

# Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos

Lucas Backes  
Alexandre Tavares Baraviera  
Flávia Malta Branco

34<sup>o</sup>

Colóquio  
Brasileiro de  
Matemática



Instituto de  
Matemática  
Pura e Aplicada

# **Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos**

## **Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos**

Primeira impressão, setembro de 2023

Copyright © 2023 Lucas Backes, Alexandre Tavares Baraviera e Flávia Malta Branco.

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

**ISBN** 978-85-244-0546-4 (print)

**ISBN** 978-85-244-0542-6 (ebook)

**MSC** (2020) Primary: 37-01, Secondary: 37B10, 37E05, 37D20

**Coordenação Geral**

Carolina Araujo

**Produção** Books in Bytes

**Capa** IMPA

**Realização da Editora do IMPA**

**IMPA**

Estrada Dona Castorina, 110

Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

[www.impa.br](http://www.impa.br)

[editora@impa.br](mailto:editora@impa.br)

B126i

Backes, Lucas

Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos / Lucas Backes, Alexandre Tavares Baraviera e Flávia Malta Branco. – 1.ed. -- Rio de Janeiro: IMPA, 2023.

34 Colóquio Brasileiro de Matemática; v. 2, 195p.: il.; 23cm

ISBN 978-85-244-0546-4 (print)

ISBN 978-85-244-0542-6 (ebook)

1. Dinâmica topológica. 2. Dinâmica simbólica. 3. Dinâmica hiperbólica. I. Baraviera, Alexandre Tavares. II. Branco, Flávia Malta. II. Série. III. Título

UDC: 515.1

Carolina Celano Lima/CRB-7: 2438

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Conceitos básicos</b>	<b>1</b>
1.1	Notação . . . . .	1
1.2	Sistemas dinâmicos . . . . .	2
1.3	Pré-imagens . . . . .	3
1.4	Conjuntos invariantes . . . . .	4
1.5	Pontos periódicos . . . . .	5
1.6	O conjunto $\omega$ -limite . . . . .	6
1.7	O conjunto $\alpha$ -limite . . . . .	7
1.8	Conjunto limite . . . . .	8
1.9	Pontos recorrentes . . . . .	8
1.10	O conjunto não errante . . . . .	9
1.11	Conjunto minimal . . . . .	10
1.12	Atratores e repulsores . . . . .	11
1.13	Conjuntos estáveis e instáveis . . . . .	13
1.14	Transitividade . . . . .	14
1.15	<i>Mixing</i> topológico . . . . .	15
1.16	Expansividade e sensibilidade às condições iniciais . . . . .	15
1.17	Sistemas caóticos . . . . .	16
1.18	Pseudo-órbitas . . . . .	17
1.19	Sombreamento . . . . .	18
1.20	Conjugação e semiconjugação . . . . .	18
1.21	Estabilidade estrutural . . . . .	20
1.22	Entropia topológica . . . . .	20

<b>2</b>	<b>Dinâmica no conjunto dos números naturais</b>	<b>25</b>
2.1	Dinâmica em conjuntos finitos . . . . .	25
2.1.1	Bijeção entre conjuntos finitos . . . . .	27
2.2	Dinâmica em conjuntos infinitos . . . . .	27
2.2.1	Alguns exemplos . . . . .	28
2.2.2	Caracterização do $\omega$ -limite . . . . .	31
2.2.3	Transitividade . . . . .	31
2.2.4	<i>Mixing</i> topológico . . . . .	33
2.3	Probabilidades em conjuntos enumeráveis . . . . .	33
2.3.1	Probabilidades invariantes . . . . .	36
2.4	Exercícios . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Dinâmica no espaço de sequências</b>	<b>41</b>
3.1	O espaço de sequências . . . . .	41
3.1.1	O espaço de sequências como espaço métrico . . . . .	42
3.1.2	Cilindros . . . . .	44
3.1.3	Não enumerabilidade do espaço de sequências . . . . .	44
3.2	A dinâmica do <i>shift</i> unilateral . . . . .	46
3.2.1	Pontos periódicos . . . . .	47
3.2.2	Transitividade . . . . .	49
3.2.3	<i>Mixing</i> topológico . . . . .	50
3.2.4	Expansividade, sensibilidade às condições iniciais e caos . . . . .	51
3.2.5	Sombreamento . . . . .	51
3.2.6	Entropia topológica . . . . .	52
3.2.7	Limites de algumas órbitas . . . . .	54
3.3	O espaço das sequências bilaterais $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . . . . .	55
3.4	O <i>shift</i> bilateral . . . . .	56
3.4.1	Algumas propriedades do <i>shift</i> bilateral . . . . .	57
3.4.2	Conjuntos estáveis e instáveis . . . . .	57
3.4.3	Pontos de interseção homoclínica e heteroclínica . . . . .	59
3.5	<i>Subshifts</i> de tipo finito . . . . .	59
3.5.1	Pontos fixos de $f_B^n$ . . . . .	61
3.5.2	Transitividade e <i>mixing</i> topológico . . . . .	62
3.6	Autômatos celulares . . . . .	65
3.6.1	Autômatos celulares são contínuos . . . . .	69
3.6.2	Comutatividade com o <i>shift</i> . . . . .	69
3.7	Exercícios . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Dinâmicas no intervalo</b>	<b>74</b>
4.1	Prólogo . . . . .	74
4.2	Comportamento na vizinhança de pontos fixos . . . . .	75
4.2.1	Pontos fixos com derivada menor do que 1 . . . . .	76
4.2.2	Pontos fixos com derivada maior do que 1 . . . . .	77

4.2.3	Pontos fixos com derivada 1	78
4.3	A tenda	81
4.4	Alguns casos da família quadrática	83
4.4.1	O caso $0 \leq a < 1$	83
4.4.2	O caso $1 < a < 3$	84
4.4.3	O caso $3 < a < 1 + \sqrt{6}$	85
4.4.4	O caso $a = 4$	86
4.4.5	O caso $1 + \sqrt{6} < a < 4$	88
4.5	Exercícios	89
<b>5</b>	<b>Transformações expansoras</b>	<b>90</b>
5.1	$f$ é uma aplicação expansora	90
5.1.1	Expansividade, transitividade e <i>mixing</i> topológico	92
5.1.2	Pontos periódicos	94
5.1.3	$f$ possui a propriedade do sombreamento	97
5.2	Dinâmicas relacionadas	102
5.2.1	Uma transformação no círculo unitário $S^1$	102
5.2.2	$f_1$ como uma transformação agindo no plano complexo	106
5.2.3	A transformação $2x \bmod 1$	107
5.2.4	A transformação $2x \bmod 1$ como um <i>shift</i>	110
5.3	Exercícios	111
<b>6</b>	<b>Transformações hiperbólicas</b>	<b>113</b>
6.1	O modelo linear	113
6.1.1	Conjuntos estáveis e instáveis de $A$	115
6.2	O toro $\mathbb{T}^2$	117
6.3	A aplicação induzida em $\mathbb{T}^2$	119
6.4	Os pontos periódicos de $f_A$	121
6.5	Os conjuntos estáveis e instáveis de $f_A$	123
6.6	Novas métricas em $W_{f_A}^s$ e $W_{f_A}^u$	128
6.7	Transitividade, <i>mixing</i> topológico e expansividade de $f_A$	131
6.8	Estabilidade de transformações lineares hiperbólicas	134
6.8.1	$A$ possui a propriedade do sombreamento	134
6.8.2	$A$ é globalmente estável	137
6.9	$f_A$ é estruturalmente estável	142
6.10	Propriedade do sombreamento	149
6.11	Entropia topológica de $f_A$	152
6.12	Partições de Markov	153
6.13	Automorfismos do toro em dimensão maior	158
6.14	Transformações hiperbólicas em geral	160
<b>A</b>	<b>Noções de espaços métricos</b>	<b>162</b>
A.1	Sequências	163

A.2	Conjuntos abertos, fechados e compactos . . . . .	163
A.3	Funções contínuas e homeomorfismos . . . . .	165
<b>B</b>	<b>Noções de álgebra linear</b>	<b>166</b>
B.1	Matrizes . . . . .	166
B.2	Transformações lineares em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	170
B.3	Normas em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	170
	<b>Bibliografia</b>	<b>172</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>174</b>
	<b>Lista de Símbolos</b>	<b>177</b>

“ . . . e a vida o que é?  
diga lá meu irmão  
ela é a batida  
de um coração . . . ”  
(Luiz Gonzaga Júnior)

Ao Pedro  
ATB & FMB

À Marília  
LB



# Prefácio

---

Suponha que estejamos interessados em estudar o comportamento de uma espécie de vírus que vive isolada e se multiplica em um ambiente onde a oferta de comida é limitada; ou de várias espécies de peixes que vivem num mesmo ambiente e competem pela sobrevivência. Uma abordagem possível a esses problemas é via *Sistemas Dinâmicos*: a população  $x_1$  do próximo ano é dada em função  $f$  da população  $x_0$  atual, isto é,  $x_1 = f(x_0)$ .

Mas o que é um sistema dinâmico? De maneira bem ampla, um sistema dinâmico é algo que evolui com o passar do tempo. Ele é composto por três elementos básicos: o espaço de fases  $X$ , cujos elementos ou pontos representam possíveis estados do sistema; o tempo  $n$ , que pode ser discreto ou contínuo e a lei de evolução  $f : X \rightarrow X$ , uma regra que nos permite determinar o estado do sistema em cada momento do tempo  $n$  a partir de seus estados em momentos anteriores. Certamente o leitor não terá dificuldades em reconhecer algum sistema dinâmico presente no seu dia a dia.

O estudo de sistemas dinâmicos remonta à antiguidade, porém, como disciplina, Jules Henri Poincaré (1854–1912) é considerado por muitos como seu fundador. Hoje é uma área bastante ampla e bem consolidada, tendo desempenhado um papel fundamental no desenvolvimento da Matemática brasileira. Seu estudo se utiliza de diversas ferramentas matemáticas, desde a Geometria à Álgebra, e encontra aplicações que vão da Biologia à Inteligência Artificial.

O objetivo destas notas é apresentar uma breve introdução, do ponto de vista matemático, a esse assunto que é tão bonito. Esperamos que os leitores também possam apreciar tal beleza.

## Sobre este livro

Este texto foi preparado com a intenção de servir de apoio a um minicurso de mesmo título ministrado no 34º Colóquio Brasileiro de Matemática. Nossos objetivos são modestos: longe de desenvolver uma teoria sólida, pretendemos apenas colecionar, da maneira que nos parece a mais consistente, uma série de exemplos que permitam explorar diversos conceitos e ideias interessantes da área de Sistemas Dinâmicos. Esperamos motivar os leitores a buscarem textos mais aprofundados quando adquirirem mais maturidade matemática e dominarem mais ferramentas.

Fizemos a opção de exigir um mínimo de pré-requisitos, de forma a aumentar o público-alvo e manter aberta a possibilidade de despertar em mais pessoas o interesse pelo assunto. Se isso ocorrer, o leitor encontrará nas referências algumas sugestões de leitura que seguramente garantirão um aprofundamento no tema.

De maneira geral, a ideia que permeia o livro é a seguinte: apresentar diversos conceitos importantes de dinâmica, explorando-os por meio de exemplos paradigmáticos da teoria, de forma a suscitar nos leitores o interesse pela área.

## Organização do livro e como usá-lo

O livro é dividido em seis capítulos e mais dois apêndices. No Capítulo 1, apresentamos diversos conceitos básicos de dinâmica que serão explorados por meio de exemplos ao longo do texto. No Capítulo 2, estudamos dinâmicas em conjuntos finitos e enumeráveis, enquanto que no Capítulo 3 passamos a estudar dinâmicas definidas em espaços de sequências, espaços esses que já não são mais enumeráveis. Nos Capítulos 4 e 5, estudamos dinâmicas definidas num intervalo da reta, focando neste último num exemplo de transformação expansora. Já no Capítulo 6, passamos a estudar um exemplo de dinâmica hiperbólica. Finalmente nos Apêndices A e B, recordamos brevemente noções da teoria de Espaços Métricos e Álgebra Linear que são utilizadas ao longo do texto. Apresentamos ainda, ao longo dos capítulos, diversos exercícios, muitos dos quais servem para complementar a teoria desenvolvida.

Quanto a um plano de estudos para estas notas, sugerimos estudar as primeiras seções do Capítulo 1 e depois partir direto para o Capítulo 2 e seguintes, retornando ao primeiro capítulo sempre que necessário. Cabe ressaltar que, devido a sua natureza, o Capítulo 1 pode ser considerado o mais abstrato de todo o livro. Por essa razão, alguns de seus tópicos podem não ficar completamente claros numa primeira leitura. Porém, à medida que os conceitos forem explorados nos exemplos ao longo dos capítulos, sua compreensão se dará de maneira natural.

## Agradecimentos

Agradecemos aos organizadores do 34º Colóquio Brasileiro de Matemática pela oportunidade de apresentar o minicurso, cuja preparação deu origem a este livro, assim como aos editores da presente coleção pela assistência e atenção ao longo da preparação deste texto.

O leitor que quiser comunicar erros do texto, enviar algum comentário ou simplesmente manter contato com os autores pode nos escrever usando os endereços abaixo:

lucas.backes@ufrgs.br   baravi@mat.ufrgs.br   flavia.branco@ufrgs.br

Será um prazer saber que este texto despertou a curiosidade de alguém.

Lucas Backes

Alexandre T. Baraviera

Flávia M. Branco

Porto Alegre  
Julho de 2023

# 1

## *Conceitos básicos*

---

Neste capítulo, reunimos, para conveniência do leitor, diversos conceitos e definições básicas que serão utilizados ao longo do texto. Apresentamos também algumas propriedades e exercícios envolvendo tais conceitos que podem numa primeira leitura ser ignorados, especialmente pelos leitores mais iniciantes. Ao longo do capítulo, utilizaremos algumas noções básicas da teoria de Espaços Métricos, brevemente recordadas no Apêndice A. Por fim, salientamos que ainda que a teoria dos Sistemas Dinâmicos possa ser estudada em situações em que o tempo é uma variável real, ou seja, situações nas quais o tempo evolui de uma forma contínua, nas linhas que seguiremos nos restringiremos ao caso de uma evolução discreta, ou seja, o tempo “varia de um em um”.

### 1.1 Notação

Antes de mais nada, para evitar ambiguidades, comecemos por estabelecer que ao longo do texto o conjunto dos números naturais inclui o zero

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

e, quando precisarmos excluir tal elemento, escreveremos

$$\mathbb{N}_* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Os conjuntos dos números inteiros e reais serão denotados como de costume por  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{R}$  respectivamente.

## 1.2 Sistemas dinâmicos

Um *sistema dinâmico* é um par  $(X, f)$ , sendo  $X$  um conjunto às vezes chamado de *espaço de fases*, e  $f: X \rightarrow X$  é uma regra ou, mais precisamente, uma função, que nos diz como os pontos de  $X$  se movem com o passar do tempo. De maneira sucinta, um sistema dinâmico é simplesmente uma função

$$f: X \rightarrow X.$$

A dinâmica, isto é, a passagem do tempo é vista como sendo a iteração dessa função. Desta forma, se começamos com um ponto  $x \in X$ , que corresponde ao instante zero, no instante 1 ele estará em  $f(x)$ , depois em  $f(f(x))$  no instante 2 e assim sucessivamente. Para evitarmos escrever expressões como

$$f(f(f(f(f(x)))))$$

usaremos a seguinte convenção, padrão nessa área:

$$f^0(x) := x, \quad f^1(x) := f(x), \quad f^n(x) := f(f^{n-1}(x)) \quad \text{para } n \geq 1.$$

Isto é,

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f \circ f}_n(x).$$

Desta maneira a expressão enorme acima pode ser reescrita simplesmente como  $f^5(x)$  significando que  $f$  foi iterada 5 vezes, então o leitor não deve jamais confundir com elevar  $f(x)$  a potência 5, até porque essa operação algébrica pode não fazer o menor sentido no conjunto  $X$ . Nessa nova notação, portanto, o que se pretende estudar é a evolução no tempo de um ponto  $x$ , ou seja,  $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$ . Esse conjunto é conhecido como a *órbita* do ponto  $x$ , sendo denotado por

$$O(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(x).$$

Quando  $f$  possui uma função inversa  $f^{-1}: X \rightarrow X$ , podemos também considerar os iterados de  $f$  para o passado. Nesse caso, dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{-n}$  significa iterar a função inversa  $f^{-1}$   $n$ -vezes. Ou seja,

$$f^{-n}(x) = \underbrace{f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1} \circ f^{-1}}_n(x).$$

Então, neste contexto, a órbita de  $x$  é dada por

$$O(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(x).$$

Um dos objetivos da teoria é entender o comportamento de  $O(x)$ . Por exemplo, entender se essa órbita tem algum limite, ou, se não tem, descrever seus pontos de acumulação (em palavras simples, os pontos dos quais a órbita se aproxima infinitas vezes no futuro).

Em geral, a estrutura do conjunto  $X$  e a natureza da função  $f$  variam bastante. É muito comum, por exemplo, o estudo de dinâmicas ditas diferenciáveis nas quais  $X$  é uma variedade diferenciável e  $f$  é um difeomorfismo. Nesse caso, a existência de uma estrutura geométrica ajuda bastante a compreender a evolução do sistema. No entanto, existem diversas dinâmicas interessantes que não se enquadram nessa situação como veremos na sequência. Por outro lado, para que possamos desenvolver uma teoria suficientemente interessante, é necessário que  $X$  tenha alguma estrutura. Para tanto, *a partir de agora, assumiremos que  $(X, d)$  é um espaço métrico*. Isto é, que  $X$  é um espaço munido de uma noção de distância entre seus pares de pontos. Aos leitores mais iniciantes sugerimos revisar brevemente o Apêndice A, no qual apresentamos alguns conceitos básicos envolvendo tais espaços. Em diversas situações, assumiremos também que  $f$  tem alguma propriedade extra, por exemplo, que  $f$  é contínua. Porém deixaremos claro quando este for o caso.

## 1.3 Pré-imagens

Quando temos uma aplicação  $f: X \rightarrow X$ , podemos, se  $f$  for uma bijeção, definir sua função inversa  $f^{-1}: X \rightarrow X$ . Porém, mesmo quando  $f$  não é bijeção (portanto não tem uma função inversa), é sempre possível definir a *pré-imagem* de um conjunto  $Y$ , que denotamos por  $f^{-1}(Y)$ , como sendo

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X : f(x) \in Y\}.$$

Ou seja, o conjunto  $f^{-1}(Y)$  consiste de todos pontos de  $X$  que são levados em  $Y$  pela função  $f$ . Por exemplo, no caso da função  $f$  dada na Figura 1.1,

$$f^{-1}(y_1) = \{x_1, x_3, x_4\}, \quad f^{-1}(y_2) = \{x_2\}, \quad f^{-1}(y_3) = \emptyset \text{ e } f^{-1}(Y) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

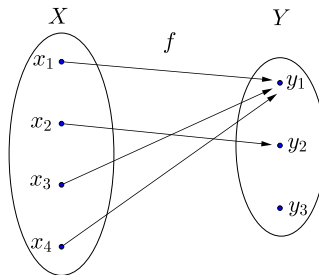


Figura 1.1: Função  $f$ .

Note que o conjunto  $f^{-1}(Y)$  pode conter vários pontos, um único ponto ou mesmo ser o conjunto vazio. Quando para cada ponto  $x \in X$  temos que  $f^{-1}(\{x\})$  é vazio ou tem um único elemento, então dizemos que  $f$  é injetiva. Quando para todo  $x \in X$  o conjunto  $f^{-1}(\{x\})$  é não vazio, então dizemos que  $f$  é sobrejetiva. Quando  $f$  é injetiva e sobrejetiva, ou seja, quando para todo  $x \in X$  temos que  $f^{-1}(\{x\})$  é um conjunto com exatamente um elemento, então dizemos que  $f$  é bijetiva.

## 1.4 Conjuntos invariantes

Um conjunto  $A \subset X$  é dito *invariante* por  $f: X \rightarrow X$  se  $f^{-1}(A) = A$  (observe que aqui  $f^{-1}(A)$  significa a pré-imagem de  $A$  por  $f$ ). Por exemplo, se considerarmos a aplicação  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x$ , então é fácil ver que  $A = \{0\}$  e  $B = \mathbb{R}$  são conjuntos invariantes por  $f$ . Observemos ainda que se  $A$  é invariante, então, dado  $x \in A$ , temos que  $f(x) \in A$ . Ou seja, todos os seus pontos permanecem em  $A$  após a ação de  $f$ . Em particular, podemos restringir nossa função a subconjuntos com essa propriedade e considerar

$$f|_A: A \rightarrow A$$

dada por  $f|_A(x) = f(x)$ . Nesse caso, podemos pensar em  $(A, f|_A)$  como um subsistema de  $(X, f)$ . Em determinadas situações, uma estratégia para estudar a dinâmica de  $f$  é justamente subdividir o espaço de fases  $X$  em subconjuntos invariantes e estudar a dinâmica da restrição de  $f$  a cada um desses subconjuntos, estudo esse que às vezes pode ser mais simples. Na sequência, apresentaremos diversos exemplos de conjuntos invariantes associados à dinâmica de  $f$ .

**Exercício 1.1.** Seja  $f: X \rightarrow X$  uma função invertível. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- $A$  é um conjunto invariante;
- $f(A) = A$ ;
- $f^n(A) = A$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exercício 1.2.** Seja  $f: X \rightarrow X$  uma bijeção. Verifique que  $A$  é um conjunto invariante se, e somente se,  $A = \bigcup_{x \in A} O(x)$ . Ou seja,  $A$  é invariante se e somente se  $A$  é a união das órbitas de seus pontos. Em particular, se  $A$  é invariante e  $x \in A$ , então  $O(x) \subset A$ . Mais ainda,  $O(x)$  é sempre um conjunto invariante.

**Exercício 1.3.** Sejam  $f: X \rightarrow X$  uma função e  $A \subset X$ . Dizemos que o conjunto  $A$  é *invariante para o futuro* se  $f(A) \subset A$ . De maneira análoga, dizemos que  $A$  é *invariante para o passado* se  $f^{-1}(A) \subset A$ .

- (a) Dê exemplos de conjuntos que são invariantes para o futuro, porém não são invariantes;

- (b) Dê exemplos de conjuntos que são invariantes para o passado, porém não são invariantes;
- (c) Observe que um conjunto é invariante se, e somente se, ele é invariante para o passado e para o futuro simultaneamente;
- (d) Mostre que um conjunto  $A \subset X$  é invariante por  $f$  se, e somente se, o seu complementar  $X \setminus A$  é um conjunto invariante por  $f$ ;
- (e) Mostre que se um conjunto  $A \subset X$  é invariante para o futuro, então seu complementar  $X \setminus A$  é invariante para o passado.

## 1.5 Pontos periódicos

Um conjunto de pontos do espaço de fases que desempenha papel fundamental no estudo dos sistemas dinâmicos é o conjunto dos pontos periódicos de  $f$ : dizemos que  $x$  é um *ponto periódico* se existe  $n \in \mathbb{N}_*$  tal que  $f^n(x) = x$ . Nesse caso, seu *período* é o menor número natural  $p \in \mathbb{N}_*$  tal que  $f^p(x) = x$ . Isto é,  $p$  é um número natural maior ou igual a 1 tal que  $f^p(x) = x$  e  $f^j(x) \neq x$  para todo  $j = 1, 2, \dots, p-1$ . Quando  $p = 1$ , ou seja, quando  $f(x) = x$ , dizemos simplesmente que  $x$  é um *ponto fixo* de  $f$ . Observemos que, quando  $x$  é um ponto periódico, sua órbita resume-se ao conjunto finito

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$$

e nesse caso, dizemos tratar-se de uma *órbita periódica*. Denotamos o conjunto de todos os pontos periódicos de  $f$  por  $\text{Per}(f)$ .

**Exemplo 1.1.** Considere a aplicação  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por  $f(x) = 3x(1-x)$ . Isto é,  $f(x) = -3x^2 + 3x$ . Note que  $f(0) = 0$  e  $f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ . Em particular,  $x = 0$  e  $x = \frac{2}{3}$  são pontos fixos de  $f$ . De fato, esses são os únicos pontos fixos de  $f$  (verifique). Este exemplo será mais explorado nos capítulos subsequentes.

**Exercício 1.4.** Mostre que  $\text{Per}(f)$  é um conjunto invariante por  $f$ .

**Observação 1.1.** Dado um número natural  $p > 1$ , podemos considerar a aplicação  $g: X \rightarrow X$  dada por  $g(x) = f^p(x)$ . Neste caso, se  $y$  é um ponto periódico de período  $p$ , então temos que

$$g(y) = f^p(y) = y.$$

Ou seja,  $y$  é um ponto fixo de  $g$ . Além disso, se  $x$  é um ponto fixo de  $f$ , então também é fácil ver que

$$g(x) = f \circ f \circ \dots \circ f(x) = x$$

e, em particular,  $x$  também é ponto fixo de  $g$ . Observemos, porém, que, se  $z$  é um ponto fixo de  $g$ , então o único que podemos afirmar a seu respeito é que ele é um ponto periódico de  $f$  com período menor ou igual a  $p$ . Voltaremos a esse assunto, com exemplos, nos capítulos que seguem.

## 1.6 O conjunto $\omega$ -limite

Dada a órbita  $O(x)$  de um ponto  $x \in X$ , é natural que queiramos entender quem são os seus pontos de acumulação, ou seja, quem são os pontos em torno dos quais a órbita irá passar uma infinidade de vezes. Esse conjunto é conhecido como o  $\omega$ -limite de  $x$  e denotado por  $\omega(x)$ . De forma mais técnica, dizemos que  $z \in \omega(x)$  se existe uma sequência infinita e crescente de números naturais  $n_1, n_2, \dots$  (em particular, que vai a infinito) tal que  $f^{n_i}(x) \rightarrow z$  à medida que  $i \rightarrow +\infty$ . Isto é,

$$d(f^{n_i}(x), z) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0.$$

Por exemplo, se  $x \in X$  é um ponto periódico de período  $p \in \mathbb{N}$ , então o conjunto  $\omega(x)$  coincide com sua órbita  $\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ . De fato, é fácil ver que  $\omega(x) \subset \{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ . Por outro lado, dado  $j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ , tomando  $n_i = ip + j$  temos que  $n_i \rightarrow +\infty$  quando  $i \rightarrow +\infty$  e  $f^{n_i}(x) = f^{ip+j}(x) = f^j(x)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Em particular,

$$d(f^{n_i}(x), f^j(x)) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$$

e, portanto,  $f^j(x) \in \omega(x)$  provando a afirmação.

O conjunto  $\omega(x)$  pode ter as mais variadas características. Por exemplo, ele pode ser vazio, coincidir com o espaço todo ou mesmo ter uma natureza fractal. Exploraremos alguns desses fatos em mais detalhes ao longo do texto.

Dado um subconjunto  $Y \subset X$ , podemos definir também o conjunto  $\omega$ -limite de  $Y$  como

$$\omega(Y) := \bigcup_{x \in Y} \omega(x).$$

Para finalizar, apresentamos as seguintes propriedades de conjuntos  $\omega$ -limites.

**Proposição 1.1.** *Seja  $f: X \rightarrow X$  uma transformação definida num espaço métrico compacto  $(X, d)$ . Então o conjunto  $\omega(x)$  é sempre um conjunto fechado. Além disso, se  $f$  é uma bijeção contínua, então  $\omega(x)$  é um conjunto invariante.*

*Demonstração.* Para ver que o conjunto  $\omega(x)$  é fechado, basta observar que

$$\omega(x) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{\{f^n(x) : n \geq k\}}$$

e lembrar que a interseção enumerável de conjuntos fechados resulta num conjunto fechado.

Para mostrarmos que  $\omega(x)$  é invariante, tendo em vista que  $f$  é bijeção (lembre-se do Exercício 1.1), basta mostrarmos que  $f(\omega(x)) = \omega(x)$ . Começemos observando que se  $z \in \omega(x)$ , então  $f(z) \in \omega(x)$  e, consequentemente,  $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$ . Se  $z \in \omega(x)$ , então de acordo com a definição de  $\omega(x)$  existe sequência crescente  $n_1, n_2, n_3, \dots$



de números naturais tal que  $f^{n_i}(x) \rightarrow z$  à medida que  $i \rightarrow +\infty$ . Tomemos agora a subsequência  $m_i = n_i + 1$ . Nesse caso, como  $f$  é contínua, temos que

$$f^{m_i}(x) = f^{n_i+1}(x) = f(f^{n_i}(x)) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} f(z).$$

Portanto  $f(z) \in \omega(x)$  conforme afirmado. Mostremos agora que  $\omega(x) \subset f(\omega(x))$ . Começamos observando que, como  $(X, d)$  é compacto e  $\omega(x)$  é fechado pela parte anterior da proposição,  $\omega(x)$  é também um conjunto compacto. Agora, dado  $z \in \omega(x)$ , segue novamente da definição que existe sequência crescente  $n_1, n_2, n_3, \dots$  de números naturais tal que  $f^{n_i}(x) \rightarrow z$  à medida que  $i \rightarrow \infty$ . Tome  $m_i = n_i - 1$ . Como  $\omega(x)$  é compacto, existe subsequência  $(f^{m_{i_j}}(x))_{j \in \mathbb{N}}$  de  $(f^{m_i}(x))_{i \in \mathbb{N}}$  que converge a um ponto  $y \in \omega(x)$ . Nesse caso, usando a continuidade de  $f$ , obtemos que

$$f(y) = f\left(\lim_{j \rightarrow \infty} f^{m_{i_j}}(x)\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{m_{i_j}+1}(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_{i_j}}(x) = z.$$

Ou seja, existe  $y \in \omega(x)$  tal que  $f(y) = z$ . Consequentemente  $\omega(x) \subset f(\omega(x))$ . Combinando as duas observações anteriores, concluímos que  $\omega(x) = f(\omega(x))$  como queríamos.  $\square$

Deixamos como desafio ao leitor as seguintes perguntas: a hipótese de que  $f$  é uma bijeção contínua é de fato necessária para garantir que  $\omega(x)$  seja invariante? Por exemplo, o que acontece se retirarmos a hipótese de que  $f$  é bijeção? E se retirarmos a hipótese de que  $f$  seja contínua? E o que acontece se suprimirmos a hipótese de que o espaço métrico  $(X, d)$  seja compacto?

## 1.7 O conjunto $\alpha$ -limite

Se a função  $f$  possui uma inversa (para isso é necessário e suficiente que  $f$  seja uma bijeção), então podemos também considerar a órbita de um ponto para o passado e, de forma análoga à seção anterior, procurar saber quais são os pontos de acumulação de tal órbita quando o tempo caminha no sentido contrário ao usual. Isso é o que se chama de  $\alpha$ -limite de um ponto, sendo denotado por  $\alpha(x)$ . De maneira mais precisa, dizemos que  $y \in X$  está em  $\alpha(x)$  se existe alguma sequência infinita e decrescente de números inteiros negativos  $m_1, m_2, \dots$  (em particular, que vai para  $-\infty$ ) tal que  $f^{m_i}(x) \rightarrow y$  à medida que  $i \rightarrow +\infty$ . Isto é,

$$d(f^{m_i}(x), y) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0.$$

Analogamente, definimos o conjunto  $\alpha$ -limite de um conjunto  $Y \subset X$  como

$$\alpha(Y) := \bigcup_{x \in Y} \alpha(x).$$

Para os leitores mais familiarizados com a teoria de espaços métricos, deixamos o seguinte exercício.

**Exercício 1.5.** Mostre que vale um resultado análogo à Proposição 1.1 para o conjunto  $\alpha$ -limite de  $x \in X$ .

## 1.8 Conjunto limite

Dado uma bijeção  $f : X \rightarrow X$ , consideremos

$$L^+(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x)} \text{ e } L^-(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \alpha(x)}.$$

O conjunto limite de  $f$  é definido como

$$L(f) = L^+(f) \cup L^-(f).$$

Observemos que tal conjunto contém todos os limites possíveis de órbitas de  $f$ , por isso o nome.

## 1.9 Pontos recorrentes

Às vezes alguns sistemas dinâmicos possuem um conjunto de pontos cuja dinâmica não é muito interessante pois suas órbitas não exibem nenhum tipo de recorrência. Informalmente eles “vão embora”. Por exemplo, se  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  é dada por  $f(x) = 2x$ , então  $f^n(x) = 2^n x$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Em particular, para todo  $x \in (0, +\infty)$ , temos que  $f^n(x) \rightarrow 0$  à medida que  $n \rightarrow -\infty$  e  $f^n(x) \rightarrow +\infty$  à medida que  $n \rightarrow +\infty$ . Logo todos esses pontos “vão embora” pra zero ou pra infinito (ou seja, nunca retornam para “próximo” do ponto inicial) e sua dinâmica é trivial. Tendo isso em mente, é comum restringirmos o nosso estudo a subconjuntos do espaço de fases que exibem alguma recorrência.

Dizemos que um ponto  $x \in X$  é *recorrente para o futuro* se sua órbita futura retorna arbitrariamente próxima de  $x$ . Mais precisamente, se  $x \in \omega(x)$ . Em particular,  $x$  é recorrente para o futuro se, dado qualquer vizinhança  $U$  de  $x$ , existe  $n \in \mathbb{N}_*$  tal que  $f^n(x) \in U$ . Um ponto periódico de  $f$  é obviamente recorrente para o futuro. Analogamente se  $f$  possui inversa, dizemos que  $x \in X$  é *recorrente para o passado* se sua órbita passada retorna arbitrariamente próxima de  $x$ . Isto é, se  $x \in \alpha(x)$ . Se  $x$  é recorrente para o passado e para o futuro, dizemos que  $x$  é *recorrente*. Denotamos o conjunto de todos os pontos recorrentes de  $f$  por  $\text{Rec}(f)$ .

Uma pergunta natural é se pontos recorrentes sempre existem, e a resposta depende do contexto. Por exemplo, é fácil ver que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x + 1$  não possui pontos recorrentes. Por outro lado, temos a seguinte proposição.

**Proposição 1.2.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico compacto e  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo, isto é, uma bijeção contínua cuja inversa  $f^{-1}$  também é contínua. Então,  $\text{Rec}(f) \neq \emptyset$ . Ou seja,  $f$  sempre tem algum ponto recorrente.*

Uma prova desse resultado será apresentada na Seção 1.11.

## 1.10 O conjunto não errante

A propriedade de um ponto ser recorrente, dependendo do contexto, pode ser muito restritiva. Por essa razão, introduzimos uma noção mais fraca de recorrência que olha não apenas para o ponto, mas para o comportamento da dinâmica em toda uma vizinhança do ponto. Consideremos novamente o exemplo  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  dado por  $f(x) = 2x$ . Observemos que, dado  $x > 0$ , tomando, por exemplo,  $\varepsilon = \frac{x}{10} > 0$  e

$$U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \left( \frac{9x}{10}, \frac{11x}{10} \right),$$

temos que

$$f^n(U) = \left( \frac{2^n \cdot 9x}{10}, \frac{2^n \cdot 11x}{10} \right).$$

Em particular, se  $n > 0$ , então  $\frac{2^n \cdot 9x}{10} \geq \frac{2 \cdot 9x}{10} = \frac{18x}{10} > \frac{11x}{10}$ . Ou seja, o ponto mais à esquerda do intervalo  $f^n(U)$  está à direita do ponto mais à direita de  $U$ . Consequentemente  $f^n(U) \cap U = \emptyset$  para todo  $n > 0$ . Analogamente podemos observar que  $f^n(U) \cap U = \emptyset$  para todo  $n < 0$ . Ou seja,  $f^n(U) \cap U = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Pontos com essa propriedade são ditos *pontos errantes*. No que segue, estaremos interessados justamente no complementar desse conjunto, ou seja, em pontos cuja órbita de qualquer vizinhança retorna para essa vizinhança. Então dizemos que um ponto  $x \in X$  é *não errante* se para todo conjunto aberto  $U$  contendo  $x$  existe  $n > 0$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Denotamos o conjunto de todos os pontos não errantes de  $f$  por  $\Omega(f)$ . Observemos que, no caso do exemplo acima,  $\Omega(f) = \{0\}$ .

**Exercício 1.6.** Seja  $f: X \rightarrow X$  um homeomorfismo definido num espaço métrico compacto  $(X, d)$ . Mostre que

- (a) se  $x$  é um ponto periódico, então  $x \in \Omega(f)$ ;
- (b) para todo  $x \in X$ , temos que  $\omega(x) \subset \Omega(f)$  e  $\alpha(x) \subset \Omega(f)$ ;
- (c)  $\Omega(f)$  é fechado;
- (d)  $\Omega(f)$  é invariante.

**Exercício 1.7.** Seja  $f: X \rightarrow X$  um homeomorfismo como acima. Mostre que

$$\text{Per}(f) \subset \text{Rec}(f) \subset L(f) \subset \Omega(f).$$

Apresente exemplos em que as inclusões acima são todas estritas.

Em alguns exemplos que aparecerão na sequência, veremos, por exemplo, que o conjunto dos pontos periódicos é denso em  $X$ . Ou seja,  $\overline{\text{Per}(f)} = X$ . Em particular, tendo em vista o exercício anterior e que  $\Omega(f)$  é fechado, poderemos concluir automaticamente que  $\Omega(f) = X$ . Ou seja, todo ponto do sistema é não errante.

## 1.11 Conjunto minimal

Um conjunto  $M \subset X$  é dito *minimal* para  $f: X \rightarrow X$  se

- (i)  $M$  é fechado e invariante;
- (ii)  $M$  não possui nenhum subconjunto próprio e não vazio que seja fechado e invariante. Ou seja, se  $F \subset M$  é um subconjunto fechado e invariante, então  $F = \emptyset$  ou  $F = M$ .

Em particular, se considerarmos o subsistema  $f|_M: M \rightarrow M$  (lembre-se da Seção 1.4), este não admite nenhum subsistema não trivial. Ou seja, ele é o “menor” subsistema possível de  $f: X \rightarrow X$ , que contém algum ponto de  $M$ , não podendo ser decomposto em sistemas “menores”.

**Exemplo 1.2.** Supomos que  $f: X \rightarrow X$  é uma bijeção. Então se  $x \in X$  é um ponto periódico temos que  $M = O(x)$  é um conjunto minimal. De fato, como  $M$  é finito (pois  $x$  é periódico), temos que  $M$  é fechado. Além disso, no Exercício 1.2, vimos que  $O(x)$  é invariante. Agora se  $F \subset M$  é um subconjunto fechado, invariante e não vazio, então existe  $y \in F$  e, novamente pelo Exercício 1.2,  $O(y) \subset F$ . Logo, como  $O(x) = O(y)$ , segue que  $F = M$ . Portanto  $M = O(x)$  é minimal.

**Proposição 1.3.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico compacto,  $f: X \rightarrow X$  um homeomorfismo e  $M \subset X$  um subconjunto compacto. Então,*

- $M$  é minimal se, e somente se,  $\omega(x) = M$  para todo  $x \in M$ ;
- $M$  é minimal se, e somente se,  $\alpha(x) = M$  para todo  $x \in M$ .

*Demonstração.* Provaremos apenas a primeira afirmação. A segunda é análoga. Supomos que  $M$  é minimal. Dado  $x \in M$ , como  $M$  é fechado e invariante, temos que  $O(x) \subset M$ . Consequentemente  $\omega(x) \subset M$ . Além disso, como  $M$  é compacto, temos que  $\omega(x) \neq \emptyset$  (por quê?). Mais ainda, pela Proposição 1.1, temos que  $\omega(x)$  é fechado e invariante. Logo segue da definição de conjunto minimal que  $\omega(x) = M$  como queríamos.

Supomos agora que  $\omega(x) = M$  para todo  $x \in M$ . Se  $F \subset M$  é um conjunto fechado, invariante e não vazio, pelo argumento feito no início da prova, temos que  $\omega(x) \subset F$  para todo  $x \in F$ . Logo

$$M = \omega(x) \subset F \subset M \text{ para todo } x \in F.$$

Consequentemente  $F = M$  donde segue que  $M$  é minimal. □

Como consequência do resultado anterior, temos, por exemplo, que todos pontos de um conjunto minimal são recorrentes (sob as hipóteses da proposição obviamente). Esse fato nos permite demonstrar a Proposição 1.2.

