunto de elementos a partir da lista s.
- Estruturas condicionais: o comando `if ... then ... else ...` pode ser usado na construção das mais diversas estruturas condicionais, executadas somente se determinadas hipóteses forem satisfeitas.

Exemplo B.1. Vamos calcular a interseção da parábola $y = x^2$ com a reta $y = 2x$ usando o Maxima. Veremos que as soluções serão apresentadas como uma lista s. Para calcular a quantidade de soluções desta lista, primeiramente temos que transformá-la num conjunto. Para tanto, usamos o comando `setify` e calculamos ss a cardinalidade deste conjunto com o comando `cardinality`. Confira o *input*

```
s: solve([x^2-y,2*x-y],[x,y]);
set: setify(s);
ss: cardinality(set);
```

O *output* é

```
(%i1) s: solve([x^2-y,2*x-y],[x,y]);
(%o1) [[x=2,y=4],[x=0,y=0]]
(%i2) set: setify(s);
(%o2) {[x = 0, y = 0], [x = 2, y = 4]}
(%i3) ss: cardinality(set);
(%o3) 2
```

Exemplo B.2. Vamos determinar as singularidades da superfície $X = \mathcal{Z}(f) \subseteq \mathbb{P}^3$ sendo $f = yzt + xzt + xyt + xyz$ utilizando o Maxima on-line. Para isto precisaremos digitar as seguintes linhas de comando

```
f:y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
solve([diff(f,x)=0,diff(f,y)=0,diff(f,z)=0,diff(f,t)=0],[x,y,z,t]);
```

e a seguir pressionar o botão 'Clic'. A partir deste ponto o programa irá computar as derivadas parciais (através do uso dos comandos `diff(f,x)`,..., `diff(f,t)`) e, na sequência, com o comando `solve`, encontra as soluções do sistema em questão. Obtendo o *output*

```
(%i1) f:y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
(%o1) xyz+tyz+txz+txy
(%i2) solve([diff(f,x)=0,diff(f,y)=0,diff(f,z)=0,diff(f,t)=0],[x,y,z,t]);
(%o2) [[x=0,z=%r1,y=0,t=0],[x=%r2,z=0,y=0,t=0],
        [x=0,z=0,y=%r3,t=0],[x=0,z=0,y=0,t=%r4]]
```

Interpretamos estas soluções no espaço projetivo como

$$\{[0:1:0:0], [1:0:0:0], [0:0:1:0], [0:0:0:1]\}\,.$$

Esses pontos são as singularidades de f.

Um problema importante no que compete à contagem de retas em superfícies diz respeito à determinação dos coeficientes de um dado polinômio. Como veremos no próximo exemplo o Maxima poderá nos auxiliar nessa empreitada.

Exemplo B.3. Seja $f := Au^3 + Bu^2v + Cuv^2 + Dv^3 \in \mathbb{C}[u, v]$. Como encontrar os coeficientes deste polinômio?

a) Através do cálculo das derivadas parciais, para o qual, utilizamos o comando `diff`. De fato, para determinar o coeficiente A, derivamos 3 vezes f com relação a u e dividimos por 3!, como segue

```
f: A*u^3+B*u^2*v+C*u*v^2+D*v^3;
diff(f,u,3)/(3!) /* coeficiente de u^3 */;
```

Os outros coeficientes podem ser calculados de maneira análoga.

b) Através de uma combinação dos comandos `subst` e `coeff`. Para determinar o coeficiente A de f primeiro substituímos $v = 1$ em f, obtendo $g(u) := f(u, 1)$, em seguida, usamos o comando `coeff` como segue

```
f: A*u^3+B*u^2*v+C*u*v^2+D*v^3;
g: subst([v=1],f) /* substituindo v=1 em f */;
coeff(g,u,3) /* coeficiente de u^3 */;
```

Os outros coeficientes podem ser encontrados de forma análoga.

Observação B.1. No exemplo acima podemos considerar os coeficientes A, B, C e D como expressões polinomiais com coeficientes complexos num determinado conjunto de variáveis (por exemplo, no anel $\mathbb{C}[a, b, c, d]$), nos quais não comparecem u nem v, e neste caso o leitor pode utilizar os mesmos procedimentos (do supracitado exemplo) para determinar os os coeficientes de $f := Au^3 + Bu^2v + Cuv^2 + Dv^3$.

Exercício B.1. Considere $f := Au^4 + Bu^3v + Cu^2v^2 + Duv^3 + Ev^4 \in \mathbb{C}[u, v]$. Escreva um procedimento utilizando o Maxima (ou outro pacote de computação) para determinar os coeficientes de f.

Exercício B.2. Seja $f \in \mathbb{C}[u, v]$ um polinômio homogêneo de grau $e \geqslant 1$. Escreva um procedimento utilizando o Maxima (ou outro pacote de computação) para determinar os coeficientes de f.[1]

B.2 Contando retas com o Maxima

A proposta a seguir é implementar (no Maxima) o cálculo da quantidade de retas nas superfícies consideradas em alguns dos exemplos citados no Capítulo 3.

Exemplo B.4. A primeira superfície para qual utilizamos a estratificação com o objetivo de contar retas, foi a superfície $\mathcal{Z}(xz^2 + x^2t + y^3) \subset \mathbb{P}^3$ (cf. Exemplo 3.3).

A seguir vamos apresentar o procedimento que podemos implementar no Maxima para calcular os polinômios $G(u, v)$ definido em (3.3), em cada estrato. Para isto, precisamos apenas informar o polinômio que determina a superfície (neste caso, $f := xz^2+x^2t+y^3$) e utilizar o comando `subst` que faz a substituição das variáveis x, y, z, t no polinômio pelas coordenadas dos pontos nas retas no determinado estrato. De fato, no estrato $\mathcal{V}_i$ (3.2)

[1] Sugestão: Pesquise os comandos: `for ... while ...` no Maxima.

começamos com as linhas de comando no primeiro bloco (que corresponde ao nosso *input*) para obtermos $G(u, v)$:=`fEi` para cada $i \in \{0, 1, \dots 5\}$ no *output*, conforme indicado a seguir.

No estrato 5, para calcular $G(u, v) = f(0, 0, u, v)$ (isto é, `fE5`) utilize o *input*

```
f: x*z^2+t*x^2+y^3;
fE5: subst([x=0,y=0,z=u,t=v],f) /* Estrato 5 */ ;
```

Obtendo o *output*

(%i1) f: x*z^2+t* x^2+y^3;
(%o1) $xz^2 + y^3 + tx^2$
(%i2) fE5: subst([x=0,y=0,z=u,t=v],f) /* Estrato 5 */;
(%o2) 0

No estrato 4, para calcular $G(u, v) = f(0, u, au, v)$, (isto é, `fE4`) utilize o *input*

```
fE4: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f) /* Estrato 4 */;
```

Obtendo o *output*

(%i3) fE4: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f) /* Estrato 4 */;
(%o3) u^3

No estrato 3, para calcular $G(u, v) = f(0, u, v, au + bv)$, (isto é, `fE3`) utilize o *input*

```
fE3: subst([x=0,y=u,z=v,t=u*a+b*v],f) /* Estrato 3 */;
```

Obtendo o *output*

(%i4) fE3: subst([x=0,y=u,z=v,t=u*a+b*v],f) /* Estrato 3 */;
(%o4) u^3

No estrato 2, para calcular $G(u, v) = f(u, au, bu, v)$, (isto é, `fE2`) utilize o *input*

```
fE2: subst([x=u,y=u*a,z=u*b,t=v],f) /* Estrato 2 */;
```

Obtendo o *output*

(%i5) fE2: subst([x=u,y=u*a,z=u*b,t=v],f) /* Estrato 2 */;
(%o5) $u^2v + b^2u^3 + a^3u^3$

No estrato 1, para calcular $G(u, v) = f(u, au, v, bu + cv)$, (isto é, `fE1`) utilize o *input*

```
fE1: subst([x=u,y=u*a,z=v,t=u*b+v*c],f) /* Estrato 1 */;
```

Obtendo o *output*

(%i6) fE1: subst([x=u,y=u*a,z=v,t=u*b+v*c],f) /* Estrato 1 */;
(%o6) $uv^2 + u^2(cv + bu) + a^3u^3$

No estrato 0, para calcular $G(u, v) = f(u, v, au + cv, bu + dv)$, (isto é, `fE0`) utilize o *input*

```
fE0: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f) /* Estrato 0 */;
```

Obtendo o *output*

(%i7) fE0:subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f)/*Estrato 0*/;
(%o7) $u(cv + au)^2 + v^3 + u^2(dv + bu)$

Para você rodar estes procedimentos no Maxima on-line, copie todos os comandos dos blocos de *input* anteriores (onde não aparece o simbolo %), cole no programa (talvez você precise consertar a primeira linha quanto ao acento circunflexo, o * e os sinais de -) e aperte no botão "Clic".