*Demonstração da Proposição 1.2.* A prova deste resultado fará uso do Lema de Zorn. Seja

$$\mathcal{F} = \{F \subset X : F \text{ é fechado, invariante e não vazio}\}.$$

Observemos que  $X \in \mathcal{F}$  e, portanto,  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ . Consideremos agora a seguinte relação de ordem parcial em  $\mathcal{F}$ : diremos que

$$F_1 \leq F_2 \text{ se, e somente se, } F_2 \subset F_1.$$

Agora dada uma coleção de conjuntos totalmente ordenada  $(F_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$  em  $\mathcal{F}$ , temos que  $F = \bigcap_{\alpha \in \Sigma} F_\alpha$  é um conjunto fechado, invariante e não vazio. Além disso,  $F_\alpha \leq F$  para todo  $\alpha \in \Sigma$ . Ou seja, toda coleção de conjuntos totalmente ordenada de  $\mathcal{F}$  possui uma quota superior. Logo, pelo Lema de Zorn,  $\mathcal{F}$  possui um elemento maximal que denotaremos por  $M$ . Agora é fácil ver que este  $M$  é um conjunto minimal. Portanto segue da Proposição 1.3 que todo elemento de  $M$  é recorrente, concluindo a demonstração.  $\square$

## 1.12 Atratores e repulsores

De maneira geral, um atrator é um conjunto ‘invariante’ que atrai todas as órbitas de sua vizinhança. Podemos formalizar isso como segue. Dizemos que um conjunto  $A \subset X$  é um *atrator* de  $f : X \rightarrow X$  se existe um conjunto aberto  $U \subset X$  tal que:

- (i)  $A \subset U$ ;
- (ii)  $f(\overline{U}) \subset U$ , isto é, o fecho de  $U$  é levado dentro de  $U$  pela ação de  $f$  e
- (iii)  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)$ . Ou seja, a interseção das imagens de  $U$  por  $f$  coincidem com  $A$ .

Um conjunto  $U$  com as propriedades acima é dito uma *trapping region* (“região de captura” numa tradução livre) para  $A$ . Observemos que, uma vez que um ponto entra numa *trapping region* de um atrator, ele nunca mais sai. Mais ainda, não é difícil ver que a propriedade i) é uma consequência trivial da propriedade iii) e, em particular, poderia ser omitida da definição, que a deixamos apenas por acreditarmos que auxilia na compreensão do conceito.

Algumas propriedades simples de conjuntos atratores são as seguintes.

**Proposição 1.4.** *Se  $A$  é um atrator, então  $f(A) = A$ .*

*Demonstração.* Como  $A$  é atrator temos que  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)$  em que  $U$  é uma *trapping region* para  $A$ . Agora, como  $f(U) \subset U$ , temos que

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{n+1}(U) = f\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)\right) = f(A).$$

$\square$

**Proposição 1.5.** *Sejam  $(X, d)$  espaço métrico compacto e  $f: X \rightarrow X$  uma aplicação contínua. Se  $A$  é um atrator de  $f$  e  $U$  é uma trapping region para  $A$ , então todo ponto de  $U$  converge para  $A$  para o futuro. Mais precisamente, para todo  $x \in U$  temos que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), A) = 0$$

*sendo  $d(y, A) = \inf_{a \in A} \{d(y, a)\}$ . Ou seja,  $A$  atrai todas as órbitas que estão em sua vizinhança justificando o nome ‘atrator’.*

*Demonstração.* Observemos que dizer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), A) = 0$  é equivalente a dizer que para toda vizinhança  $V$  de  $A$ , isto é, para todo conjunto aberto  $V$  contendo  $A$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x) \in V$  para todo  $n \geq n_0$ . Ou seja, a partir de um certo momento, a órbita futura de  $x$  entra em  $V$  e não sai mais. Mostremos, então, que isto de fato ocorre para todo  $x \in U$ .

Observemos que  $\mathcal{C} = \{V, X \setminus f^n(\overline{U})\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma cobertura aberta de  $X$ . Logo, como  $X$  é compacto, possui uma subcobertura finita  $\tilde{\mathcal{C}} = \{V, X \setminus f^{n_1}(\overline{U}), X \setminus f^{n_2}(\overline{U}), \dots, X \setminus f^{n_k}(\overline{U})\}$ . Agora, como  $f^{n+1}(U) \subset f^n(U)$  e supondo sem perda de generalidade que  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ , temos que  $X \setminus f^{n_i}(\overline{U}) \subset X \setminus f^{n_k}(\overline{U})$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ . Consequentemente  $\{V, X \setminus f^{n_k}(\overline{U})\}$  é ainda uma cobertura de  $X$  e, mais ainda,  $\{V, X \setminus f^n(\overline{U})\}$  é uma cobertura de  $X$  para todo  $n \geq n_k$ . Isto é,  $X = V \cup (X \setminus f^n(\overline{U}))$  para todo  $n \geq n_k$ . Em particular,  $f^n(U) \subset V$  para todo  $n \geq n_k$  visto que  $f^n(U) \cap (X \setminus f^n(\overline{U})) = \emptyset$ . Portanto, dado  $x \in U$ , para todo  $n \geq n_k$ , temos que  $f^n(x) \in f^n(U) \subset V$  como queríamos.  $\square$

A *bacia de atração* de um atrator  $A$  é definida como

$$B(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U)$$

onde  $U$  é uma *trapping region* para  $A$ .

**Exercício 1.8.** Seja  $A$  um atrator. Mostre que  $x \in B(A)$  se, e somente se, a órbita futura de  $x$  converge para  $A$ .

Ou seja, a bacia de atração de um atrator consiste exatamente dos pontos que são atraídos para  $A$  no futuro. No caso em que  $B(A) = X$ , ou seja, todos os pontos do sistema são atraídos para  $A$ , dizemos que  $A$  é um *atrator global*. Por exemplo, no caso da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x/2$ , é fácil ver que  $A = \{0\}$  é um atrator global. De fato, dado  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $f^n(x) = x/2^n$  e, portanto, à medida que  $n$  cresce,  $f^n(x)$  se aproxima de 0 para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Como nos exemplos de conjuntos anteriores, os atratores podem ter formas e estruturas bem variadas. O caso do exemplo anterior, em que temos um ponto fixo atrator, é o mais simples possível e é aquele que mais aparecerá ao longo do texto.

**Exercício 1.9.** Um ponto que pertence à bacia de um atrator pode ser recorrente?

Se  $f : X \rightarrow X$  é uma transformação invertível, então podemos definir uma noção similar a de atrator, porém com relação a  $f^{-1}$ . Isto é o que chamamos de repulsor. Mais precisamente, um subconjunto  $R$  é dito um *repulsor* de  $f$  se  $R$  é um atrator para  $f^{-1}$ . Em particular, se  $R$  é um repulsor, então existe uma vizinhança de  $R$  tal que a órbita para o passado de todo ponto nesta vizinhança converge para  $R$ . Por exemplo, se considerarmos  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = 2x$ , então  $R = \{0\}$  é um repulsor, pois, como vimos acima,  $R$  é um atrator para  $g^{-1}(x) = f(x) = \frac{x}{2}$ .

## 1.13 Conjuntos estáveis e instáveis

Outros conjuntos que desempenham papel fundamental no estudo dos sistemas dinâmicos, especialmente aqueles com algum tipo de hiperbolicidade como veremos, por exemplo, no Capítulo 6, são os conjuntos estáveis e instáveis que apresentaremos na sequência. Sejam  $f : X \rightarrow X$  um sistema dinâmico invertível e  $x \in X$  um ponto arbitrário. O *conjunto estável* de  $x$  é definido como

$$W_f^s(x) = \left\{ y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}$$

enquanto que

$$W_f^u(x) = \left\{ y \in X : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}$$

é o *conjunto instável* de  $x$ . Observemos que  $W_f^s(x) = W_{f^{-1}}^u(x)$  e  $W_f^u(x) = W_{f^{-1}}^s(x)$ . Mais ainda, no caso de  $x$  ser um ponto fixo, isto é, satisfizer  $f(x) = x$ ,  $W_f^s(x)$  e  $W_f^u(x)$  resumem-se ao conjunto de pontos que convergem para  $x$  para o futuro e para o passado respectivamente. Por exemplo, se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por  $f(x) = 2x$ , então  $W_f^s(0) = \{0\}$  enquanto que  $W_f^u(0) = \mathbb{R}$ .

**Exercício 1.10.** Mostre que  $f(W_f^s(x)) = W_f^s(f(x))$  e  $f^{-1}(W_f^u(x)) = W_f^u(f^{-1}(x))$  para todo  $x \in X$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , os *conjuntos estáveis e instáveis locais* (de tamanho  $\varepsilon > 0$ ) de  $x$  são definidos respectivamente como

$$W_{f,\varepsilon}^s(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

e

$$W_{f,\varepsilon}^u(x) = \{y \in X : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

De maneira informal,  $W_{f,\varepsilon}^s(x)$  é o conjunto de todos os pontos de  $X$  cuja órbita futura fica  $\varepsilon$ -próxima da órbita futura de  $x$ , e analogamente  $W_{f,\varepsilon}^u(x)$  é o conjunto de todos os pontos de  $X$  cuja órbita passada fica  $\varepsilon$ -próxima da órbita passada de  $x$ . Em determinadas situações, como veremos no Capítulo 6, é possível mostrar que  $W_{f,\varepsilon}^s(x) \subset W_f^s(x)$  e  $W_{f,\varepsilon}^u(x) \subset W_f^u(x)$ .

## 1.14 Transitividade

Dizemos que  $f: X \rightarrow X$  é *transitiva* se existe  $x \in X$  tal que  $\overline{O(x)} = X$ . Ou seja, se  $f$  possui *alguma* órbita densa. Em outras palavras,  $f$  é transitiva se existe algum ponto  $x \in X$  cuja órbita visita qualquer conjunto aberto de  $X$ : dado qualquer conjunto aberto  $U \subset X$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x) \in U$ . De maneira informal, isto implica, por exemplo, que uma transformação transitiva não pode ser decomposta em dois subsistemas cujos espaços de fases tenham interiores não vazios e, além disso, um não seja subsistema do outro. Para exemplificar, consideremos a seguinte situação: seja  $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x(1-x), & \text{se } x \in [0, 1]; \\ 2x(x+1), & \text{se } x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

É fácil ver que  $f([-1, 0]) \subset [-1, 0]$  e  $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ . Em particular, para entendermos a dinâmica de  $f$ , basta entendermos separadamente as dinâmicas das aplicações  $f_1: [-1, 0] \rightarrow [-1, 0]$  e  $f_2: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dadas por  $f_1(x) = 2x(x+1)$  e  $f_2(x) = 3x(1-x)$ . No caso de uma transformação transitiva, uma decomposição dessa forma não seria possível, pois, por exemplo, existiria um ponto cuja órbita visitaria tanto  $[-1, 0]$  quanto  $(0, 1]$ . Em particular, um sistema transitivo é, sob certos aspectos, indecomponível.

Nos casos em que o espaço  $X$  e a transformação  $f$  possuem algumas propriedades adicionais, podemos caracterizar a noção de transitividade de outras formas. Por exemplo, temos o seguinte resultado cuja prova postergamos para a Seção 5.1 (veja Observação 5.1 e Exercício 5.1).

**Proposição 1.6.** *Seja  $f: X \rightarrow X$  uma transformação contínua agindo num espaço métrico  $(X, d)$  de Hausdorff e localmente compacto. Então  $f$  é transitiva se, e somente, se para todo par de subconjuntos abertos  $U$  e  $V$  existe algum  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

A hipótese de  $X$  ser um espaço métrico de Hausdorff e localmente compacto não é demasiada restritiva e engloba diversos exemplos naturais. Por exemplo, qualquer intervalo de  $\mathbb{R}$  satisfaz esta propriedade. Para mais informações, sugerimos a referência Lima (1977). Por outro lado, salientamos que sem tais hipóteses sobre  $(X, d)$  a caracterização anterior pode ser falsa, conforme observado em Kolyada e Snoha (1997).

**Exercício 1.11.** Pode um sistema transitivo ter um atrator?

**Exercício 1.12.** Seja  $f: X \rightarrow X$  um homeomorfismo agindo num espaço métrico compacto. Mostre que

- (a) se  $X$  é um conjunto minimal para  $f$ , então  $f$  é transitiva.
- (b)  $X$  é um conjunto minimal para  $f$  se, e somente se, *todos* os pontos de  $X$  tem órbita densa. Isto é,  $X$  é um conjunto minimal para  $f$  se, e somente se,  $\overline{O(x)} = X$  para todo  $x \in X$ . Em particular, o fato de  $X$  ser minimal para  $f$  é *muito* mais forte do que  $f$  ser transitiva.



Como uma dica para resolver o exercício anterior, sugerimos revisar a Proposição 1.3 e sua demonstração.

## 1.15 *Mixing* topológico

Dizemos que um sistema dinâmico  $f : X \rightarrow X$  é *topologicamente mixing* se para todo par de conjuntos abertos  $U$  e  $V$  em  $X$ , existe um inteiro  $n_0$  (que pode depender de  $U$  e  $V$ ) tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Ou seja, a partir de um certo momento, *todo* iterado do conjunto  $U$  intersecta o conjunto  $V$ , diferentemente do que acontece na transitividade em que basta que algum iterado satisfaça essa propriedade. De maneira informal, isso implica, por exemplo, que iterados de conjuntos ‘relevantes’ (isto é, conjuntos com interior não vazio) se espalham pelo espaço e, além disso, misturam-se. Como uma consequência simples da Proposição 1.6 e da definição, obtemos o seguinte resultado.

**Corolário 1.7.** *Nas hipóteses da Proposição 1.6, temos que se  $f$  é topologicamente mixing, então  $f$  é transitiva.*

Ou seja, ser topologicamente *mixing* é mais forte do que ser transitivo. Um fato importante é que a recíproca do Corolário 1.7 é falsa em geral. Por exemplo, se considerarmos  $g : S^1 \rightarrow S^1$  como sendo uma rotação irracional no círculo unitário, então não é difícil mostrar que  $g$  é transitiva, porém não é topologicamente *mixing* (verifique).

Cabe observar que a palavra *mixing* pode perfeitamente ser traduzida para o português como misturadora (e efetivamente é assim que nossos colegas portugueses se referem a essas transformações: como topologicamente misturadoras). No entanto, esse anglicismo é comum em nossa literatura matemática e não fugiremos ao hábito.

**Exercício 1.13.** Seja  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo agindo num espaço métrico compacto. Vimos no Exercício 1.12 que o fato de  $X$  ser minimal para  $f$  implica que  $f$  é transitiva. Já no Corolário 1.7 vimos que se  $f$  é topologicamente *mixing*, então  $f$  é transitiva. Tendo em mente esses fatos, discuta a relação entre minimalidade de  $X$  e o fato de  $f$  ser topologicamente *mixing*, se é que exista alguma. Por exemplo, será que o fato de  $X$  ser minimal pra  $f$  implica que  $f$  seja topologicamente *mixing*?

## 1.16 Expansividade e sensibilidade às condições iniciais

Dizemos que uma transformação  $f : X \rightarrow X$  é (*positivamente*) *expansiva* se existe  $\epsilon > 0$  tal que se

$$d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ então } x = y.$$

Caso a transformação  $f$  possua inversa, dizemos  $f$  é *expansiva* se existe  $\epsilon > 0$  tal que se

$$d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}, \text{ então } x = y.$$

(Note que a única diferença, nos dois casos, é que neste último analisamos tanto a órbita futura quanto a passada.) Em outras palavras, a transformação  $f$  ser expansiva significa que se consideramos dois pontos distintos  $x$  e  $y$ , então existe algum iterado  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $d(f^k(x), f^k(y)) \geq \epsilon$ . Em particular, por mais próximos que  $x$  e  $y$  estejam, é sempre possível separá-los fazendo-os ficar a uma distância de pelo menos  $\epsilon$  em algum momento. Em qualquer uma das situações anteriores, dizemos que  $\epsilon$  é uma *constante de expansividade* e  $f$  é  $\epsilon$ -(positivamente) expansiva. É fácil ver que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x$  é expansiva. De fato, dados  $x, y \in \mathbb{R}$  com  $x \neq y$ , temos que

$$d(f^n(x), f^n(y)) = 2^n |x - y|.$$

Logo, dado qualquer  $\epsilon > 0$  e tomando  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande de modo que  $2^n > \frac{\epsilon}{|x-y|}$  (lembre-se que  $2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ), temos que  $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon$ . Em particular,  $f$  é expansiva com constante de expansividade tão grande quanto queiramos (visto que o  $\epsilon$  é arbitrário).

Outra noção, que se relaciona com expansividade, é a de sensibilidade às condições iniciais: dizemos que  $f: X \rightarrow X$  tem *sensibilidade às condições iniciais* se existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $x \in X$  e toda vizinhança  $V$  de  $x$  existam  $y \in V$  e  $n \in \mathbb{N}$  tais que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon$  (caso  $f$  seja invertível podemos considerar  $n \in \mathbb{Z}$ ). Intuitivamente isto significa que arbitrariamente perto de  $x$  existem pontos cuja órbita eventualmente se separa da órbita de  $x$  por uma distância de ao menos  $\epsilon$ . Observemos que a diferença entre expansividade e sensibilidade às condições iniciais reside no fato de que na primeira noção as órbitas de *todos* os pontos de  $X$  devem eventualmente se separar enquanto que na segunda basta que, para todo  $x \in X$ , *existam* pontos arbitrariamente próximos de  $x$ , cujas órbitas eventualmente se separam da órbita de  $x$ , mas não necessariamente todos. Em particular, toda transformação expansiva tem sensibilidade às condições iniciais. Por fim, deixamos o seguinte exercício como desafio ao leitor.

**Exercício 1.14.** Mostre ou dê um contraexemplo para a recíproca da afirmação anterior, isto é, para a afirmação “toda transformação que tem sensibilidade às condições iniciais é expansiva”

## 1.17 Sistemas caóticos

Um sistema dinâmico  $f: X \rightarrow X$  é dito *caótico* (segundo Devaney) se

- (i) o conjunto dos pontos periódicos de  $f$  é denso em  $X$ . Isto é,  $\overline{\text{Per}(f)} = X$ ;
- (ii)  $f$  é transitiva e
- (iii)  $f$  tem sensibilidade às condições iniciais.

Cabe ressaltar que existem diferentes definições sobre o que significa um sistema ser caótico. Por exemplo, definições devidas a Li e Yorke (1975) e Block e Coppel (1992), porém

pode-se dizer que a definição acima é uma das mais comuns atualmente na literatura. Além disso, é possível mostrar em algumas situações que se  $f$  é uma transformação contínua então as condições (i) e (ii) implicam à condição (iii) (veja por exemplo, Elaydi 2008, p. 137–162).

## 1.18 Pseudo-órbitas

Dizemos que uma sequência de pontos  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma  $\delta$ -pseudo-órbita para  $f$  se

$$d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \delta \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

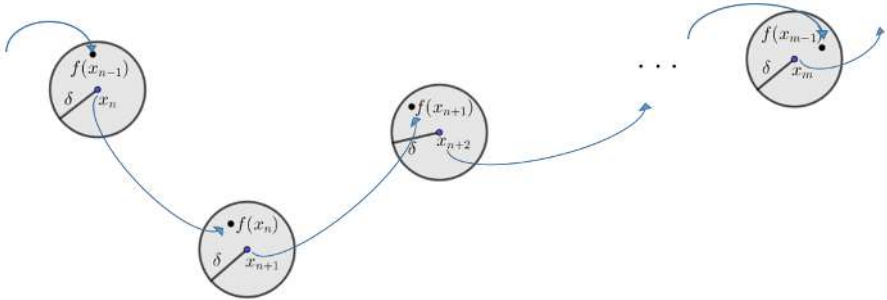


Figura 1.2: Exemplo de uma  $\delta$ -pseudo órbita.

De maneira informal, uma  $\delta$ -pseudo órbita “é uma órbita com pequenos erros”. Uma órbita de verdade é claramente uma  $\delta$ -pseudo órbita para todo  $\delta$  positivo. Mas uma  $\delta$ -pseudo órbita é um conceito mais abrangente que engloba, por exemplo, a órbita de um sistema dinâmico quando vista na tela de um computador. Devido a erros de truncamento no processamento (para um computador os números sempre têm uma quantidade finita e não muito grande de casas após a vírgula) o que se observa de fato não é uma órbita e sim uma pseudo-órbita. No caso em que a transformação  $f$  é invertível podemos considerar também pseudo-órbitas bilaterais de maneira similar:  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma  $\delta$ -pseudo órbita (*bilateral*) para  $f$  se  $d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \delta$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 1.3.** Sejam  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 2x$  e  $\delta = \frac{1}{10}$ . Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , consideremos  $x_n = \frac{1}{100}$ . Então

$$d(x_{n+1}, f(x_n)) = \begin{cases} \left| \frac{1}{100} - \frac{2}{100} \right| = \frac{1}{100}, & \text{se } n > 0; \\ \left| \frac{1}{100} - \frac{1}{100} \right| = 0, & \text{se } n = 0; \\ \left| \frac{1}{100} - \frac{1}{200} \right| = \frac{1}{200}, & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Em particular,  $d(x_{n+1}, f(x_n)) < \delta$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Consequentemente tal sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma  $\delta$ -pseudo-órbita para  $f$ . Observe que esse é um caso muito simples de uma pseudo-órbita constante. Finalmente observemos que se, por exemplo,  $\epsilon = \frac{1}{50}$ , então tomando  $x = 0$ , temos que

$$d(x_n, f^n(x)) = \left| \frac{1}{100} - 0 \right| < \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja, em cada instante de tempo  $n$ , o  $n$ -ésimo elemento da pseudo-órbita  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  está  $\epsilon$ -próximo do  $n$ -ésimo elemento da órbita de  $x = 0$ . Nesse caso, diremos que a órbita de  $x$   $\epsilon$ -sombreia a pseudo-órbita. Isto é o tópico da próxima seção.

## 1.19 Sombreamento

Como vimos na seção anterior, quando analisamos as órbitas de um sistema dinâmico utilizando um computador, em geral, o que vemos não são as órbitas de fato do sistema, mas sim pseudo órbitas devido, por exemplo, a erros de truncamento feitos pela máquina. Nesse caso, para que uma análise, a partir dos dados apresentados na tela, diga algo sobre o sistema real, é preciso que próximo da pseudo-órbita observada exista uma órbita de verdade. Quando isso acontece, dizemos que o sistema tem a propriedade do sombreamento. Mais precisamente, dizemos que uma transformação  $f: X \rightarrow X$  tem a *propriedade do sombreamento* se dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para toda  $\delta$ -pseudo órbita  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $f$  exista um ponto  $x \in X$  tal que

$$d(f^n(x), x_n) \leq \epsilon \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, há uma órbita verdadeira que acompanha ou sombreia a pseudo-órbita  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Novamente, no caso em que  $f$  possui uma função inversa, podemos considerar a noção de sombreamento de pseudo-órbitas bilaterais, bastando para isso trocar “ $\mathbb{N}$ ” por “ $\mathbb{Z}$ ” na definição anterior.

## 1.20 Conjugação e semiconjugação

Uma conjugação é uma mudança de coordenadas que relaciona duas dinâmicas distintas. Mais precisamente, consideremos duas transformações  $f: X \rightarrow X$  e  $g: Y \rightarrow Y$ . Uma *conjugação* entre  $f$  e  $g$  é uma transformação  $h: X \rightarrow Y$ , contínua e com inversa também contínua (ou seja, é um homeomorfismo) e que satisfaça

$$h \circ f = g \circ h. \tag{1.1}$$

Duas transformações conjugadas compartilham diversas propriedades dinâmicas. Por exemplo, se  $x$  é um ponto periódico de  $f$ , então  $h(x)$  é um ponto periódico de  $g$ . De

fato, segue de (1.1) que  $f = h^{-1} \circ g \circ h$ . Logo

$$f^2 = f \circ f = (h^{-1} \circ g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) = h^{-1} \circ g \circ \text{id} \circ g \circ h = h^{-1} \circ g^2 \circ h.$$

De maneira geral, prosseguindo recursivamente, obtemos que  $f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto se  $f^n(x) = x$ , então

$$x = f^n(x) = h^{-1}(g^n(h(x)))$$

implicando que  $h(x) = g^n(h(x))$  conforme afirmado. Outras propriedades compartilhadas por transformações conjugadas são dadas abaixo.

**Exercício 1.15.** Sejam  $(X, d)$  espaço métrico compacto e  $f: X \rightarrow X$  e  $g: Y \rightarrow Y$  homeomorfismos conjugados por outro homeomorfismo  $h: X \rightarrow Y$ . Mostre que,

- (a)  $x$  é um ponto periódico de período  $n$  de  $f$  se, e somente se,  $h(x)$  é um ponto periódico de período  $n$  de  $g$ ;
- (b)  $x$  é um ponto recorrente de  $f$  se, e somente se,  $h(x)$  é um ponto recorrente de  $g$ ;
- (c)  $h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$  em que  $\omega(x, f)$  denota o  $\omega$ -limite de  $x$  com relação a  $f$  e  $\omega(h(x), g)$  denota o  $\omega$ -limite de  $h(x)$  com relação a  $g$ ;
- (d)  $M$  é minimal para  $f$  se, e somente se,  $h(M)$  é minimal para  $h$ ;
- (e)  $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$ ;
- (f)  $f$  é transitiva se, e somente se,  $g$  é transitiva;
- (g)  $f$  é topologicamente *mixing* se, e somente se,  $g$  é topologicamente *mixing*.

Em particular, se  $f$  e  $g$  são conjugadas, podemos dizer que, de certa forma, ao entendermos o comportamento de  $f$  entendemos também o comportamento de  $g$  e vice-versa.

A noção de conjugação pode, em certos contextos, ser um pouco restritiva e, nestes casos, a noção um pouco mais fraca de *semiconjugação* é o melhor que podemos ter: dizemos que a transformação  $f: X \rightarrow X$  é *semiconjugada* a  $g: Y \rightarrow Y$  ou que  $(Y, g)$  é um *fator* de  $(X, f)$  se existe uma transformação  $h: X \rightarrow Y$ , contínua e sobrejetiva (porém não necessariamente injetiva) e que satisfaça

$$h \circ f = g \circ h.$$

Obviamente se  $f$  e  $g$  são conjugadas, então existe uma semiconjugação entre  $f$  e  $g$ . A recíproca, porém não é necessariamente verdadeira.

**Exercício 1.16.** Assim como acontece com a conjugação, transformações semiconjugadas também compartilham algumas propriedades. Verifique quais das propriedades dadas no Exercício 1.15 (ou versões mais fracas delas) ainda são preservadas por semiconjugação.

## 1.21 Estabilidade estrutural

Um sistema dinâmico  $f: X \rightarrow X$  é dito estruturalmente estável se sistemas dinâmicos próximos a  $f$  apresentam, do ponto de vista da dinâmica, um comportamento qualitativo semelhante ao de  $f$ . De maneira (um pouco) mais precisa,  $f$  é dita *estruturalmente estável* se, para todo sistema dinâmico  $g: X \rightarrow X$  “próximo” de  $f$ , temos que  $f$  e  $g$  são conjugadas. A noção de proximidade a que nos referimos depende do contexto no qual estamos inseridos e sempre será explicitada. No Capítulo 6, veremos exemplos de transformações estruturalmente estáveis. Para apreciarmos a importância dessa propriedade, consideremos a seguinte situação. Quando modelamos um fenômeno real, nosso modelo, em geral, é apenas uma aproximação do fenômeno de interesse. Nesse caso, se o sistema real for estruturalmente estável, então as propriedades dinâmicas do modelo e do fenômeno real serão semelhantes. Em particular, as conclusões obtidas para o modelo podem, de certa forma, ser extrapoladas para o fenômeno real.

## 1.22 Entropia topológica

Suponha que estejamos analisando o comportamento de um sistema dinâmico contínuo  $f: X \rightarrow X$  definido num espaço métrico compacto  $(X, d)$ , utilizando um determinado instrumento que tenha resolução finita como, por exemplo, é o caso dos nossos olhos. Isto significa dizer que pontos que estão  $\varepsilon > 0$  próximos uns dos outros são indistinguíveis se  $\varepsilon$  for muito pequeno. Agora, como pontos próximos podem se distanciar pela ação da dinâmica à medida que o tempo passa, se ao invés de olharmos apenas para pontos analisarmos segmentos de órbitas, poderemos diferenciar mais pontos. Em geral, quanto mais tempo considerarmos, mais pontos poderemos distinguir. A entropia topológica é justamente uma medida que nos dá a taxa de crescimento exponencial do número de segmentos de órbitas de tamanho  $n$  que podemos distinguir dada nossa resolução finita. Em particular, ela nos dá uma certa medida de complexidade do nosso sistema: quanto maior a entropia, mais complexo o sistema. Abaixo apresentamos uma definição formal desse conceito juntamente com alguns fatos. Para mais informações, incluindo demonstrações dos resultados apresentados, o leitor interessado pode consultar Brin e Stuck (2002, Section 2.5).

Dados  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos a distância

$$d_n(x, y) = \max\{d(x, y), d(f(x), f(y)), d(f^2(x), f^2(y)), \dots, d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y))\}.$$

Ou seja,  $d_n(x, y)$  nos dá a distância máxima entre os primeiros  $n$  iterados de  $x$  e  $y$ .

**Exercício 1.17.** Verifique que  $d_n: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  é de fato uma distância. Além disso, dado  $n \in \mathbb{N}$ , mostre que um conjunto  $A \subset X$  é aberto com relação à métrica  $d_n$  se, e somente se,  $A$  é aberto com relação à métrica  $d$  (veja Apêndice A). Em particular, todas as distâncias  $d_n: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , induzem à mesma topologia em  $X$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , dizemos que o conjunto  $A \subset X$  é  $(n, \varepsilon)$ -separado se  $d_n(x, y) \geq \varepsilon$  para todo  $x, y \in A$  com  $x \neq y$ . Denotemos por  $\text{sep}(n, \varepsilon, f)$  a cardinalidade máxima de um conjunto  $(n, \varepsilon)$ -separado. Ou seja,  $\text{sep}(n, \varepsilon, f)$  nos dá o número máximo de pontos que podemos distinguir olhando para segmentos de órbitas de tamanho  $n$ , utilizando uma resolução de  $\varepsilon$ .

Consideremos agora

$$h_{\text{top}}(f, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\text{sep}(n, \varepsilon, f)).$$

Então, a *entropia topológica* de  $f$  é dada por

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h_{\text{top}}(f, \varepsilon).$$

Observemos que, como  $\varepsilon \rightarrow \text{sep}(n, \varepsilon, f)$  é decrescente,  $\varepsilon \rightarrow h_{\text{top}}(f, \varepsilon)$  também é decrescente e, portanto, o limite anterior existe.

Uma propriedade importante da entropia topológica é que ela é um *invariante topológico*.

**Proposição 1.8.** *Sejam  $f: X \rightarrow X$  e  $g: Y \rightarrow Y$  transformações contínuas definidas em espaços métricos compactos  $(X, d)$  e  $(Y, D)$ . Se  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas, então*

$$h_{\text{top}}(f) = h_{\text{top}}(g).$$

*Demonstração.* Seja  $h: X \rightarrow Y$  um homeomorfismo tal que

$$h \circ f = g \circ h. \quad (1.2)$$

Consequentemente

$$h \circ f^n = g^n \circ h \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

Como  $h$  é contínua e  $(X, d)$  e  $(Y, D)$  são espaços métricos compactos,  $h$  é uniformemente contínua (veja Exercício A.2). Ou seja, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } d(x, y) < \delta, \text{ então } D(h(x), h(y)) < \varepsilon.$$

Em particular,

$$\text{se } D(h(x), h(y)) \geq \varepsilon, \text{ então } d(x, y) \geq \delta. \quad (1.4)$$

Consideremos agora um conjunto  $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  em  $Y$  que é  $(n, \varepsilon)$ -separado. Ou seja, que satisfaça

$$D_n(y_i, y_j) = \max\{D(y_i, y_j), D(g(y_i), g(y_j)), \dots, D(g^{n-1}(y_i), g^{n-1}(y_j))\} \geq \varepsilon$$

para todo  $i \neq j$ . Como  $h$  é sobrejetiva, existe um conjunto de pontos  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  em  $X$  tal que  $h(x_i) = y_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ . Nesse caso, a desigualdade acima é equivalente a

$$D_n(h(x_i), h(x_j)) = \max\{D(h(x_i), h(x_j)), D(g(h(x_i)), g(h(x_j))), \dots, D(g^{n-1}(h(x_i)), g^{n-1}(h(x_j)))\} \geq \varepsilon$$

para todo  $i \neq j$ . Então, usando (1.3), segue que

$$D_n(h(x_i), h(x_j)) = \max\{D(h(x_i), h(x_j)), D(h(f(x_i)), h(f(x_j))), \dots, D(h(f^{n-1}(x_i)), h(f^{n-1}(x_j)))\} \geq \varepsilon$$

para todo  $i \neq j$ . Portanto, usando (1.4), obtemos que

$$d_n(x_i, x_j) = \max\{d(x_i, x_j), d(f(x_i), f(x_j)), \dots, d(f^{n-1}(x_i), f^{n-1}(x_j))\} \geq \delta$$

para todo  $i \neq j$ . Ou seja, mostramos que, para todo conjunto  $(n, \varepsilon)$ -separado em  $Y$ , existe um conjunto  $(n, \delta)$ -separado em  $X$  associado com o mesmo número de elementos. Isto nos mostra que

$$\text{sep}(n, \delta, f) \geq \text{sep}(n, \varepsilon, g).$$

Logo

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\text{sep}(n, \delta, f)) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\text{sep}(n, \varepsilon, g)).$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Agora, como quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos que  $\delta \rightarrow 0$ , segue que  $h_{\text{top}}(f) \geq h_{\text{top}}(g)$ . Para finalizar, basta reescrevemos (1.2) como

$$h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1}$$

e repetirmos o argumento anterior obtendo que  $h_{\text{top}}(f) \leq h_{\text{top}}(g)$ . Combinando essas duas observações, concluímos a demonstração.  $\square$

Em particular, a entropia topológica é uma quantidade que nos auxilia na detecção de sistemas que são diferentes do ponto de vista topológico: se  $h_{\text{top}}(f) \neq h_{\text{top}}(g)$ , então  $f$  e  $g$  não são topologicamente conjugados.

**Exercício 1.18.** Utilizando as ideias da prova da Proposição 1.8, mostre que se  $g : Y \rightarrow Y$  é um fator de  $f : X \rightarrow X$  (veja Seção 1.20), então  $h_{\text{top}}(f) \geq h_{\text{top}}(g)$ .

Outras propriedades interessantes da entropia topológica, cujas provas podem ser encontradas na referência indicada no início da seção, são as seguintes.

**Proposição 1.9.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação contínua definida num espaço métrico compacto  $(X, d)$ , então*



- $h_{\text{top}}(f^n) = n \cdot h_{\text{top}}(f)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- se  $f$  é invertível então  $h_{\text{top}}(f^{-1}) = h_{\text{top}}(f)$ ;
- se  $f$  é expansiva com constante de expansividade  $\delta > 0$ , então  $h_{\text{top}}(f) = h_{\text{top}}(f, \varepsilon)$  para todo  $\varepsilon < \delta$ . Ou seja, se  $f$  é expansiva então a entropia topológica de  $f$  já é “detectada” numa escala  $\varepsilon$  para todo  $\varepsilon < \delta$ ; não precisamos fazer  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

A entropia topológica pode ainda ser calculada de outras formas como veremos na sequência.

Dado  $\varepsilon > 0$ , dizemos que o conjunto  $A \subset X$  é  $(n, \varepsilon)$ -spanning<sup>1</sup> se para todo  $x \in X$  exista  $y \in A$  tal que  $d_n(x, y) < \varepsilon$ . Ou seja, qualquer bola de raio  $\varepsilon$  em  $(X, d_n)$  possui um elemento de  $A$ . Denotemos por  $\text{span}(n, \varepsilon, f)$  a cardinalidade mínima de um conjunto  $(n, \varepsilon)$ -spanning. De outra forma,  $\text{span}(n, \varepsilon, f)$  nos dá o número mínimo de bolas de raio menor do que  $\varepsilon$  com relação a  $d_n$  necessárias para cobrir  $X$ . Note que, como  $(X, d)$  é compacto, tal número é finito. Denotemos ainda por  $\text{cov}(n, \varepsilon, f)$  a cardinalidade mínima de uma cobertura de  $X$  por conjuntos de diâmetro com relação a  $d_n$  menor do que  $\varepsilon$ . Então um resultado não muito difícil de ser obtido é o seguinte.

**Lema 1.10.** *As seguintes desigualdades são verdadeiras:*

$$\text{cov}(n, 2\varepsilon, f) \leq \text{span}(n, \varepsilon, f) \leq \text{sep}(n, \varepsilon, f) \leq \text{cov}(n, \varepsilon, f).$$

A partir dessa observação, não é difícil verificar que a entropia topológica pode ser calculada como

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(f) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\text{sep}(n, \varepsilon, f)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\text{span}(n, \varepsilon, f)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\text{cov}(n, \varepsilon, f)). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Em particular, temos três formas diferentes de calcular a entropia topológica, dependendo do contexto, uma é mais adaptada do que a outra.

**Observação 1.2.** Uma observação importante, que pode ter passado despercebida numa primeira leitura, é que a noção de entropia topológica foi definida para transformações *contínuas* agindo num espaço métrico *compacto*. Essas propriedades são fundamentais para que as definições anteriores ‘funcionem’. Cabe ressaltar, no entanto, que existem generalizações dessa noção para contextos mais gerais, por exemplo, para transformações contínuas agindo em subconjuntos não compactos. O leitor interessado pode, por exemplo, consultar Pesin (1997).

<sup>1</sup>Essa noção pode ser traduzida para o português como  $(n, \varepsilon)$ -gerador, porém optamos pelo inglês para auxiliar o leitor que queira consultar a referência indicada no início da seção.

**Exercício 1.19.** Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação contínua definida num espaço métrico compacto  $(X, d)$  tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \text{ para todo } x, y \in X.$$

Verifique que  $h_{\text{top}}(f) = 0$ . Em particular, isometrias e contrações têm entropia topológica igual a zero.

# 2

## *Dinâmica no conjunto dos números naturais*

---

Um dos primeiros conjuntos numéricos com o qual temos contato ao longo da vida é o conjunto dos números naturais. E é exatamente por ele, ou melhor, por dinâmicas definidas nesse conjunto, que começaremos nosso estudo. Apesar de sua aparente simplicidade, veremos que questões bem desafiadoras podem aparecer e até hoje encontram-se sem solução, como é o caso da conjectura de Collatz que encontraremos ao longo do percurso.

### 2.1 Dinâmica em conjuntos finitos

Como vimos na Seção 1.2, um sistema dinâmico nada mais é do que uma função  $f : X \rightarrow X$ . Nessa seção, assumiremos que o espaço de fases  $X$  é um conjunto finito que descreveremos simplesmente como

$$X = \{1, 2, \dots, n\}.$$

No que segue, nosso objetivo é descrever o comportamento das órbitas de  $f$  nesse contexto. Dado um ponto  $x \in X$ , lembremos que sua órbita é simplesmente o conjunto

$$O(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(x) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}.$$

Como o contradomínio de  $f$  é o conjunto  $X$ , temos que  $f^n(x) \in X$  para todo  $x \in \mathbb{N}$ . Em particular,  $O(x) \subset X$  e, portanto,  $O(x)$  também é um conjunto finito. Desta forma

temos que, para um certo  $k \in \mathbb{N}$  e um certo  $l \in \mathbb{N}_*$ ,

$$f^{l+k}(x) = f^k(x).$$

De fato, isto pode ser facilmente observado utilizando o Princípio da Casa dos Pombos, que pode ser enunciado informalmente como segue.

**Teorema 2.1** (Princípio da Casa dos Pombos). *Se temos  $n$  caixas (as casas dos pombos) e queremos distribuir  $k$  objetos (os pombos) entre as caixas, com  $k > n$ , então certamente uma das caixas terá mais de um objeto.*

Aplicando, então, esse princípio ao caso anterior temos que as casas, isto é, os pontos de  $O(x)$ , são um conjunto finito enquanto que a órbita de  $x$  tem uma quantidade de iterados de  $x$ , os pombos, arbitrariamente grande. Logo alguma casa necessariamente terá mais de um pombo o que, neste caso, significa que um mesmo ponto é visitado mais de uma vez pela órbita. Ou seja, existem  $k$  e  $l$  em  $\mathbb{N}$  tais que  $f^{l+k}(x) = f^k(x)$  conforme afirmado. Agora isto implica, por exemplo, que o ponto  $f^k(x)$  é um ponto periódico de período menor ou igual a  $l$  para a dinâmica  $f$  (veja Seção 1.5). Além disso, se tomarmos  $l$  como sendo o *menor* número natural maior ou igual a 1 que satisfaz  $f^{l+k}(x) = f^k(x)$ , então  $l$  é exatamente o período de  $f^k(x)$ . Supomos que  $l$  tenha sido escolhido desta forma. Note que, nesse caso, se  $l = n$ , então a órbita de  $f^k(x)$  passa exatamente uma vez por cada um dos pontos do conjunto  $X$  antes de retornar a  $f^k(x)$ . Como consequência, o mesmo vale para  $x$ .