Exemplo B.5. Considere X $= \mathcal{Z}(yzt + xzt + xyt + xyz) \subset \mathbb{P}^3$ (cf. Exemplo 3.4).

Neste exemplo vamos fazer uma descrição de como utilizar o Maxima para determinar os pontos singulares de X e a cardinalidade das retas em cada estrato $\mathcal{V}_i$ (em (3.2)) que estão contidas em X.

Primeiro informamos o polinômio $f := yzt + xzt + xyt + xyz$ ao programa, a seguir utilizaremos uma combinação dos comando `solve` e `diff` para encontrarmos os pontos singulares, se eles existirem. Use o *input* a seguir

```
f: y*z*t+x*z*t+x*y*t+x*y*z;
solve([diff(f,x)=0,diff(f,y)=0,diff(f,z)=0,diff(f,t)=0]);
```

E o programa nos dá o seguinte *output*

```
(%i2) solve([diff(f,x)=0,diff(f,y)=0,diff(f,z)=0,diff(f,t)=0]);
(%o2) [[x=0,z=%r1,y=0,t=0],[x=%r2,z=0,y=0,t=0],
       [x=0,z=0,y=%r3,t=0],[x=0,z=0,y=0,t=%r4]]
```

Logo, o conjuntos dos pontos singulares é

$$\{[0:1:0:0], [1:0:0:0], [0:0:1:0], [0:0:0:1]\}.$$

Agora, vamos começar explicando como fazer a contagem de retas no estrato 5, de forma detalhada. Para então explicar como o leitor poderá utilizar o Maxima nos outros estratos, uma vez que o procedimento utilizado no estrato $\mathcal{V}_5$ é diferente dos demais.

Estrato 5. Utilizando as ideias expostas no exemplo anterior, determinamos o polinômio $G(u,v)$, que chamamos de `fE5` no programa. Observe que se o polinômio $G(u,v) = 0$, então a única reta nesse estrato pertence a superfície em questão. Para determinar se $G = 0$ ou $G \neq 0$, utilizamos `if ... then ... else ...` no programa. De fato, se o *output* do Maxima indicar 1, então a única reta do estrato $\mathcal{V}_5$ está contida na superfície (isto é, o polinômio $G(u,v)$ é nulo), caso contrário, será indicado 0 no programa. Desta forma, temos o *input* a seguir

```
fE5: subst([x=0,y=0,z=u,t=v],f) /* Estrato 5 */;
if fE5=0 then ss5:1 else ss5:0;
```

E obtemos o seguinte *output*

```
(%i3) fE5: subst([x=0,y=0,z=u,t=v],f) /* Estrato 5 */;
(%o3) 1
```

Logo, no estrato 5 temos uma reta.

Para abordarmos os próximos estratos, começaremos encontrando os coeficientes de `fEi`$= G(u,v)$ (para i=0, . . ., 4) seguindo o procedimento do Exemplo B.3. Vale salientar que esses coeficientes são expressões polinomiais nas variáveis a, b, c, d, e que em todos os estratos serão nomeados por `ff0, ff1, ff2` e `ff3`.

Depois, formamos um sistema de equações com estes coeficientes, consideramos `si` o conjunto de soluções deste sistema, e `ssi` a cardinalidade de `si`. O número de retas no estrato i é `ssi`, para i=0, . . ., 4.

Estrato 4. O *input* para a contagem das retas neste estrato é

```
fE4: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f) /* Estrato 4 */;
ff3: diff(fE4,u,3)/(3!) /* coeficiente de u^3 */;
ff2: diff(fE4,u,2,v,1)/(2!) /* coeficiente de u^2 v */;
ff1: diff(fE4,u,1,v,2)/(2!) /* coeficiente de uv^2 */;
ff0: diff(fE4,v,3)/(3!) /* coeficiente de v^3 */;
s4: solve([ff3=0,ff2=0,ff1=0,ff0=0],[a]) /* conjunto solução do sistema */;
ss4: cardinality(setify(s4)) /* cardinalidade do conjunto solução do sistema */;
```

Obtemos o *output*

(%i4) fE4: subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f) /* Estrato 4 */;
(%o4) au^2v
(%i5) ff3: diff(fE4,u,3)/(3!) /* coeficiente de u^3 */;
(%o5) 0
(%i6) ff2: diff(fE4,u,2,v,1)/(2!) /* coeficiente de u^2v */;
(%o6) a
(%i7) ff1: diff(fE4,u,1,v,2)/(2!) /* coeficiente de uv^2 */;
(%o7) 0
(%i8) ff0: diff(fE4,v,3)/(3!) /* coeficiente de v^3 */;
(%o8) 0
(%i9) s4: solve([ff3=0,ff2=0,ff1=0,ff0=0],[a])/* conjunto solução do sistema */;
(%o9) [[$a = 0$]]
(%i10) ss4: cardinality(setify(s4)) /* cardinalidade do conjunto solução do sistema */ ;
(%o10) 1

Logo, no estrato 4 temos uma reta.