Observemos agora que os pontos  $x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)$  estão na bacia de atração (veja Seção 1.12 e Exercício 1.8) da órbita periódica

$$A = \{f^k(x), f^{k+1}(x), \dots, f^{l+k-1}(x)\}.$$

De fato, algum iterado desses pontos sempre “cairá” em  $A$ . Por exemplo, o  $(k-1)$ -ésimo iterado de  $f(x)$  dado por  $f^{k-1}(f(x))$  é igual a  $f^k(x)$  e, portanto, está na órbita periódica  $A$ . De maneira geral, os pontos que serão levados à órbita periódica  $A$ , ou seja, à bacia de atração de  $A$  são dados por

$$B_1 = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} f^{-m}(f^k(x)).$$

Agora podemos ter duas situações: ou  $B_1 = X$ , e nesse caso todos os pontos de  $X$  são atraídos pela órbita periódica ou, então,  $B_1 \neq X$ , e nesse caso consideremos um ponto  $y$  em  $X \setminus B_1$ . Note que a órbita futura de  $y$  não pode entrar em  $B_1$ , pois se entrasse  $y$  estaria na bacia de atração  $B_1$ , o que contraria a escolha de  $y$ . O conjunto  $X \setminus B_1$  também é finito e a órbita de  $y$  está contida em  $X \setminus B_1$ , logo, de forma similar ao que foi feito para  $X$ , podemos encontrar uma órbita periódica que inclui  $y$  ou atrai  $y$ . Denotamos a bacia de atração desta órbita por  $B_2$ .

Então,  $B_1 \cup B_2 = X$  ou  $X \neq B_1 \cup B_2$  e, como antes, podemos tomar um ponto  $z \in X \setminus B_1 \cup B_2$ ; repetindo o procedimento, tendo em vista que  $X$  é finito, teremos, então, que  $X$  pode ser escrito como união finita de bacias de órbitas periódicas

$$X = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_j.$$

Consequentemente todo ponto  $x \in X$  pertence à bacia de atração de uma órbita periódica e, dessa forma, a partir de um certo instante, seus iterados, no futuro, estarão exatamente sobre essa órbita periódica.

O que acabamos de fazer foi provar o seguinte resultado.

**Proposição 2.2.** *Considere  $X$  um conjunto finito e  $f: X \rightarrow X$  uma dinâmica. Então podemos decompor  $X$  como uma união de conjuntos disjuntos*

$$X = B_1 \cup \dots \cup B_j,$$

sendo cada  $B_i$  a bacia de atração de uma órbita periódica.

### 2.1.1 Bijeção entre conjuntos finitos

Consideremos agora o caso em que a nossa transformação  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  é invertível, ou seja, é uma bijeção. Note que, nesse caso,  $f$  nada mais é do que uma permutação em  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Observemos que nesse contexto a bacia de atração de uma órbita periódica assume um aspecto ainda mais simples. De fato, note que se

$$x, f(x), \dots, f^{P-1}(x), f^P(x) = x$$

é uma órbita periódica, então sua bacia de atração é

$$B = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} f^{-m}(x) = \{x, f(x), \dots, f^{P-1}(x)\}.$$

Ou seja, a bacia de atração é a própria órbita periódica, pois, como  $f$  é uma bijeção, cada ponto tem exatamente uma pré-imagem: a de  $f^k(x)$  é  $f^{k-1}(x)$  e a de  $x$  é o ponto  $f^{P-1}(x)$  (pois a imagem deste ponto é  $x$ ). Usando agora o teorema da seção anterior, vemos que o conjunto  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  pode, então, ser decomposto como uma união finita e disjunta de bacias de órbitas periódicas, que são as próprias órbitas periódicas. Dessa forma, no caso de uma bijeção de um conjunto finito, temos que todo ponto de  $X$  é um ponto periódico para  $f$ .

## 2.2 Dinâmica em conjuntos infinitos

Consideraremos agora o caso em que o espaço de fases  $X$  da nossa dinâmica é um conjunto infinito e enumerável. Mais precisamente, consideraremos  $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  ou  $X = \mathbb{N}_* = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

### 2.2.1 Alguns exemplos

Começemos por apresentar alguns exemplos e suas propriedades.

**Exemplo 2.1.** Consideremos  $f: \mathbb{N}_* \rightarrow \mathbb{N}_*$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{se } x \text{ não é múltiplo de } 3; \\ \frac{x}{3}, & \text{se } x \text{ é múltiplo de } 3. \end{cases}$$

Do Teorema Fundamental da Aritmética, sabemos que todo número  $x \in \mathbb{N}_*$  pode ser decomposto como produto de números primos. Em particular, pode ser escrito como

$$x = 2^{p_1} 3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots$$

em que  $p_1, p_2, p_3, \dots$  são números em  $\mathbb{N}$ . Se  $p_2 > 0$ , ou seja, se o 3 aparece na decomposição em fatores primos de  $x$ , então  $f(x) = 2^{p_1} 3^{p_2-1} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots$  e assim por diante até que  $f^{p_2}(x) = 2^{p_1} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots$ . Esse ponto,  $f^{p_2}(x)$ , não é múltiplo de 3 e, então, sua imagem por  $f$  é  $2^{p_1} 3 5^{p_3} 7^{p_4} \dots$ ; esse ponto, por sua vez, é levado por  $f$  em  $2^{p_1} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots$ . Ou seja, o ponto inicial foi atraído para a órbita periódica de período 2 composta pelos elementos  $2^{p_1} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots$  e  $2^{p_1} 3 5^{p_3} 7^{p_4} \dots$ . Portanto, como  $p_1, p_2, p_3, \dots$  podem ser quaisquer números em  $\mathbb{N}$ , segue que temos uma infinidade de órbitas periódicas atratoras e a união das suas bacias de atração consiste de todo o conjunto  $\mathbb{N}_*$ .

**Exemplo 2.2.** Seja  $f: \mathbb{N}_* \rightarrow \mathbb{N}_*$  uma função tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par;} \\ 2^x, & \text{se } x \text{ não é par.} \end{cases}$$

Se  $x$  for um número ímpar, então sua imagem é  $2^x$ , que é par. A imagem desse ponto, por sua vez, será  $2^{x-1}, 2^{x-2}, \dots, 1, 2, 1, 2, 1, \dots$ . Já se  $x$  for par, então podemos escrevê-lo da forma  $x = 2^k p$  sendo  $p$  é um número ímpar. Assim sua órbita será  $2^{k-1} p, 2^{k-2} p, \dots, p$  e a órbita de  $p$ , que é ímpar, como visto acima, é levada ao atrator periódico  $A = \{1, 2\}$ . Combinando essas observações, concluímos que a órbita periódica  $A = \{1, 2\}$  atrai todas as órbitas, não importando o ponto de partida. Temos, portanto, um atrator global nesse caso.

**Exemplo 2.3.** Considere a função  $f: \mathbb{N}_* \rightarrow \mathbb{N}_*$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x = 1; \\ x + 1, & \text{se } x \text{ é primo;} \\ \text{maior fator primo na decomposição de } x, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nesse caso, temos uma órbita periódica  $A = \{2, 3, 4\}$  e, além disso, esta é um atrator global. De fato, observemos inicialmente que toda órbita sempre passará por um número

primo, pois se o número não é primo sua imagem certamente o será. Portanto basta mostrarmos que a órbita de qualquer número primo irá para a órbita periódica acima. Para isso procederemos por indução. Começemos observando que a órbita do primeiro primo, 2, já está na órbita periódica  $A$ , que será nossa base de indução. Denotemos por  $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$  o conjunto de todos os números primos ordenados em ordem crescente. Supomos agora que nossa afirmação é válida para os  $n$  primeiros primos, isto é, que a órbita de cada um dos primos  $p_1, p_2, \dots, p_n$  vai para a órbita  $A$ , e mostremos que a órbita de  $p_{n+1}$  também vai para  $A$ . Observemos que, como  $p_{n+1}$  é um número primo diferente de 2 e, portanto, ímpar, seu sucessor é um número par. Logo

$$f(p_{n+1}) = p_{n+1} + 1 = 2q_1^{k_1} \dots q_r^{k_r}$$

sendo  $q_1 < q_2 < \dots < q_r$  números primos (note que nada impede que  $q_1$  seja igual a 2) e  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_*$ . Neste caso, cada  $q_j$  é um dos primos  $p_1, \dots, p_n$ , pois do contrário teríamos que  $q_j \geq p_{n+1}$  e, conseqüentemente,

$$p_{n+1} + 1 = 2q_1^{k_1} \dots q_r^{k_r} \geq 2q_j > p_{n+1} + 1$$

o que é um absurdo. Em particular,  $q_r = p_l$  para algum  $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Portanto

$$f^2(p_{n+1}) = f(p_{n+1} + 1) = f(2q_1^{k_1} \dots q_r^{k_r}) = q_r = p_l.$$

Agora, por hipótese de indução, a órbita de  $p_l$  vai para a órbita periódica  $A$ . Logo a órbita de  $p_{n+1}$  também vai e, conseqüentemente, por indução, segue que a órbita de qualquer número primo irá para  $A$ . Combinando esse fato com a observação inicial, concluímos que  $A = \{2, 3, 4\}$  é um atrator global para a nossa dinâmica.

**Exemplo 2.4.** Consideremos  $f: \mathbb{N}_* \rightarrow \mathbb{N}_*$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \text{ é primo ou se } x = 1; \\ \text{menor fator primo na decomposição de } x, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observemos inicialmente que a órbita de 2 é

$$\{2, 4, 2, 4, 2, \dots\}.$$

Agora se  $x$  é um número par maior do que 2, então, em particular,  $x$  não é primo e seu menor fator primo é 2. Portanto  $f(x) = 2$  e caímos na órbita periódica  $\{2, 4, 2, 4, 2, \dots\}$ . Conseqüentemente todo ponto par pertence a bacia de atração de  $A = \{2, 4\}$ .

Não é difícil verificar que a órbita de 1 é

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 3, 5, 7, \dots\}.$$

Em particular, segue que  $\{3, 5, 7, 9, 3, 5, 7, 9, \dots\}$  é uma órbita periódica. Agora se  $p$  é um primo gêmeo, isto é, um primo tal que  $p + 2$  também é primo, e  $p \neq 3$ , então não é

difícil ver que  $p + 1$  é múltiplo de 3. De fato, obviamente um dos três números  $p$ ,  $p + 1$  ou  $p + 2$  é múltiplo de 3. Agora, como  $p$  e  $p + 2$  são primos e  $p \neq 3$ , segue que  $p + 1$  é múltiplo de 3. Logo  $f(p + 2) = p + 4 = (p + 1) + 3$  é também um múltiplo de 3, que, além do mais, não pode ser par, pois  $p + 1$  é. Portanto  $f^2(p + 2) = f(p + 4) = 3$  e, assim, caímos na órbita periódica  $\{3, 5, 7, 9, 3, 5, 7, 9, 3, \dots\}$ . Consequentemente se  $p$  é um primo gêmeo, então  $p + 2$  pertence a bacia de atração de  $B = \{3, 5, 7, 9\}$ .

**Exemplo 2.5.** Seja  $f: \mathbb{N}_* \rightarrow \mathbb{N}_*$  a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{se } x \text{ é múltiplo de 3;} \\ x + 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então toda órbita converge para a órbita periódica  $\{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots\}$ . De fato, considere os conjuntos  $B_0 = \{1, 2, 3\}$  e  $B_k = \{3^k + 1, 3^k + 2, \dots, 3^{k+1} - 1, 3^{k+1}\}$  para todo  $k \geq 1$ . Esses conjuntos são disjuntos e, além disso,  $\mathbb{N}_* = \bigcup_{k \geq 0} B_k$ . Claramente  $f(B_0) = B_0$  e nesse conjunto está a órbita periódica mencionada. Mostremos agora que uma órbita qualquer será enviada a  $B_0$  em algum momento. Para tanto, observemos que, para todo  $k \geq 1$  e todo  $x \in B_k$ , em no máximo três iterados, a imagem de  $x$  estará em  $B_{k-1}$ . Efetivamente todo  $x \in B_k$  é da forma  $3J - 2$ ,  $3J - 1$  ou  $3J$  para algum  $J \in B_{k-1}$ . Caso  $x = 3J$ , então  $f(x) = J$  e este já está em  $B_{k-1}$ ; caso  $x = 3J - 1$  temos que  $f^2(3J - 1) = f(3J) = J$  e este também está em  $B_{k-1}$ ; finalmente se  $x = 3J - 2$ , então  $f^3(3J - 2) = f^2(3J - 1) = f(3J) = J$  e este também está em  $B_{k-1}$ , provando a afirmação.

Agora, dado qualquer  $x \in \mathbb{N}_*$ , como  $\mathbb{N}_* = \bigcup_{k \geq 0} B_k$ , segue que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in B_k$ . Pela observação anterior, temos que em alguns iterados a imagem de  $x$  estará em  $B_{k-1}$ ; esse processo pode ser repetido até que a imagem do ponto esteja em  $B_0$ , de forma que a órbita periódica  $\{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots\}$  seja realmente o destino final da órbita de  $x$ , qualquer que seja ele. Em particular,  $A = \{1, 2, 3\}$  é um atrator global para  $f$ .

Encorajados pelo exemplo anterior, podemos considerar aquilo que parece ser apenas uma pequena variação, mas que na verdade é algo muito mais complexo.

**Exemplo 2.6.** Consideremos a função  $f: \mathbb{N}_* \rightarrow \mathbb{N}_*$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par;} \\ 3x + 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então não é difícil ver que a órbita

$$\{1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots\}$$

é periódica. E, de fato, se começarmos em algum outro número, a órbita parece ser atraída pela órbita periódica acima. Isto já foi testado para muitos números e sempre com o mesmo resultado, o que leva a conjectura de que essa órbita é de fato um atrator global para  $f$ .



Esse problema, aparentemente simples, é bastante conhecido (muitas vezes chamado de *problema  $3n + 1$*  ou *Conjectura de Collatz*), mas que, ao contrário do exemplo anterior que pode ser provado em poucas linhas, parece estar bem distante de uma demonstração no futuro próximo...

### 2.2.2 Caracterização do $\omega$ -limite

Inspirados pelos exemplos da seção anterior, podemos agora enunciar (e provar) um resultado que caracteriza o conjunto limite de uma órbita. Para tanto, lembre-se da definição de  $\omega(x)$  dada na Seção 1.6.

**Proposição 2.3.** *Dados  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e  $x \in \mathbb{N}$ , temos que  $\omega(x)$  é vazio ou é uma órbita periódica.*

*Demonstração.* Se  $\omega(x) = \emptyset$  não há nada a fazer. Supomos, então,  $\omega(x) \neq \emptyset$  e seja  $p \in \omega(x)$ . De acordo com a definição de  $\omega(x)$ , existe uma sequência crescente de números inteiros  $n_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} +\infty$  tal que  $d(f^{n_i}(x), p) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$ . Em particular, para todo  $i$  suficientemente grande, temos que  $d(f^{n_i}(x), p) < 1$ . Agora, como  $f^{n_i}(x)$  e  $p$  são números naturais, isto implica que  $f^{n_i}(x) = p$  para todo  $i$  suficientemente grande. Excluindo os primeiros termos da sequência  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que  $f^{n_i}(x) = p$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Nesse caso, temos que

$$f^{n_1}(x) = p \text{ e } p = f^{n_2}(x) = f^{n_2 - n_1}(f^{n_1}(x)) = f^{n_2 - n_1}(p)$$

mostrando que  $p$  de fato é um ponto periódico. □

Portanto temos duas situações possíveis: o  $\omega$ -limite de todo ponto é vazio ou é uma órbita periódica. Dessa forma, o conjunto limite  $L^+(f)$  definido na Seção 1.8 é vazio ou é o fecho de uma união enumerável de órbitas periódicas, exatamente como nas situações com as quais nos deparamos nos exemplos.

### 2.2.3 Transitividade

Vamos agora caracterizar situações em que uma dinâmica  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é transitiva (veja Seção 1.14). Ou seja, situações em que existe algum ponto  $x \in \mathbb{N}$  cuja órbita é densa em todo  $\mathbb{N}$ . Lembremos que o conceito de densidade significa que a órbita de  $x$  deve passar arbitrariamente próxima de qualquer ponto do espaço de fases. Agora, como nossa dinâmica se dá em  $\mathbb{N}$ , ficar a uma distância menor do que 1 de um ponto  $y \in \mathbb{N}$  é, de fato, o mesmo que ser igual a  $y$ . Ou seja, para que a órbita de  $x$  seja densa em  $\mathbb{N}$  é necessário que ela visite todos os pontos de  $\mathbb{N}$ . Usando essa observação, podemos demonstrar nosso primeiro resultado.

**Proposição 2.4.** *Se uma transformação  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tem órbita densa, então ela não tem nenhuma órbita periódica.*

*Demonstração.* Supomos que  $f$  tenha alguma órbita periódica. Então existe um subconjunto finito  $O$  de  $\mathbb{N}$ , a saber, a órbita periódica, que é invariante para o futuro por  $f$ , isto é,  $f(O) \subset O$ . Obviamente por  $O$  ser finito, ele não é denso em  $\mathbb{N}$ . Além disso, qualquer órbita que entre em  $O$  não pode ser densa em  $\mathbb{N}$ , pois passará no máximo por um número finito de pontos, tendo em vista que, quando entrar em  $O$ , não sai mais. Por outro lado, qualquer órbita que não entre em  $O$  também não é densa por motivos óbvios. Logo a existência de ao menos uma órbita periódica impede a existência de órbitas densas, concluindo a demonstração da proposição.  $\square$

Combinando, então, as Proposições 2.3 e 2.4, obtemos o seguinte.

**Corolário 2.5.** *Se  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é uma aplicação transitiva, então  $\omega(x) = \emptyset$  para todo  $x \in \mathbb{N}$ .*

Por outro lado, observemos que  $\omega(x) = \emptyset$  para todo  $x \in \mathbb{N}$  não implica que  $f$  é transitiva. Por exemplo, se  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é dada por  $f(x) = 2x + 1$ , então  $\omega(x) = \emptyset$  para todo  $x \in \mathbb{N}$ , porém obviamente nenhuma órbita de  $f$  é densa. Além disso, esse exemplo também nos mostra que a não existência de órbitas periódicas também não implica em transitividade.

Tendo em vista os exemplos e os resultados anteriores, cabe nos perguntarmos: será que de fato existem dinâmicas transitivas em  $\mathbb{N}$ ?

**Exemplo 2.7.** Consideremos a transformação *translação*  $t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $t(x) = x + 1$ . Então é claro que a órbita de 0, que é  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , é todo o  $\mathbb{N}$ , ou seja, temos uma órbita densa. Em particular, não temos nenhuma órbita periódica.

Veremos na sequência que, em um certo sentido, esse exemplo é de fato o único que admite órbitas densas! Para tanto, cabe relembrar a noção de conjugação dada na Seção 1.20.

**Proposição 2.6.** *Uma transformação  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é transitiva se, e somente se, é conjugada a  $t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Como vimos no Exemplo 2.7,  $t$  possui órbita densa. Logo se  $f$  é conjugada a  $t$ , então claramente  $f$  tem órbita densa e, portanto, é transitiva (veja Exercício 1.15).

Suponha agora que  $f$  seja transitiva, ou seja, que exista  $x \in \mathbb{N}$  tal que sua órbita  $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$  é densa em  $\mathbb{N}$ . Da observação do início da seção temos que

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots\} = \mathbb{N}.$$

Queremos, então, construir uma conjugação entre  $t$  e  $f$ . Consideremos  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por

$$h(n) = f^n(x).$$

Como  $\{x, f(x), f^2(x), \dots\} = \mathbb{N}$ , segue facilmente que  $h$  é sobrejetiva. Além disso, como todos os pontos de  $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$  são distintos (visto que do contrário  $f$  teria uma órbita periódica contradizendo a Proposição 2.4), segue que  $f$  é injetiva. Portanto  $h$  é

uma bijeção e sua inversa obviamente satisfaz  $h^{-1}(f^n(x)) = n$ . Usando essa observação, obtemos que

$$h^{-1}(f(h(k))) = h^{-1}\left(f\left(f^k(x)\right)\right) = h^{-1}\left(f^{k+1}(x)\right) = k + 1 = t(k)$$

ou seja,  $h^{-1} \circ f \circ h = t$ . Finalmente, como toda aplicação  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é contínua, segue que  $h$  é de fato uma conjugação entre  $f$  e  $t$ .  $\square$

Ou seja, a menos de uma mudança de coordenadas, a única transformação transitiva em  $\mathbb{N}$  é  $t$ !

### 2.2.4 *Mixing* topológico

Na Seção 1.15, introduzimos a noção de *mixing* topológico que pode ser brevemente traduzida para o nosso contexto como segue: a transformação  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é topologicamente *mixing* se dados dois subconjuntos quaisquer  $U$  e  $V$  de  $\mathbb{N}$  exista  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  para todo  $n \geq n_0$ . Observe que todo subconjunto de  $\mathbb{N}$  é aberto e, portanto, essa propriedade de fato coincide com aquela introduzida na Seção 1.15. Nosso objetivo agora é mostrar que, no contexto de dinâmicas em  $\mathbb{N}$ , não temos exemplos de transformações satisfazendo essa propriedade.

**Proposição 2.7.** *Não existe transformação  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que seja topologicamente mixing.*

*Demonstração.* Supomos, por absurdo, que exista  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  topologicamente *mixing*. Então, para todo par  $U$  e  $V$  de subconjuntos de  $\mathbb{N}$ , existe  $n_0$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  para  $n \geq n_0$ . Fixemos, por exemplo,  $U = \{1\}$  e  $V = \{2\}$ . Nesse caso,  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  para todo  $n \geq n_0$  é equivalente a dizer que  $f^n(1) = 2$  para todo  $n \geq n_0$ . Em particular,  $f(2) = f(f^{n_0}(1)) = f^{n_0+1}(1) = 2$ . Ou seja, 2 é ponto fixo de  $f$ . Agora, invertendo os papéis de  $U$  e  $V$ , vemos que não é possível um iterado de  $V$  intersectar  $U$ , o que contradiz a suposição de termos uma  $f$  topologicamente *mixing*, concluindo a demonstração da proposição.  $\square$

## 2.3 Probabilidades em conjuntos enumeráveis

No que resta deste capítulo, nosso objetivo é introduzir as noções de probabilidade e probabilidade invariante para transformações definidas em conjuntos enumeráveis. As áreas que estudam esses objetos são bastante amplas. De maneira alguma, almejamos nessas curtas notas fazer uma exposição completa de um assunto tão sofisticado; porém, no caso de conjuntos enumeráveis, as probabilidades assumem uma forma bastante simples e acreditamos que o leitor tenha todas as condições de seguir adiante sem apelo a um enorme esforço de raciocínio. A área da matemática que estuda sistemas dinâmicos sob o ponto de vista de medidas invariantes é a *Teoria Ergódica*, de forma que esta seção pode ser vista

como uma breve motivação para seu estudo. Para aqueles leitores interessados em estudar essa área mais profundamente recomendamos a referência Viana e Oliveira (2019).

Dado  $X \subset \mathbb{N}$ , uma *medida de probabilidade* ou simplesmente uma *probabilidade* sobre o conjunto  $X$  é uma função que, para cada conjunto  $A \subset X$ , associa um número  $\mu(A) \in [0, 1]$  de forma que

$$(a) \mu(\emptyset) = 0 \text{ e } \mu(X) = 1 \text{ e}$$

$$(b) \mu\left(\bigcup_{j \in \mathcal{F}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathcal{F}} \mu(A_j) \text{ para toda família finita ou enumerável de subconjuntos } (A_j)_{j \in \mathcal{F}} \text{ de } X \text{ dois a dois disjuntos. Isto é, tais que } A_j \cap A_k = \emptyset \text{ para todo } j \neq k.$$

Nesse caso, diremos que  $\mu(A)$  é a *medida do conjunto*  $A$  (segundo  $\mu$ ). A princípio essa definição pode parecer complicada, porém, conforme já mencionado, no nosso contexto pode ser traduzida de uma maneira bastante simples como veremos na sequência.

**Observação 2.1.** Observemos que, no nosso caso, como  $X \subset \mathbb{N}$ , qualquer família de subconjuntos  $(A_j)_{j \in \mathcal{F}}$  de  $X$  satisfazendo  $A_j \cap A_k = \emptyset$  para todo  $j \neq k$ , é necessariamente finita ou enumerável. Em particular, essa restrição poderia ser removida da definição. No entanto, deixamos, pois ela é necessária em contextos mais gerais. Observamos ainda que, no caso em que  $X$  é finito, a condição b) pode ser substituída sem perda de generalidade por

$$(b') \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ para todo par de subconjuntos } A \text{ e } B \text{ de } X, \text{ satisfazendo } A \cap B = \emptyset.$$

**Exemplo 2.8.** Um exemplo de probabilidade em  $\mathbb{N}$  é a *delta de Dirac* no ponto  $x \in \mathbb{N}$ , definida como segue:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A; \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Obviamente  $\delta_x(\mathbb{N}) = 1$ , pois  $x \in \mathbb{N}$ ; também é fácil ver que  $\delta_x(\emptyset) = 0$ , pois  $x \notin \emptyset$ . Por fim, dada uma família finita ou enumerável de subconjuntos  $(A_j)_{j \in \mathcal{F}}$  satisfazendo  $A_j \cap A_k = \emptyset$  para todo  $j \neq k$ , temos que  $x \notin \bigcup_{j \in \mathcal{F}} A_j$ , nesse caso  $\delta_x\left(\bigcup_{j \in \mathcal{F}} A_j\right) = 0$  e  $\sum_{j \in \mathcal{F}} \delta_x(A_j) = 0$  visto que  $\delta_x(A_j) = 0$  para todo  $j \in \mathcal{F}$ , ou  $x \in A_k$  para algum  $k \in \mathcal{F}$  e  $x \notin A_j$  para todo  $j \neq k$ , neste caso, temos que

$$\delta_x(A_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k; \\ 0, & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

Portanto

$$\delta_x\left(\bigcup_{j \in \mathcal{F}} A_j\right) = 1 = \sum_{j \in \mathcal{F}} \delta_x(A_j).$$

Combinando essas observações, concluímos que  $\delta_x$  é de fato uma probabilidade em  $\mathbb{N}$ . Mais geralmente, se pode verificar de forma análoga que, dados um conjunto  $X \subset \mathbb{N}$  arbitrário e um ponto  $x \in X$ ,  $\delta_x$  é uma probabilidade em  $X$ .

**Exemplo 2.9.** Outro exemplo de probabilidade, nesse caso no conjunto finito  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , é a seguinte:

$$\mu = \frac{1}{6}\delta_1 + \frac{1}{6}\delta_2 + \frac{1}{6}\delta_3 + \frac{1}{6}\delta_4 + \frac{1}{6}\delta_5 + \frac{1}{6}\delta_6.$$

Esse exemplo pode ser interpretado de forma simples, imaginando que cada um dos números de 1 a 6 representam uma das faces de um dado honesto. A probabilidade de ser sorteado uma determinada face, nesse caso, é exatamente  $1/6$ , o que é descrito pela probabilidade acima.

De fato, esse exemplo é um caso particular da seguinte situação.

**Definição 2.1.** Sejam  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$  probabilidades num conjunto  $X \subset \mathbb{N}$  e  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  números reais tais que  $p_i \geq 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Dizemos que

$$\sum_{i=1}^n p_i \mu_i$$

é uma *combinação convexa* das probabilidades  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ . Podemos, de forma análoga, considerar a combinação convexa de uma quantidade infinita de probabilidades.

É fácil verificar que toda combinação convexa (finita ou infinita) de probabilidades em  $X$  resulta ainda numa probabilidade em  $X$ . De fato, seja  $\mu = \sum_{i=1}^n p_i \mu_i$ . Nesse caso,

$$\mu(\emptyset) = \sum_{i=1}^n p_i \mu_i(\emptyset) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot 0 = 0$$

e

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^n p_i \mu_i(X) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot 1 = 1.$$

Além disso, usando que cada uma das probabilidades  $\mu_i$  satisfaça a condição (b) da defi-

nição de probabilidade segue que

$$\begin{aligned}
 \mu\left(\bigcup_{j \in \mathcal{F}} A_j\right) &= \sum_{i=1}^n p_i \mu_i\left(\bigcup_{j \in \mathcal{F}} A_j\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n p_i \left(\sum_{j \in \mathcal{F}} \mu_i(A_j)\right) \\
 &= \sum_{j \in \mathcal{F}} \left(\sum_{i=1}^n p_i \mu_i(A_j)\right) \\
 &= \sum_{j \in \mathcal{F}} \mu(A_j)
 \end{aligned}$$

para toda família finita ou enumerável de subconjuntos  $(A_j)_{j \in \mathcal{F}}$ , satisfazendo  $A_j \cap A_k = \emptyset$  para todo  $j \neq k$ . O caso infinito é análogo.

Um fato simples, porém, bastante interessante, que deixamos a cargo do leitor verificar, é que toda probabilidade  $\mu$  num conjunto  $X \subset \mathbb{N}$  pode ser escrita como

$$\mu = \sum_{i \in X} p_i \delta_i \quad (2.1)$$

em que cada  $p_i \in [0, 1]$  e  $\sum_{i \in X} p_i = 1$ . Ou seja, toda medida de probabilidade definida em subconjuntos de  $\mathbb{N}$  é uma combinação convexa de medidas delta de Dirac. Em particular, tem uma forma bastante simples conforme mencionado na introdução da seção. Dessa forma, para um conjunto  $A \subset X$ , temos que

$$\mu(A) = \sum_{i \in X} p_i \delta_i(A).$$

### 2.3.1 Probabilidades invariantes

Até o momento, consideramos probabilidades em  $X \subset \mathbb{N}$ , um conceito independente de qualquer tipo dinâmica. A partir de agora, queremos combinar essas duas noções. Para tanto, comecemos com a seguinte definição. Mas antes cabe observar que apesar de na sequência considerarmos  $X = \mathbb{N}$ , todos os resultados continuam válidos para subconjuntos quaisquer  $X \subset \mathbb{N}$ . Dadas uma dinâmica  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e uma probabilidade  $\mu$  sobre  $\mathbb{N}$ , dizemos que  $\mu$  é *invariante por  $f$*  se para todo subconjunto  $Y \subset \mathbb{N}$ , temos

$$\mu(Y) = \mu(f^{-1}(Y)).$$

Observe que aqui  $f^{-1}(Y)$  significa a pré-imagem de  $Y$  por  $f$  (veja Seção 1.3).

**Exemplo 2.10.** Seja  $q$  um ponto fixo de  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , ou seja,  $f(q) = q$ . Então a medida de probabilidade  $\delta_q$  é invariante por  $f$ . De fato, note que, para todo conjunto  $Y \subset \mathbb{N}$ , temos que uma e somente uma das afirmações é satisfeita:

- (i)  $q \in Y$ : nesse caso  $f^{-1}(Y)$  também contém  $q$  e ambos têm medida igual a 1;
- (ii)  $q \notin Y$ : nesse caso  $f^{-1}(Y)$  também não contém  $q$  e ambos têm medida igual 0. Consequentemente  $\delta_q$  é invariante por  $f$  conforme afirmado.

De fato, essa situação nos inspira a mostrar o próximo resultado. Porém, antes de enunciá-lo, introduziremos a seguinte construção, muito comum em livros de Teoria Ergódica. Se  $\mu$  é uma probabilidade (não necessariamente invariante) em  $\mathbb{N}$  e  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é uma dinâmica, o *pushforward* de  $\mu$  por  $f$ , denotado por  $f_*\mu$ , é definido por

$$f_*\mu(Y) := \mu(f^{-1}(Y)) \text{ para todo } Y \subset \mathbb{N}.$$

Deixamos como exercício o seguinte fato.

**Exercício 2.1.** O *pushforward*  $f_*\mu$  de uma probabilidade em  $\mathbb{N}$  é ainda uma probabilidade em  $\mathbb{N}$ .

Observemos, então, que dizer que uma probabilidade  $\mu$  é invariante por  $f$  é equivalente a dizer que  $f_*\mu = \mu$ .

**Lema 2.8.** Dados  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e  $a \in \mathbb{N}$ , temos que

$$f_*\delta_a = \delta_{f(a)}.$$

*Demonstração.* Tudo que precisamos fazer é mostrar que, para qualquer conjunto  $Y \subset X$ , temos

$$\delta_a(f^{-1}(Y)) = \delta_{f(a)}(Y).$$

A prova é análoga a do exemplo anterior. Note que temos dois casos:

- (i)  $f(a) \in Y$ : nesse caso  $f^{-1}(Y)$  contém  $a$  e ambos têm medida igual a 1;
- (ii)  $f(a) \notin Y$ : nesse caso  $f^{-1}(Y)$  não contém  $a$  e ambos têm medida igual a 0.

Consequentemente, em ambos os casos, temos  $\delta_a(f^{-1}(Y)) = \delta_{f(a)}(Y)$  conforme afirmado.  $\square$

**Exemplo 2.11.** Se  $x \in \mathbb{N}$  é um ponto periódico de período  $p$  para  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , então

$$\mu = \frac{1}{p}(\delta_x + \delta_{f(x)} + \dots + \delta_{f^{p-1}(x)})$$

é uma probabilidade invariante por  $f$ . De fato, utilizando o Lema 2.8, temos que, para todo conjunto  $A \subset \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}\mu(f^{-1}(A)) &= \frac{1}{p}(\delta_x + \delta_{f(x)} + \dots + \delta_{f^{p-1}(x)})(f^{-1}(A)) \\ &= \frac{1}{p}(\delta_{f(x)} + \delta_{f^2(x)} + \dots + \delta_{f^p(x)})(A) \\ &= \frac{1}{p}(\delta_{f(x)} + \delta_{f^2(x)} + \dots + \delta_{f^{p-1}(x)} + \delta_x)(A) \\ &= \mu(A)\end{aligned}$$

Consequentemente a medida  $\mu$  é mesmo invariante por  $f$ .

Agora usaremos isso para provar nosso principal resultado sobre a existência de probabilidades invariantes para dinâmicas em  $\mathbb{N}$ .

**Teorema 2.9.** *Uma transformação  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  admite uma probabilidade invariante se, e somente se,  $f$  tem alguma órbita periódica.*

*Demonstração.* Seja  $p \in \mathbb{N}$  um ponto periódico de  $f$ . Então, conforme observado no Exemplo 2.11, temos uma medida de probabilidade invariante naturalmente associada a esse ponto.

Suponha agora que  $\mu$  seja uma probabilidade invariante por  $f$  e, além disso, que  $f$  não tem órbitas periódicas. Em particular, segue de (2.1) que  $\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i \delta_i$ . Além disso, é fácil ver que  $f_*\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i f_*\delta_i$ . Então, usando o Lema 2.8 e a invariância de  $\mu$ , segue que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} p_i \delta_i = \mu = f_*\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i f_*\delta_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i \delta_{f(i)} = \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j \delta_{f(j)}.$$

Portanto, usando essa relação para calcular  $\mu(\{i\})$ , obtemos as seguintes relações entre os coeficientes:

$$p_i = \sum_{j \in f^{-1}(i)} p_j \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

De maneira mais geral,

$$p_i = \sum_{j \in f^{-k}(i)} p_j \text{ para todo } k, i \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Como  $\mu$  é uma probabilidade, sabemos que ao menos um dos  $p_i$ 's é não nulo; vamos admitir que seja  $p_n$ . Além disso, temos que  $f^{-k}(n) \cap f^{-j}(n) = \emptyset$  para todo  $k \neq j$ . Do contrário, se existe  $x \in f^{-k}(n) \cap f^{-j}(n)$ , assumindo sem perda de generalidade que  $k > j$ , temos que

$$f^{k-j}(n) = f^{k-j}(f^j(x)) = f^k(x) = n.$$



Ou seja,  $n$  é um ponto periódico contrariando nossa hipótese. Em particular, a união

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(n)$$

é uma união de conjuntos disjuntos e resulta num conjunto infinito. Combinando esses fatos com (2.2) e usando que  $p_n > 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(\mathbb{N}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_j \delta_j(\mathbb{N}) \\ &\geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \sum_{j \in f^{-k}(n)} p_j \delta_j(\mathbb{N}) \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \sum_{j \in f^{-k}(n)} p_j \right) \\ &\geq \sum_{k \in \mathbb{N}} p_n \\ &= \infty \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Observemos que a contradição veio da nossa hipótese de que  $f$  não tem órbitas periódicas. Logo se  $f$  tem medidas invariantes, então  $f$  tem órbitas periódicas, concluindo a demonstração.  $\square$

Conforme mencionado no início da seção, os resultados aqui apresentados são apenas uma motivação para que o leitor prossiga seus estudos nesta área tão bonita, que é a Teoria Ergódica. Na sequência dos capítulos, não trataremos mais sobre esse tema.

## 2.4 Exercícios

Nesta seção, apresentamos alguns exercícios para que o leitor possa explorar por conta própria alguns dos conceitos trabalhados ao longo do capítulo.

**Exercício 2.2.** Considere a função  $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$  definida por  $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 5, f(4) = 3, f(5) = 4$ . Obtenha as órbitas periódicas de  $f$  e o conjunto limite da dinâmica de cada ponto.

**Exercício 2.3.** Considere a função  $f: \mathbb{N}_* \rightarrow \mathbb{N}_*$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par;} \\ 2x; & \text{se } x \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Obtenha seus atratores.

**Exercício 2.4.** Considere a função  $f : \mathbb{N}_* \rightarrow \mathbb{N}_*$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par;} \\ 2x + 2; & \text{se } x \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Verifique que a órbita de 1 é periódica e mostre que ela é o atrator da órbita de todos os pontos de  $\mathbb{N}_*$ .

**Exercício 2.5.** Considere a função  $f : \mathbb{N}_* \rightarrow \mathbb{N}_*$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{se } x \text{ é múltiplo de 3;} \\ 2x + 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verifique que a órbita de 1 é periódica e mostre que a órbita de todo ponto na forma  $3k + 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$  não é limitada. Você consegue encontrar outras órbitas periódicas além da órbita de 1?

**Exercício 2.6.** Para as duas funções  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dadas a seguir, obtenha as órbitas periódicas e as medidas invariantes:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}; \\ x \mod 11, & \text{se } x \geq 10. \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{se } x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}; \\ x \mod 10, & \text{se } x \geq 10. \end{cases}$$

# 3

## *Dinâmica no espaço de sequências*

---

No capítulo anterior, vimos alguns exemplos e propriedades de dinâmicas definidas em conjuntos finitos e enumeráveis. Devido à simplicidade do contexto, vimos que diversas propriedades podem ser caracterizadas de maneira bastante elementar. Neste capítulo, daremos um passo a mais considerando exemplos de dinâmicas cujo espaço de fases já não é mais enumerável. Mais precisamente, consideraremos dinâmicas definidas no espaço de sequências como, por exemplo, a dinâmica do *shift*. Essa transformação tem uma forma muito simples, porém apresenta propriedades dinâmicas muito interessantes, como veremos na sequência. Além disso, veremos nos próximos capítulos que, ela serve de modelo para outras dinâmicas aparentemente mais complicadas. Ao final do capítulo, apresentaremos ainda os autômatos celulares, um outro tipo de dinâmica no espaço de sequências. Começamos introduzindo nosso espaço de fases.

### 3.1 O espaço de sequências

Um dos objetos básicos deste capítulo é o espaço de sequências

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) : x_j \in \{0, 1\} \text{ para todo } j \in \mathbb{N}\}$$

formado por sequências infinitas de 0's e 1's.  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$  serão ditas *coordenadas*, ou *símbolos*, ou ainda *entradas* da sequência  $(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ , enquanto que  $\{0, 1\}$  é dito o *alfabeto* de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Um elemento típico desse espaço tem a forma

$$(0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$$

que às vezes será representado simplesmente por

$$011000111101001 \dots$$

sendo que em ambos os casos as reticências substituem uma infinidade de elementos que obviamente não podemos escrever.

Para simplificar a notação, convencionaremos o seguinte: o símbolo  $0^{+\infty}$  corresponde a um bloco infinito (para a direita) de símbolos 0, ou seja,

$$0^{+\infty} = 000000 \dots$$

(nesse caso as reticências substituem a infinidade de zeros que não escreveremos). De forma similar, definimos  $1^{+\infty}$ . Podemos também indicar a repetição de um bloco de símbolos por meio desta notação. Por exemplo,

$$(0110)^{+\infty} = 0110\,0110\,0110\,0110 \dots$$

e

$$00001(1011)^{+\infty} = 00001\,1011\,1011\,1011 \dots$$

### 3.1.1 O espaço de seqüências como espaço métrico

Conforme já visto nos capítulos anteriores, diversas propriedades dinâmicas são expressas em termos da topologia do espaço de fases, por exemplo, usando conjuntos abertos, e da distância entre pontos. Então, para que possamos considerar estas noções em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , precisamos introduzir uma maneira de medir distâncias nesse espaço, ou seja, precisamos definir uma métrica em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Há mais de uma maneira para fazer isso, porém apresentaremos apenas uma dessas alternativas.

Dadas duas seqüências  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$  e  $y = (y_0, y_1, y_2, y_3, \dots)$  em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , consideremos inicialmente  $N: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por

$$N(x, y) := \min\{k \geq 0 : x_k \neq y_k\}.$$

Ou seja,  $N(x, y)$  nos diz qual é a primeira coordenada, da esquerda para a direita, em que as seqüências  $x$  e  $y$  diferem. Por exemplo,

$$N(011101(1)^{+\infty}, 011100(0)^{+\infty}) = 5$$

pois a primeira coordenada em que estas seqüências diferem é a sexta. Como consequência direta dessa definição, temos que  $N(x, y) = N(y, x)$  e  $N(x, x) = +\infty$ . Mais ainda, não é difícil perceber que essa última afirmação pode ser reescrita de maneira ainda mais forte, pois, de fato, se  $N(x, y) = +\infty$ , então necessariamente todas as coordenadas de  $x$  e  $y$  coincidem, ou seja, temos  $x = y$ . Dessa forma, temos que  $N(x, y) = +\infty$  se, e somente se,  $x = y$ . Agora, fazendo uso dessa noção, podemos definir nossa distância em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  da seguinte forma: dados  $x$  e  $y$  em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , definimos

$$d(x, y) := \left(\frac{1}{2}\right)^{N(x, y)}.$$

Em palavras, podemos dizer que essa noção de distância mede até que ponto as primeiras coordenadas, da esquerda para a direita, de  $x$  e  $y$  coincidem. Isto é, até que ponto o início das seqüências  $x$  e  $y$  é igual. Quanto menor  $d(x, y)$ , maior  $N(x, y)$  e, em particular, mais para a direita está a primeira coordenada em que as seqüências  $x$  e  $y$  diferem. Por exemplo,  $d(0^{+\infty}, 10^{+\infty}) = 1$ , pois as seqüências  $0^{+\infty}$  e  $10^{+\infty}$  já diferem na primeira coordenada;  $d(010^{+\infty}, 0010^{+\infty}) = 1/2$ , pois a primeira coordenada em que as seqüências em questão diferem é a segunda.

Para que uma função  $d: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, +\infty)$  seja uma distância, ela deve ser positiva, simétrica e satisfazer a desigualdade triangular (veja o Apêndice A). Verifiquemos que nossa transformação  $d$  satisfaz tais propriedades. É fácil ver que  $d$  é uma transformação da forma  $d: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, +\infty)$ . Além disso, segue da definição e das observações anteriores que

$$d(x, y) = 0 \iff N(x, y) = +\infty \iff x = y$$

e

$$d(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N(x, y)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{N(y, x)} = d(y, x).$$

Ou seja,  $d$  é positiva e simétrica. Resta verificarmos que  $d$  satisfaz a desigualdade triangular. Ou seja, que vale

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ para todo } x, y, z \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Observemos inicialmente que se  $d(x, z) \leq d(x, y)$ , então não há nada a fazer. Vamos, pois, assumir que  $d(x, z) > d(x, y)$ . Isso significa dizer que as seqüências  $x$  e  $y$  coincidem por mais símbolos do que  $x$  e  $z$ . Ou seja,  $N(x, z) < N(x, y)$ . Da definição de  $N(\cdot, \cdot)$ , temos que

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{N(x, y)-1} = y_{N(x, y)-1} \text{ e } x_{N(x, y)} \neq y_{N(x, y)}$$

e

$$x_1 = z_1, x_2 = z_2, \dots, x_{N(x, z)-1} = z_{N(x, z)-1} \text{ e } x_{N(x, z)} \neq z_{N(x, z)}.$$

Logo, como  $N(x, z) < N(x, y)$ , segue que

$$y_1 = z_1, y_2 = z_2, \dots, y_{N(x, z)-1} = z_{N(x, z)-1} \text{ e } y_{N(x, z)} \neq z_{N(x, z)}.$$

Portanto  $N(y, z) = N(x, z)$ . Ou seja, a primeira coordenada em que  $y$  e  $z$  diferem é a mesma em que  $x$  e  $z$  diferem. Dessa forma,  $d(y, z) = d(x, z)$ . Portanto, como  $d(x, y) \geq 0$ ,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

como queríamos. Logo  $d$  é de fato uma distância.

### 3.1.2 Cilindros

Uma classe de conjuntos que desempenha papel fundamental em estudos envolvendo o espaço de seqüências é dada pelos cilindros que apresentaremos na seqüência.

Consideremos inicialmente o *espaço de palavras de comprimento  $n$*  em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  dado por

$$W_n := \{(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) : x_i \in \{0, 1\}\}.$$

Dada uma palavra  $w \in W_n$ , definimos o *cilindro*  $[w]$  como sendo o conjunto

$$[w] = [w_0 w_1 \dots w_{n-1}] := \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : x_0 = w_0, \dots, x_{n-1} = w_{n-1}\}.$$

Ou seja, o cilindro  $[w]$  consiste de todas as seqüências de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  que coincidem com  $w$  em suas  $n$  primeiras coordenadas.

Observemos agora que se  $x, y \in [w]$ , então  $d(x, y) \leq (\frac{1}{2})^n$ , visto que as  $n$  primeiras coordenadas de  $x$  e  $y$  certamente coincidem. Esse fato nos permite caracterizar cilindros tanto como bolas fechadas quanto como bolas abertas. Mais precisamente,  $[w]$  é uma bola fechada

$$[w] = \left\{ z \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : d(z, w_0 w_1 \dots w_{n-1} 0^{+\infty}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

e também uma bola aberta

$$[w] = \left\{ z \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : d(z, w_0 w_1 \dots w_{n-1} 0^{+\infty}) < \left(\frac{1}{2}\right)^n + \epsilon \right\}$$

centrada em  $w_0 w_1 \dots w_{n-1} 0^{+\infty}$ , em que  $\epsilon > 0$  é qualquer número menor do que  $(\frac{1}{2})^n$ . Essas duas descrições nos mostram que os cilindros são exemplos de conjuntos que são ao mesmo tempo abertos e fechados.

Finalmente o leitor não terá dificuldade em verificar que

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = [0] \cup [1] = [00] \cup [01] \cup [10] \cup [11] = \dots$$

e, mais geralmente, que para todo  $w \in W_n$ ,

$$[w_0 w_1 w_2 \dots w_{n-1}] = [w_0 w_1 w_2 \dots w_{n-1} 0] \cup [w_0 w_1 w_2 \dots w_{n-1} 1]$$

e

$$[w_0 w_1 w_2 \dots w_{n-1} 0] \cap [w_0 w_1 w_2 \dots w_{n-1} 1] = \emptyset.$$

### 3.1.3 Não enumerabilidade do espaço de seqüências

Uma das principais características que diferencia o espaço de seqüências  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  do conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$ , explorado no capítulo anterior, reside no fato de que o primeiro é um conjunto não enumerável. Ou seja, não é possível colocar *todos* os elementos

de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  numa lista da forma  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Caso tentássemos construir tal lista, sempre sobriariam elementos de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  que não pertencem à lista. De maneira mais precisa, isso significa dizer que não existe uma bijeção entre  $\mathbb{N}$  e  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Por outro lado, é fácil exibir uma transformação de  $\mathbb{N}$  em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  que seja injetiva. Em particular, isso nos diz que  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tem, de certa forma, mais elementos do que  $\mathbb{N}$ . É precisamente esse fato que caracteriza um *conjunto não enumerável*. Nosso objetivo nesta seção é justamente provar que  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é não enumerável. Para tanto, utilizaremos uma belíssima técnica introduzida por Georg Cantor (1845–1918) no final do século XIX.

Supomos, por absurdo, que exista uma bijeção  $b: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Isto é o mesmo que dizer que podemos montar uma lista com os elementos de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tomando

$$x_0 = b(0), x_1 = b(1), x_2 = b(2), \dots$$

Mas cada elemento desta lista é, ele mesmo, uma seqüência de símbolos 0's e 1's:

$$x_0 = (x_{00}, x_{01}, x_{02}, x_{03}, \dots)$$

$$x_1 = (x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots)$$

$$x_2 = (x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots)$$

$$x_3 = (x_{30}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, \dots)$$

$$\vdots$$

Por  $b$  ser uma bijeção e, em particular, sobrejetiva, essa lista deve ser completa. Isto é, precisa conter todos os elementos de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Em particular, precisa conter o elemento  $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  dado por

$$y = (1 - x_{00}, 1 - x_{11}, 1 - x_{22}, 1 - x_{33}, \dots).$$

Agora  $y$  não pode ser o elemento  $x_0$ , pois a primeira coordenada de  $y$  é diferente de  $x_{00}$ , a primeira coordenada de  $x_0$ ;  $y$  também não pode ser  $x_1$ , pois na segunda coordenada as duas seqüências são distintas. De forma similar, o leitor pode concluir que  $y$  é diferente do elemento  $x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e, portanto,  $y$  não está na lista acima. Isto nos mostra que a suposta bijeção construída entre  $\mathbb{N}$  e  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  não é de fato uma bijeção, contradizendo nossa hipótese inicial. Desta forma, concluímos que  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  não é um conjunto enumerável!

Para finalizar, salientamos que o espaço  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$  tem diversas outras propriedades topológicas interessantes. Deixamos a verificação de algumas delas como exercício abaixo para aqueles leitores com algum conhecimento de topologia geral.

**Exercício 3.1.** Mostre que  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$  é um espaço métrico compacto.

**Exercício 3.2.** Mostre que o conjunto de todos os cilindros

$$\mathcal{C} = \{[w] : w \in W_n \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$$

forma uma base para a topologia de  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ .

**Exercício 3.3.** Dizemos que um espaço topológico  $(X, \tau)$  é *totalmente desconexo* se qualquer subconjunto de  $X$  com mais de um ponto é desconexo, ou seja, qualquer subconjunto  $Y \subset X$  com mais de um ponto pode ser escrito como uma união  $Y = U_1 \cup U_2$  de dois subconjuntos abertos e disjuntos  $U_1$  e  $U_2$ . Mostre que o espaço métrico  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$  é totalmente desconexo. Em particular, possui propriedades topológicas bastante diferentes do, por exemplo, intervalo  $[0, 1]$  de  $\mathbb{R}$ .

**Exercício 3.4.** Dizemos que um espaço topológico  $(X, \tau)$  é *perfeito* se  $(X, \tau)$  for fechado e não contém pontos isolados. Mostre que o espaço métrico  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$  é um espaço perfeito.

Um espaço métrico  $(X, d)$  não vazio, perfeito, compacto e totalmente desconexo é dito um *espaço de Cantor* ou, então, um *conjunto de Cantor*. Em particular, segue dos exercícios anteriores que nosso espaço  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$  é um espaço de Cantor.

O leitor deve notar que usamos o alfabeto  $\{0, 1\}$  apenas por uma questão de simplicidade. As mesmas construções anteriores podem ser feitas trocando-o por um alfabeto com mais elementos e mantendo ainda as mesmas conclusões. Convidamos o leitor a verificar este fato e, em particular, tentar adaptar as provas acima para essa situação mais geral.

## 3.2 A dinâmica do *shift* unilateral

Até agora neste capítulo, estivemos focados em apresentar o espaço de fases  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$  juntamente com algumas das suas propriedades. Nesta seção, apresentaremos finalmente o ator principal: a dinâmica do *shift*.

Consideremos o sistema dinâmico  $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  dado por

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Em palavras, o que  $f$  faz é “apagar” a coordenada  $x_0$  e deslocar as demais uma “casa” para a esquerda; por essa razão, essa transformação é conhecida como *shift unilateral* ou simplesmente *shift*, deslocamento em inglês. Uma primeira observação importante sobre  $f$  é a seguinte.

**Proposição 3.1.**  $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é uma transformação (uniformemente) contínua.

*Demonstração.* Tudo que temos que fazer é mostrar que, dado  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que se  $d(x, y) \leq \delta$ , então  $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$ .

Consideremos inicialmente  $\epsilon = (\frac{1}{2})^N$  para algum  $N \in \mathbb{N}$ . Dados  $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , afirmar que  $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$  é o mesmo que dizer que

$$d((x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^N.$$

Isto por sua vez significa que  $x_i = y_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Tome agora  $\delta = (\frac{1}{2})^{N+1}$ . Então se  $d(x, y) \leq \delta = (\frac{1}{2})^{N+1}$ , temos que  $x_i = y_i$  para todo  $i \in$



$\{0, 1, 2, \dots, N\}$ . Dessa forma, concluímos que se  $d(x, y) \leq \delta$ , então  $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$  como desejado.

Finalmente, no caso de um  $\epsilon > 0$  qualquer, tomando  $N \in \mathbb{N}$  suficientemente grande de forma que  $(\frac{1}{2})^N \leq \epsilon$  e  $\delta = (\frac{1}{2})^{N+1}$ , segue da observação anterior que se  $d(x, y) \leq \delta$ , então

$$d(f(x), f(y)) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^N \leq \epsilon$$

conforme desejado. Isto mostra que o *shift*  $f$  é efetivamente é uma transformação contínua.  $\square$

Outra característica dessa transformação é ela não ser injetiva. Por exemplo, não é difícil ver que  $01^{+\infty} = (0, 1, 1, 1, \dots)$  e  $1^{+\infty} = (1, 1, 1, 1, \dots)$ , embora distintos, tenham exatamente a mesma imagem por  $f$ , isto é,  $1^{+\infty}$ . De maneira mais geral, também não é difícil verificar que

$$f^{-1}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \{(0, x_1, x_2, x_3, \dots), (1, x_1, x_2, x_3, \dots)\}.$$

Em particular, é bem simples descrever o conjunto das pré-imagens de um ponto dado. Segue também dessa observação que, embora  $f$  não seja injetiva, ela é sobrejetiva, visto que todo ponto de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tem exatamente duas pré-imagens.

A ação de  $f$  em cilindros também é simples: não é difícil verificar que

$$f([0]) = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = f([1])$$

e, mais geralmente, dado  $w \in W_{n+1}$ ,

$$f([w_0 w_1 w_2 \dots w_n]) = [w_1 w_2 w_3 \dots w_n].$$

### 3.2.1 Pontos periódicos

É bastante simples determinar os pontos periódicos do *shift*, sendo precisamente isso que faremos nesta seção. Começemos determinando seus pontos fixos. Observemos que um elemento  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é um ponto fixo de  $f$  se, e somente se,

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = f((x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)) = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Ou seja,  $x$  é ponto fixo de  $f$  se, e somente se,  $x_0 = x_1$ ,  $x_1 = x_2$ ,  $x_2 = x_3, \dots$ ; em outras palavras,  $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = \dots$ . Agora, para que isso aconteça, temos apenas duas possibilidades: ou consideramos  $x_i = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  e neste caso

$$x = 0^{+\infty} = (0, 0, 0, \dots);$$

ou consideramos  $x_i = 1$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  e neste caso

$$x = 1^{+\infty} = (1, 1, 1, \dots).$$

Portanto esses são os dois únicos pontos fixos do *shift*.

Queremos agora determinar os pontos periódicos de período 2 de  $f$ . Começemos observando que uma seqüência  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$  em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é um ponto fixo de  $f^2 = f \circ f$  se, e somente se,

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = f^2(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, x_5, \dots).$$

Ou seja, se, e somente se,  $x_0 = x_2, x_1 = x_3, x_2 = x_4, x_3 = x_5, x_4 = x_6, \dots$  sendo equivalente a  $x_0 = x_2 = x_4 = x_6 = \dots$  e  $x_1 = x_3 = x_5 = \dots$ . Então os pontos fixos de  $f^2$  ficam completamente determinados ao escolhermos suas duas primeiras coordenadas. Dessa forma, eles são dados por

$$(00)^{+\infty} = (0, 0, 0, 0, \dots) \quad \text{e} \quad (11)^{+\infty} = (1, 1, 1, 1, \dots)$$

e

$$(10)^{+\infty} = (1, 0, 1, 0, \dots) \quad \text{e} \quad (01)^{+\infty} = (0, 1, 0, 1, \dots).$$

Agora, lembrando que o período de um ponto periódico  $x$  é o *menor* natural  $k \geq 1$  tal que  $f^k(x) = x$ , como os dois primeiros pontos são fixos para  $f$ , ou seja, tem período 1, segue que os únicos pontos periódicos de  $f$  de período 2 são

$$(10)^{+\infty} = (1, 0, 1, 0, \dots) \quad \text{e} \quad (01)^{+\infty} = (0, 1, 0, 1, \dots).$$

Raciocinando de forma análoga, concluímos que para construir um ponto fixo para  $f^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , basta considerarmos uma palavra de comprimento  $n$  e repeti-la periodicamente. Por exemplo, dado  $B_n = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) \in W_n$ , o ponto

$$B_n B_n \dots = b_0 b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_0 b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_0 \dots$$

é um ponto fixo de  $f^n$ . Além disso, todos os pontos fixos de  $f^n$  são obtidos dessa forma. Agora quais desses pontos têm de fato período  $n$ ? Deixamos essa pergunta como exercício para o leitor.

A construção acima também nos mostra que dado qualquer  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$  em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , existe um ponto periódico arbitrariamente próximo de  $x$ . De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $(\frac{1}{2})^{n_0} < \varepsilon$  e consideremos

$$\begin{aligned} y &= (x_0, x_1, \dots, x_{n_0})^{+\infty} \\ &= (x_0, x_1, \dots, x_{n_0}, x_0, x_1, \dots, x_{n_0}, x_0, x_1, \dots, x_{n_0}, \dots). \end{aligned}$$

É fácil ver que  $f^{n_0}(y) = y$  e  $d(x, y) \leq (\frac{1}{2})^{n_0} < \varepsilon$ . Isto nos mostra  $\overline{\text{Per}(f)} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Ou seja, o conjunto dos pontos periódicos de  $f$  é denso em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Em particular, existe uma infinidade de tais pontos.

**Exercício 3.5.** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , mostre que  $f^n$  tem exatamente  $2^n$  pontos fixos. Quantos são os pontos periódicos de período *exatamente*  $n$  de  $f$ ?

### 3.2.2 Transitividade

Nosso objetivo agora é mostrar que o *shift* é uma transformação transitiva. Ou seja, que existe ao menos uma órbita de  $f$  que seja densa em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Para tanto, temos que mostrar que existe  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tal que, para qualquer ponto  $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , exista algum elemento da órbita de  $x$  dada por

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$$

que está arbitrariamente próximo de  $y$ . Vamos exibir um ponto  $x$  com tal propriedade explicitamente. De fato, tomemos

$$x = 0100011011000001010100110111 \dots$$

Ou seja,  $x$  é construído concatenando inicialmente todas as palavras de comprimento 1, depois todas as palavras de comprimento 2, todas as palavras de comprimento 3 e assim sucessivamente.

Por que a órbita de  $x$  é densa em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ? Considere um ponto qualquer  $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , vamos mostrar que existem iterados de  $x$  arbitrariamente próximos de  $y$ . Como obter um elemento da órbita de  $x$  que está a uma distância menor ou igual a  $\frac{1}{2}$  de  $y$ ? Observemos que o primeiro símbolo de  $y$ ,  $y_0$ , só pode ser 0 ou 1. Dessa forma, ou a primeira coordenada do próprio  $x$  coincide com  $y_0$ , ou então isso acontece com a primeira coordenada de  $f(x)$ , garantindo, assim, que algum elemento da órbita de  $x$  está a uma distância menor ou igual a  $\frac{1}{2}$  de  $y$ . Como podemos obter um elemento da órbita de  $x$  cuja distância a  $y$  é menor ou igual a  $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ? Basta tomar um iterado de  $x$  que coincida com  $y$  nas duas primeiras coordenadas, o que obviamente existe, pois  $x$  é formado pela concatenação de *todas* as palavras de comprimento 2 e, em particular, tem exatamente a palavra  $y_0y_1$  em sua expansão. Procedendo dessa forma e utilizando que  $x$  possui *todas* as palavras de comprimento  $n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  em sua expansão, concluímos que se pode obter iterados de  $x$  tão próximos de  $y$  quanto desejado. Consequentemente, a órbita de  $x$  é de fato densa em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

Agora uma pergunta natural que podemos nos fazer é se o ponto  $x$  obtido acima é o *único* ponto cuja órbita por  $f$  é densa em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Bem, para essa questão, não é difícil convencer-se de que a resposta é não. Por exemplo, não há nenhuma razão específica para ordenar o aparecimento das palavras de um certo comprimento da forma como as ordenamos; podemos modificar tal ordem sem que o órbita deixe de ser densa e obter, assim, um novo ponto com a propriedade desejada. Por exemplo, podemos considerar

$$x' = 1000011011000001010100110111 \dots$$

ou, então,

$$x'' = 0101001110000001010100110111 \dots,$$

que obviamente são distintos de  $x$  e, pela mesma razão que  $x$ , possuem órbita densa em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Ou ainda, dada uma palavra qualquer  $w \in W_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , podemos considerar

$$\begin{aligned} y &= w_0w_1w_2 \dots w_{n-1}x_0x_1x_2x_3 \dots \\ &= w_0w_1w_2 \dots w_{n-1}0100011011000001010100110111 \dots \end{aligned}$$

obtido concatenando  $w$  à esquerda de  $x$ . Também não é difícil convencer-se de que a órbita de  $y$  por  $f$  é densa em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Tendo em mente essa última observação, deixamos o seguinte exercício.

**Exercício 3.6.** Denotemos por  $\text{Den}(f)$  o conjunto de todos os pontos cuja órbita por  $f$  é densa em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Mostre que  $\text{Den}(f)$  é denso em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Em particular, existe uma infinidade de pontos cuja órbita por  $f$  é densa em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

Para aqueles leitores com um pouco mais de conhecimento de topologia geral e espaços métricos, deixamos ainda o seguinte exercício, um pouco mais desafiador que o anterior.

**Exercício 3.7.** Um subconjunto  $Y$  de um espaço métrico  $(X, d)$  é dito *residual* em  $X$  se existe uma coleção de subconjuntos  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $X$  tal que o interior de cada  $D_n$  é denso em  $X$ , isto é,  $\overline{\text{int}(D_n)} = X$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e

$$Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n.$$

Mostre que o conjunto  $\text{Den}(f)$  definido no exercício anterior é residual em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

Como consequência do exercício anterior combinado com o fato que  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$  é um espaço métrico compacto (Exercício 3.1) e perfeito (Exercício 3.4), segue que  $\text{Den}(f)$  é denso em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e, além disso, não enumerável. Em particular, existem *muitos* pontos cuja órbita por  $f$  são densas em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

### 3.2.3 *Mixing* topológico

Vimos na seção anterior que o *shift* é uma transformação transitiva. No que segue, veremos que de fato vale uma propriedade ainda mais forte. Mais precisamente,  $f$  satisfaz a seguinte propriedade.

**Proposição 3.2.** O shift  $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é topologicamente mixing. Ou seja, dados dois conjuntos abertos quaisquer  $U$  e  $V$  de  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  para todo  $n \geq n_0$ .

*Demonstração.* Observemos inicialmente que qualquer conjunto aberto necessariamente contém um cilindro. De fato, um subconjunto  $U$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é aberto se, e somente se, dado qualquer ponto  $x \in U$ , existe uma bola aberta centrada em  $x$  e contida em  $U$ . Agora, conforme observado na Seção 3.1.2, os cilindros são exatamente as bolas abertas do espaço métrico  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ . Portanto, para obtermos o resultado desejado, basta mostrarmos que para cada par de cilindros  $U$  e  $V$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  para todo  $n \geq n_0$ . Sejam  $U$  e  $V$  cilindros arbitrários de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Nesse caso, existem  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $w \in W_n$  e  $v \in W_m$  tais que  $U = [w]$  e  $V = [v]$ . Fixemos agora palavras arbitrárias  $P^1 \in W_1$ ,  $P^2 \in W_2$ ,  $P^3 \in W_3$  e assim por diante. Por fim, consideremos os pontos

$$\begin{aligned} x^0 &= wv(wv)^{+\infty}, \quad x^1 = wP^1v(wv)^{+\infty}, \quad x^2 = wP^2v(wv)^{+\infty}, \\ x^3 &= wP^3v(wv)^{+\infty}, \quad x^4 = wP^4v(wv)^{+\infty}, \dots \end{aligned}$$

Agora é fácil ver que  $x^0 \in U$  e  $f^n(x^0) \in V$ ;  $x^1 \in U$  e  $f^{n+1}(x^1) \in V$ ;  $x^2 \in U$  e  $f^{n+2}(x^2) \in V$  e assim por diante. Consequentemente  $f^{n+k}(U) \cap V \neq \emptyset$  para todo  $k \geq 0$ . Tomando, então,  $n_0 = n$  segue o resultado.  $\square$

Observemos que, como  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$  é um espaço métrico compacto (Exercício 3.1), ele satisfaz as hipóteses da Proposição 1.6. Em particular, poderíamos ter obtido que  $f$  é transitiva como uma consequência do Corolário 1.7. No entanto, a prova apresentada na seção anterior é muito mais direta e não apela a nada da teoria de espaços métricos.

### 3.2.4 Expansividade, sensibilidade às condições iniciais e caos

Como a transformação  $f: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é contínua, ela leva pontos próximos em pontos próximos. Isto não significa, porém, que a distância entre os iterados não pode crescer. De fato, consideremos dois pontos distintos quaisquer

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

e

$$y = (y_0, y_1, y_2, y_3, \dots)$$

em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Nesse caso, como  $x \neq y$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \neq y_n$ . Portanto, como

$$f^n(x) = (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots)$$

e

$$f^n(y) = (y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, \dots)$$

segue facilmente que  $d(f^n(x), f^n(y)) = 1$ , a maior distância possível entre dois pontos em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Em particular, independentemente do quão próximos estiverem  $x$  e  $y$ , em algum momento, suas órbitas se distanciarão. Consequentemente  $f$  é expansiva e tem sensibilidade às condições iniciais (veja Seção 1.16). Além disso, combinando esse fato com as observações das seções anteriores, concluímos que o *shift*  $f$  é um sistema caótico (veja Seção 1.17).

### 3.2.5 Sombreamento

Nosso objetivo agora é mostrar que o *shift* satisfaz a propriedade do sombreamento (veja Seções 1.18 e 1.19). Ou seja, queremos mostrar que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para toda  $\delta$ -pseudo-órbita  $(x^0, x^1, x^2, \dots)$  de  $f$  existe algum ponto  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  satisfazendo

$$d(f^n(x), x^n) \leq \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para simplificar o argumento, consideremos inicialmente o caso particular em que  $\epsilon = (\frac{1}{2})^{10}$ . Nesse caso, mostrar que

$$d(f^n(x), x^n) \leq \epsilon$$

equivale a mostrar que as 10 primeiras coordenadas de  $f^n(x)$  e  $x^n$  são as mesmas. Tome-mos  $\delta = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$  e seja

$$\begin{aligned}x^0 &= x_1^0 x_2^0 \dots x_{10}^0 \dots, \\x^1 &= x_1^1 x_2^1 \dots x_{10}^1 \dots, \\x^2 &= x_1^2 x_2^2 \dots x_{10}^2 \dots, \\&\vdots\end{aligned}$$

uma  $\delta$ -pseudo-órbita de  $f$ , significando que  $d(f(x^k), x^{k+1}) \leq \delta = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e, conseqüentemente,

$$x_1^{k+1} = x_2^k, x_2^{k+1} = x_3^k, \dots, x_{10}^{k+1} = x_{11}^k \quad (3.1)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Consideremos, então,  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  dado por

$$x = x_1^0 x_2^0 \dots x_{10}^0 x_{10}^1 x_{10}^2 x_{10}^3 x_{10}^4 \dots$$

Portanto, como o bloco formado pelas 10 primeiras coordenadas de  $x$  coincide com o bloco de  $x^0$ , segue que  $d(x, x^0) \leq \epsilon$ ; analisando o primeiro iterado de  $x$ ,

$$f(x) = x_2^0 \dots x_{10}^0 x_{10}^1 x_{10}^2 x_{10}^3 \dots,$$

e utilizando (3.1), vemos que as 10 primeiras coordenadas de  $f(x)$  coincidem com as 10 primeiras coordenadas de  $x^1$ . Utilizando novamente (3.1), vemos que o segundo iterado de  $x$ ,

$$f^2(x) = x_3^0 \dots x_{10}^0 x_{10}^1 x_{10}^2 x_{10}^3 \dots,$$

tem suas 10 primeiras coordenadas iguais as 10 primeiras coordenadas de  $x^2$  (aqui usamos (3.1) recursivamente. Por exemplo, para verificar que  $x_3^0 = x_2^1$ , utilizando (3.1), vemos que por um lado  $x_3^0 = x_2^1$  e por outro,  $x_2^1 = x_1^2$  e, conseqüentemente,  $x_3^0 = x_1^2$ ) e assim sucessivamente. Isto mostra que toda  $\delta$ -pseudo-órbita de  $f$  é de fato  $\epsilon$ -sombreada por uma órbita de  $f$  no caso em que  $\epsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ . O caso geral é análogo e deixamos sua demonstração como exercício.

**Exercício 3.8.** Utilizando a ideia desenvolvida acima, mostre que  $f$  efetivamente tem a propriedade do sombreamento. Ou seja, que a conclusão acima vale para todo  $\epsilon > 0$  e não apenas para  $\epsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ .

### 3.2.6 Entropia topológica

Já vimos na Seção 3.2.4 que o *shift*  $f: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é um sistema caótico, em particular, é um sistema com uma certa complexidade. Nesta seção, vamos estabelecer precisamente, do ponto de vista da entropia topológica, o quão complexo é esse sistema. Mais precisamente, vamos calcular sua entropia topológica.

**Proposição 3.3.** A entropia topológica de  $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é dada por

$$h_{\text{top}}(f) = \log 2.$$

*Demonstração.* Começemos observando que, como o limite em  $\varepsilon$  na definição de entropia

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h_{\text{top}}(f, \varepsilon)$$

existe ao invés de fazermos  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , basta considerarmos esse limite ao longo de uma sequência. Isto é, se  $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de números positivos tais que  $\varepsilon_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ , então

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{m \rightarrow +\infty} h_{\text{top}}(f, \varepsilon_m).$$

Dessa forma, consideraremos o limite ao longo da sequência  $\varepsilon_m = \frac{1}{2^m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Dados  $n \in \mathbb{N}$  e  $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , temos que

$$d_n(x, y) = \max\{d(x, y), d(f(x), f(y)), \dots, d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y))\}.$$

Agora, dado  $m \in \mathbb{N}$ , segue da definição de  $d$  que  $d(f^j(x), f^j(y)) \geq (\frac{1}{2})^m$  se, e somente se,

$$N(f^j(x), f^j(y)) \in \{0, 1, 2, \dots, m\}.$$

Consequentemente,

$$d_n(x, y) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^m \text{ se, e somente se, } N(f^j(x), f^j(y)) \leq m$$

para algum  $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , o que é equivalente a

$$d_n(x, y) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^m \text{ se, e somente se, } N(x, y) \leq m + n - 1.$$

Logo

$$\text{sep}\left(n, \frac{1}{2^m}\right) \leq 2^{m+n} \quad (3.2)$$

visto que o lado direito de (3.2) nos dá o maior número possível de sequências em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  que diferem em alguma das suas  $m + n$  primeiras coordenadas.

Por outro lado, vimos no Exercício 3.5 que o número de pontos fixos de  $f^{m+n}$  é  $2^{m+n}$ . Tomando dois desses pontos fixos  $x$  e  $y$ , temos que  $N(x, y) \in \{0, 1, 2, \dots, m + n - 1\}$ , e portanto

$$\begin{aligned} d_n(x, y) &= \max\{d(x, y), d(f(x), f(y)), \dots, d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y))\} \\ &\geq \frac{1}{2^m}. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\text{sep}\left(n, \frac{1}{2^m}\right) \geq 2^{m+n}. \quad (3.3)$$

Combinando, então, (3.2) e (3.3) concluímos que

$$\text{sep}\left(n, \frac{1}{2^m}\right) = 2^{m+n}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(f) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \text{sep}(n, \varepsilon) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \text{sep}\left(n, \frac{1}{2^m}\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{m+n}{n} \log 2 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

conforme afirmado.  $\square$

Denotando, então, por  $\text{Fix}(f^n)$  o conjunto dos pontos fixos de  $f^n$  e por  $\#\text{Fix}(f^n)$  a cardinalidade deste conjunto, temos a seguinte consequência da proposição anterior e do Exercício 3.5.

#### Corolário 3.4.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\text{Fix}(f^n)}{e^{n \cdot h_{\text{top}}(f)}} = 1.$$

Ou seja,  $h_{\text{top}}(f)$  nos dá a taxa de crescimento exponencial do número de pontos fixos de  $f^n$ . Cabe ressaltar que esse resultado vale em contextos bem mais gerais nos quais, ao contrário daqui, não é fácil estimar diretamente o tamanho do conjunto  $\text{Fix}(f^n)$ . Em particular, nesses contextos, teremos pelo menos a estimativa  $\#\text{Fix}(f^n) \simeq e^{n \cdot h_{\text{top}}(f)}$  para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Outros exemplos em que vale uma estimativa semelhante aparecerão na seqüência.

### 3.2.7 Limites de algumas órbitas

Nesta seção, apresentaremos o conjunto  $\omega$ -limite e a bacia de atração de alguns pontos especiais. Dados  $n \in \mathbb{N}$  e  $w \in W_n$ , consideremos o ponto de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  dado por

$$w(01)^{+\infty} = w_0 w_1 \dots w_{n-1} 010101 \dots$$

Ou seja,  $w(01)^{+\infty}$  é o ponto obtido pela concatenação da palavra  $w$  com  $(01)^{+\infty}$ . Então não é difícil ver que, após um certo número de iterados ( $n$  pra ser mais preciso), teremos



exatamente o ponto periódico  $(01)^{+\infty}$ . Portanto os pontos da forma  $w(01)^{+\infty}$  se acumulam na órbita periódica de  $(01)^{+\infty}$ . De forma mais técnica,

$$\omega(w(01)^{+\infty}) = O((01)^{+\infty}).$$

Além disso, não é difícil convencer-se de que os pontos da forma  $w(01)^{+\infty}$  com  $w \in W_n$  e  $n \in \mathbb{N}$  são os únicos pontos que se acumulam em  $(01)^{+\infty}$ . Consequentemente a bacia de atração do ponto periódico  $(01)^{+\infty}$  é dada por

$$B((01)^{+\infty}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}((01)^{+\infty}) = \{w(01)^{+\infty} : w \in W_n \text{ e } n \in \mathbb{N}\}.$$

Naturalmente o ponto periódico  $(01)^{+\infty}$  não tem nada de especial. Podemos perfeitamente considerar uma palavra  $v \in W_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_*$ , e o ponto periódico correspondente  $v^{+\infty} = v v v \dots$  formado pela concatenação repetida de  $v$  e, neste caso,

$$\omega(wv^{+\infty}) = O(v^{+\infty})$$

e

$$B(v^{+\infty}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(v^{+\infty}) = \{wv^{+\infty} : w \in W_n \text{ e } n \in \mathbb{N}\}.$$

### 3.3 O espaço das sequências bilaterais $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$

Vamos agora considerar um espaço de sequências “um pouco maior” do que o anterior. Mais precisamente, vamos considerar o espaço das sequências bilaterais de 0’s e 1’s dado por

$$\{0, 1\}^{\mathbb{Z}} = \{(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots) : x_j \in \{0, 1\} \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}\}.$$

Um elemento típico desse espaço é, por exemplo,

$$(\dots, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

ou, então, simplesmente

$$\dots 000100100100 \dots$$

Porém o que está escrito acima tem uma grande ambiguidade: qual dos elementos está na posição zero da sequência? Isto é, quem é o “ $x_0$ ” dessa sequência? Para evitar esse problema, identificaremos essa posição colocando uma barra sobre o elemento que lá se encontra, como abaixo

$$\dots 00010\bar{0}100100 \dots$$

Em particular, esse elemento não é o mesmo que

$$\dots 000100\bar{1}00100 \dots$$

apesar de todas as entradas das duas seqüências serem iguais.

De forma similar ao que fizemos com o espaço das seqüências unilaterais, podemos definir uma distância em  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  da seguinte forma. Consideremos  $M : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{N}$  dado por

$$M(x, y) = \min\{|k| : k \in \mathbb{Z} \text{ e } x_k \neq y_k\}.$$

Ou seja,  $M(x, y)$  nos diz qual é a primeira coordenada, à esquerda ou à direita da posição 0, em que as seqüências  $x$  e  $y$  diferem. Por exemplo,

$$M(\dots 1101\bar{0}01001 \dots, \dots 1001\bar{0}01001 \dots) = 3.$$

É fácil ver que  $M(x, y) = M(y, x)$  e  $M(x, y) = +\infty$  se, e somente se,  $x = y$ . Usando essa noção, podemos definir nossa distância em  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  como

$$d(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{M(x, y)}.$$

**Exercício 3.9.** Procedendo como na Seção 3.1.1, mostre que  $d$  é de fato uma distância em  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ .

Novamente, para aqueles alunos com algum conhecimento de topologia geral e espaços métricos, deixamos o seguinte exercício.

**Exercício 3.10.** Mostre que valem conclusões análogas as dos Exercícios 3.1, 3.3 e 3.4 para o espaço  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ .

Para finalizar esta seção, introduziremos a seguinte notação que será utilizada posteriormente. Dado um bloco de símbolos  $B$ ,

- $(B)^{+\infty}$  significa que o bloco  $B$  é repetido infinitamente para a direita;
- $(B)^{-\infty}$  significa que o bloco  $B$  é repetido infinitamente para a esquerda e
- $(B)^{\infty}$  significa que o bloco  $B$  é repetido infinitamente para a esquerda e para a direita.

### 3.4 O *shift* bilateral

Consideremos agora o sistema dinâmico  $f : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  dado por

$$f(\dots, x_{-2}, x_{-1}, \bar{x}_0, x_1, x_2, \dots) = (\dots, x_{-1}, x_0, \bar{x}_1, x_2, \dots).$$

Isto é,  $f(x)$  é obtido a partir de  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  movendo cada coordenada da seqüência original uma “casa” para a esquerda. Essa transformação é conhecida como *shift bilateral* ou simplesmente *shift*, assim como no caso unilateral.

À primeira vista, pode parecer que acabamos de definir uma dinâmica idêntica a anterior, mas isso não passa de uma ilusão... Uma propriedade importante que diferencia esses dois sistemas é que o *shift* bilateral  $f$  possui uma função inversa. De fato, não é difícil ver que  $f^{-1}: \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  dada por

$$f^{-1}(\dots, x_{-2}, x_{-1}, \overline{x_0}, x_1, x_2, \dots) = (\dots, x_{-2}, \overline{x_{-1}}, x_0, x_1, x_2, \dots)$$

é de fato a função inversa de  $f$ . Isto é,  $f^{-1}(x)$  é obtida movendo cada coordenada da sequência original uma “casa” para a *direita*. Por outro lado, vimos na Seção 3.2 que o *shift* unilateral não é injetivo.

### 3.4.1 Algumas propriedades do *shift* bilateral

Na seção anterior vimos que, apesar das definições do *shift* unilateral e bilateral serem parecidas, essas transformações possuem propriedades importantes que as diferenciam. Porém, elas compartilham algumas propriedades como veremos no exercício abaixo, que pode ser resolvido fazendo adaptações simples às ideias apresentadas no caso do *shift* unilateral.