Para continuar calculando a quantidade de retas da superfície X nos próximos estratos, basta repetir o procedimento indicado acima.

Calculemos agora o número de retas que a superfície X contém. Para isso, basta somar a quantidade de retas em cada estrato, `ssi` (i=0, . . ., 5), como no *input* a seguir.

```
total: ss0+ss1+ss2+ss3+ss4 +ss5 /* Total de retas */;
```

E obtemos o seguinte *output*

(%i40) total: ss0+ss1+ss2+ss3+ss4 +ss5 /* Total de retas */;
(%o40) 9

E assim, a superfície X contém 9 retas.

Observação B.2. No exemplo anterior realizamos as contas para uma superfície de grau 3. Para facilitar a cópia e a colagem de todos os comandos que nos ajudam a contar as retas (**no caso de superfícies cúbicas**), unificamos todos eles na tabela a seguir.

Assim, para que você possa realizar testes no Maxima on-line, basta você copiar toda a tabela, colar no Maxima on-line, adicionar a equação do polinômio desejado, e por fim, apertar o botão ‘Clic’.

```
f: ;
solve([diff(f,x)=0,diff(f,y)=0,diff(f,z)=0,diff(f,t)=0]);
fE5:subst([x=0,y=0,z=u,t=v],f) /* Estrato 5 */;
if fE5=0 then ss5:1 else ss5:0;
fE4:subst([x=0,y=u,z=u*a,t=v],f)/* Estrato 4 */;
ff3:diff(fE4,u,3)/(3!); ff2:diff(fE4,u,2,v,1)/(2!);
ff1:diff(fE4,u,1,v,2)/(2!); ff0:diff(fE4,v,3)/(3!);
s4:solve([ff3=0,ff2=0,ff1=0,ff0=0],[a]);
ss4:cardinality(setify(s4));
fE3:subst([x=0,y=u,z=v,t=u*a+b*v],f) /* Estrato 3 */;
ff3:diff(fE3,u,3)/(3!);ff2:diff(fE3,u,2,v,1)/(2!);
ff1:diff(fE3,u,1,v,2)/(2!); ff0:diff(fE3,v,3)/(3!);
s3:solve([ff3=0,ff2=0,ff1=0,ff0=0],[a,b]);
ss3:cardinality(setify(s3));
fE2:subst([x=u,y=u*a,z=u*b,t=v],f) /* Estrato 2 */;
ff3:diff(fE2,u,3)/(3!); ff2:diff(fE2,u,2,v,1)/(2!);
ff1:diff(fE2,u,1,v,2)/(2!);ff0:diff(fE4,v,3)/(3!);
s2:solve([ff3=0,ff2=0,ff1=0,ff0=0],[a,b]);
ss2:cardinality(setify(s2));
fE1:subst([x=u,y=u*a,z=v,t=u*b+v*c],f) /* Estrato 1 */ ;
ff3:diff(fE1,u,3)/(3!); ff2:diff(fE1,u,2,v,1)/(2!);
ff1:diff(fE1,u,1,v,2)/(2!); ff0:diff(fE1,v,3)/(3!);
s1:solve([ff3=0,ff2=0,ff1=0,ff0=0],[a,b,c]);
ss1:cardinality(setify(s1));
fE0:subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f) /* Estrato 0 */;
ff3:diff(fE0,u,3)/(3!); ff2:diff(fE0,u,2,v,1)/(2!);
ff1:diff(fE0,u,1,v,2)/(2!); ff0:diff(fE0,v,3)/(3!);
s0:solve([ff3=0,ff2=0,ff1=0,ff0=0],[a,b,c,d]);
ss0:cardinality(setify(s0));
total: ss0+ss1+ss2+ss3+ss4 +ss5 /* Total de retas */;
```

Exemplo B.6. Seja $X = \mathcal{Z}(t(y^2 - xz) + y(x^2 - z^2)) \subset \mathbb{P}^3$ (cf. Exemplo 3.5). O leitor pode calcular copiando os comandos da Observação B.2, adicionando a equação do polinômio!