**Exercício 3.11.** Seja  $f: \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  o *shift* bilateral. Mostre que

- $f$  e  $f^{-1}$  são transformações contínuas. Em particular,  $f$  é um homeomorfismo;
- $\overline{\text{Per}(f)} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . Isto é, o conjunto dos pontos periódicos de  $f$  é denso em  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . Além disso, dado  $n \in \mathbb{N}$ , quantos são os pontos fixos de  $f^n$  e quantos são os pontos periódicos de período  $n$  de  $f$ ?
- $f$  é transitiva;
- $f$  é topologicamente *mixing*;
- $f$  é expansiva;
- $f$  é caótica;
- $h_{\text{top}}(f) = \log 2$ ;
- $f$  tem a propriedade do sombreadimento para pseudo-órbitas bilaterais (veja Seções 1.18 e 1.19).

### 3.4.2 Conjuntos estáveis e instáveis

Nosso objetivo agora é caracterizar os conjuntos estáveis e instáveis de  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  com relação a  $f$  dados por

$$W_f^s(x) = \left\{ y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}$$

e

$$W_f^u(x) = \left\{ y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\},$$

respectivamente (veja Seção 1.13). Começemos com o conjunto estável. Observemos inicialmente que dado  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f^n(\dots, x_{-2}, x_{-1}, \overline{x_0}, x_1, x_2, \dots) = (\dots, x_{n-2}, x_{n-1}, \overline{x_n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots).$$

Por outro lado,  $d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  se, e somente se, à medida que  $n$  cresce as entradas de  $f^n(x)$  e  $f^n(y)$  coincidem num bloco central cada vez maior. Aqui o termo “bloco central” refere-se ao conjunto de entradas simétrico com relação à posição 0 de um dado ponto. Por exemplo,  $(x_{-2}, x_{-1}, \overline{x_0}, x_1, x_2)$  é o bloco central de tamanho 2 de  $(\dots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, \overline{x_0}, x_1, x_2, x_3, \dots)$ . Logo, combinando essas duas observações, concluímos que  $y \in W_f^s(x)$  se, e somente se, existe  $n_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $x_n = y_n$  para todo  $n \geq n_0$ . Isto é, se, e somente se, a partir de uma certa coordenada, todas as coordenadas de  $x$  e  $y$  à esquerda devem coincidir. Portanto

$$\begin{aligned} W_f^s(x) &= \left\{ y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : x_n = y_n \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ e algum } n_0 \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

De forma análoga, não é difícil ver que

$$\begin{aligned} W_f^u(x) &= \left\{ y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : x_n = y_n \text{ para todo } n \leq n_1 \text{ e algum } n_1 \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

**Exercício 3.12.** Seja  $f : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  o *shift* bilateral. Dados  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  e  $\varepsilon > 0$ , caracterize os conjuntos estáveis e instáveis locais de tamanho  $\varepsilon$  de  $x$  com relação a  $f$ . Isto é, caracterize os conjuntos  $W_{f,\varepsilon}^s(x)$  e  $W_{f,\varepsilon}^u(x)$  (veja Seção 1.13 para relembrar a definição).

**Exercício 3.13.** Sejam  $f : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  o *shift* bilateral,  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  e  $\varepsilon > 0$ . Utilizando as caracterizações dadas acima, observe que

$$W_{f,\varepsilon}^s(x) \subset W_f^s(x) \text{ e } W_{f,\varepsilon}^u(x) \subset W_f^u(x).$$

Além disso, mostre que

$$W_f^s(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(W_{f,\varepsilon}^s(f^n(x))) \text{ e } W_f^u(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(W_{f,\varepsilon}^u(f^{-n}(x))).$$

### 3.4.3 Pontos de interseção homoclínica e heteroclínica

Consideremos agora a seguinte situação: dado um ponto  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , queremos determinar os pontos  $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  tais que  $d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0$  à medida que  $n \rightarrow +\infty$  e também quando  $n \rightarrow -\infty$ . A partir da definição, é claro que um ponto  $y$  satisfaz tal propriedade se, e somente se,  $y \in W_f^s(x) \cap W_f^u(x)$ . Agora segue das caracterizações dadas na seção anterior que um ponto  $y \in W_f^s(x) \cap W_f^u(x)$  é um ponto tal que todas as suas coordenadas coincidam com as coordenadas de  $x$  exceto possivelmente um número finito delas. Podemos representar esse fato da seguinte forma

$$W_f^s(x) \cap W_f^u(x) = \left\{ y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : x_n = y_n \forall n \geq n_0 \text{ e } n \leq n_1 \text{ e algum } n_0, n_1 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Um ponto contido nesta interseção é dito um ponto de *interseção homoclínica*. De forma análoga, dados dois pontos  $x, z \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , não é difícil ver que os pontos  $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  tais que  $d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  e  $d(f^n(z), f^n(y)) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$  são exatamente os pontos da interseção

$$W_f^s(x) \cap W_f^u(z) = \left\{ y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : x_n = y_n \forall n \geq n_0 \text{ e } z_k = y_k \forall k \leq n_1 \right. \\ \left. \text{e algum } n_0, n_1 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Um ponto contido nessa interseção é dito um ponto de *interseção heteroclínica*. De maneira informal, um ponto  $y \in W_f^s(x) \cap W_f^u(z)$  pode ser visto como um ponto que “conecta” as órbitas de  $x$  e  $z$ .

Os pontos de interseção homoclínica assim como os pontos de interseção heteroclínica têm diversas propriedades interessantes e desempenham papel fundamental em diversas questões de dinâmica. Por exemplo, em determinadas situações, é possível mostrar que a existência de pontos homoclínicos implica na existência de uma certa estrutura geométrica dita hiperbólica (estrutura que exploraremos um pouco no Capítulo 6) e essa existência por sua vez tem implicações dinâmicas bastante interessantes. Por fugir do escopo destas notas, não exploraremos tais propriedades. Porém, para o leitor interessado, sugerimos, por exemplo, Katok e Hasselblatt (1995, Proposition 6.5.5).

## 3.5 Subshifts de tipo finito

Nesta seção, consideraremos a restrição da aplicação *shift* a certos subconjuntos invariantes do espaço de sequências  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Esses subconjuntos serão definidos por meio de regras que nos dizem qual símbolo pode vir depois do 0 e qual pode vir depois do 1; em geral, nem todas as transições serão possíveis.

Consideremos uma matriz quadrada

$$B = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix}$$

cujos coeficientes  $b_{ij}$  são todos iguais a 0 ou 1 e de forma que nenhuma linha seja identicamente nula, ou seja, para todo  $i$  existe  $j$  tal que  $b_{ij} = 1$ . Uma matriz com essas propriedades é dita *matriz de transição*. Consideremos agora o subconjunto  $X_B$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  que consiste de todas as seqüências  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que são *B-admissíveis*. Isto é, seqüências para as quais

$$b_{x_n x_{n+1}} = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, o bloco  $x_n x_{n+1}$  pode aparecer numa seqüência de  $X_B$  se, e somente se,  $b_{x_n x_{n+1}} = 1$ . Por exemplo, se

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

então a seqüência

$$11110101(01)^{+\infty}$$

está em  $X_B$ , pois, como os coeficientes  $b_{01}$  e  $b_{10}$  e  $b_{11}$  são iguais a 1, temos que blocos da forma 01, 10 e 11 podem aparecer em seqüências de  $X_B$  e, além disso, nossa seqüência é toda composta por blocos dessa forma. Por outro lado, a seqüência

$$1111000(01)^{+\infty}$$

não está em  $X_B$ , pois, como  $b_{00} = 0$ , blocos da forma 00 não podem aparecer em seqüências de  $X_B$ . Quando  $b_{ij} = 1$ , diremos que a transição do símbolo  $i$  para o símbolo  $j$  é permitida em seqüências de  $X_B$ ; quando  $b_{ij} = 0$ , diremos tal transição não é permitida.

Consideremos agora o *shift* unilateral  $f: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

**Lema 3.5.** (a) o conjunto  $X_B$  é invariante para o futuro por  $f$ . Isto é,  $f(X_B) \subset X_B$ .

(b)  $X_B$  é um subconjunto fechado de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Em particular,  $(X_B, d)$  é um espaço métrico compacto.

*Demonstração.* Começemos provando a afirmação (a). Se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_B$ , então transições do símbolo  $x_n$  para o símbolo  $x_{n+1}$  são permitidas por  $B$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Agora, como

$$f((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_1, x_2, x_3 \dots),$$

as transições entre os símbolos não mudaram, em particular, todas elas são admissíveis segundo  $B$ . Portanto,  $f((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in X_B$  e  $f(X_B) \subset X_B$ .

Quanto ao item (b), o fato de que  $X_B$  é fechado pode ser demonstrado facilmente usando cilindros. Deixamos essa demonstração a cargo do leitor. Agora é um fato clássico que todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto também é compacto, veja Lima (1977). Portanto segue, das observações anteriores combinadas com o Exercício 3.1, que  $(X_B, d)$  é de fato um espaço métrico compacto.  $\square$

**Exercício 3.14.** Mostre que se assumirmos ainda que toda coluna de  $B$  tem um elemento igual a 1, então  $f(X_B) = X_B$ .

Tendo em vista o lema anterior, podemos considerar a restrição de  $f$  a  $X_B$  dada por

$$f_B = f|_{X_B}: X_B \rightarrow X_B.$$

Essa aplicação é, então, dita um *subshift de tipo finito* determinado pela matriz  $B$ . Algumas vezes esse tipo de sistema também é chamado de uma *cadeia de Markov topológica*. O *shift* unilateral estudado na Seção 3.2 é obviamente um *subshift* de tipo finito com matriz de transição

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Subshift* de tipo finito aparecem de maneira fundamental no estudo de sistemas com algum tipo de hiperbolicidade, como veremos no Capítulo 6. Por exemplo, dada uma dinâmica com tais propriedades, é possível mostrar que existe um *subshift* de tipo finito que é conjugado ou semiconjugado à dinâmica original. Consequentemente diversas propriedades do *subshift* de tipo finito podem ser traduzidas para a dinâmica original, que em muitos casos é bem mais complicada de entender. Na sequência, veremos algumas propriedades desses novos objetos.

No que segue, denotaremos por  $B^k$  o produto da matriz  $B$  por ela mesma  $k$  vezes (veja Apêndice B). Além disso, representaremos tal matriz como

$$B^k = \begin{pmatrix} b_{00}^k & b_{01}^k \\ b_{10}^k & b_{11}^k \end{pmatrix}.$$

Observemos que nessa notação  $b_{ij}^k$  não significa que o coeficiente  $b_{ij}$  da matriz  $B$  está elevado na potência  $k$ ;  $b_{ij}^k$  significa o coeficiente da matriz  $B^k$  que está na posição  $ij$ . Mais ainda, diremos que uma palavra  $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}) \in W_n$  é *admissível* se a transição de  $w_j$  para  $w_{j+1}$  é admissível para todo  $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ .

### 3.5.1 Pontos fixos de $f_B^n$

Nosso objetivo agora é, dado  $n \in \mathbb{N}$ , calcular quantos são os pontos fixos de  $f_B^n$ . Começemos com o seguinte resultado auxiliar.

**Lema 3.6.** *Dados  $i, j \in \{0, 1\}$  e  $k \in \mathbb{N}$ , supomos que  $b_{ij}^k = p$ . Então existem exatamente  $p$  palavras admissíveis de comprimento  $k+1$  começando em  $i$  e terminando em  $j$ . Isto é, palavras admissíveis da forma  $(i, w_1, w_2, \dots, w_{k-1}, j)$ . Em particular,  $b_{ij}^k > 0$  para algum  $k \in \mathbb{N}$  significa que existe uma palavra admissível conectando  $i$  a  $j$ .*

*Demonstração.* A prova será por indução. Denotemos por  $N(k, i, j)$  o número palavras de comprimento  $k+1$  começando em  $i$  e terminando em  $j$ . Para  $k=1$ , obviamente  $N(1, i, j) = b_{ij}$ . Supomos, então, que a afirmação é válida para  $k$  e mostremos que vale também para  $k+1$ .

Observemos inicialmente que

$$N(k+1, i, j) = N(k, i, 0)b_{0j} + N(k, i, 1)b_{1j}.$$

De fato, adicionando  $j$  a sua direita, cada palavra de comprimento  $k+1$  conectando  $i$  a 0 produz exatamente uma palavra admissível de comprimento  $k+2$  conectando  $i$  a  $j$  se, e somente se,  $b_{0j} = 1$ . Da mesma forma, adicionando  $j$  a sua direita, cada palavra de comprimento  $k+1$  conectando  $i$  a 1 produz exatamente uma palavra admissível de comprimento  $k+2$  conectando  $i$  a  $j$  se, e somente se,  $b_{1j} = 1$ . Portanto, como essas são as únicas formas de produzir uma palavra admissível de comprimento  $k+2$  conectando  $i$  a  $j$ , segue nossa afirmação. Consequentemente, como por hipótese de indução temos que  $N(k, i, 0) = b_{i,0}^k$  e  $N(k, i, 1) = b_{i,1}^k$ , segue que

$$N(k+1, i, j) = b_{i,0}^k b_{0j} + b_{i,1}^k b_{1j}.$$

Agora, como  $b_{ij}^{k+1} = b_{i,0}^k b_{0j} + b_{i,1}^k b_{1j}$  (basta fazer a multiplicação das matrizes  $B^k$  e  $B$ ), segue que  $N(k+1, i, j) = b_{ij}^{k+1}$ . Portanto, por indução, temos que  $N(k, i, j) = b_{ij}^k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , concluindo a demonstração.  $\square$

Utilizando esse lema fica fácil contar os pontos fixos de  $f_B^n$ . Para tanto, lembremos que o traço de uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$$

é dado pela soma dos elementos da diagonal principal. Ou seja,  $a_{00} + a_{11}$ .

**Proposição 3.7.** *O número de pontos fixos de  $f_B^n$  é igual ao traço da matriz  $B^n$ .*

*Demonstração.* Observemos que todos os pontos fixos de  $f_B^n$  são da forma

$$(w_0, w_1, \dots, w_{n-1})^{+\infty} = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, w_0, w_1, \dots).$$

Agora, essa concatenação pode ser feita se, e somente se, a palavra

$$(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, w_0)$$

for admissível. Portanto o número de pontos fixos de  $f_B^n$  é exatamente igual ao número de palavras admissíveis de comprimento  $n+1$  começando e terminando no mesmo símbolo e, utilizando o lema anterior, esse número é exatamente a soma de  $b_{00}^n$  e  $b_{11}^n$ . Ou seja, o traço de  $B^n$ . Isto conclui a demonstração.  $\square$

### 3.5.2 Transitividade e *mixing* topológico

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados que relacionam as propriedades de transitividade e *mixing* topológico de um *subshift* de tipo finito com propriedades da sua matriz de transição. Para tanto, comecemos com algumas definições.



Uma matriz de transição  $B$  é dita *irredutível* se para todo par  $i, j \in \{0, 1\}$  existe  $k \in \mathbb{N}$ , que pode depender de  $i$  e  $j$ , de forma que  $b_{ij}^k > 0$  (lembre-se do que esse símbolo significa). Ou seja, existe uma palavra admissível de tamanho  $k + 1$  que vai de  $i$  para  $j$  (veja Lema 3.6). Dizemos que a matriz de transição  $B$  é *positiva* se  $b_{ij} > 0$  para todo  $i$  e  $j$  e *eventualmente positiva* se existe  $k \in \mathbb{N}$ , independente de  $i$  e  $j$ , de forma que  $b_{ij}^k > 0$  para todo  $i$  e  $j$ . Em particular, matrizes positivas e eventualmente positivas são obviamente irredutíveis.

**Exemplo 3.1.** A matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

não é irredutível visto que  $B^k = B$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e, por exemplo,  $b_{01}^k = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Da mesma forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

também não são irredutíveis (verifique). Por sua vez a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é positiva e, consequentemente, eventualmente positiva e irredutível. Para dar um exemplo de matriz irredutível que não é positiva recorreremos a dimensão maior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é irredutível, porém, não é positiva.

Começemos com o seguinte resultado auxiliar.

**Lema 3.8.** Se a matriz de transição  $B$  é irredutível e  $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}) \in W_n$  é uma palavra admissível, então

$$[w]_B := [w] \cap X_B \neq \emptyset$$

em que  $[w]$  é o cilindro determinado por  $w$ . Além disso, existe um ponto periódico em  $[w]_B$ .

*Demonstração.* Como  $B$  é irredutível, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $b_{w_{n-1}w_0}^k > 0$ . Nesse caso, segue do Lema 3.6 que, existe uma palavra admissível

$$(w_{n-1}, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, w_0)$$

de comprimento  $k + 1$  começando em  $w_{n-1}$  e terminando em  $w_0$ . Consideremos, então, o ponto

$$(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, w_0, \dots).$$

De acordo com a escolha das palavras, esse ponto está em  $X_B$  e em  $[w]$  e, além disso, é fixo para  $f_B^{n+k-1}$ . Isto conclui a demonstração.  $\square$

Observemos que as bolas abertas de  $(X_B, d)$  são exatamente os conjuntos da forma  $[w]_B$ . Isso segue direto do fato que os cilindros são exatamente as bolas abertas de  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$  (veja Seção 3.1.2) e que as bolas abertas de qualquer espaço métrico  $(X, d)$  contido em  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$  são dadas pela interseção de  $X$  com as bolas abertas de  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ . Combinando, então, essa observação com o Lema 3.8 obtemos que toda bola aberta de  $(X_B, d)$  contém um ponto periódico. Isto nos permite concluir o seguinte.

**Corolário 3.9.** *Se a matriz de transição  $B$  for irredutível, então o conjunto de pontos periódicos de  $f_B$  é denso em  $X_B$ . Isto é,  $\overline{\text{Per}(f_B)} = X_B$ .*

A irredutibilidade da matriz de transição também é suficiente para garantir que o *sub-shift* de tipo finito associado é transitivo.

**Proposição 3.10.** *Se a matriz de transição  $B$  é irredutível, então  $f_B: X_B \rightarrow X_B$  é transitiva.*

*Demonstração.* Para mostrar que  $f_B$  é transitiva, utilizaremos a Proposição 1.6. Ou seja, mostraremos que, para todo par de subconjuntos abertos  $U$  e  $V$  de  $X_B$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f_B^n(U) \cap V \neq \emptyset$ . Agora, como as bolas abertas de  $(X_B, d)$  são cilindros da forma  $[w]_B$  (veja observação posterior ao Lema 3.8), basta mostrarmos a afirmação anterior para conjuntos da forma  $U = [u]_B$  e  $V = [v]_B$  (justifique esse passo).

Dadas palavras admissíveis  $u = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$  e  $v = (v_0, v_1, \dots, v_{m-1})$ , consideremos os cilindros  $[u]_B$  e  $[v]_B$ . Como  $B$  é irredutível, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $b_{u_{n-1}v_0}^k > 0$ . Nesse caso, segue do Lema 3.6 que, existe uma palavra admissível

$$(u_{n-1}, w_1, w_2, \dots, w_{k-1}, v_0)$$

de comprimento  $k + 1$  começando em  $u_{n-1}$  e terminando em  $v_0$ . Tome agora um elemento  $x \in [v]_B$  cuja existência também é garantida pelo Lema 3.8. Então  $x$  é da forma

$$x = (v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \dots).$$

Consideremos, então, a seqüência

$$y = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, w_1, w_2, \dots, w_{k-1}, v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \dots).$$

Das observações anteriores, segue que tal seqüência é admissível, ou seja,  $y \in X_B$ . Além disso, é fácil ver que  $y \in [u]_B$  e  $f_B^{n+k-1}(y) \in [v]_B$ . Consequentemente  $f_B^{n+k-1}([u]_B) \cap [v]_B \neq \emptyset$ . De acordo com as observações iniciais, isto mostra que  $f_B$  é transitiva.  $\square$

Uma adaptação simples da prova anterior nos permite concluir o seguinte.

**Proposição 3.11.** *Se a matriz de transição  $B$  é eventualmente positiva, então  $f_B: X_B \rightarrow X_B$  é topologicamente mixing.*

*Demonstração.* Conforme já mencionado, a prova desse fato pode ser obtida fazendo pequenas adaptações à prova da Proposição 3.10. Deixamos, portanto, como exercício para o leitor.  $\square$

**Exercício 3.15.** Verifique que a recíproca das Proposições 3.10 e 3.11 também são verdadeiras. Em particular, irreduzibilidade e positividade eventual da matriz de transição caracterizam completamente transitividade e *mixing* topológico respectivamente de *subshifts* de tipo finito.

**Exercício 3.16.** Mostre que a entropia topológica do *subshift* de tipo finito  $f_B: X_B \rightarrow X_B$  é dada por

$$h_{\text{top}}(f_B) = \log |\lambda_{\max}|$$

em que  $\lambda_{\max}$  é autovalor da matriz de transição  $B$  com maior módulo. Dica: adapte a prova feita na Seção 3.2.6. Caso tenha dificuldades, verifique a referência Katok e Hasselblatt (1995, Section 3.2 d).

**Exercício 3.17.** A noção de *subshift* de tipo finito também pode ser definida para sequências bilaterais  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . Apresente uma tal definição e verifique que as construções e resultados anteriores continuam válidas nesse novo contexto.

## 3.6 Autômatos celulares

As dinâmicas dos *shifts* unilateral e bilateral e dos *subshifts* de tipo finito apresentadas acima obviamente não são as únicas definidas no espaço de sequências. No que resta deste capítulo, apresentaremos outra dinâmica, ou melhor, outra família de dinâmicas neste espaço conhecida como *autômatos celulares* e veremos, por exemplo, que o *shift* nada mais é do que um caso particular dessa família. Vamos nos restringir ao caso do espaço de sequências bilaterais. Construção análoga pode ser feita também para o caso unilateral. Para simplificar ainda mais a exposição, vamos nos ater a um caso particular para definir transformações que são exemplos desse tipo de dinâmica.

Em primeiro lugar, precisamos de dois números naturais  $E$  e  $D$  ( $E$  de “esquerda” e  $D$  de “direita” como veremos abaixo). Depois precisamos de uma transformação

$$g: \{0, 1\}^{E+D+1} \rightarrow \{0, 1\}.$$

Ou seja,  $g$  é uma transformação que leva um bloco com  $E + D + 1$  símbolos num único símbolo 0 ou 1. Definimos, então, nosso autômato celular  $f: \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  da

seguinte forma: dado  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , o ponto  $f(x) \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  é definido como a seqüência cuja  $i$ -ésima coordenada é dada por

$$(f(x))_i = g(x_{i-E}, x_{i-E+1}, \dots, x_i, \dots, x_{i+D-1}, x_{i+D}).$$

Isto é, a  $i$ -ésima coordenada de  $f(x)$  é obtida aplicando  $g$  no bloco centrado na coordenada  $i$  de  $x$ , de comprimento  $E$  para a esquerda e  $D$  para a direita. Muito misterioso? Vamos observar alguns exemplos.

**Exemplo 3.2.** Consideremos  $E = 0, D = 1$  e  $g: \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  como sendo  $g(x, y) = y$ . Então, como  $g(x_i, x_{i+1}) = x_{i+1}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , não é difícil ver

$$f(\dots x_{-2}x_{-1}\overline{x_0}x_1x_2x_3\dots) = \dots x_{-1}x_0\overline{x_1}x_2x_3\dots,$$

ou seja, a dinâmica de  $f$  é exatamente a do *shift* bilateral. Logo, o *shift* é um caso particular de autômato celular conforme afirmado anteriormente.

**Exemplo 3.3.** Consideremos  $E = 1, D = 0$  e  $g: \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  como sendo  $g(x, y) = x$ . Portanto, como  $g(x_{i-1}, x_i) = x_{i-1}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , não é difícil ver que

$$f(\dots x_{-2}x_{-1}\overline{x_0}x_1x_2x_3\dots) = \dots x_{-2}\overline{x_{-1}}x_0x_1\dots,$$

ou seja, a dinâmica de  $f$  é exatamente a da inversa do *shift* bilateral.

Sendo o *shift* um caso particular de autômato celular, segue diretamente dos resultados das seções anteriores que existem exemplos desse tipo de transformação que, por exemplo, são injetivos, transitivos e topologicamente *mixing*. Porém essas propriedades não necessariamente valem para todos autômatos celulares. De fato, veremos na seqüência exemplos com comportamentos bem distintos.

**Exemplo 3.4.** Consideremos  $E = D = 1$  e  $g: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$  a função dada por

$$g(000) = g(001) = g(010) = g(100) = 0$$

e

$$g(011) = g(101) = g(110) = g(111) = 1.$$

Esta função  $g$  é por vezes chamada de *função maioria*: seu valor é o valor assumido pela maioria dos pontos em seu argumento; se a maioria é de zeros, então  $g$  se anula e se a maioria é de uns, então  $g$  é um.

Observemos inicialmente que os pontos  $0^\infty$  e  $1^\infty$  são fixos para este autômato celular  $f$ . Mais ainda, o leitor pode facilmente se convencer de que

$$\dots 0000000 1111111 \dots = 0^{-\infty}1^{+\infty}$$

também é um ponto fixo para  $f$ , assim como  $1^{-\infty}0^{+\infty}$ . Agora, nesses exemplos, em nenhum momento dissemos quem é a coordenada zero do ponto, pois não nos preocupamos em colocar uma barra sobre nenhum dos símbolos. Dessa forma, podemos escolher

qualquer coordenada para ser a origem obtendo ainda pontos fixos para  $f$  (o leitor pode facilmente verificar esse fato). Isto nos mostra que a transformação  $f$  tem uma infinidade de pontos fixos, diferentemente do *shift* que tinha apenas 2.

Também não é difícil ver que os pontos da forma

$$1^{-\infty}01^{+\infty},$$

em que o 0 pode estar em qualquer coordenada, têm como imagem o mesmo ponto,  $1^\infty$ . Isto nos mostra que  $f$  não é injetiva e um ponto como  $1^\infty$  tem uma infinidade de pré-imagens, algo que novamente não acontecia no caso do *shift*.

Entre outras coisas, o exemplo acima nos mostra que, em geral, não é possível esperar injetividade de um autômato celular.

**Exemplo 3.5.** Consideremos  $E = 1$ ,  $D = 1$  e  $g: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$  definida como

$$g(111) = 1 \quad \text{e} \quad g = 0 \text{ nos outros casos.}$$

Seja  $f$  o autômato celular associado. Novamente não é difícil verificar que  $0^\infty$  e  $1^\infty$  são pontos fixos de  $f$ . Além disso, essa transformação também não é injetiva, pois, por exemplo,  $f((01)^\infty) = 0^\infty$  sendo que mais uma vez tanto o 0 quanto o 1 podem estar na posição 0. Em particular, pelo menos dois pontos são levados em  $0^\infty$ , porém, existem mais pontos com essa propriedade. Deixamos a cargo do leitor explicitar mais alguns. Na sequência vamos detalhar um pouco mais a dinâmica desse exemplo.

Começemos observando que, de fato,  $0^\infty$ ,  $1^\infty$  são os *únicos* pontos fixos de  $f$ . Com efeito, se  $x$  é um ponto fixo de  $f$ , então  $g(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = x_i$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Então, se  $x_i = 1$  para algum  $i \in \mathbb{Z}$ , a única possibilidade é que  $x_{i-1} = x_{i+1} = 1$ ; repetindo esse procedimento coordenada a coordenada concluímos que  $x_i = 1$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$  e, portanto,  $x = 1^\infty$ ; a outra possibilidade é que  $x_i = 0$  para algum  $i \in \mathbb{Z}$ . Nesse caso, se algum  $x_k = 1$  para algum  $k \neq i$  podemos repetir o procedimento anterior para concluir que  $x_j = 1$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$  contradizendo o fato que  $x_i = 0$ . Portanto, se  $x_i = 0$  para algum  $i \in \mathbb{Z}$ , temos obrigatoriamente que  $x_j = 0$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$  e, assim, o ponto fixo é  $0^\infty$ . Isto prova nossa afirmação inicial.

Outra propriedade de  $f$  é a seguinte:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = \begin{cases} 1^\infty, & \text{se } x = 1^\infty; \\ 0^\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em particular,

$$\omega(x) = 1^\infty \text{ se } x = 1^\infty \text{ e } \omega(x) = 0^\infty, \text{ caso contrário.} \quad (3.4)$$

De fato, se  $x = 1^\infty$ , que é ponto fixo de  $f$ , não há nada a ser provado. Supomos, então, que alguma coordenada de  $x$ , digamos  $x_i$ , tem um símbolo 0. Então, tendo em vista a definição de  $g$ , podemos garantir que, na imagem, ao menos as coordenadas  $i - 1, i$  e

$i + 1$  terão símbolo 0. No segundo iterado, ao menos as coordenadas  $i - 2, i - 1, i, i + 1$  e  $i + 2$  terão símbolos 0; repetindo esse processo obtemos que, após o  $n$ -ésimo iterado, ao menos as coordenadas  $i - n, \dots, i + n$  serão 0. Dessa forma, concluímos que  $f^n(x)$  se aproxima de  $0^\infty$  à medida que  $n \rightarrow +\infty$ , conforme afirmado.

Para finalizar, observemos que a propriedade (3.4) nos permite concluir que  $f$  não tem órbita densa e, em particular, não é transitiva. Além disso, tendo em vista o Corolário 1.7,  $f$  também não é topologicamente *mixing*.

No próximo exemplo, veremos que a sobrejetividade também não é uma propriedade geral dos autômatos celulares.

**Exemplo 3.6.** Consideremos  $E = 0, D = 2$  e  $g: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$  definida como

$$g(111) = 1 \quad \text{e} \quad g = 0 \text{ nos outros casos.}$$

Em particular, a função  $g$  desse exemplo é a mesma do exemplo anterior; a diferença está na escolha do  $E$  e do  $D$ . Essa diferença, pequena à primeira vista, tem grandes consequências. Por exemplo, não é difícil ver que  $0^\infty$  e  $1^\infty$  são pontos fixos do autômato celular  $f$  associado e também são fixos os pontos da forma  $0^{-\infty}1^{+\infty}$ , em que qualquer um dos símbolos pode estar na posição 0. Em particular,  $f$  possui infinitos pontos fixos, ao contrário do que tínhamos no exemplo anterior.  $f$  também não é injetiva, pois  $f((01)^\infty) = 0^\infty$  entendendo aqui que em  $(01)^\infty$ , tanto o 0 quanto o 1 podem estar na posição 0. Observemos agora que  $f$  não é sobrejetiva. De fato, vamos mostrar que os pontos da forma

$$1^{-\infty}01^{+\infty} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$$

não tem nenhuma pré-imagem (mais uma vez esse argumento é independente do símbolo que está na posição 0). Fixemos o bloco 101. Para produzir o 1 mais à esquerda do bloco devemos, obrigatoriamente, ter um bloco do tipo 111. Para gerar o 0, teremos que continuar o bloco como 1110. Por fim, a continuação do bloco será 1110\* para algum  $* \in \{0, 1\}$ . Porém  $g(10*) = 0$  independente do valor assumido por  $*$ , o que mostra que o 1 da direita do bloco inicial não pode ser criado a partir bloco anterior. Consequentemente os pontos da forma  $1^{-\infty}01^{+\infty}$  de fato não estão na imagem do autômato celular  $f$  acima definido.

Para que o leitor se familiarize ainda mais com este tipo de dinâmica, deixamos o seguinte exercício.

**Exercício 3.18.** Nos itens abaixo, explore algumas propriedades dinâmicas do autômato celular associado a  $D, E$  e  $g$  assim como fizemos nos exemplos anteriores.

(a)  $E = 0, D = 1$  e  $g: \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  dada por  $g(x, y) = (x + y) \bmod 2$ ;

(b)  $E = 1, D = 1$  e  $g: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$  dada por  $g(x, y, z) = (x + z) \bmod 2$ .

### 3.6.1 Autômatos celulares são contínuos

Nos exemplos da seção anterior, vimos que diversas propriedades de um autômato celular dependem da escolha de  $E$ ,  $D$  e  $g$ . Nesta seção, veremos que a continuidade não é uma delas.

**Proposição 3.12.** *Seja  $f : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  um autômato celular. Então  $f$  é uma transformação (uniformemente) contínua.*

*Demonstração.* Supomos que o autômato celular é gerado pelos números  $E$  e  $D$  e pela função  $g : \{0, 1\}^{E+D+1} \rightarrow \{0, 1\}$ . Tudo que temos que fazer é mostrar que, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $d(x, y) \leq \delta$  então  $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$ .

Assim como no caso do *shift*, consideraremos inicialmente o caso em que  $\epsilon = \frac{1}{2^N}$  para algum  $N \in \mathbb{N}$ . Fixemos  $\delta = \frac{1}{2^{N+M}}$ , sendo  $M$  o máximo entre  $D$  e  $E$ . Agora, da definição de  $d$  segue que para que  $d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2^N}$ , precisamos que as coordenadas  $(f(x))_i$  e  $(f(y))_i$  de  $f(x)$  e  $f(y)$  respectivamente sejam iguais para todo  $i \in \{-N + 1, -N + 2, \dots, N - 2, N - 1\}$ . Então, tomando  $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  tais que  $d(x, y) \leq \delta$ , temos que as coordenadas  $x_i$  e  $y_i$  de  $x$  e  $y$  respectivamente coincidem para todo  $i \in \{-N - M + 1, -N - M + 2, \dots, N + M - 1\}$ . Em particular, como  $N + M \geq N + E$  e  $N + M \geq N + D$ , temos  $x_i = y_i$  para todo  $i \in \{-E, -E + 1, \dots, D - 1, D\}$ . Logo

$$(f(x))_0 = g(x_{-E}, \dots, x_D) = g(y_{-E}, \dots, y_D) = (f(y))_0.$$

De forma análoga, podemos mostrar que  $(f(x))_i = (f(y))_i$  para todo  $i \in \{-N + 1, -N + 2, \dots, N - 2, N - 1\}$ . Combinando esse fato com a observação inicial, obtemos que  $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$  como queríamos. Ou seja, se  $d(x, y) \leq \frac{1}{2^{M+N}} = \delta$ , então  $d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2^N} = \epsilon$ .

Finalmente, no caso de um  $\epsilon > 0$  qualquer, tomando  $N \in \mathbb{N}$  suficientemente grande de forma que  $(\frac{1}{2})^N \leq \epsilon$  e  $\delta = (\frac{1}{2})^{N+M+1}$ , segue da observação anterior que se  $d(x, y) \leq \delta$ , então

$$d(f(x), f(y)) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^N \leq \epsilon$$

conforme desejado. Isto mostra que o autômato celular  $f$  é de fato uma transformação contínua.  $\square$

### 3.6.2 Comutatividade com o *shift*

Outra propriedade interessante dos autômatos celulares é que eles comutam com o *shift* bilateral como veremos abaixo.

**Proposição 3.13.** *Sejam  $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  o shift bilateral e  $f : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  um autômato celular. Então*

$$\sigma \circ f = f \circ \sigma.$$

*Demonstração.* Supomos que o autômato celular seja gerado pelos números  $E$  e  $D$  e pela função  $g: \{0, 1\}^{E+D+1} \rightarrow \{0, 1\}$ . Então, dados  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  e  $i \in \mathbb{Z}$ , a  $i$ -ésima coordenada de  $\sigma(f(x))$  é dada por

$$(\sigma(f(x)))_i = (f(x))_{i+1} = g(x_{i+1-E}, \dots, x_{i+1+D}).$$

Por outro lado, a  $i$ -ésima coordenada de  $f(\sigma(x))$  é dada por

$$(f(\sigma(x)))_i = g(\sigma(x)_{i-E}, \dots, \sigma(x)_{i+D}) = g(x_{i+1-E}, \dots, x_{i+1+D}).$$

Observando essas duas expressões, concluímos que  $(\sigma(f(x)))_i = (f(\sigma(x)))_i$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , o que corresponde a dizer que  $\sigma \circ f(x) = f \circ \sigma(x)$ . Finalmente, como  $x$  foi escolhido de forma arbitrária, segue o resultado.  $\square$

Então, combinando os resultados anteriores, concluímos que os autômatos celulares são transformações contínuas de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  que comutam com o *shift* bilateral de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . O *Teorema de Curtis–Hedlund–Lyndon*, de forma muito interessante, mostra que vale a recíproca: se uma transformação  $f: \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  é contínua e comuta com o *shift*, então  $f$  é um autômato celular! Faremos a prova desse resultado logo abaixo; o leitor curioso pode encontrar mais informações sobre esse tópico na referência Brin e Stuck (2002).

**Teorema 3.14.** *Sejam  $\sigma: \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  o shift bilateral e  $f: \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  uma transformação contínua que comuta com  $\sigma$ . Então  $f$  é um autômato celular.*

*Demonstração.* Nosso objetivo é mostrar que existem números  $E$  e  $D$  e uma função  $g: \{0, 1\}^{E+D+1} \rightarrow \{0, 1\}$  que descreve  $f$ . Para tanto, dado um ponto

$$x = (\dots, x_{-1}\overline{x_0}, x_1, x_2, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}},$$

escreveremos

$$f(x) = (\dots, f(x)_{-1}, \overline{f(x)_0}, f(x)_1, f(x)_2, \dots).$$

Como  $f$  é uma transformação contínua definida num espaço métrico compacto, temos que, na verdade,  $f$  é uniformemente contínua. Sendo assim, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $d(x, y) \leq \delta$ , então  $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$ . Fixemos  $\epsilon < \frac{1}{2}$ . Segue, então, da definição da distância  $d$ , que  $f(x)$  e  $f(y)$  coincidem na coordenada 0, isto é,  $f(x)_0 = f(y)_0$  para todo  $x$  e  $y$  satisfazendo  $d(x, y) \leq \delta$ . Agora dizer que  $d(x, y) \leq \delta$  equivale a afirmar que as coordenadas de  $x$  e  $y$  coincidem num bloco centrado em 0 e que vai de um certo  $-K$  até  $K$ , com  $K$  obviamente dependendo de  $\delta$ . Portanto o que está sendo dito de fato é que  $f(x)_0$  independe do que ocorre nas coordenadas  $x_i$  com  $|i| > K$ . Vamos, então, definir  $g: \{0, 1\}^{2K+1} \rightarrow \{0, 1\}$  como sendo

$$g(z_{-K}, z_{-K+1}, \dots, z_K) := f(\dots, 0, 0, z_{-K}, z_{-K+1}, \dots, z_{-1}, \overline{z_0}, z_1, \dots, z_K, 0, 0, \dots)_0.$$



Agora, como  $f$  comuta com  $\sigma$ , temos que

$$\begin{aligned} \left( \dots, f(\sigma(x))_{-1}, \overline{f(\sigma(x))}_0, f(\sigma(x))_1, \dots \right) &= f(\sigma(x)) \\ &= \sigma(f(x)) \\ &= \left( \dots, f(x)_0, \overline{f(x)}_1, f(x)_2, \dots \right). \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} f(x)_1 &= f(\sigma(x))_0 \\ &= f(\dots, x_{-1}, x_0, \overline{x}_1, x_2, \dots)_0 \\ &= g(x_{-K+1}, \dots, x_0, \dots, x_{K+1}). \end{aligned}$$

Repetindo o argumento utilizando que  $f(\sigma^i(x)) = \sigma^i(f(x))$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , obtemos que  $f(x)_i = g(x_{-K+i}, \dots, x_{K+i})$ . Segue, então, que  $f$  é um autômato celular gerado pela função  $g$  com  $E = D = K$  conforme afirmado.  $\square$

### 3.7 Exercícios

Nesta seção, apresentamos alguns exercícios para que o leitor possa explorar por conta própria alguns dos conceitos trabalhados ao longo do capítulo. Os exercícios marcados com asterisco são importantes, pois complementam a teoria desenvolvida até aqui.

**Exercício 3.19.** (a) Obtenha a distância entre os pontos  $00001001^{+\infty}$  e  $00011001^{+\infty}$ .

(b) Obtenha a pré-imagem por  $f: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  do cilindro  $[w_0 w_1 w_2 \dots w_n]$ .

**Exercício 3.20.** Considere o conjunto

$$\{0, 1, 2, \dots, 9\}^{\mathbb{N}} = \{(x_0, x_1, \dots) : x_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}\}.$$

Mostre que ele não é enumerável.

**Exercício 3.21.** Obtenha a distância entre os pontos  $0^{-\infty}0000\bar{1}001^{+\infty}$  e  $0^{-\infty}1000\bar{1}001^{+\infty}$  em  $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, d)$ . Lembre-se de que a barra sobre o símbolo indica a posição zero da sequência.

**Exercício 3.22.** \* Conforme mencionado anteriormente, existem diversas formas de definir uma distância em  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . Uma delas é a seguinte:

$$D(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|i|}} \delta(x_i, y_i)$$

em que  $\delta(a, a) = 0$  e  $\delta(a, b) = 1$  para todo  $a \neq b$ . Mostre que  $D$  efetivamente é uma métrica em  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ .

**Exercício 3.23.** \* Mostre que para o *shift*  $f: \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , existe um ponto  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  tal que  $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(x)$  é denso em  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , porém  $\cup_{n \in \mathbb{N}} f^n(x)$  não é. Ou seja, a órbita completa de  $x$  é densa em  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , porém a órbita futura somente não é.

**Exercício 3.24.** \* Dado  $k \in \mathbb{N}$ , consideremos o espaço das sequências

$$\{0, 1, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_0, x_1, x_2, \dots) : x_j \in \{0, 1, \dots, k-1\} \forall j \in \mathbb{N}\}.$$

- (a) Defina uma distância em  $\{0, 1, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}}$  de maneira semelhante ao que fizemos na Seção 3.1 e mostre que  $\{0, 1, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}}$  munido dessa distância tem propriedades análogas às propriedades de  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d)$ , que exploramos no início do capítulo.
- (b) Considere o *shift* unilateral  $f: \{0, 1, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}}$  definido de forma análoga ao que fizemos na Seção 3.2. Verifique que as seguintes propriedades são válidas.
  - (i)  $f$  é transformação contínua e sobrejetiva, porém não é injetiva;
  - (ii)  $\overline{\text{Per}(f)} = \{0, 1, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}}$ . Isto é, o conjunto dos pontos periódicos de  $f$  é denso em  $\{0, 1, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}}$ . Além disso, dado  $n \in \mathbb{N}$ , quantos são os pontos fixos de  $f^n$  e quantos são os pontos periódicos de período  $n$  de  $f$ ?
  - (iii)  $f$  é transitiva;
  - (iv)  $f$  é topologicamente *mixing*;
  - (v)  $f$  é expansiva;
  - (vi)  $f$  é caótica;
  - (vii)  $h_{\text{top}}(f) = \log k$ ;
  - (viii)  $f$  tem a propriedade do sombreamento.

De forma análoga, podemos também considerar o *shift* bilateral em  $\{0, 1, \dots, k-1\}^{\mathbb{Z}}$  e propriedades análogas continuam válidas.

**Exercício 3.25.** \* Procedendo como na Seção 3.5, defina a noção de *subshift* de tipo finito para sequências em  $\{0, 1, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}}$  e prove resultados análogos aos obtidos naquela seção para esses novos objetos. Salientamos que aqui a matriz de transição será uma matriz quadrada  $k \times k$  ao invés de  $2 \times 2$ .

**Exercício 3.26.** Considere os autômatos celulares definidos de forma que  $E = D = 2$ . De quantas maneiras diferentes podemos definir esse tipo de aplicação? Dica: tente contar o número de possíveis funções  $g$ .

**Exercício 3.27.** Será que todo *subshift* de tipo finito é também um autômato celular? Prove ou dê um contraexemplo.

**Exercício 3.28.** \* Sejam  $f: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  o *shift* unilateral e  $\Sigma \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  um subconjunto. Suponha ainda que  $\Sigma$  é fechado e  $f(\Sigma) \subset \Sigma$ . Podemos, então, considerar a restrição de  $f$  a  $\Sigma$  dada por

$$f|_{\Sigma}: \Sigma \rightarrow \Sigma.$$

Neste caso, dizemos que  $f|_{\Sigma}$  é um *subshift*.

Consideremos agora  $\Sigma \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  dado da seguinte forma:  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$  pertence a  $\Sigma$  se, e somente se, entre quaisquer dois símbolos 1's que aparecem em  $x$  existe uma palavra com um número par de 0's. Isto é, se  $x_i = 1 = x_k$  com  $i < k$ , então o número de  $j$ 's satisfazendo  $i < j < k$  e  $x_j = 0$  é par. Verifique que  $\Sigma$  é fechado e satisfaz  $f(\Sigma) \subset \Sigma$ . Em particular,  $f|_{\Sigma}$  é um *subshift*. Por outro lado, verifique que  $f|_{\Sigma}$  não é um *subshift* de tipo finito. Consequentemente nem todo *subshift* é um *subshift* de tipo finito. A recíproca, porém, é verdadeira tendo em vista o Lema 3.5.

# 4

## *Dinâmicas no intervalo*

---

Neste capítulo, iniciaremos nosso estudo da dinâmica de transformações definidas num intervalo de  $\mathbb{R}$  apresentando alguns exemplos e explorando algumas das suas propriedades. Começaremos apresentando algumas propriedades gerais e, por fim, analisaremos dois exemplos clássicos: a tenda e a família quadrática. Obviamente o que apresentaremos aqui é apenas uma introdução a um assunto que é supervasto e que se insere num contexto ainda mais amplo de dinâmica unidimensional. Para mais informações, sugerimos, por exemplo, Katok e Hasselblatt (1995, Part 3 Low-dimensional phenomena). Salientamos ainda que, no Capítulo 5, continuaremos nosso estudo de dinâmicas definidas num intervalo, porém, focando num exemplo específico de transformação expansora.

### 4.1 Prólogo

O leitor talvez já tenha feito o seguinte “experimento” (e se não fez, largue o livro e faça-o agora!): considere um número entre 0 e 1, insira-o em uma calculadora e aperte a tecla da raiz quadrada; aperte de novo, e de novo diversas vezes... Para qual número esse processo está convergindo? Se o leitor já fez isso (não fez? Não é possível, pare a leitura!), então sabe que o processo converge para o número 1. O que esse fato tem a ver com o tema dessas notas? Bem, para isso, vamos ver como interpretar essa brincadeira em nossa linguagem. De fato, estamos tomando um número entre 0 e 1 e extraindo sua raiz quadrada, e o resultado ainda é um número entre 0 e 1, sendo o mesmo que escolher um elemento  $x$  do conjunto  $[0, 1]$  e calcular  $f(x)$ , em que  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é dada por  $f(x) = \sqrt{x}$ .

Apertar a tecla “ $\sqrt{\phantom{x}}$ ” uma vez equivale a obter  $f(x)$ ; apertá-la a segunda vez implica em obter  $f(f(x)) = f^2(x)$  e assim sucessivamente, ou seja, estamos tentando entender a dinâmica de  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . A brincadeira com a calculadora nos autoriza a conjecturar que  $f^n(x)$  se aproxima de 1 à medida que  $n \rightarrow +\infty$ .

Como podemos provar nossa conjectura? Bem, de uma maneira ingênua, podemos achar que a conjectura já está provada uma vez que todos os exemplos feitos na calculadora mostram exatamente esse comportamento (e, nesse momento, supomos que o leitor já fez isso diversas vezes...). Mas não se esqueça: por mais exemplos que façamos, não teremos explorado nada além de um conjunto finito de condições iniciais, enquanto o intervalo da reta nos exhibe uma infinidade de possibilidades... Como ter certeza de que todas elas nos levarão ao 1?

Em primeiro lugar, devemos observar que a frase acima está incorreta; nem todas as condições iniciais nos levarão ao 1: se o leitor começou com o número 0, então, é claro, só obteve 0 ao apertar a tecla “ $\sqrt{\phantom{x}}$ ” e sua órbita obviamente não foi para 1. Isto acontece porque 0 é um ponto fixo da função  $f$ ; temos outros? Sim, o 1 também é ponto fixo e, de fato, esses são os únicos, portanto não temos mais nada com o que nos preocupar. Feita essa ressalva, queremos verificar que toda condição inicial em  $(0, 1]$  nos leva ao 1. Mais precisamente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 1 \text{ para todo } x \in (0, 1].$$

Supomos inicialmente que a sequência  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  tenha um limite, digamos  $L$ . Então, tendo em vista que  $f$  é contínua,

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(f^n(x)) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x)\right) = f(L).$$

Em conclusão, descobrimos que se  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  tem um limite, então ele necessariamente satisfaz a equação  $f(L) = L$ , ou seja, é um ponto fixo de  $f$ . Como os pontos fixos de  $f(x) = \sqrt{x}$  em  $[0, 1]$  são apenas 0 e 1, estes são os únicos possíveis candidatos a limite.

Mas o limite de fato existe? Note que se  $x \in (0, 1)$ , então sua raiz quadrada é maior do que o número original, ou seja,  $f(x) > x$ . Sendo assim, temos uma sequência crescente  $x, f(x), f^2(x), \dots$  de números reais; por outro lado, essa sequência é obviamente limitada superiormente por 1. Agora, como sequências crescentes e limitadas são sempre convergentes (veja por exemplo Lima (2009)), segue que  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  efetivamente tem um limite. Então, como já visto, tal limite tem que ser um ponto fixo de  $f$  e, consequentemente, temos apenas duas opções, 0 e 1. Portanto, como a sequência  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  é crescente e já começa com um ponto maior do que 0, o único limite que nos resta é 1 e dessa forma mostramos que, de fato, o que vemos na calculadora é um fenômeno geral. Usando então a linguagem anterior, temos que a bacia de atração de 1 é  $(0, 1]$ .

## 4.2 Comportamento na vizinhança de pontos fixos

Nesta seção, vamos tentar entender o comportamento dinâmico de uma transformação  $f: I \rightarrow I$  na vizinhança de um ponto fixo, em que  $I$  denota um intervalo *qualquer* de  $\mathbb{R}$

como, por exemplo,  $I = [0, 1]$ ,  $I = (0, 1]$  ou  $I = (0, +\infty)$ . Dividiremos nossa análise de acordo com o tamanho da derivada de  $f$  no ponto em questão. Antes disso, porém, recordemos que a palavra “vizinhança” de um ponto  $p$  significa ‘um conjunto aberto que contém  $p$ ’. Por exemplo, se  $p \in I$ , então uma vizinhança de  $p$  em  $I$  é tipicamente um intervalo da forma  $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap I$  para algum  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Lembremos ainda que uma função  $f: I \rightarrow I$  é dita de classe  $C^1$  se  $f$  é diferenciável e sua derivada  $f'(x)$  é contínua.

### 4.2.1 Pontos fixos com derivada menor do que 1

Nosso primeiro resultado trata de pontos fixos com derivada menor do que 1.

**Proposição 4.1.** *Sejam  $f: I \rightarrow I$  uma função de classe  $C^1$  e  $p \in I$  um ponto tal que  $f(p) = p$  e  $|f'(p)| = \lambda_0 < 1$ . Então existe uma vizinhança  $B(p)$  de  $p$  em  $I$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = p \text{ para todo } x \in B(p).$$

*Em particular,  $p$  é um ponto fixo atrator. Mais ainda, dado  $\lambda \in (\lambda_0, 1)$ , a vizinhança  $B(p)$  pode ser escolhida de forma que*

$$|f^n(x) - p| \leq \lambda^n |x - p| \text{ para todo } x \in B(p) \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

*Ou seja,  $f^n(x)$  converge exponencialmente rápido para  $p$  à medida que  $n$  cresce.*

*Demonstração.* Começemos observando que, como  $|f'(p)| = \lambda_0 < 1$  e  $f'(x)$  é contínua, dado  $\lambda \in (\lambda_0, 1)$  existe uma vizinhança  $B(p)$  de  $p$  em  $I$  tal que  $|f'(x)| \leq \lambda < 1$  para todo  $x \in B(p)$ . Diminuindo  $B(p)$ , se necessário, podemos assumir sem perda de generalidade que esse é um intervalo da forma  $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap I$  para algum  $\varepsilon > 0$ . Agora, dado  $x \in B(p)$ , segue, do Teorema do Valor Médio, que existe  $c$  entre  $x$  e  $p$  tal que

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(c)| |x - p|.$$

Logo, como  $c \in B(p)$  (por quê?), temos que  $|f'(c)| \leq \lambda$  e, consequentemente,

$$|f(x) - p| \leq \lambda |x - p|.$$

Em particular, como  $\lambda < 1$ , segue que a distância entre  $f(x)$  e  $p$  é menor que a distância de  $x$  a  $p$ , e, portanto, usando que  $B(p)$  é um intervalo da forma  $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap I$ , temos que  $f(x) \in B(p)$ . Podemos, então, repetir o argumento anterior com  $f(x)$  no lugar de  $x$  usando que  $f(p) = p$  e obter

$$|f^2(x) - p| = |f^2(x) - f^2(p)| = |f(f(x)) - f(f(p))| \leq \lambda |f(x) - f(p)|.$$

Portanto, combinando as duas observações anteriores, concluímos que

$$|f^2(x) - p| \leq \lambda |f(x) - f(p)| \leq \lambda^2 |x - p|.$$

Ou seja,  $f^2(x)$  está ainda mais próximo de  $p$  uma vez que  $\lambda < 1$ . Finalmente, dado  $n \in \mathbb{N}$ , repetindo esse raciocínio  $n$ -vezes obtemos que

$$|f^n(x) - p| \leq \lambda^n |x - p|.$$

Portanto, como  $\lambda \in (0, 1)$ , segue que  $\lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  e, consequentemente,  $|f^n(x) - p| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  como queríamos.  $\square$

**Exemplo 4.1.** Consideremos  $f: (0, 1] \rightarrow (0, 1]$  dado por  $f(x) = \sqrt{x}$ . Observe que essa nada mais é do que a restrição do exemplo considerado na seção anterior ao conjunto invariante  $(0, 1]$ . Já vimos acima que 1 é ponto fixo de  $f$ . Além disso,  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  e, consequentemente,  $f'(1) = \frac{1}{2}$ . Segue, então, da Proposição 4.1 que 1 é um ponto fixo atrator, mas isso nós já sabíamos...A novidade é que a proposição também garante que os pontos na vizinhança de 1 convergem exponencialmente rápido para 1, o que pode ser “percebido facilmente” fazendo a brincadeira com a calculadora.

### 4.2.2 Pontos fixos com derivada maior do que 1

Passemos agora a analisar o caso em que nossa dinâmica tenha pontos fixos com derivada maior do que 1. O principal resultado a este respeito é o seguinte.

**Proposição 4.2.** *Sejam  $f: I \rightarrow I$  uma função de classe  $C^1$  e  $p \in I$  um ponto tal que  $f(p) = p$  e  $|f'(p)| = \lambda_0 > 1$ . Então existe uma vizinhança  $B(p)$  de  $p$  em  $I$  tal que para todo  $x \in B(p) \setminus \{p\}$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que*

$$f^{n_0}(x) \notin B(p).$$

*Em particular,  $p$  é um ponto fixo repulsor. Mais ainda, dado  $\lambda \in (1, \lambda_0)$ , a vizinhança  $B(p)$  pode ser escolhida de forma que*

$$|f(x) - p| \geq \lambda |x - p| \text{ para todo } x \in B(p) \setminus \{p\}.$$

*Ou seja,  $f(x)$  se afasta exponencialmente rápido de  $p$ .*

**Demonstração.** A prova desse resultado é semelhante à prova da Proposição 4.1. Começamos observando que, como  $|f'(p)| = \lambda_0 > 1$  e  $f'(x)$  é contínua, dado  $\lambda \in (1, \lambda_0)$ , existe uma vizinhança  $B(p)$  de  $p$  em  $I$  tal que  $|f'(x)| \geq \lambda > 1$  para todo  $x \in B(p)$ . Diminuindo  $B(p)$ , se necessário, podemos assumir sem perda de generalidade que esse é um intervalo da forma  $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap I$  para algum  $\varepsilon > 0$ . Então, dado  $x \in B(p) \setminus \{p\}$ , segue do Teorema do Valor Médio que existe  $c$  entre  $x$  e  $p$  tal que

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(c)| |x - p|.$$

Logo, como  $c \in B(p)$ , temos que  $|f'(c)| \geq \lambda$  e consequentemente

$$|f(x) - p| \geq \lambda |x - p|.$$

Isto prova uma parte da nossa afirmação. Agora, se  $f(x) \notin B(p)$ , basta tomar  $n_0 = 1$  e a prova está completa. Se, por outro lado,  $f(x) \in B(p)$ , podemos repetir o argumento anterior com  $f(x)$  no lugar de  $x$  usando que  $f(p) = p$  e obter

$$|f^2(x) - p| = |f^2(x) - f^2(p)| = |f(f(x)) - f(f(p))| \geq \lambda |f(x) - f(p)|$$

que combinado com a observação anterior nos dá

$$|f^2(x) - p| \geq \lambda |f(x) - f(p)| \geq \lambda^2 |x - p|.$$

Se  $f^2(x) \notin B(p)$ , tomando  $n_0 = 2$ , concluímos a demonstração. Se, por outro lado,  $f^2(x) \in B(p)$ , podemos repetir novamente o argumento. Procedendo recursivamente, dado  $n \geq 1$ , obtemos que ou  $f^{n-1}(x) \notin B(p)$  e a prova está completa ou  $f^{n-1}(x) \in B(p)$  e podemos repetir o argumento obtendo que

$$|f^n(x) - p| \geq \lambda^n |x - p|.$$

Agora, como os pontos de  $B(p)$  estão a uma distância máxima de  $\varepsilon$  de  $p$  e  $\lambda^n |x - p| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  visto que  $\lambda > 1$ , em algum momento obrigatoriamente, teremos que  $f^n(x) \notin B(p)$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

**Exemplo 4.2.** Consideremos  $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $f(x) = \sin(2\pi x)$ . É fácil ver que 0 é um ponto fixo de  $f$ . Além disso,  $f'(x) = 2\pi \cos(2\pi x)$  e, conseqüentemente,  $f'(0) = 2\pi > 1$ . Portanto segue da proposição anterior que 0 é um ponto fixo repulsor de  $f$ . Em particular, existe  $\varepsilon > 0$  tal que todo ponto  $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  tem algum iterado por  $f$ , que sai dessa vizinhança de 0.

**Exercício 4.1.** As Proposições 4.1 e 4.2 foram enunciadas para pontos fixos, porém obviamente uma versão semelhante pode ser enunciada para pontos periódicos. Deixamos essa tarefa para o leitor. Verifique que, de fato, essas novas versões podem ser obtidas das anteriores.

### 4.2.3 Pontos fixos com derivada 1

Para concluirmos nosso estudo a respeito da dinâmica numa vizinhança de um ponto fixo, resta considerarmos o caso em que a derivada nesse ponto é exatamente igual a 1. Já adiantamos que não será possível obter resultados gerais como os obtidos nas Proposições 4.1 e 4.2 e que o comportamento perto de um ponto fixo como acima pode ser bastante variado. Vamos mostrar isso via exemplos. Por simplicidade, apresentaremos exemplos em que  $I = \mathbb{R}$  e 0 é um ponto fixo para  $f$ , satisfazendo  $|f'(0)| = 1$ . Começemos com o exemplo mais óbvio desta situação.

**Exemplo 4.3.** Consideremos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x$ . Então obviamente  $f(0) = 0$  e  $f'(0) = 1$ . Nesse exemplo, 0 não atrai nem repele nenhum ponto; é um ponto “neutro”. De fato, todo ponto  $x \in \mathbb{R}$  é ponto fixo de  $f$ .



Nosso próximo exemplo já tem um comportamento um pouco mais interessante.

**Exemplo 4.4.** Consideremos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = x + x^3 \quad (4.1)$$

cujo gráfico é dado abaixo.

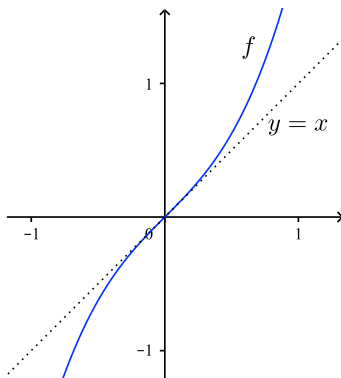


Figura 4.1: Gráfico da  $f$  dada em (4.1).

É fácil ver que 0 é um ponto fixo de  $f$  e que, além disso,  $f$  é diferenciável e  $f'(0) = 1$ . Vamos, então, estudar a dinâmica de  $f$  numa vizinhança de 0, começando com pontos  $x \in \mathbb{R}$  tais que  $x > 0$ . Nesse caso,  $f(x) = x + x^3 > x$ . Repetindo esse argumento, obtemos que a sequência de pontos  $x, f(x), f^2(x), \dots$  é uma sequência estritamente crescente e, portanto, a órbita de  $x$  se afasta do ponto fixo 0. De forma análoga, se  $x < 0$ , então  $f(x) = x + x^3 < x$  e, portanto, a sequência  $x, f(x), f^2(x), \dots$  é estritamente decrescente e também se afasta de 0. Logo 0 é um repulsor.

**Exemplo 4.5.** Consideremos agora  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = x - x^3 \quad (4.2)$$

cujo gráfico é dado abaixo.

Novamente é fácil ver que 0 é um ponto fixo de  $f$  e que  $f'(0) = 1$ . Agora, dado  $x \in (-\frac{1}{10}, 0)$ , temos que  $f(x) = x - x^3 > x$  e, além disso,  $x - x^3 < 0$ . Repetindo esse argumento, concluímos que a sequência  $x, f(x), f^2(x), \dots$  é estritamente crescente e limitada superiormente por 0. Mais ainda, é possível observar que essa sequência de fato converge para 0. Deixamos essa tarefa para o leitor. De forma análoga, se  $x \in (0, \frac{1}{10})$ , então  $f(x) = x - x^3 < x$  e, além disso,  $x - x^3 > 0$ , mostrando que a sequência  $x, f(x), f^2(x), \dots$  é estritamente decrescente e limitada por baixo por 0. Como anteriormente, também é possível observar que essa sequência de fato converge para 0. Logo, 0 é um ponto fixo atrator.

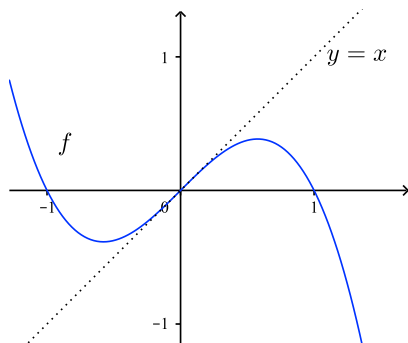


Figura 4.2: Gráfico da  $f$  dada em (4.2).

Podemos também considerar um exemplo que é uma combinação dos anteriores.

**Exemplo 4.6.** Consideremos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} x - x^3, & \text{se } x \leq 0; \\ x + x^3, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

cujo gráfico é dado abaixo.

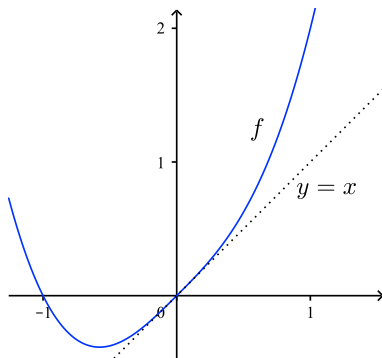


Figura 4.3: Gráfico da  $f$  dada em (4.3).

Mais uma vez é fácil ver que 0 é um ponto fixo de  $f$ ; também não é difícil verificar que essa função é diferenciável e que  $f'(0) = 1$ . Agora, combinando as análises feitas nos Exemplos 4.4 e 4.5, concluímos que pontos  $x > 0$  se afastam de 0 pela ação de  $f$  enquanto que pontos  $x \in (-\frac{1}{10}, 0)$  são atraídos para 0. Ou seja, 0 não é nem repulsor nem atrator.

Então os exemplos acima nos mostram que, de fato, o comportamento de  $f$  próximo de um ponto fixo com derivada 1 pode ser bem variado: podemos ter um ponto “neutro” como no primeiro exemplo, um atrator, um repulsor ou ainda, atrair alguns pontos e repelir outros. Enfim, utilizando apenas a informação de que a derivada de  $f$  no ponto fixo é 1, não é possível obter nenhum resultado geral como nos casos anteriores. No que resta do capítulo, vamos focar em dois exemplos específicos: a tenda e a família quadrática.

## 4.3 A tenda

Neste momento, vamos nos concentrar no seguinte exemplo: seja  $T: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  dada por

$$T(x) = 1 - 2|x|. \quad (4.4)$$

Essa transformação é conhecida como *tenda*, por razões que ficam claras ao esboçarmos seu gráfico.

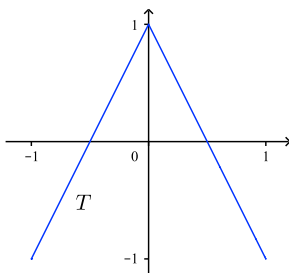


Figura 4.4: Gráfico da  $T$  dada em (4.4).

Uma das características que diferencia essa transformação daquelas que consideramos na seção anterior é que ela tem derivada definida em quase todos os pontos do intervalo, porém não em todos. De fato, a derivada de  $T$  só não está definida no ponto  $x = 0$ , pois nos demais a derivada é 2 ou  $-2$ . Uma consequência importante desse fato é que, por exemplo, se consideramos um intervalo qualquer  $[a, b]$  que não contém o zero, ou seja, está todo à esquerda ou à direita de zero, então sua imagem  $T([a, b])$  é um intervalo cujo comprimento é o dobro do comprimento original de  $[a, b]$  (podemos verificar, por exemplo, usando o Teorema do Valor Médio).

Nosso objetivo na sequência é mostrar que essa transformação é transitiva e, mais geralmente, topologicamente *mixing*. Começemos com a seguinte observação.

**Lema 4.3.** *Dado  $a \in (-1, 1]$ , considere um intervalo da forma  $[-1, a]$ . Então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n([-1, a]) = [-1, 1]$ .*

*Demonstração.* Seja  $[-1, a]$  um intervalo como no enunciado. Se  $a > 0$ , então é fácil ver que  $T([-1, a]) \supseteq T([-1, 0]) = [-1, 1]$  e não há mais nada a ser feito. Supomos, então,  $a < 0$ . Começamos observando que, como  $T$  é contínua e  $T(-1) = -1$ ,  $T([-1, a])$  é também um intervalo da forma  $[-1, b]$  para algum  $b \in (-1, 1]$ . Além disso, pela observação anterior ao lema, temos que a imagem  $T([-1, a]) = [-1, b]$  terá o dobro do comprimento do intervalo original  $[-1, a]$ . Temos, então, duas possibilidades: ou a imagem  $T([-1, a]) = [-1, b]$  contém 0, ou não contém. Caso contenha 0, caímos no caso inicial e a prova está completa bastando para isso tomar  $n = 2$ . Se por outro lado  $b < 0$ , ou seja,  $T([-1, a])$  não contém 0, então podemos repetir o processo de iteração, dobrando novamente o comprimento do intervalo. Obviamente em algum momento, a imagem  $T^n([-1, a])$ , que pelo argumento inicial também é da forma  $[-1, c]$ , conterá o zero, pois seu comprimento será maior do que 1, tendo em vista que dobra a cada iterado. Aplicando, então, o caso inicial a esse conjunto concluímos que  $T^{n+1}([-1, a]) = [-1, 1]$  conforme afirmado.  $\square$

Agora, utilizando essa observação, fica fácil mostrar que a tenda é de fato transitiva.

**Proposição 4.4.** *A aplicação tenda dada em (4.4) é transitiva.*

*Demonstração.* Observemos inicialmente que, como  $([-1, 1], |\cdot|)$  é um espaço métrico compacto e  $T$  é contínua, podemos aplicar a Proposição 1.6. Em particular, basta mostrarmos que dados conjuntos abertos  $U$  e  $V$  de  $[-1, 1]$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Começamos observando que, como  $U$  é aberto, existe algum intervalo  $I$  contido em  $U$ . Agora, se  $0 \in I$ , como  $T^2(0) = -1$ , temos que  $T^2(U) \supseteq T^2(I) \supseteq [-1, a]$ . Portanto segue do Lema 4.3 que algum iterado de  $T^2(U)$  será igual a todo o intervalo  $[-1, 1]$  e, em particular, intersectará  $V$ . Por outro lado, se  $0 \notin I$ , então  $T(I)$  tem comprimento que é o dobro do comprimento de  $I$ ; repetindo as iterações o comprimento sempre dobrará até que em algum iterado a imagem contenha 0; depois disso, basta aplicar novamente o caso anterior. Isto mostra que  $T^n(U) = [-1, 1]$  para algum  $n$  e, em particular,  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ . Consequentemente  $T$  é transitiva.  $\square$

De fato, a prova que apresentamos acima nos dá o seguinte resultado ainda mais forte.

**Proposição 4.5.** *A aplicação tenda dada em (4.4) é topologicamente mixing.*

*Demonstração.* Dado um conjunto aberto  $U$  de  $[-1, 1]$ , vimos na prova da proposição anterior que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n(U) = [-1, 1]$ . Logo  $T^k(U) = [-1, 1]$  para todo  $k \geq n$ . Em particular, dado um conjunto aberto  $V$  de  $[-1, 1]$ ,  $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$  para todo  $k \geq n$  e  $T$  é topologicamente *mixing*.  $\square$

Esse exemplo tem diversas outras propriedades dinâmicas interessantes, porém nosso objetivo neste momento não é explorar todas elas. De fato, nosso objetivo principal é relacioná-lo com um elemento da família quadrática, que introduziremos na próxima seção e mostrar como, via essa relação, o entendimento de uma dinâmica implica no entendimento da outra. Em particular, poderemos traduzir as propriedades de transitividade e *mixing* da tenda para o outro modelo. De qualquer forma, ao leitor interessado, deixamos o seguinte exercício.

**Exercício 4.2.** Explore outras propriedades dinâmicas da aplicação tenda dada em (4.4). Por exemplo, será que  $T$  tem pontos periódicos? Em caso afirmativo, como é o conjunto  $\text{Per}(T)$ ? Será que  $T$  é expansiva? Será que é caótica? Como são os conjuntos  $\omega$ -limite de pontos típicos do espaço de fases? Qual a entropia de  $T$  (veja Exercício 5.9)? Caso tenha dificuldades, estude primeiro o próximo capítulo e depois, inspirado pelas ideias que lá serão apresentadas, volte para este exercício.

## 4.4 Alguns casos da família quadrática

Nesta seção, concentraremos nossa energia no estudo de alguns casos de uma família de sistemas dinâmicos, conhecida como *família quadrática* ou, então, *aplicação logística*, definida da seguinte forma: dado  $a \in [0, 4]$ , consideremos  $f_a: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$f_a(x) = ax(1 - x).$$

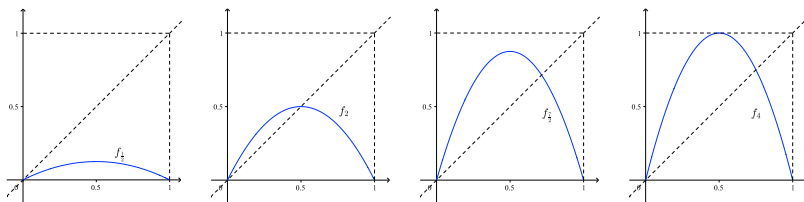


Figura 4.5: Gráfico de  $f_a$  para  $a = \frac{1}{2}$ ,  $a = 2$ ,  $a = \frac{7}{2}$  e  $a = 4$  respectivamente.

Nosso objetivo na sequência é, fixado algum valor do parâmetro  $a \in [0, 4]$ , compreender o comportamento das órbitas de  $f_a$ . Que o leitor não se engane com a aparente simplicidade de  $f_a$ : entender completamente as propriedades dinâmicas dessa família ainda é objeto de pesquisa e a atual compreensão, bastante avançada por sinal, demandou o esforço de muitas pessoas, entre elas alguns dos grandes matemáticos de nossa época. Essa família é muitas vezes apresentada como um exemplo paradigmático de como funções aparentemente simples podem apresentar um comportamento dinâmico bastante complexo. Ela ganhou popularidade nos anos 1970, quando foi introduzida pelo biólogo Robert May (1936–2020), como uma versão discreta de um modelo populacional introduzido por Pierre François Verhulst (1804–1849).

### 4.4.1 O caso $0 \leq a < 1$

Começemos nossa análise com o caso em que o parâmetro  $a$  pertence ao intervalo  $(0, 1)$ . Observemos inicialmente que neste caso  $f_a$  tem um único ponto fixo em  $[0, 1]$  que é  $x = 0$ .

De fato, é fácil ver que  $ax(1-x) = x$  se, e somente se,  $x = 0$  ou  $x = \frac{-1+a}{a}$ . Agora, como  $a \in (0, 1)$ , temos que  $x = \frac{-1+a}{a} < 0$  e, conseqüentemente,  $x = 0$  é mesmo o único ponto fixo de  $f_a$  em  $[0, 1]$ . Além disso, a derivada de  $f_a$  é dada por  $f'_a(x) = a - 2ax$ . Dessa forma,  $|f'(0)| < 1$  e, portanto, utilizando a Proposição 4.1, segue que  $x = 0$  é um ponto fixo atrator de  $f_a$ . Mas é possível ir além e ver que de fato  $x = 0$  é um atrator global: dado  $x \in (0, 1]$ , é fácil ver que  $f_a(x) < x$  e, portanto, a sequência  $x, f(x), f^2(x), \dots$  é estritamente decrescente. Logo, como tal sequência é limitada por baixo por zero, segue que ela converge. Repetindo, então, o argumento feito na Seção 4.1 vemos que ela tem que convergir para um ponto fixo de  $f_a$ , que nesse caso só pode ser  $x = 0$ . Concluimos, então, que  $x = 0$  efetivamente atrai todas as órbitas do intervalo, sendo um atrator global. No caso em que  $a = 0$ , temos obviamente que  $x = 0$  é um atrator global visto que  $f_0(x) = 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ . Conseqüentemente, para todo  $a \in [0, 1)$ , o ponto fixo  $x = 0$  é um atrator global de  $f_a$ .

#### 4.4.2 O caso $1 < a < 3$

Consideremos agora o caso em que  $1 < a < 3$ . Vimos, no caso anterior, que as soluções da equação  $ax(1-x) = x$  são  $x = 0$  e  $x = \frac{-1+a}{a}$ . Logo, como  $1 < a < 3$ , temos que  $x = \frac{-1+a}{a} = 1 - \frac{1}{a} \in (0, 1)$  e, portanto, os pontos fixos de  $f_a$  em  $[0, 1]$  são  $x = 0$  e  $x = 1 - \frac{1}{a}$ . Agora, como  $f'_a(0) = a > 1$ , segue da Proposição 4.2 que  $x = 0$  é um ponto fixo repulsor. Quanto ao outro ponto fixo, como  $f'_a(1 - \frac{1}{a}) = 2 - a$ , segue que  $|f'(1 - \frac{1}{a})| < 1$ . Conseqüentemente segue da Proposição 4.1 que  $x = 1 - \frac{1}{a}$  é um ponto fixo atrator. Mas não só isso, podemos ir além e verificar que esse ponto fixo de fato atrai todos os pontos de  $(0, 1)$  (obviamente o 0 e o 1 não são atraídos para  $x = 1 - \frac{1}{a}$ ); por simplicidade, trataremos separadamente dois casos:

##### $1 < a \leq 2$

Vamos primeiro considerar a situação na qual  $1 < a < 2$ . Se a condição inicial é  $x \in (0, 1 - \frac{1}{a})$ , então não é difícil verificar que  $f_a(x) > x$  e assim a órbita  $x, f_a(x), f_a^2(x), \dots$  é uma sequência crescente, que, então, vai entrar numa vizinhança do ponto fixo e será atraída por ele. Consideremos agora o caso em que a condição inicial  $x \in (1 - \frac{1}{a}, \frac{1}{2})$ . Observemos que o máximo da função  $f_a$  ocorre em  $x = \frac{1}{2}$ , sendo dado por  $\frac{a}{4} < \frac{1}{2}$ ; portanto, como  $f_a$  é crescente em  $(1 - \frac{1}{a}, \frac{1}{2})$ , temos que a imagem desse conjunto por  $f_a$  está contida nele mesmo. Em particular, as órbitas que começam em  $(1 - \frac{1}{a}, \frac{1}{2})$  não saem desse conjunto. Além disso, dado  $x \in (1 - \frac{1}{a}, \frac{1}{2})$ , não é difícil verificar que  $f_a(x) < x$ . Portanto, a órbita de todo ponto desse conjunto forma uma sequência decrescente, que, então, entrará numa vizinhança de  $1 - \frac{1}{a}$  e será atraída por ele. Finalmente se  $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ , então é fácil ver que  $f_a(x) < \frac{1}{2}$ . Logo, pela análise anterior, segue que  $f_a^n(x)$  convergirá para  $1 - \frac{1}{a}$ . O caso em que  $a = 2$  pode ser tratado usando as ideias que acabamos de discutir; o leitor é convidado a refletir um pouco sobre ele.

$$2 < a < 3$$

Consideremos agora o caso em que  $2 < a < 3$ . Observemos inicialmente que, para  $a$  nesse intervalo, o ponto fixo  $1 - \frac{1}{a}$  é maior do que  $\frac{1}{2}$ . Além disso, o ponto  $\frac{1}{a}$  é uma pré-imagem de  $1 - \frac{1}{a}$ , ou seja,  $f_a(\frac{1}{a}) = 1 - \frac{1}{a}$ . Utilizando essas observações e o fato de que o máximo de  $f_a$  dado por  $\frac{a}{4}$  é atingido em  $x = \frac{1}{2}$ , segue que a imagem do intervalo  $[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}]$  (que claramente contém o ponto  $\frac{1}{2}$ ) é  $[1 - \frac{1}{a}, \frac{a}{4}]$ ; esse intervalo, por sua vez, é levado por  $f_a$  em  $[\frac{a^2(4-a)}{16}, 1 - \frac{1}{a}]$ , cuja extremidade esquerda satisfaz  $\frac{a^2(4-a)}{16} > \frac{1}{2}$ .

Prosseguindo com essa análise, vemos que as imagens de  $[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}]$  serão levadas, de forma alternada, em intervalos cada vez menores que estarão ora à esquerda e ora à direita do ponto fixo, acumulando-se nele de forma oscilante. Agora, dada uma condição inicial  $x \in (0, \frac{1}{a})$ , não é difícil ver que a parte inicial de sua órbita por  $f_a$  é crescente e que, em algum instante, essa entrará no intervalo  $[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}]$ , em que podemos aplicar o raciocínio feito acima. E se a condição inicial estiver contida em  $(1 - \frac{1}{a}, 1)$ ? Nesse caso, a imagem do intervalo em questão é  $(0, 1 - \frac{1}{a})$ , e novamente recaímos nas situações já consideradas previamente.

Um fato interessante que pode ter passado despercebido pelo leitor é o seguinte: combinando as observações feitas até aqui, temos que, por um lado, se  $a$  está próximo de 1, porém é *menor* do que 1, então  $x = 0$  é um ponto fixo atrator para  $f_a$ , enquanto que se  $a$  está próximo de 1, porém é *maior* do que 1, então  $x = 0$  é um ponto fixo repulsor para  $f_a$ . Ou seja, mudando um pouco o parâmetro  $a$ , transformamos o ponto atrator global 0 em um repulsor de órbitas! Dizemos, então, que  $a = 1$  é um ponto de *bifurcação* da família  $f_a$ .

### 4.4.3 O caso $3 < a < 1 + \sqrt{6}$

Quando  $a > 3$ , o ponto fixo  $x^* = 1 - \frac{1}{a}$  deixa de ser um atrator e passa a ser um repulsor, como pode ser facilmente verificado pelo cálculo da derivada neste ponto. Qual será, então, o destino das órbitas nessa região? Vamos começar investigando a natureza dos pontos periódicos de período 2 caso existam. Mais precisamente, estamos interessados em compreender o caráter das soluções de  $f_a^2(x) = x$ . É fácil ver que

$$f_a^2(x) = a^2x(1-x)[1-ax(1-x)].$$

Consequentemente,  $x = 0$  é uma solução de  $f_a^2(x) = x$ . Supondo, então,  $x \neq 0$ , podemos dividir ambos os lados da equação por  $x$  obtendo, assim, a equação de grau 3 dada por

$$1 = a^2(1-x)[1-ax(1-x)].$$

Agora, como  $x^*$  é ponto fixo de  $f_a$ , esse obviamente também é um ponto fixo de  $f_a^2$  e, em particular, é outra solução da equação acima. Considerando, então, uma nova variável

y dada por  $x = x^* + y$ , podemos reescrever a equação acima como

$$ay^2 + (a-3)y + \left(\frac{3}{a} - 1\right) = 0.$$

Resolvendo, então, essa equação obtemos os dois outros pontos fixos de  $f_a^2$  que são dados por

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} \sqrt{(a-1)^2 - 4} \text{ e } x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} \sqrt{(a-1)^2 - 4}.$$

Não é difícil verificar que  $f_a(x_1) = x_2$  e  $f_a(x_2) = x_1$ , ou seja,  $x_1$  e  $x_2$  formam uma órbita periódica de período 2. Agora qual é a natureza, do ponto de vista da estabilidade, desses pontos periódicos? Aplicando a regra da cadeia a  $f_a^2(x)$ , obtemos que  $(f_a^2)'(x) = f'_a(f_a(x))f'_a(x)$ . Tomando, então,  $x = x_1$  temos que

$$\begin{aligned} (f_a^2)'(x_1) &= f'_a(x_2)f'_a(x_1) \\ &= (a - 2ax_2)(a - 2ax_1) \\ &= a^2(1 - 2x_1)(1 - 2x_2) \\ &= -\left(\sqrt{(a-1)^2 - 4} - 1\right)\left(\sqrt{(a-1)^2 - 4} + 1\right) \\ &= -((a-1)^2 - 4 - 1) \\ &= -((a-1)^2 - 5). \end{aligned}$$

Agora, para valores de  $a$  entre 3 e  $1 + \sqrt{6}$ , o valor absoluto dessa expressão é menor do que 1. Portanto, segue, da Proposição 4.1, que  $x_1$  é um ponto fixo atrator para  $f_a^2$ . O mesmo argumento mostra que  $x_2$  também é um ponto fixo atrator para  $f_a^2$ . Isto significa que a órbita periódica  $\{x_1, x_2\}$  atrai a órbita por  $f_a$  de todos os pontos que comecem em sua vizinhança. De fato, é possível mostrar que efetivamente a órbita de qualquer ponto de  $[0, 1]$  por  $f_a$ , exceto 0,  $1 - \frac{1}{a}$  e 1 por razões óbvias, se aproxima da órbita periódica  $\{x_1, x_2\}$ .