Exemplo B.7. O leitor pode copiar os comandos da tabela da Observação B.2, adicionando a equação do polinômio $f := x^3 + y^3 + z^3 + t^3$ para conferir que a cúbica de Fermat $\mathcal{F}_3 := \mathcal{Z}(f) \subset \mathbb{P}^3$ contém 27 retas (cf. Exemplo 3.6).

Exercício B.3. Seja $X := \mathcal{Z}(t^4 + xy^3 + yz^3 + zx^3) \subset \mathbb{P}^3$. Verifique que X é uma superfície não singular que não contém retas.

Sugestão: desenvolva os comandos no máxima para o caso grau 4, sabendo que o *input* do estrato 0 é

```
f: t^4 + x*y^3 + y*z^3 + z*x^3;
fE0: subst([x=u,y=v,z=u*a+v*c,t=u*b+v*d],f);
ff4: diff(fE0,u,4)/(4!); ff3:diff(fE0,u,3,v,1)/(3!);
ff2: diff(fE0,u,2,v,2)/(4); ff1: diff(fE0,u,1,v,3)/(3!);
ff0: diff(fE0,v,4)/(4!);
s0: solve([ff4=0,ff3=0,ff2=0,ff1=0,ff0=0],[a,b,c,d]);
ss0: cardinality(setify(s0));
```

Exercício B.4. Verifique que $X = \mathcal{Z}(x^4 + x^2y^2 + y^3z + z^4 + z^2t^2 + t^4)$ é uma quártica não singular que não contém retas.

Bibliografia

L. Andrade (2015). *Maxima: um programa para as aulas de Matemática*. IMPA (ver p. 239).

S. Andria (2016). “Sobre o número máximo de retas em superfícies de grau d em $\mathbb{P}^3$”. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba (ver pp. 225, 227, 230, 236).

S. Andria e J. Rojas (2022). “Klein nos ajuda contar retas em superfícies projetivas”. *Rev. Mat. Univ.* 1, pp. 31–54 (ver pp. 225–227, 229, 236–238).

M. Artin (2010). *Algebra*. Pearson Education. Zbl: 0788.00001 (ver p. 236).

G. Assis (2011). “Cáculo das Retas numa Cúbica em $\mathbb{P}^3$”. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba (ver pp. 189, 190, 198).

M. Atiyah e I. Macdonald (1969). *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., pp. ix+128. MR: 0242802. Zbl: 1351.13002 (ver pp. 35, 91, 140).

A. Azarang (2017). “A simple proof of Zariski’s lemma”. *Bull. Iranian Math. Soc.* 43.5, pp. 1529–1530. MR: 3730657. Zbl: 1405.12002 (ver p. 25).

T. Bauer e S. Rams (fev. de 2022). “Counting lines on projective surfaces”. *Annali Scuola Normale Superiore - Classe di Scienze*, p. 13 (ver pp. 3, 223).

S. Boissière e A. Sarti (2007). “Counting lines on surfaces”. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* 6.1, pp. 39–52. MR: 2341513. Zbl: 1150.14013 (ver pp. 225, 232).

J. Bruce e C. Wall (1979). “On the classification of cubic surfaces”. *J. London Math. Soc. (2)* 19.2, pp. 245–256. MR: 0533323. Zbl: 0393.14007 (ver p. 3).

W. Bruns e J. Herzog (1993). *Cohen-Macaulay rings*. Vol. 39. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, pp. xii+403. MR: 1251956 (ver p. 37).

L. Caporaso, J. Harris e B. Mazur (1995). “How many rational points can a curve have?” Em: *The moduli space of curves (Texel Island, 1994)*. Vol. 129. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, pp. 13–31. MR: 1363052. Zbl: 0862.14012 (ver p. 225).

A. Cayley (1849). “On the triple tangent planes of surfaces of the third order”. *Cambridge and Dublin Math. J.* 4, pp. 118–138 (ver pp. 2, 199).

C. Ciliberto e M. Zaidenberg (2022). “Lines, conics, and all that”. *Pure and Applied Mathematics Quarterly* 18.1, pp. 101–176. MR: 4381849. Zbl: 1486.14003 (ver p. 2).

A. Clebsch (1861). “Zur Theorie der algebraischen Flächen.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 1861.58, pp. 93–108. MR: 1579142 (ver pp. 199, 221, 222).