#### 4.4.4 O caso $a = 4$

Faremos agora um salto da região de parâmetros menores do que  $1 + \sqrt{6}$  diretamente para  $a = 4$ . Para entender um pouco da dinâmica de  $f_4(x) = 4x(1-x)$ , recorreremos a um expediente extremamente útil na teoria de Sistemas Dinâmicos, a mudança de coordenadas. O nome técnico é conjugação, que essencialmente significa encontrar uma transformação que relaciona duas dinâmicas distintas, sendo uma delas conhecida ou mais fácil de descrever que a outra (veja Seção 1.20). Nosso objetivo final é mostrar que  $f_4$  é conjugada à aplicação tenda estudada na Seção 4.3 e, em particular, que elas compartilham diversas propriedades dinâmicas. Para tanto, faremos alguns passos intermediários.



Consideremos inicialmente a dinâmica auxiliar  $Q: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $Q(x) = 1 - 2x^2$  e mostremos que  $f_4$  e  $Q$  são conjugadas, ou seja, que existe uma transformação  $h: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$  contínua, bijetiva e com inversa contínua, tal que  $h \circ Q = f_4 \circ h$ . De fato, consideremos  $h: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por  $h(x) = \frac{x+1}{2}$ , sendo é claramente uma aplicação contínua. Também não é difícil ver que  $h$  é uma bijeção cuja inversa é dada por  $h^{-1}(x) = 2x - 1$ , sendo, em particular, também contínua. Então, dado  $x \in [-1, 1]$ ,

$$\begin{aligned} h^{-1}(f_4(h(x))) &= h^{-1}(4h(x)(1-h(x))) \\ &= h^{-1}\left(4\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(1-\frac{x+1}{2}\right)\right) \\ &= h^{-1}(1-x^2) \\ &= 2(1-x^2) - 1 \\ &= 1-2x^2 \\ &= Q(x). \end{aligned}$$

Consequentemente  $h \circ Q = f_4 \circ h$  e  $Q$  e  $f_4$  são de fato conjugadas.

Nosso próximo passo é construir uma conjugação entre  $Q$  e a aplicação tenda  $T: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $T(x) = 1 - 2|x|$ . Considere a transformação contínua  $H: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $H(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ . Sua inversa, que também é contínua, é dada por  $H^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin(x)$ . Então, dado  $x \in [-1, 1]$ , observemos inicialmente que

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi|x|\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-\pi|x|) + \sin(-\pi|x|)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(-\pi|x|) \\ &= \cos(\pi x). \end{aligned}$$

Agora, como  $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ , obtemos que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi|x|\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Utilizando, então, essa observação concluímos que

$$\begin{aligned} H^{-1}(Q(H(x))) &= H^{-1}\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) \\ &= H^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - 2|x|)\right)\right) \\ &= 1 - 2|x| \\ &= T(x), \end{aligned}$$

e, consequentemente,  $H \circ T = Q \circ H$  conforme desejado.

Finalmente, utilizando as conjugações entre  $f_4$  e  $Q$  e entre  $Q$  e  $T$ , fica fácil obter uma conjugação entre  $f_4$  e  $T$ . De fato, basta considerar a composição  $h \circ H : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$  cuja expressão explícita é

$$h(H(x)) = \frac{1}{2} \left( \sin \left( \frac{\pi}{2} x \right) + 1 \right).$$

Nesse caso, usando que  $h \circ Q = f_4 \circ h$  e  $H \circ T = Q \circ H$ , obtemos que

$$f_4 \circ (h \circ H) = h \circ Q \circ H = (h \circ H) \circ T$$

conforme afirmado. Sendo, então, conjugadas,  $T$  e  $f_4$  compartilham diversas propriedades conforme explicitado no Exercício 1.15 (veja também Exercício 4.3 abaixo). Em particular, como  $T$  é transitiva e topologicamente *mixing*, concluímos que  $f_4$  também é. Agora, sendo  $f_4$  transitiva, essa não pode, por exemplo, ter um ponto fixo atrator, diferentemente do que acontecia para  $f_a$  nos casos em que  $0 \leq a < 3$ .

Por fim, esse exemplo nos mostra claramente a importância da noção de conjugação: entendendo o comportamento de  $T$ , que é mais simples de estudar visto que é uma função afim quando restrita aos intervalos  $[-1, 0]$  e  $[0, 1]$ , entendemos também o comportamento de  $f_4$  que por sua vez é uma função ‘completamente’ não linear.

**Exercício 4.3.** No Exercício 1.15, assumimos que as transformações conjugadas são homeomorfismos. Verifique quais daquelas conclusões se mantêm válidas ao eliminarmos tal hipótese. Por exemplo, mostre que as propriedades  $f)$  e  $g)$  se mantêm.

#### 4.4.5 O caso $1 + \sqrt{6} < a < 4$

Consideremos agora o caso em que  $1 + \sqrt{6} < a < 4$ . O que ocorre nessa região intermediária? Vimos que, para valores de  $a$  menores do que 3,  $f_a$  sempre tem um ponto fixo atrator. Por outro lado, para  $a = 4$ , vimos que  $f_a$  tem uma dinâmica bastante rica, sendo, por exemplo, transitiva e topologicamente *mixing*. Isto nos induz a pensar que a complexidade do sistema cresce à medida que  $a$  cresce e que algo bastante interessante acontece nessa região, que separa os dois comportamentos distintos. E de fato é exatamente isso que ocorre, mas uma análise mais cuidadosa iria requerer bem mais tempo e espaço, por isso nos limitamos a uma breve descrição dos primeiros passos rumo à complexidade: o ponto fixo que existe para  $a < 3$  e que é um atrator com bacia de atração  $(0, 1)$ , continua existindo, porém, para  $a > 3$ , ele se torna um repulsor, tendo em vista que sua derivada passa a ter valor absoluto maior do que 1. Mas, neste momento, surge também um ponto periódico  $p$  de período 2, que por sua vez é atrator conforme descrito na Seção 4.4.3. Em particular, as órbitas a seu redor tendem a se acumular em  $\{p, f(p)\}$ . Com o aumento de  $a$ , esse ponto de período 2 também se transforma em repulsor e surge um ponto de período 4 cuja órbita é um atrator; esse processo continua com uma infinidade de duplicações de período, gerando um quadro bastante sofisticado e que está bem além dos modestos objetivos dessas notas. O leitor que tiver interesse em conhecer mais detalhadamente esse processo pode, por exemplo, consultar Devaney (2003).

## 4.5 Exercícios

Nesta seção, apresentamos alguns exercícios para que o leitor possa explorar por conta própria alguns dos conceitos trabalhados ao longo do capítulo.

**Exercício 4.4.** Consideremos o sistema dinâmico  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dado por  $f(x) = x^2$ . Descreva os pontos fixos, os pontos periódicos e os conjuntos limite para um ponto inicial  $x_0 \in [0, 1]$  qualquer. Sugestão: inspire-se nas ideias do início do capítulo.

**Exercício 4.5.** Consideremos agora  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ . Proceda, como no exercício anterior, encontrando pontos fixos e o comportamento limite para um ponto qualquer.

**Exercício 4.6.** Consideremos duas transformações do intervalo  $[-1, 1]$ , a tenda  $T(x) = 1 - 2|x|$  e  $f(x) = 2|x| - 1$ , que pode ser vista como uma tenda invertida. Mostre que o homeomorfismo  $h(x) = -x$  conjuga  $f$  e  $T$ .

**Exercício 4.7.** Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2 - 2x, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Esboce os gráficos de  $f$ ,  $f^2$  e, mais geralmente, de  $f^n$  para um  $n \in \mathbb{N}$  arbitrário. Obtenha os pontos periódicos de período  $n$  de  $f$ . Dica: lembre-se de que esses pontos formam um subconjunto dos pontos fixos de  $f^n$ .

**Exercício 4.8.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  uma função contínua. Mostre que  $f$  tem pelo menos um ponto fixo. Dica: considere  $g(x) = f(x) - x$ .

**Exercício 4.9.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $f([a, b]) \supseteq [a, b]$ . Mostre que  $f$  tem pelo menos um ponto fixo.

**Exercício 4.10.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Mostre que se  $f$  tem um ponto periódico de período 2, então  $f$  tem pelo menos um ponto fixo. Dica: considere  $g(x) = f(f(x)) - x$ .

**Exercício 4.11.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função estritamente crescente. Mostre que se  $f$  tem algum ponto periódico, então esse ponto na verdade é um ponto fixo de  $f$ .

# 5

## Transformações expansoras

---

Neste capítulo, daremos continuidade ao estudo de dinâmicas definidas num intervalo de  $\mathbb{R}$  focando em *transformações expansoras* e, mais especificamente, num exemplo bastante simples, porém importante: a transformação  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por

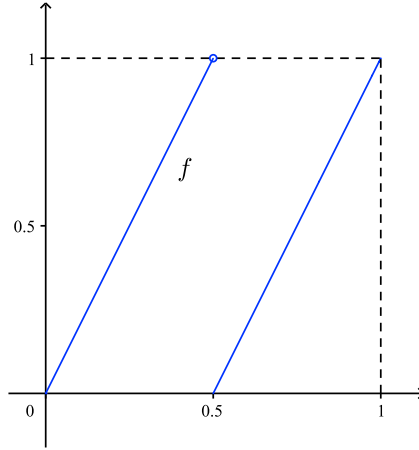
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}); \\ 2x - 1, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1]; \end{cases} \quad (5.1)$$

cujo gráfico é dado na Figura 5.1.

Apesar de sua definição ser bastante simples,  $f$  possui propriedades dinâmicas bastante interessantes como veremos na sequência. Na Seção 5.2, veremos ainda que essa transformação está intimamente relacionada com diversas outras, inclusive com a aplicação *shift* estudada no Capítulo 3. No que segue, vamos supor que  $\mathbb{R}$  está munido da distância Euclidiana a qual denotaremos por  $d(x, y) := |x - y|$ . Em algumas partes deste capítulo, porém usaremos intercambiavelmente as duas notações  $d(x, y)$  e  $|x - y|$ .

### 5.1 $f$ é uma aplicação expansora

Uma propriedade fundamental da transformação  $f$  é que sua derivada é maior do que 1 em todos os pontos do domínio exceto em  $x = \frac{1}{2}$ , em que ela é descontínua. De fato,  $f'(x) = 2$  para todo  $x \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ . Isto implica, por exemplo, que localmente  $f$

Figura 5.1: Gráfico de  $f$  dada em (5.1).

expande distâncias: se  $x$  e  $y$  são pontos suficientemente próximos, então a distância entre  $f(x)$  e  $f(y)$  será pelo menos duas vezes a distância de  $x$  a  $y$ . Este fato é descrito de maneira precisa na seguinte proposição.

**Proposição 5.1.** *Existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $x, y \in [0, 1]$  são pontos satisfazendo  $d(x, y) < \varepsilon$ , então  $d(f(x), f(y)) \geq 2d(x, y)$ .*

Uma transformação que satisfaz uma condição como a da proposição anterior (possivelmente com uma constante  $c > 1$  no lugar do 2) é dita *expansora*<sup>1</sup>. Na Seção 5.3, apresentaremos uma definição precisa deste conceito.

*Demonstração.* Tomemos, por exemplo,  $\varepsilon = \frac{1}{10}$  e supomos que  $x, y \in [0, 1]$  são tais que  $d(x, y) < \frac{1}{10}$ . Vamos dividir a prova em casos. Se  $x, y \in [0, \frac{1}{2})$ , então, pelo Teorema do Valor Médio, temos que  $|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y|$  para algum ponto  $z \in [x, y]$ . Agora, como  $f'(z) = 2$ , segue que  $|f(x) - f(y)| \geq 2|x - y|$  como queríamos. Um argumento análogo pode ser feito para o caso em que  $x, y \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Resta considerarmos o caso em que um dos pontos está em  $[0, \frac{1}{2})$  e o outro está em  $[\frac{1}{2}, 1]$ . Supomos sem perda de generalidade que  $x \in [0, \frac{1}{2})$  e  $y \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Neste caso, como  $|x - y| < \frac{1}{10}$ , segue que  $x \in [\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$  e  $y \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$ . Em particular,  $f(x) \in [\frac{4}{5}, 1)$  e  $f(y) \in [0, \frac{1}{5})$ .

<sup>1</sup>Aqui estamos pensando numa transformação expansora como sendo simplesmente uma transformação que localmente expande distâncias. Em geral, assume-se também que a transformação é contínua, conforme definição dada na Seção 5.3.

Consequentemente

$$|f(x) - f(y)| \geq \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \geq 2 \cdot \frac{1}{10} \geq 2|x - y|.$$

Logo, se  $x, y \in [0, 1]$  são tais que  $|x - y| < \frac{1}{10}$ , então  $|f(x) - f(y)| \geq 2|x - y|$  como queríamos.  $\square$

Esse fato tem diversas consequências dinâmicas importantes como veremos na sequência.

### 5.1.1 Expansividade, transitividade e *mixing* topológico

Começamos observando que a transformação  $f$  é expansiva.

**Proposição 5.2.**  *$f$  é uma transformação expansiva. Isto é, existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $x = y$ .*

*Demonstração.* Consideremos  $\varepsilon = \frac{1}{10}$  e supomos que  $d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{1}{10}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Nesse caso, aplicando a Proposição 5.1 aos pontos  $f^{n-1}(x)$  e  $f^{n-1}(y)$ , obtemos que

$$d(f^n(x), f^n(y)) = d(f(f^{n-1}(x)), f(f^{n-1}(y))) \geq 2d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)).$$

Agora, aplicando a Proposição 5.1 repetidamente a  $f^k(x)$  e  $f^k(y)$  para  $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ , obtemos que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq 2^n d(x, y).$$

Combinando com a hipótese de que  $d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{1}{10}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , segue que  $\frac{1}{10} \geq 2^n d(x, y)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Ou seja,

$$d(x, y) \leq \frac{1}{10 \cdot 2^n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Segue, então, que  $d(x, y) = 0$  e, portanto,  $x = y$  como queríamos.  $\square$

Como uma consequência direta do resultado anterior, temos que  $f$  possui dependência sensível às condições iniciais (veja Seção 1.16).

Nosso próximo resultado nos diz que, dado qualquer conjunto aberto  $V$  em  $[0, 1)$  (em particular, pode ser tão pequeno quanto se queira), se considerarmos a imagem de  $V$  pelos iterados de  $f$ , em algum momento, essa imagem cobrirá todo o intervalo  $[0, 1)$ . Um resultado similar já havia aparecido na Seção 4.3.

**Lema 5.3.** *Dado qualquer conjunto aberto  $V \subset [0, 1)$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(V) = [0, 1)$ .*

Na prova do lema acima, utilizaremos a seguinte interpretação a respeito da dinâmica de  $f$ : dado  $x \in [0, 1)$ , temos que o ponto  $f(x)$  é obtido simplesmente multiplicando  $x$  por 2 e trocando a parte inteira de  $2x$  por 0, caso seja diferente de 0. Por exemplo, se  $x = 0,31$ , então  $2x = 0,62$  e  $f(x) = 0,62$ . Se  $x = 0,76$ , então  $2x = 1,52$  e  $f(x) = 2 \cdot 0,76 - 1 = 0,52$ .

*Demonstração do Lema 5.3.* Consideremos a função auxiliar  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x) = 2x$ . Utilizando a interpretação da dinâmica de  $f$  dada acima, é fácil ver que, dados  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in [0, 1)$ ,  $f^n(x)$  pode ser obtido, a partir de  $F^n(x) = 2^n x$ , trocando sua parte inteira por 0. Em particular, as partes decimais de  $f^n(x)$  e  $F^n(x)$  coincidem. Agora, dado um subconjunto aberto  $V \subset [0, 1)$ , existe intervalo  $(a, b) \subset V$ . Nesse caso, como  $F^n(x) = 2^n x$ , segue que  $F^n((a, b)) = (2^n a, 2^n b)$  e, portanto, seu comprimento é dado por  $2^n b - 2^n a = 2^n(b - a)$ . Logo, para  $n$  suficientemente grande, temos que o comprimento do intervalo  $F^n((a, b))$  é maior do que 1. Consequentemente se considerarmos o conjunto obtido, trocando a parte inteira dos elementos de  $F^n((a, b))$  por 0, esse coincidirá com o intervalo  $[0, 1)$ . Finalmente, combinando esse fato com a observação anterior de que as partes decimais de  $F^n(x)$  e  $f^n(x)$  coincidem para todo  $x \in [0, 1)$  e  $n \in \mathbb{N}$ , segue que  $f^n((a, b)) = [0, 1)$ . Em particular,  $f^n(V) = [0, 1)$  como queríamos.  $\square$

Como consequência direta desse fato, temos o seguinte.

**Corolário 5.4.** *A transformação  $f$  é topologicamente mixing.*

*Demonstração.* Dados conjuntos abertos  $U$  e  $V$  de  $[0, 1]$ , do Lema 5.3, temos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{n_0}(U) \supseteq [0, 1)$ . Em particular,  $f^n(U) \supseteq [0, 1)$  para todo  $n \geq n_0$  e, consequentemente,  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  para todo  $n \geq n_0$ , provando que  $f$  é topologicamente mixing.  $\square$

Nosso próximo objetivo é observar que  $f$  é transitiva. Para tanto, provaremos inicialmente um resultado auxiliar que nos fornece uma caracterização de transitividade. Na prova, utilizaremos dois fatos básicos sobre a topologia do intervalo  $(0, 1)$ : o primeiro é que existe uma base enumerável de conjuntos abertos para a topologia de  $(0, 1)$ ; e o segundo é que vale o Teorema de Baire, ou seja, que a interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos de  $(0, 1)$  resulta num subconjunto denso de  $(0, 1)$ . Todos esses fatos podem ser consultados na referência Lima (1977).

**Proposição 5.5.** *A transformação  $f$  é transitiva se, e somente se, para todo par de subconjuntos abertos  $U$  e  $V$  contidos no intervalo  $(0, 1)$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

*Demonstração.* Se  $f$  é transitiva, então existe  $x \in [0, 1]$  cuja órbita é densa. Em particular, para todo par de subconjuntos abertos  $U$  e  $V$  em  $(0, 1)$ , existem números naturais  $n_1$  e  $n_2$  tais que  $f^{n_1}(x) \in U$  e  $f^{n_2}(x) \in V$ . Podemos supor sem perda de generalidade que  $n_1 \leq n_2$ . Nesse caso, temos que  $f^{n_1}(x) \in U$  e  $f^{n_2-n_1}(f^{n_1}(x)) \in V$  e, portanto, tomando  $n = n_2 - n_1$ , segue que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  como queríamos. Resta provarmos a recíproca

Observemos inicialmente que se  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ , então  $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$  (aqui  $f^{-n}(V)$  significa a pré-imagem de  $V$  por  $f^n$ ). De fato, dado  $x \in f^n(U) \cap V$ , existe  $y \in U \cap f^{-n}(V)$  tal que  $x = f^n(y)$ . Em particular,  $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$  provando a afirmação.

Fixemos um conjunto aberto  $V \subset (0, 1)$ . Segue, então, da hipótese e da observação anterior que dado qualquer conjunto aberto  $U \subset (0, 1)$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$ . Em particular, o conjunto  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(V)$  é denso em  $(0, 1)$ , uma vez que intersecta qualquer conjunto aberto. Além disso, não é difícil ver que  $f^{-n}(V)$  é um conjunto aberto para todo  $n \in \mathbb{N}$  (isto pode ser mostrado, por exemplo, usando a observação de que a pré-imagem de um intervalo aberto  $(a, b) \subset (0, 1)$  por  $f$  resulta em dois intervalos abertos: um  $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$  contido em  $(0, \frac{1}{2})$  e outro  $(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}, \frac{b}{2} + \frac{1}{2})$  contido em  $(\frac{1}{2}, 1)$ ). Em particular,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(V)$  é um conjunto aberto e denso em  $(0, 1)$ . Agora, como  $(0, 1)$  é um conjunto separável, sua topologia possui uma base enumerável de conjuntos abertos a qual denotaremos por  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Então, pelo argumento anterior, o conjunto  $Z = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(V_j)$  é uma interseção enumerável de conjuntos abertos e densos. Segue, portanto, do Teorema de Baire que  $Z$  é denso e, em particular, não vazio. Agora, dado qualquer ponto  $x \in Z$ , temos que  $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é denso em  $(0, 1)$  pois visita todos os elementos da base  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Isto conclui a prova da proposição.  $\square$

**Observação 5.1.** Observemos que um resultado análogo ao da proposição anterior já apareceu na Proposição 1.6. A diferença é que, nessa última, a transformação  $f$  é contínua enquanto, que na Proposição 5.5,  $f$  possui uma descontinuidade em  $x = \frac{1}{2}$ . No entanto, uma prova análoga a apresentada acima funciona no caso da referida proposição; a única diferença reside basicamente no argumento de que a pré-imagem  $f^{-n}(V)$  é um conjunto aberto: aqui utilizamos propriedades específicas de  $f$  enquanto que no caso da Proposição 1.6 segue direto da continuidade de  $f$ . Cabe ressaltar ainda que tal caracterização pode ser falsa para transformações descontínuas em geral; ela só funcionou em nosso contexto devido às características específicas da  $f$  dada por (5.1).

**Exercício 5.1.** Prove a Proposição 1.6.

Como consequência direta do Corolário 5.4 e da Proposição 5.5, obtemos o seguinte.

**Corolário 5.6.** *A transformação  $f$  é transitiva.*

**Exercício 5.2.** Denotemos por  $\text{Den}(f)$  o conjunto de todos os pontos cuja órbita por  $f$  é densa em  $[0, 1]$ . Utilizando a prova da Proposição 5.5, mostre que  $\text{Den}(f)$  é denso em  $[0, 1]$ . Em particular, existe uma infinidade de pontos cuja órbita por  $f$  é densa em  $[0, 1]$ .

### 5.1.2 Pontos periódicos

Passaremos agora a estudar o conjunto  $\text{Per}(f)$  dos pontos periódicos de  $f$ . É fácil ver que tal conjunto é não vazio. De fato,  $f(0) = 0$  e, portanto,  $0 \in \text{Per}(f)$ . Mais ainda, não é difícil exibir diversos elementos de  $\text{Per}(f)$ . Por exemplo,



- $x = \frac{1}{3}$  pertence a  $\text{Per}(f)$ , pois  $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$  e  $f^2(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ . Ou seja,  $x = \frac{1}{3}$  é ponto periódico de período 2;
- $x = \frac{1}{7}$  pertence a  $\text{Per}(f)$ , pois  $f(\frac{1}{7}) = \frac{2}{7}$ ,  $f^2(\frac{1}{7}) = \frac{4}{7}$  e  $f^3(\frac{1}{7}) = \frac{1}{7}$ . Ou seja,  $x = \frac{1}{7}$  é um ponto periódico de período 3;
- $x = \frac{1}{5}$  pertence a  $\text{Per}(f)$ , pois  $f(\frac{1}{5}) = \frac{2}{5}$ ,  $f^2(\frac{1}{5}) = \frac{4}{5}$ ,  $f^3(\frac{1}{5}) = \frac{3}{5}$  e  $f^4(\frac{1}{5}) = \frac{1}{5}$ . Ou seja,  $x = \frac{1}{5}$  é um ponto periódico de período 4.

De fato, vale o seguinte resultado.

**Proposição 5.7.**  *$f$  tem pontos periódicos de todos os períodos. Mais precisamente, dado  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x \in [0, 1]$  tal que  $f^n(x) = x$  e  $f^k(x) \neq x$  para todo  $1 \leq k \leq n-1$ .*

Mais do que isso, dado  $n \in \mathbb{N}$ , podemos facilmente exibir um ponto  $x \in [0, 1]$  cujo período é  $n$ . Por exemplo, tome  $x = \frac{1}{2^n - 1}$ . Nesse caso, sua órbita é dada por

$$O\left(\frac{1}{2^n - 1}\right) = \left\{ \frac{1}{2^n - 1}, \frac{2^1}{2^n - 1}, \frac{2^2}{2^n - 1}, \dots, \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}, \frac{1}{2^n - 1}, \frac{2^1}{2^n - 1}, \dots \right\}$$

e esse ponto de fato tem período  $n$  provando nossa afirmação. Como consequência direta da proposição anterior, obtemos que

**Corolário 5.8.**  *$f$  possui infinitos pontos periódicos.*

Para que possamos entender ainda melhor a estrutura do conjunto  $\text{Per}(f)$ , estudaremos na sequência o conjunto

$$\text{Fix}(f^n) = \{x \in [0, 1]; f^n(x) = x\}.$$

Isto é, o conjunto dos pontos fixos de  $f^n$ . Obviamente  $\text{Fix}(f^n) \subset \text{Per}(f)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso,  $\text{Fix}(f^n)$  contém todos os pontos periódicos cujo período é um divisor de  $n$ . De fato, se  $n = k \cdot m$  com  $k, m \in \mathbb{N}$  e  $f^m(x) = x$ , então

$$f^n(x) = \underbrace{f^m \circ \dots \circ f^m}_{k\text{-vezes}}(x) = x.$$

Em particular, temos nesse caso que  $\text{Fix}(f^m) \subset \text{Fix}(f^n)$ . Um primeiro resultado a respeito do conjunto em questão é o seguinte.

**Proposição 5.9.** *Dado  $n \in \mathbb{N}$ , o conjunto  $\text{Fix}(f^n)$  tem exatamente  $2^n$  elementos.*

*Demonstração.* A justificativa desse resultado será feita por um argumento um pouco informal, analisando o gráfico de  $f^n$ . Sua prova pode, porém, ser escrita de maneira formal e deixamos isso como exercício ao leitor.

Começemos observando que, dada uma função  $g$  arbitrária,  $x$  é ponto fixo de  $g$  se e só se  $g(x) = x$ . Isto significa, em termos do gráfico de  $g$ , que  $x$  é ponto fixo de  $g$  se,

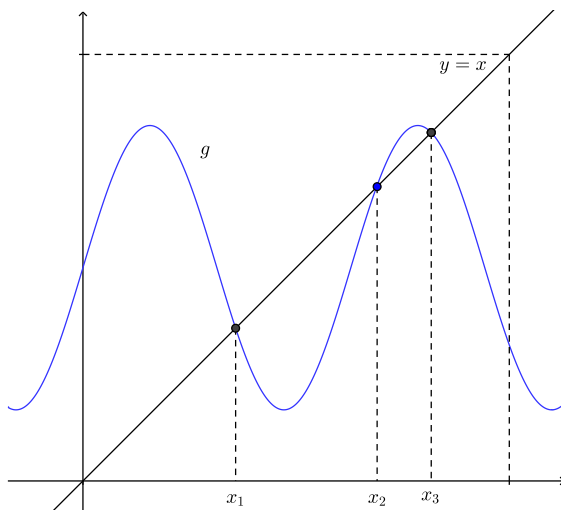


Figura 5.2: Gráfico de  $g$  e seus pontos fixos.

e somente se, o ponto de coordenadas  $(x, x)$  pertence ao gráfico de  $g$  (lembre-se que o gráfico de  $g$  é o conjunto de todos os pontos da forma  $(x, g(x))$ ). Isto implica que os pontos fixos de  $g$  são exatamente aqueles pontos onde a reta  $y = x$  intersecta o gráfico de  $g$ . Por exemplo, na Figura 5.2, os pontos fixos de  $g$  são exatamente  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ .

Voltando agora para o caso específico da nossa função  $f$  dada em (5.1), os gráficos de  $f$ ,  $f^2$  e  $f^3$  (lembre-se de que  $f^n$  significa o  $n$ -ésimo iterado de  $f$  e não  $f$  elevado na  $n$ -ésima potência) são descritos na Figura 5.3.

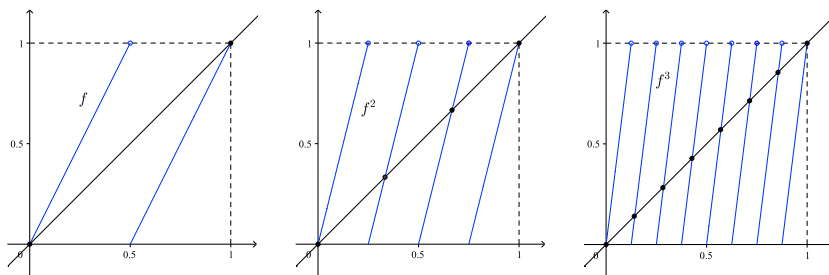


Figura 5.3: Gráficos de  $f$ ,  $f^2$  e  $f^3$  respectivamente.

Observemos que  $f$  tem  $2^1$  “ramos” (segmentos de reta) que vão de  $y = 0$  a  $y = 1$ ,

$f^2$  tem  $2^2$  ramos que vão de  $y = 0$  a  $y = 1$  e  $f^3$  tem  $2^3$  ramos que vão de  $y = 0$  a  $y = 1$ . De maneira geral,  $f^n$  tem exatamente  $2^n$  ramos que vão de  $y = 0$  a  $y = 1$ . Agora observe que cada um desses ramos intersecta a reta  $y = x$  em exatamente um ponto. Finalmente, de acordo com as observações anteriores, esses são exatamente os pontos fixos de  $f^n$ . Logo  $f^n$  tem exatamente  $2^n$  pontos fixos conforme afirmado.  $\square$

Seguindo nossa análise, observemos que cada um dos ramos de  $f^n$  é um segmento de reta que vai do ponto de coordenadas  $\left(\frac{k}{2^n}, 0\right)$  ao ponto de coordenadas  $\left(\frac{k+1}{2^n}, 1\right)$  para  $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ . Em particular, como cada um deles intersecta a reta  $y = x$ , para todo  $k \in \{1, 2, \dots, 2^n - 2\}$ , temos que  $f^n$  tem um ponto fixo  $x$  pertencente ao intervalo  $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ . Sendo assim, dados  $n \in \mathbb{N}$  e  $k \in \{1, \dots, 2^n - 2\}$ ,  $f$  tem pelo menos um ponto periódico no intervalo  $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ . Agora, dado um conjunto aberto qualquer  $U \subset [0, 1]$ , existem  $n \in \mathbb{N}$  e  $k \in \{1, 2, \dots, 2^n - 2\}$  tais que  $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \subset U$ . Combinando essas observações, concluímos que  $f$  tem um ponto periódico em  $U$ . Consequentemente obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 5.10.** *O conjunto dos pontos periódicos de  $f$  é denso no intervalo  $[0, 1]$ . Isto é,  $\overline{\text{Per}(f)} = [0, 1]$ . Em particular,  $\Omega(f) = [0, 1]$ .*

Como consequência desse fato combinado com os resultados da seção anterior, obtemos que  $f$  é um sistema caótico (veja Seção 1.17).

Para sistemas não invertíveis, como é o caso da nossa transformação  $f$ , podemos considerar também a noção de pontos *pré-periódicos* ou *eventualmente periódicos*: dizemos que  $x$  é um ponto pré-periódico se existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(x)$  é um ponto periódico. Ou seja,  $x$  é pré-periódico se existem  $k, n \in \mathbb{N}$  tais que  $f^n(f^k(x)) = f^k(x)$ . Note que todo ponto periódico é também pré-periódico bastando para isso tomar  $k = 0$ . Porém nem todo ponto pré-periódico é periódico. Por exemplo, no caso da nossa transformação  $f$  dada em (5.1), o ponto  $x = \frac{1}{8}$  é pré-periódico, pois  $f(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4}$ ,  $f^2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{2}$ ,  $f^3(\frac{1}{8}) = 0$  e 0 é um ponto periódico de  $f$ , porém obviamente  $x = \frac{1}{8}$  não é periódico.

**Exercício 5.3.** Verifique que todos os pontos da forma  $x = \frac{1}{2^n}$  com  $n \in \mathbb{N}_*$  são pré-periódicos, porém não são periódicos para  $f$  dada em (5.1). Existem outros? É possível caracterizá-los?

### 5.1.3 $f$ possui a propriedade do sombreamento

Nosso objetivo agora é observar que a transformação  $f$  dada por (5.1) possui a propriedade do sombreamento. Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma  $\delta$ -pseudo-órbita de  $f$ . Isto é, uma sequência de pontos em  $[0, 1]$  que satisfaz

$$d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \delta \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que a  $\delta$ -pseudo-órbita  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaz  $x_n = x_{n+k}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja, os pontos da sequência se repetem de  $k$  em  $k$ , então dizemos que esta se trata de uma  $\delta$ -pseudo-órbita *periódica*. Conforme já observado na Seção 1.18, uma pseudo-órbita de  $f$  pode ser interpretada como “uma órbita com pequenos erros”. Nosso próximo resultado nos diz que se esses erros forem suficientemente pequenos, então existe uma órbita “de verdade” de  $f$  que está bem próxima da pseudo-órbita.

**Proposição 5.11** (Propriedade do Sombreamento). *Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para toda  $\delta$ -pseudo-órbita  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $f$  existe  $x \in [0, 1]$  satisfazendo*

$$d(f^n(x), x_n) < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

*Além disso, se  $\varepsilon > 0$  for suficientemente pequeno, então o ponto  $x$  que satisfaz (5.2) é único. Mais ainda, se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma  $\delta$ -pseudo-órbita periódica, então o ponto  $x$  que a sombrea, isto é, que satisfaz (5.2), é um ponto periódico.*

Uma ideia da prova é a seguinte: cada ponto  $x_n$  tem exatamente duas pré-imagens e exatamente uma delas, a qual denotaremos por  $y_{n-1}''$ , está a uma distância menor do que  $\frac{\delta}{2}$  de  $x_{n-1}$ . Analogamente  $y_{n-1}''$  tem exatamente duas pré-imagens e exatamente uma delas, a qual denotaremos por  $y_{n-2}''$ , está a uma distância menor do que  $\frac{\delta}{2}$  de  $x_{n-2}$ . Procedendo dessa forma, obtemos um ponto  $y_0''$  cuja órbita satisfaz  $d(f^j(y_0''), x_j) < \delta$  para todo  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Agora a sequência de pontos  $(y_0'')_{n \in \mathbb{N}}$  converge a um ponto, digamos,  $x$ . Esse ponto  $x$  é exatamente o ponto buscado bastando para tanto tomar, por exemplo,  $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ .

**Exercício 5.4.** Implemente a ideia anterior de maneira precisa para mostrar que  $f$  tem a propriedade do sombreamento.

Na sequência, apresentaremos uma demonstração um pouco diferente desse fato que pode ser mais facilmente adaptada a contextos mais gerais. Para tanto, recordemos que, dados  $x \in [0, 1]$  e  $\varepsilon > 0$ , a bola de centro em  $x$  e raio  $\varepsilon$  em  $[0, 1]$  é dada por

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in [0, 1]; d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Ou seja,  $B(x, \varepsilon)$  é o conjunto de todos os pontos de  $[0, 1]$  cuja distância a  $x$  é menor do que  $\varepsilon$ .

**Demonstração.** Dado  $\varepsilon > 0$ , fixemos  $\delta > 0$  de modo que  $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ . Além disso, supomos sem perda de generalidade que  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ . Consideremos ainda os intervalos  $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$  e  $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$  e as transformações  $g_1: [0, 1] \rightarrow \overline{I_1}$  e  $g_2: [0, 1] \rightarrow I_2$  dadas por

$$g_1(x) = \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad g_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

É fácil ver que  $f$  restrita a cada um dos intervalos  $I_1$  e  $I_2$  é injetiva e que suas inversas são dadas respectivamente por  $g_1$  e  $g_2$ . De outra forma,

$$(f|_{I_1})^{-1} = g_1|_{[0,1)} \quad \text{e} \quad (f|_{I_2})^{-1} = g_2. \quad (5.3)$$

Além disso, dado  $i = 1, 2$ , para todo  $x, y \in [0, 1]$ , temos que

$$d(g_i(x), g_i(y)) = |g_i(x) - g_i(y)| = \frac{1}{2}|x - y| = \frac{1}{2}d(x, y).$$

Ou seja,  $g_1$  e  $g_2$  contraem distâncias a uma taxa de  $\frac{1}{2}$ .

Observemos que, como  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $[0, 1]$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in I_1$  ou  $x_n \in I_2$ . Consideremos, então, a sequência  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  obtida de tal forma que  $k_n = 1$  se  $x_n \in I_1$  e  $k_n = 2$  se  $x_n \in I_2$ . Agora, como  $g_{k_n}(f(x_n)) = x_n$  e  $g_{k_n}$  contrai distâncias a uma taxa de  $\frac{1}{2}$ ,

$$g_{k_n}\left(\overline{B(f(x_n), \varepsilon)}\right) \subset \overline{B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2}\right)}. \quad (5.4)$$

Logo, como  $d(x_n, f(x_{n-1})) < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ , segue que  $\overline{B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2}\right)} \subset \overline{B(f(x_{n-1}), \varepsilon)}$  e, portanto,

$$g_{k_n}\left(\overline{B(f(x_n), \varepsilon)}\right) \subset \overline{B(f(x_{n-1}), \varepsilon)} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Procedendo recursivamente, podemos considerar o conjunto

$$K_n = g_{k_0} \circ g_{k_1} \circ \dots \circ g_{k_{n-1}}\left(\overline{B(f(x_{n-1}), \varepsilon)}\right).$$

De acordo com a definição e a observação anterior, temos que  $K_{n+1} \subset K_n$ . Além disso, como cada  $g_{k_n}$  contrai distâncias a uma taxa de  $\frac{1}{2}$ , o diâmetro de  $K_n$  converge a zero à medida que  $n$  cresce. Ou seja,  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência encaixada de conjuntos compactos com diâmetro convergindo a zero. Logo existe um único  $x$  na interseção de todos eles, sendo exatamente o ponto que buscamos. De fato, se  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ , então  $x \in K_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isto é,

$$x \in g_{k_0} \circ g_{k_1} \circ \dots \circ g_{k_{n-1}} \circ g_{k_n}\left(\overline{B(f(x_n), \varepsilon)}\right).$$

Logo, observando que  $1 \in K_{n+1}$  se, e somente se,  $k_j = 2$  para todo  $j = 0, 1, \dots, n$ , segue de (5.3) que

$$f^n(x) \in g_{k_n}\left(\overline{B(f(x_n), \varepsilon)}\right).$$

Portanto, utilizando (5.4), segue que  $f^n(x) \in \overline{B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2}\right)}$ . Em particular,  $d(f^n(x), x_n) < \varepsilon$ . Finalmente, como isto vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $x$  satisfaz (5.2).