— (1871). “Ueber die anwendung der quadratischen substitution auf die gleichungen 5ten grades und die geometrische Theorie des Ebenen Fünfseits”. *Mathematische Annalen* 4.2, pp. 284–345. MR: 1509752 (ver pp. 2, 3, 198).

T. Coquand e H. Lombardi (2005). “A short proof for the Krull dimension of a polynomial ring”. *Amer. Math. Monthly* 112.9, pp. 826–829. MR: 2179864. Zbl: 1105.13301 (ver p. 34).

D. Cox, J. Little e D. O’Shea (1997). *Ideals, varieties, and algorithms*. Second. Undergraduate Texts in Mathematics. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Springer-Verlag, New York, pp. xiv+536. MR: 1417938. Zbl: 0861.13012 (ver pp. 129, 185, 228).

J. Dieudonne (out. de 1972). “The historical development of algebraic geometry”. *The American Mathematical Monthly* 79.8, p. 827 (ver p. 1).

I. Dolgachev (2005). “Luigi Cremona and cubic surfaces”. *Convegno di Studi matematici, Istituto Lombardo, Accademia di Scienze e Lettere, Milano*, pp. 55–70 (ver p. 3).

— (2009). *MCKay correspondence*. Zbl: 1204.14008 (ver p. 236).

— (2012). *Classical algebraic geometry: A modern view.* Cambridge University Press (ver p. 3).

D. Eisenbud e J. Harris (2016). *3264 and all that: A second course in algebraic geometry*. 1st. Cambridge University Press. MR: 3617981. Zbl: 1341.14001 (ver pp. 221, 222).

W. Fulton (1989). *Algebraic curves*. Advanced Book Classics. An introduction to algebraic geometry, Notes written with the collaboration of Richard Weiss, Reprint of 1969 original. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, pp. xxii+226. MR: 1042981. Zbl: 0681.14011 (ver p. 121).

A. Garcia e Y. Lequain (2013). *Elementos de algebra*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada. MR: 0799537. Zbl: 1414.13001 (ver pp. 9, 18).

R. Hartshorne (1977). *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, pp. xvi+496. MR: 0463157. Zbl: 0531.14001 (ver pp. 88, 107, 146, 181, 222).

A. Henderson (2015). *The twenty-seven lines upon the cubic surface*. Cambridge University Press (ver p. 3).

K. Kodaira (1960). “On compact complex analytic surfaces: I”. *The Annals of Mathematics* 71.1, p. 111. MR: 0132556. Zbl: 0098.13004 (ver p. 217).

— (jan. de 1963a). “On compact analytic surfaces: II”. *The Annals of Mathematics* 77.3, p. 563. MR: 0184257. Zbl: 0118.15802 (ver p. 217).

— (set. de 1963b). “On compact analytic surfaces: III”. *The Annals of Mathematics* 78.1, p. 1. MR: 0184257. Zbl: 0171.19601 (ver p. 217).

D. Lira e J. Rojas (2019). “The maximal number of skew lines on Schur’s quartic”. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* 142, pp. 81–91. MR: 4032805. Zbl: 1436.14090 (ver p. 215).

M. Luza e J. Pereira (2018). “Extactic divisors for webs and lines on projective surfaces”. *Michigan Mathematical Journal* 67.4 (ver p. 3).

J. Maia, A. Silva, I. Vainsencher e F. Xavier (2013). “Enumeration of surfaces containing a curve of low degree”. *J. Pure Appl. Algebra* 217.8, pp. 1379–1394. MR: 3030541. Zbl: 1268.14047 (ver p. 167).

H. Matsumura (1970). *Commutative algebra*. W. A. Benjamin, Inc., New York, xii+262 pp. paperbound. MR: 0266911 (ver pp. 35, 91, 134).

S. McKean, D. Minahan e T. Zhang (2021). “All lines on a smooth cubic surface in terms of three skew lines.” *New York Journal of Mathematics* 27, pp. 1305–1327. arXiv: 2002.10367 (ver p. 3).

R. Mendoza e J. Rojas (2009). “Álgebra Linear e o Problema das quatro retas do Calculo de Schubert”. *Revista Matemática Universitária* 45, pp. 55–69 (ver pp. 188, 228).

W. Meyer (1934). “Spezielle Algebraische Flächen”. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, pp. 1533–1779 (ver p. 217).

A. Néron (1964). “Modèles Minimaux des Variétés Abéliennes sur les corps locaux et globaux”. *Publications mathématiques de l’IHÉS* 21.1, pp. 5–125. MR: 0179172 (ver p. 217).

S. Rams e M. Schütt (2015). “64 lines on smooth quartic surfaces”. *Math. Ann.* 362.1-2, pp. 679–698. arXiv: 1212.3511v5. MR: 3343894. Zbl: 1319.14042 (ver pp. 3, 151, 217, 218, 231).

— (set. de 2020). “Counting lines on surfaces, especially Quintics”. *Annali Scuola Normale Superiore - Classe di Scienze*, pp. 859–890. MR: 4166795. Zbl: 1477.14055 (ver pp. 224, 225).

T. Rêgo (2016). “Sobre o número máximo de retas em superfícies não singular de grau 4 em $\mathbb{P}^3$”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal da Paraíba (ver p. 167).

M. Reid (1988). *Undergraduate algebraic geometry*. Vol. 12. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, pp. viii+129. MR: 0982494. Zbl: 0701.14001 (ver pp. 3, 199).

G. Salmon (1849). “On the triple tangent planes to surfaces of the third order”. *Cambridge and Dublin Math. J.* 4, pp. 252–260 (ver pp. 2, 199).

C. Santos (2001). “Superfícies cúbicas projetivas não singulares”. Dissertação de mestrado. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (ver p. 3).

F. Schur (1882). “Ueber eine besondre Classe von Flächen vierter Ordnung”. *Math. Ann.* 20.2, pp. 254–296. MR: 1510168 (ver pp. 3, 213).

B. Segre (1943). “The maximum number of lines lying on a quartic surface”. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 14, pp. 86–96. MR: 0010431. Zbl: 0063.06860 (ver pp. 3, 217, 222, 225).

— (1947). “On arithmetical properties of quartic surfaces”. *Proc. London Math. Soc. (2)* 49, pp. 353–395. MR: 21952. Zbl: 0034.08603 (ver pp. 3, 208, 222, 223).

I. Shafarevich (1974). *Basic algebraic geometry*. Vol. 213. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Traduzido do russo por K. A. Hirsch. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, pp. xv+439. MR: 0366917 (ver pp. 81, 147).

T. Shioda (1981). "On the Picard number of a complex projective variety". *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 14.3, pp. 303–321. MR: 0644520. Zbl: 0498.14018 (ver p. 167).

J. Tate (1975). "Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil". *Modular Functions of One Variable IV*, pp. 33–52. MR: 0393039. Zbl: 1214.14020 (ver p. 217).

I. Vainsencher (2017). *Introdução às Curvas Algébricas Planas*. 3ª ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA (ver pp. 11, 120).

Índice Remissivo

Anel
- anel das funções regulares, 49
- anel de coordenadas, 32
- anel de coordenadas homogêneo, 89
- anel de funções regulares, 101
- catenário, 37
- corpo
  - k-álgebra finitamente gerada, 25
  - algebricamente fechado, 26, 33
  - Extensão algébrica de corpos, 25
- corpo de frações, 91
- dimensão de Krull, 31
- elemento de grau zero, 97
- função polinomial, 112
- ideal
  - altura, 35
  - cadeia maximal, 32
  - conjunto de zeros, 7
  - ideal associado, 17, 70
  - ideal homogênio, 57
  - ideal irrelevante, 71
  - primo, 20
  - radical, 19
  - zeros do ideal, 59
- polinômio
  - desomogeinização, 84, 85
  - homogeinização, 84
  - livre de quadrados, 64
  - monômio, 55
  - polinômio homogêneo, 55
  - zeros de conjunto de polinômios, 59
  - zeros de polinômios, 59
- polinômio bi-homogêneo, 80
- polinômio linear, 39
- álgebra finitamente gerada, 97

conjunto algébrico afim, 9
curva plana afim, 10

Função
- função polinomial, 50
- função regular, 44
- função regular em p, 44

hipersuperfície (afim), 10

Maxima
- comandos para a contagem de retas em cúbicas, 246

exemplo para encontrar pontos singulares em cúbicas, 241
guia básico, 239

Superfície
curva residual, 173
multiplicidade de interseção, 221
plano tangente, 168
projetivamente equivalentes, 185
reduzida, 168
retas concorrentes, 169
retas coplanares, 169
superfície de Fermat, 220
superfície afim, 10

Topologia, 12
abertos, 12
cadeia maximal, 29
comprimento de cadeia, 29
conjunto fechado, 14
conjunto irredutível, 14
conjunto redutível, 14
dimensão, 29
elemento minimal, 22
espaço noetheriano, 21
fechados, 12
Topologia de Zariski, 13
topologia de Zariski em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, 67
Topologia induzida, 14

Variedade
conjunto dos zeros, 7
função coordenada, 110
função regular, 98
função regular em p, 98
isomorfismo, 107
morfismo, 107
morfismo dominante, 122
morfismo fechado, 146
plano no infinito, 54
quase afim, 16
Variedade afim, 16
codimensão, 134
componente irredutível, 22, 24
cone afim, 151
conjunto de zeros, 7
Variedade linear
hiperplano, 40
plano, 40
reta, 40
Variedade linear afim, 39
Variedade projetiva
k-variedade linear, 65
n-espaço projetivo, 52
componente irredutível, 75
conjunto algébrico projetivo, 61, 79
conjunto algébrico quase projetivo, 68
conjunto de retas $\mathfrak{L}(X)$, 129
conjunto de retas que intersectam ℓ ($\mathfrak{L}_\ell(X)$), 130
coordenadas de Plücker da reta, 155
coordenadas projetivas, 52
curva, 64
curva plana, 171
curva plana reduzida, 171
equivalencia projetiva, 129
grassmanniana, 54
hiperplano infinito, 54
hipersuperfície, 64
hipersuperfície não singular, 75
hipersuperfície reduzida, 64
hipersuperfície singular, 75
mergulho de Plücker, 154
mergulho de Segre, 78, 79
morfismo
fibra, 131
mudança de corrdenadas projetivas, 124
plano em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, 65
plano projetivo $\mathbb{P}^2$, 53
ponto no infinito, 53
ponto singular, 75, 128
projetivização, 52
quádrica de Plücke, 154

reta em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, 65
reta no infinito, 54
reta projetiva $\mathbb{P}^1$, 53
reta tangente, 121
superfície, 64
variedade linear, 77
variedade quase projetiva, 68
Variedades isomorfas, 107

Zariski
Lema, 25

Títulos Publicados — 34º Colóquio Brasileiro de Matemática

Uma introdução à convexidade em grafos – *Júlio Araújo, Mitre Dourado, Fábio Protti e Rudini Sampaio*

Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos – *Lucas Backes, Alexandre Tavares Baraviera e Flávia Malta Branco*

Introdução aos espaços de Banach – *Aldo Bazán, Alex Farah Pereira e Cecília de Souza Fernandez*

Contando retas em superfícies no espaço projetivo – *Jacqueline Rojas, Sally Andria e Wállace Mangueira*

Paths and connectivity in temporal graphs – *Andrea Marino e Ana Silva*

Geometry of Painlevé equations – *Frank Loray*

Implementação computacional da tomografia por impedância elétrica – *Fábio Margotti, Eduardo Hafemann e Lucas Marcilio Santana*

Regularidade elíptica e problemas de fronteiras livres – *João Vitor da Silva e Gleydson Ricarte*

The ∞-Laplacian: from AMLEs to Machine Learning – *Damião Araújo e José Miguel Urbano*

Homotopical dynamics for gradient-like flows – *Guido G. E. Ledesma, Dahisy V. S. Lima, Margarida Mello, Ketty A. de Rezende e Mariana R. da Silveira*

impa

Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

Jacqueline Rojas

Jacqueline nasceu no Talca (Chile) e graduou-se em Matemática na Universidad de Talca. Jacqueline rumou para o Recife, onde obteve os títulos de mestre e doutora na UFPE. Já visitou o túmulo de Sophus Lie e o Cristo Redentor entre as várias atividades desenvolvidas em seus períodos de Pós-Doutorado na Universitetet i Oslo e no IMPA.

Sally Andria

Sally é recifense, licenciada em matemática pela UFRPE. Obteve seu mestrado na UFPB, orientada pela Jacqueline. Seguiu para a "Cidade Sorriso", e doutorou-se na UFF, onde é atualmente professora adjunta. Também realizou pós-doutorado no IMPA e é coautora do livro "Introdução à Criptografia com Curvas Elípticas".

Wállace Mangueira

Wállace, matemático paraibano, graduado e mestre pela UFPB, doutor e pós-doutor pelo IMPA, é docente da UFPB. Aprecia maratonas de resolução de problemas de olimpíadas de matemática e, nas horas vagas, não dispensa embarcar em alguma aventura pela Terra Média criada por J. R. R. Tolkien, escritor de quem é grande fã.

Contando retas em superfícies no espaço projetivo

ISBN 978-85-244-0540-2

9 788524 405402

impa

Instituto de Matemática Pura e Aplicada