Para obtermos a unicidade, tome  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno de tal forma que a Proposição 5.2 valha com  $2\varepsilon$  no lugar de  $\varepsilon$ . Por exemplo, de acordo com a prova da referida proposição, basta tomarmos  $\varepsilon < \frac{1}{20}$ . Nesse caso, se  $x$  e  $y$  são pontos que satisfazem  $d(f^n(x), x_n) < \varepsilon$  e  $d(f^n(y), x_n) < \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , segue da desigualdade triangular que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq d(f^n(x), x_n) + d(x_n, f^n(y)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto, segue da Proposição 5.2 que  $x = y$ , provando a unicidade. Agora, se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  for uma  $\delta$ -pseudo-órbita periódica, isto é, se  $x_{n+k} = x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então

$$d(f^n(f^k(x)), x_n) = d(f^{k+n}(x), x_n) = d(f^{k+n}(x), x_{n+k}) < \varepsilon$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Ou seja, a órbita do ponto  $f^k(x)$  também sombreia  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Logo, da unicidade dada acima, segue que  $x = f^k(x)$ . Ou seja,  $x$  é um ponto periódico, concluindo a demonstração.  $\square$

Como consequência do resultado anterior, obtemos que se  $g$  é uma função próxima de  $f$ , então  $g$  é (quase) conjugada a  $f$ .

**Proposição 5.12.** *Consideremos  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  dados pela Proposição 5.11 com  $\varepsilon$  suficientemente pequeno de modo que valha a unicidade na referida proposição. Seja  $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma transformação satisfazendo*

$$\sup_{x \in [0, 1]} d(f(x), g(x)) < \delta. \quad (5.5)$$

*Então, existe uma aplicação  $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que*

$$h \circ g = f \circ h.$$

*Demonstração.* Dado  $x \in [0, 1]$ , consideremos a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dada por  $x_n = g^n(x)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Observemos que tal sequência é uma  $\delta$ -pseudo-órbita de  $f$ . De fato, de (5.5) segue que

$$d(f(x_n), x_{n+1}) = d(f(g^n(x)), g^{n+1}(x)) = d(f(g^n(x)), g(g^n(x))) < \delta$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo, pela Proposição 5.11, segue que existe  $y \in [0, 1]$  tal que  $d(f^n(y), x_n) < \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isto é,

$$d(f^n(y), g^n(x)) < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, como  $\varepsilon$  é pequeno, tal  $y$  é único. Definamos, então,  $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  como  $h(x) = y$ , sendo  $x$  associado a  $y$  pela propriedade do sombreamento conforme descrito acima. Da unicidade dada na Proposição 5.11, temos que  $h$  está bem definida. Além disso, segue direto da definição de  $h$  que

$$d(f^{n+1}(h(x)), g^{n+1}(x)) < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

que pode ser reescrito como

$$d(f^n(f(h(x))), g^n(g(x))) < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, a órbita de  $f(h(x))$  sombreia a  $g$ -órbita de  $g(x)$ . Portanto, de acordo com a definição de  $h$ , segue que  $h(g(x)) = f(h(x))$ . Ou seja,  $h \circ g = f \circ h$ , concluindo a demonstração.  $\square$

**Observação 5.2.** Trocando a condição (5.5) por uma condição um pouco mais forte (veja Exercício 5.5), é possível mostrar que a transformação  $h$  dada na proposição anterior é de fato uma bijeção: sob tais condições, qualquer função  $g$  próxima de  $f$  (num sentido apropriado) também terá a propriedade do sombreamento. Assim, trocando os papéis de  $f$  e  $g$  na demonstração anterior, construímos  $h^{-1}$ .

Uma observação final sobre a propriedade do sombreamento é que o ponto  $x$ , cuja órbita sombreia  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , depende continuamente de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  na topologia produto. Esse é o resultado da próxima proposição. Consideremos novamente  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$ , dados pela Proposição 5.11, com  $\varepsilon$  suficientemente pequeno de modo que valha a unicidade na referida proposição. Supomos ainda que  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno de forma que valha a Proposição 5.1 com  $3\varepsilon$  no lugar de  $\varepsilon$ .

**Proposição 5.13.** *Sejam  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\delta$ -pseudo-órbitas de  $f$  e  $x$  e  $z$  pontos associados a  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  respectivamente pela Proposição 5.11. Dado  $\eta > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que se*

$$\sup_{0 \leq n \leq N} d(x_n, z_n) < \varepsilon$$

então  $d(x, z) < \eta$ .

*Demonstração.* Começamos observando que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que se  $d(f^n(y), f^n(w)) < 3\varepsilon$  para todo  $0 \leq n \leq N$ , então  $d(y, w) < \eta$ . De fato, tome  $N$  de forma que  $\frac{3\varepsilon}{2^N} < \eta$ . Nesse caso, se  $d(f^n(y), f^n(w)) < 3\varepsilon$  para todo  $0 \leq n \leq N$ , podemos aplicar a Proposição 5.1 recursivamente  $N$  vezes (lembre-se que estamos assumindo que  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno), obtendo

$$3\varepsilon > d(f^N(y), f^N(w)) \geq 2^N d(y, w).$$

Em particular,  $d(y, w) \leq \frac{3\varepsilon}{2^N} < \eta$  conforme afirmado.

Utilizando agora nossa hipótese juntamente com a desigualdade triangular e o fato de que  $x$  e  $z$  sombreiam  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  respectivamente, obtemos que

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^n(z)) &\leq d(f^n(x), x_n) + d(x_n, z_n) + d(z_n, f^n(z)) \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

para todo  $0 \leq n \leq N$ . Logo, da afirmação anterior, segue que  $d(x, z) < \eta$  como queríamos.  $\square$

**Exercício 5.5.** Sejam  $\delta > 0$  e  $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma função tal que

- (i)  $g$  é contínua em  $[0, \frac{1}{2}]$  e em  $[\frac{1}{2}, 1]$  e diferenciável em  $(0, \frac{1}{2})$  e em  $(\frac{1}{2}, 1)$ ;
- (ii)

$$\sup_{x \in [0, 1]} d(f(x), g(x)) < \delta;$$

(iii)

$$\sup_{x \in (0, \frac{1}{2})} d(f'(x), g'(x)) < \delta \quad \text{e} \quad \sup_{x \in (\frac{1}{2}, 1)} d(f'(x), g'(x)) < \delta.$$

Assuma que  $\delta > 0$  é suficientemente pequeno.

- (a) Mostre que  $g$  é expansora. Isto é, que vale uma propriedade semelhante àquela dada na Proposição 5.1 (possivelmente trocando 2 por uma constante  $c > 1$ ).
- (b) Tomando  $\delta$  suficientemente pequeno, é possível garantir que  $g$  é transitiva e topologicamente *mixing*?
- (c) Estude os conjuntos  $\text{Per}(g)$  e  $\text{Fix}(g^n)$ .
- (d) Mostre que  $g$  satisfaz a propriedade do sombreamento (Proposição 5.11). Para esse item, observe que na prova utilizamos que os *ramos inversos*  $g_1$  e  $g_2$  de  $f$  contraem distância a uma taxa de  $1/2$ . Isto segue do fato que (localmente)  $f$  expande distâncias a uma taxa de 2. Se a taxa de expansão fosse  $c > 1$ , então a taxa de contração de  $g_1$  e  $g_2$  seria  $c^{-1}$ .
- (e) Mostre que  $h$ , dada na Proposição 5.12, é uma bijeção (lembre-se da Observação 5.2). Pode-se dizer alguma coisa a respeito da continuidade de  $h$  e  $h^{-1}$ ? Lembre-se da Proposição 5.13.

## 5.2 Dinâmicas relacionadas

Nesta seção, veremos diversas transformações que são intimamente relacionadas com a  $f$  que estudamos até agora.

### 5.2.1 Uma transformação no círculo unitário $\mathcal{S}^1$

Denotemos o círculo unitário do plano cartesiano por  $\mathcal{S}^1$ . Isto é,

$$\mathcal{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

É fácil ver que  $\mathcal{S}^1$  pode ser representado também como

$$\mathcal{S}^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Consideramos, então, a transformação  $f_1 : \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^1$  dada por

$$f_1(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta). \quad (5.6)$$

Ou seja,  $f_1$  simplesmente “duplica” o ângulo  $\theta$ . Por exemplo, se  $x$  é o ponto de  $\mathcal{S}^1$  cujo ângulo no sentido anti-horário com a parte positiva do eixo das abscissas é  $\frac{\pi}{3}$  radianos (que



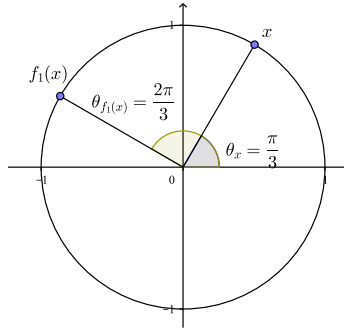


Figura 5.4: Representação de  $x$  e  $f_1(x)$  no círculo unitário.

é equivalente a  $60^\circ$ ), então  $f_1(x)$  será o ponto de  $S^1$  cujo ângulo no sentido anti-horário com a parte positiva do eixo das abscissas é  $\frac{2\pi}{3}$  radianos (que é equivalente a  $120^\circ$ ). No que segue, sempre consideraremos o ângulo  $\theta$  em radianos, nunca em graus.

Dados dois pontos  $x$  e  $y$  em  $S^1$ , consideremos os raios que vão da origem a  $x$  e da origem a  $y$  (veja Figura 5.5). Agora esses raios definem dois ângulos: um que vai de  $x$  a  $y$  e outro que vai de  $y$  pra  $x$ . Definiremos a *distância entre  $x$  e  $y$  em  $S^1$*  como sendo o menor destes ângulos. Isto é,

$$d_{S^1}(x, y) = \text{menor ângulo formado por } x \text{ e } y \text{ em } S^1.$$

Isto é equivalente a dizer que a distância entre  $x$  e  $y$  em  $S^1$  é o comprimento do menor arco sobre  $S^1$  que conecta  $x$  e  $y$ .

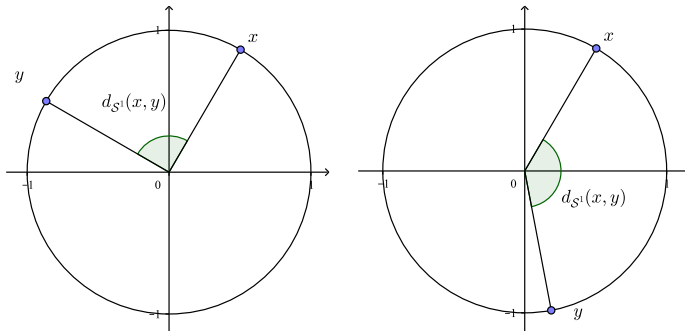


Figura 5.5: Distância entre  $x$  e  $y$ .

Para os leitores com algum conhecimento de topologia geral, deixamos o seguinte exercício.

**Exercício 5.6.** Verifique que  $d_{S^1}$  é de fato uma métrica em  $S^1$ . Além disso, mostre que  $(S^1, d_{S^1})$  é um espaço métrico compacto.

Não é difícil verificar que  $f_1$  tem algumas propriedades dinâmicas muito semelhantes as de  $f$  dada em (5.1). Por exemplo,

**Exercício 5.7.** (a) Mostre que  $f_1$  é expansora. Isto é, vale uma propriedade semelhante àquela dada na Proposição 5.1.

(b) Mostre que  $f_1$  é transitiva e topologicamente *mixing*.

(c) Estude os conjuntos  $\text{Per}(f_1)$  e  $\text{Fix}(f_1^n)$ .

(d) Mostre que  $f_1$  satisfaz a propriedade do sombreamento (Proposição 5.11) e a Proposição 5.13.

(e) Mostre que  $f_1$  satisfaz uma propriedade análoga a Proposição 5.12.

Por outro lado,  $f_1$  possui uma propriedade muito importante que a distingue de  $f$ . A saber,  $f_1$  é contínua enquanto que  $f$  possui uma descontinuidade em  $x = \frac{1}{2}$ . Esse fato tem diversas consequências importantes. Por exemplo, no item e) do exercício anterior vimos que vale para  $f_1$  uma proposição semelhante à Proposição 5.12. Ou seja, se  $\delta > 0$  for suficientemente pequeno e  $g: S^1 \rightarrow S^1$  é uma transformação satisfazendo

$$\sup_{x \in S^1} d_{S^1}(f_1(x), g(x)) < \delta, \quad (5.7)$$

então existe uma aplicação  $h: S^1 \rightarrow S^1$  tal que  $h \circ g = f_1 \circ h$ . Agora, nesse contexto, se  $g$  for contínua, então  $h$  também será contínua. De fato, dado  $\eta > 0$ , mostremos que existe  $\rho > 0$  tal que se  $x, z \in S^1$  e  $d_{S^1}(x, z) < \rho$ , então  $d_{S^1}(h(x), h(z)) < \eta$ . Tomemos  $N \in \mathbb{N}$  associado a  $\eta$  pela Proposição 5.13 (no item d) do exercício anterior vimos que tal proposição é também satisfeita por  $f_1$ ). Agora, como  $g$  é (uniformemente) contínua, existe  $\rho > 0$  tal que se  $x, z \in S^1$  satisfazem  $d_{S^1}(x, z) < \rho$ , então  $d_{S^1}(g^n(x), g^n(z)) < \varepsilon$  para todo  $0 \leq n \leq N$ . Portanto, como  $h(x)$  e  $h(z)$  são definidos exatamente como os pontos cujas órbitas sombreiam respectivamente as  $\delta$ -pseudo-órbitas  $(g^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(g^n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ , segue da Proposição 5.13 que  $d_{S^1}(h(x), h(z)) < \eta$ , como queríamos. Observemos que, no caso da transformação  $f$  dada em (5.1), as condições de que  $g$  é contínua e satisfaz (5.5) são mutuamente excludentes: se  $g$  é contínua, então  $g$  não satisfaz (5.5) e vice-versa. Logo não podemos reproduzir um argumento semelhante ao anterior no contexto de  $f$  para garantir que a transformação  $h$  dada na Proposição 5.12 seja contínua. Esse fato nos mostra um pouco da diferença entre os dois contextos.

Vimos, então, que se  $g: S^1 \rightarrow S^1$  é uma transformação contínua próxima de  $f_1$ , então existe uma transformação contínua  $h: S^1 \rightarrow S^1$  tal que  $h \circ g = f_1 \circ h$ . Além disso, como na Observação 5.2 (recorde também o Exercício 5.5), se trocarmos a condição (5.7) por uma condição um pouco mais forte é possível mostrar que a transformação  $h$  dada acima é de fato uma bijeção. Nesse contexto, pelas observações anteriores, tanto  $h$  quanto  $h^{-1}$  serão contínuas. Ou seja,  $h$  é um homeomorfismo e as transformações  $f_1$  e  $g$  são conjugadas. Consequentemente  $f_1$  é estruturalmente estável (veja Seções 1.20 e 1.21).

**Exercício 5.8.** Baseado nas análises anteriores, apresente condições sobre a perturbação  $g: S^1 \rightarrow S^1$  de  $f_1$ , que garantam que  $g$  também satisfaça a propriedade do sombreamento. Como consequência, obtenha nesse contexto, que  $f_1$  e  $g$  são conjugadas.

### Entropia topológica de $f_1$

Observemos que, como  $f_1: S^1 \rightarrow S^1$  é uma transformação contínua definida num espaço métrico compacto  $(S^1, d_{S^1})$ , podemos considerar sua entropia topológica (veja Seção 1.22).

**Proposição 5.14.** *A entropia topológica de  $f_1: S^1 \rightarrow S^1$  é dada por*

$$h_{\text{top}}(f_1) = \log 2.$$

*Demonstração.* Conforme observado na prova da Proposição 3.3,

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(f_1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h_{\text{top}}(f_1, \varepsilon) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} h_{\text{top}}\left(f_1, \frac{1}{2^k}\right). \end{aligned}$$

Logo, ao invés de considerarmos o limite acima quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , consideraremos o limite restrito ao longo da sequência  $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Observemos que, como localmente  $f_1$  duplica o ângulo, se  $d_{S^1}(x, y) < \frac{1}{2^n}$ , então

$$\begin{aligned} d_{S^1, n}(x, y) &= \max\{d_{S^1}(x, y), d_{S^1}(f_1(x), f_1(y)), \dots, d_{S^1}(f_1^{n-1}(x), f_1^{n-1}(y))\} \\ &= d_{S^1}(f_1^{n-1}(x), f_1^{n-1}(y)) \\ &= 2^{n-1} d_{S^1}(x, y). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Agora, como o perímetro do círculo unitário com relação a  $d_{S^1}$  é  $2\pi$ , qualquer subconjunto de  $S^1$  com  $\lfloor 2^{n+k+1}\pi \rfloor + 1$  pontos, em que  $\lfloor 2^{n+k+1}\pi \rfloor$  denota o maior inteiro menor ou igual a  $2^{n+k+1}\pi$ , terá pelo menos dois deles satisfazendo  $d_{S^1}(x, y) < \frac{1}{2^{n+k}}$ . Nesse caso, segue de (5.8) que  $d_{S^1, n}(x, y) < \frac{1}{2^{k+1}}$ . Consequentemente

$$\text{sep}\left(n, \frac{1}{2^{k+1}}, f_1\right) \leq \lfloor 2^{n+k+1}\pi \rfloor \leq 2^{n+k+3}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(f_1) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log\left(\text{sep}\left(n, \frac{1}{2^{k+1}}, f_1\right)\right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log\left(2^{n+k+3}\right) \\ &= \log 2. \end{aligned}$$

Por outro lado, novamente como o perímetro do círculo unitário com relação a  $d_{S^1}$  é  $2\pi$ , podemos escolher um subconjunto de  $S^1$  com pelo menos  $\lfloor 2^{n+k+1}\pi \rfloor$  pontos de forma que quaisquer dois pontos distintos desse conjunto satisfaçam

$$\frac{1}{2^{n+k}} \leq d_{S^1}(x, y). \quad (5.9)$$

Em particular, quaisquer dois pontos desse conjunto também satisfazem

$$d_{S^1}(x, y) \leq \frac{1}{2^{n+k-1}}.$$

Do contrário, se dois pontos satisfizessem  $d_{S^1}(x, y) > \frac{1}{2^{n+k-1}}$ , então não seria possível distribuir os outros  $\lfloor 2^{n+k+1}\pi \rfloor - 2$  pontos de forma que quaisquer dois pontos distintos satisfaçam (5.9) (por quê?). Consequentemente podemos usar (5.8) e (5.9) para obter que quaisquer dois pontos distintos desse subconjunto satisfazem  $d_{S^1, n}(x, y) \geq \frac{1}{2^{k+1}}$ . Logo

$$\text{sep}\left(n, \frac{1}{2^{k+1}}, f_1\right) \geq \lfloor 2^{n+k+1}\pi \rfloor \geq 2^{n+k+1}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(f_1) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log\left(\text{sep}\left(n, \frac{1}{2^{k+1}}, f_1\right)\right) \\ &\geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log\left(2^{n+k+1}\right) \\ &= \log 2. \end{aligned}$$

Combinando as duas observações, concluímos nossa demonstração.  $\square$

**Exercício 5.9.** Usando as ideias da prova anterior, calcule a entropia da aplicação tenda dada na Seção 4.3. Além disso, utilizando os resultados da Seção 4.4.4, obtenha a entropia da aplicação  $f_4: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por  $f_4(x) = 4x(1-x)$ .

### 5.2.2 $f_1$ como uma transformação agindo no plano complexo

Uma observação simples é que podemos pensar no círculo unitário  $S^1$  como estando contido no plano complexo  $\mathbb{C}$  ao invés de  $\mathbb{R}^2$ . Nesse caso,  $S^1$  pode ser representado por

$$S^1_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}.$$

Ou seja, conjunto dos pontos de  $\mathbb{C}$  cuja norma é 1. Agora, como todo número complexo  $z$  de norma 1 pode ser representado na forma trigonométrica como  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  para algum ângulo  $\theta$ , a transformação  $f_1$  pode ser reescrita como

$$f_1(\cos \theta + i \sin \theta) = \cos 2\theta + i \sin 2\theta.$$

Por fim, lembrando que se  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ , então  $z^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ , a transformação  $f_1$  pode ser reescrita de maneira equivalente como  $f_1 : \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^1$  com

$$f_1(z) = z^2.$$

Ou seja,  $f_1$  pode ser também pensada como uma transformação, agindo no círculo unitário complexo, que consiste simplesmente em “elevar ao quadrado”.

### 5.2.3 A transformação $2x \bmod 1$

Começemos relembando brevemente a noção de congruência. Dizemos que dois números reais  $x$  e  $y$  são congruentes módulo  $m$  e descrevemos esse fato como  $x \equiv y \bmod m$ , se a diferença  $x - y$  entre eles for um múltiplo inteiro de  $m$ . Por exemplo, 19 e 103 são congruentes módulo 4 ( $19 \equiv 103 \bmod 4$ ), pois  $103 - 19 = 4 \cdot 21$ . De forma análoga, 25,43 é congruente a 16,43 módulo 3 pois  $25,43 - 16,43 = 9$ , sendo um múltiplo inteiro de 3.

No que segue, estaremos interessados num caso bem particular de congruências que são as congruências módulo 1. Observemos que, de acordo com a definição acima, dizer que dois números  $x$  e  $y$  são congruentes módulo 1 é equivalente a dizer que a diferença  $x - y$  é um número inteiro (a diferença entre dois números é um múltiplo inteiro de 1 se, e somente se, tal diferença é um número inteiro). Em particular, todo número real  $x$  é congruente módulo 1 a um único número do intervalo  $[0, 1)$ . A saber, se  $x \geq 0$ , então ele é congruente a sua parte decimal. Por exemplo,

$$123,345\,98 \equiv 0,345\,98 \bmod 1$$

pois a diferença entre 123,345 98 e 0,345 98 é um número inteiro. Já se  $x < 0$  então  $x$  é congruente a “1 menos a parte decimal de  $|x|$ ”. Por exemplo,

$$-32,12 \equiv 1 - 0,12 = 0,88 \bmod 1$$

visto que a diferença entre  $-32,12$  e  $0,88$  é um número inteiro. Tendo isso em mente, sempre que escrevermos “ $x \bmod 1$ ” estaremos nos referindo ao único número em  $[0, 1)$  que é congruente a  $x$ .

Observemos que, ao considerarmos a relação de congruência módulo 1 em  $\mathbb{R}$ , a distância Euclidiana induz uma métrica em  $[0, 1)$  dada por

$$d_{\equiv}(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}.$$

Por exemplo, de acordo com essa métrica, os pontos  $x = 0,001$  e  $y = 0,999$  estão bem próximos. De fato,

$$d_{\equiv}(x, y) = \min\{|0,001 - 0,999|, 1 - |0,001 - 0,999|\} = 0,002.$$

Em particular, segundo a distância  $d_{\equiv}$ , se  $x$  se aproxima de 0, então  $x$  também está se aproximando de 1 e vice-versa, o que é natural visto que o 0 e o 1 são o mesmo elemento segundo a congruência módulo 1. No que segue, consideraremos o espaço  $[0, 1)$  munido desta métrica.

**Exercício 5.10.** Verifique que a transformação  $d_{\equiv} : [0, 1) \times [0, 1) \rightarrow [0, +\infty)$  é de fato uma métrica e que  $([0, 1), d_{\equiv})$  é um espaço métrico compacto.

Consideremos a transformação  $f_2 : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  dada por

$$f_2(x) = 2x \mod 1. \quad (5.10)$$

Em palavras, o que a transformação  $f_2$  faz é multiplicar  $x$  por 2 e tomar a parte decimal do resultado. Por exemplo,  $f_2(0,56) = 2 \cdot 0,56 \mod 1 = 0,12$ , pois  $2 \cdot 0,56 = 1,12$  e  $1,12 \equiv 0,12 \mod 1$ . É fácil ver que  $f_2$  pode ser também representada por

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}); \\ 2x - 1, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \quad (5.11)$$

cujo gráfico é dado na Figura 5.6.

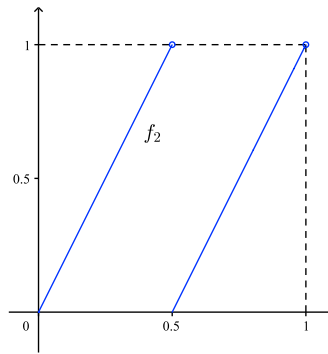


Figura 5.6: Gráfico de  $f_2(x) = 2x \mod 1$ .

Lembremos que estamos considerando em  $[0, 1)$  a métrica  $d_{\equiv}$  induzida pela relação de “congruência módulo 1”. Em particular, segundo esta métrica, os pontos 0 e 1 são identificados visto que  $0 \equiv 1 \mod 1$ . Em outras palavras, é como se fossem “o mesmo ponto”, como se pegássemos o intervalo  $[0, 1]$  e “colássemos” os extremos 0 e 1, obtendo um círculo. Em termos do gráfico de  $f_2$ , é como se “colássemos” os pontos de coordenadas  $(\frac{1}{2}, 0)$  e  $(\frac{1}{2}, 1)$  e os pontos de coordenadas  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ , obtendo, assim, uma curva contínua, que pode ser expresso formalmente dizendo que a transformação  $f_2$  é contínua com relação a esta métrica. De fato, é fácil ver que  $f_2$  é contínua nos pontos dos intervalos  $(0, \frac{1}{2})$  e  $(\frac{1}{2}, 1)$ . Resta, então, verificarmos que  $f_2$  é contínua em  $x = \frac{1}{2}$  e  $x = 0$ .

Verifiquemos o primeiro caso. Observemos inicialmente que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} d_{\equiv} \left( f_2(x), f_2\left(\frac{1}{2}\right) \right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \min\{|2x - 0|, 1 - |2x - 0|\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} (1 - |2x - 0|) = 0.\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} d_{\equiv} \left( f_2(x), f_2\left(\frac{1}{2}\right) \right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \min\{|2x - 1 - 0|, 1 - |2x - 1 - 0|\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} |2x - 1 - 0| = 0.\end{aligned}$$

Consequentemente  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} d_{\equiv}(f_2(x), f_2(\frac{1}{2})) = 0$  e  $f_2$  é contínua em  $x = \frac{1}{2}$ . Procedendo de forma análoga, verificamos que  $f_2$  é também contínua em  $x = 0$  (lembramos que, como  $0 \equiv 1 \pmod{1}$ ,  $x$  aproximar-se de 0 na métrica  $d_{\equiv}$  significa que  $x$  aproxima-se de 0 por valores maiores do que 0 ou  $x$  aproxima-se de 1 por valores menores do que 1). Consequentemente  $f_2$  é contínua em todo o intervalo.

No parágrafo anterior, vimos que o intervalo  $[0, 1)$  munido da métrica  $d_{\equiv}$  pode ser visto (pelo menos intuitivamente) como um círculo. Agora a ação de  $f_2$  nesse círculo consiste simplesmente em associar um ponto do círculo a outro ponto cujo ângulo no sentido anti-horário com a parte positiva do eixo das abscissas é o dobro do ângulo inicial. Ou seja,  $f_2$  pode ser pensada de maneira equivalente como  $f_1$  dada em (5.6). Esse raciocínio pode ser formalizado de maneira precisa como segue.

**Exercício 5.11.** Considere as transformações  $f_1$  e  $f_2$  dadas respectivamente por (5.6) e (5.10). Mostre que existe um homeomorfismo  $h : [0, 1) \rightarrow S^1$  tal que  $h \circ f_1 = f_2 \circ h$ . Ou seja,  $f_1$  e  $f_2$  são conjugadas. Além disso, observe que  $h$  pode ser tomada de tal forma que  $d_{S^1}(h(x), h(y)) = Cd_{\equiv}(x, y)$  para alguma constante  $C > 0$ .

**Exercício 5.12.** Utilizando os Exercícios 1.15 e 5.11 e a Proposição 1.8, traduza as propriedades de  $f_1$  em propriedades de  $f_2$ .

Para finalizar, observemos que apesar de os gráficos de  $f$  e  $f_2$  dados nas Figuras 5.1 e 5.6 terem aparentemente o mesmo formato, eles representam objetos distintos, pois na Figura 5.1 estamos considerando o intervalo  $[0, 1]$  munido da métrica Euclidiana enquanto que na Figura 5.6 estamos considerando a métrica  $d_{\equiv}$ . Conforme já mencionado, uma das consequências desse fato é que a transformação  $f$  é descontínua em  $x = \frac{1}{2}$  enquanto que  $f_2$  é contínua neste ponto. Essa diferença tem implicações dinâmicas importantes (algumas das quais foram mencionadas na Seção 5.2.1), porém, devido à natureza introdutória destas notas, não as exploraremos de maneira mais aprofundada. Por outro lado, mesmo exibindo alguns comportamentos dinâmicos distintos,  $f$  e  $f_2$  possuem propriedades em comum e, dependendo das propriedades que estamos interessados, o entendimento de uma resulta também na compreensão da outra.

### 5.2.4 A transformação $2x \bmod 1$ como um *shift*

Outra maneira interessante de ver a ação de  $f_2$  é reescrever os números de  $[0, 1]$  na base 2. Mais precisamente, todo número real  $x \in [0, 1]$  pode ser escrito como

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots = \frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \frac{x_4}{2^4} + \dots = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x_j}{2^j},$$

sendo  $x_1, x_2, x_3 \dots$  dígitos iguais a 0 ou 1. Essa é uma representação de  $x$  na base 2. Por exemplo, o número  $x = 0,640\,625$  pode ser representado na base 2 como  $x = 0,101\,001$ . De fato, na base 2, a expressão  $x = 0,101\,001$  significa

$$\frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6} = 0,640\,625.$$

Dessa forma, podemos identificar sequências unilaterais de zeros e uns com números em  $[0, 1]$ : à sequência  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  associamos o número

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x_j}{2^j} \in [0, 1].$$

Observemos agora que, se na base 2, temos  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ , isto é,

$$x = \frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \frac{x_4}{2^4} + \dots,$$

então

$$2x = \frac{x_1}{2^0} + \frac{x_2}{2^1} + \frac{x_3}{2^2} + \frac{x_4}{2^3} + \dots = x_1 + \frac{x_2}{2^1} + \frac{x_3}{2^2} + \frac{x_4}{2^3} + \dots$$

e, portanto,

$$2x \bmod 1 = \frac{x_2}{2^1} + \frac{x_3}{2^2} + \frac{x_4}{2^3} + \dots = 0, x_2 x_3 x_4 \dots$$

Ou seja, aplicar  $f_2$  a um número  $x$  escrito na base 2 é equivalente a apagar o primeiro dígito e mover os outros uma unidade para a esquerda. Isto nos faz lembrar um velho conhecido: o *shift* unilateral no espaço de sequências  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  que estudamos no Capítulo 3. Denotando, então, o *shift* unilateral por  $f_3: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e lembrando que ele é dado por

$$f_3((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (x_2, x_3, x_4, \dots), \quad (5.12)$$

segue das observações acima que podemos representar a ação de  $f_2$  como o *shift*  $f_3$ . Essa representação pode ser bastante útil para entender diversos aspectos da dinâmica de  $f_2$  como veremos a seguir.

Apesar de nossos argumentos acima serem um pouco informais, tudo pode ser formalizado de maneira matematicamente precisa como segue. Antes disso, porém, observemos



que a transformação  $f_2$  pode ser “estendida” de maneira natural ao intervalo  $[0, 1]$ . Para tanto, basta considerarmos  $f_2: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}); \\ 2x - 1, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

De fato, como  $1 \equiv 0 \pmod 1$  e  $0 = f_2(0) = f_2(1) = 1 \pmod 1$ , segue que  $f_2$  está bem definida e coincide com a definição anterior. Essa representação é mais ajustada para os exercícios seguintes.

**Exercício 5.13.** Consideremos o espaço de sequências  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  munido de uma distância  $d$  como no Capítulo 3 e o espaço  $([0, 1], d_{\equiv})$  conforme acima. Mostre que a transformação  $h: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$h(x_1, x_2, x_3, \dots) = 0, x_1 x_2 x_3 \dots = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x_j}{2^j}$$

é contínua e sobrejetiva e, além disso, satisfaz

$$h \circ f_3 = f_2 \circ h.$$

Ou seja, o *shift* unilateral é semiconjugado a  $f_2$ , ou ainda,  $f_2$  é um fator do *shift* unilateral em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  (veja Seção 1.20). Observe ainda que  $h$  não é injetiva visto que a representação na base 2 não é única. Por exemplo, os números 0,1 e 0,011 111 111 1... representam a mesma quantidade.

**Exercício 5.14.** Utilizando a transformação  $h$  dada no Exercício 5.13, estude quais propriedades dinâmicas de  $f_2$  podem ser traduzidas em propriedades dinâmicas de  $f_3$  e vice-versa (lembre-se do Exercício 1.16). Por exemplo, existem relações entre os pontos periódicos de  $f_2$  e  $f_3$ ? Sabendo que uma delas é transitiva, o que se pode dizer da outra? E assim por diante. Lembre-se sempre de que  $h$  não é uma bijeção.

## 5.3 Exercícios

Nesta seção, apresentamos alguns exercícios para que o leitor possa explorar por conta própria alguns dos conceitos trabalhados ao longo do capítulo. Os exercícios marcados com asterisco são importantes, pois complementam a teoria desenvolvida até aqui.

**Exercício 5.15.** \* Considere o conjunto  $[0, 1)$  munido da métrica  $d_{\equiv}$  como acima. Dado  $k \in \mathbb{N}$ , com  $k \geq 2$ , considere a transformação  $g_k: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  dada por  $g_k(x) = kx \pmod 1$ . Estude as propriedades dinâmicas de  $g_k$  de forma análoga ao que fizemos com  $f$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$ . Quais as semelhanças e quais as diferenças entre as dinâmicas dessas aplicações? Qual a entropia de  $g_k$ ? A transformação  $g_k$  é semiconjugada a alguma aplicação do tipo *shift*?

**Exercício 5.16.** \* Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico compacto e  $f: M \rightarrow M$  uma transformação contínua. Dizemos que  $f$  é *expansora* se existem constantes  $c > 1$  e  $\rho > 0$  tais que, para todo  $x \in M$ , a imagem da bola  $B(x, \rho)$  contém uma vizinhança de  $\overline{B(f(x), \rho)}$  e

$$d(f(y), f(z)) \geq cd(y, z) \text{ para todo } y, z \in B(x, \rho). \quad (5.13)$$

Ou seja, localmente  $f$  expande distâncias. Lembre-se de que a bola aberta em  $M$  de centro em  $x$  e raio  $\rho$  é dada por

$$B(x, \rho) = \{y \in M; d(x, y) < \rho\}.$$

Ou seja, é o conjunto de todos os pontos de  $M$  cuja distância a  $x$  é menor do que  $\rho$ .

- (a) Dê exemplos de transformações expansoras.
- (b) Dê exemplos de transformações expansoras que são transitivas e exemplos que não são transitivas.
- (c) Considere uma transformação expansora e transitiva  $f: M \rightarrow M$ . Estude quais das propriedades dinâmicas obtidas nas seções anteriores continuam válidas nesse contexto mais geral.

**Exercício 5.17.** Mostre que o *shift* unilateral  $f: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  estudado na Seção 3.2 é uma transformação expansora.

**Exercício 5.18.** Considere as transformações  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = ax$  e  $g(x) = bx$  com  $a > 1$  e  $b > 1$ . É fácil ver que  $f$  e  $g$  expandem distâncias e, em particular, satisfazem (5.13). Mostre que a transformação  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$h(x) = \begin{cases} x^{\frac{\log b}{\log a}}, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ -|x|^{\frac{\log b}{\log a}}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

é uma conjugação entre  $f$  e  $g$ . Isto é, mostre que  $h$  é homeomorfismo e, além disso, satisfaz  $h \circ f = g \circ h$ .

# 6

## Transformações hiperbólicas

---

Neste capítulo, estudaremos uma classe importante de sistemas dinâmicos conhecida como sistemas hiperbólicos. Focaremos inicialmente num exemplo específico de um *automorfismo hiperbólico* do toro  $\mathbb{T}^2$ . Para tanto, utilizaremos noções básicas de Álgebra Linear em dimensão 2, brevemente recordadas no Apêndice B. Ao final do capítulo, apresentaremos brevemente a noção de hiperbolicidade em contextos mais gerais.

### 6.1 O modelo linear

Nesta seção, apresentaremos a transformação linear que dará origem ao automorfismo hiperbólico de  $\mathbb{T}^2$ , que estudaremos a longo do capítulo juntamente com algumas de suas propriedades.

Consideremos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que seus autovalores são

$$\lambda^u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda^s = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Em particular,  $|\lambda^u| \simeq 1,618 > 1$  e  $|\lambda^s| \simeq 0,618 < 1$ . Logo o valor absoluto de todos os autovalores de  $A$  é diferente de 1. Uma matriz com essa propriedade é dita *hiperbólica*.

Observemos ainda que

$$\tilde{v}^u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{v}^s = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

são autovetores associados aos autovalores  $\lambda^u$  e  $\lambda^s$  respectivamente. Fazendo uma renormalização de  $\tilde{v}^u$  e  $\tilde{v}^s$ , obtemos autovetores com norma 1 associados a  $\lambda^u$  e  $\lambda^s$ , os quais denotaremos respectivamente por

$$v^u = \frac{1}{\|\tilde{v}^u\|} \tilde{v}^u \quad \text{e} \quad v^s = \frac{1}{\|\tilde{v}^s\|} \tilde{v}^s.$$

Por serem autovetores, eles satisfazem entre outras coisas,

$$Av^u = \lambda^u v^u \quad \text{e} \quad Av^s = \lambda^s v^s.$$

Aplicando, então, a matriz  $A$   $n$ -vezes aos vetores  $v^s$  e  $v^u$ , obtemos

$$A^n v^u = (\lambda^u)^n v^u \quad \text{e} \quad A^n v^s = (\lambda^s)^n v^s. \quad (6.1)$$

Consequentemente, como  $|\lambda^u| > 1$ , segue que ao aplicarmos a matriz  $n$ -vezes ao vetor  $v^u$ , seu comprimento é expandido por um fator  $|\lambda^u|^n$ , ou seja, cresce exponencialmente à medida que  $n$  cresce. De forma análoga, como  $|\lambda^s| < 1$ , segue que ao aplicarmos a matriz  $n$ -vezes ao vetor  $v^s$ , seu comprimento é contraído por um fator  $|\lambda^s|^n$ , ou seja, decresce exponencialmente à medida que  $n$  cresce. Por essa razão, dizemos que a direção definida pelo vetor  $v^u$  é a direção *instável* (“unstable” em inglês, por isso o índice  $u$  no vetor  $v^u$ ) enquanto que a direção definida pelo vetor  $v^s$  é dita direção *estável* (“stable” no inglês, por isso  $v^s$ ).

É fácil ver que os vetores  $v^u$  e  $v^s$  são linearmente independentes. Em particular,  $\{v^u, v^s\}$  forma uma base de  $\mathbb{R}^2$ . Considerando, então, os autoespaços gerados por  $v^u$  e  $v^s$  que são dados respectivamente por

$$\mathbb{E}^u = \{t \cdot v^u; t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \mathbb{E}^s = \{t \cdot v^s; t \in \mathbb{R}\},$$

segue que

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^s. \quad (6.2)$$

Isto é, cada vetor de  $\mathbb{R}^2$  pode ser escrito de forma única como soma de um vetor em  $\mathbb{E}^u$  e outro em  $\mathbb{E}^s$ . Observemos ainda que, por serem autoespaços associados a autovalores distintos,  $\mathbb{E}^u$  e  $\mathbb{E}^s$  são invariantes pela ação de  $A$ . Isto é,  $A(\mathbb{E}^u) = \mathbb{E}^u$  e  $A(\mathbb{E}^s) = \mathbb{E}^s$ . O espaço  $\mathbb{E}^u$  é dito *espaço instável* enquanto que  $\mathbb{E}^s$  é dito *espaço estável*.

Para referência futura, fixemos  $\lambda \in (0, 1)$  tal que  $|\lambda^s| < \lambda$  e  $\lambda^{-1} < |\lambda^u|$ . Então (6.1) implica que

$$\|A^n u\| \geq \lambda^{-n} \|u\| \quad \text{e} \quad \|A^n v\| \leq \lambda^n \|v\| \quad (6.3)$$

para todo  $u \in \mathbb{E}^u$  e  $v \in \mathbb{E}^s$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

### 6.1.1 Conjuntos estáveis e instáveis de $A$

Nosso objetivo agora é estudar algumas propriedades dos conjuntos estáveis e instáveis de  $A$ , introduzidos na Seção 1.13. Essas propriedades serão utilizadas de maneira significativa na sequência do capítulo.

Dado um ponto  $p \in \mathbb{R}^2$ , consideremos os conjuntos estáveis e instáveis de  $p$  com relação a  $A$  dados por

$$W_A^s(p) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; \|A^n p - A^n x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}$$

e

$$W_A^u(p) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; \|A^{-n} p - A^{-n} x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}.$$

Começemos observando que eles nada mais são do que translações de  $\mathbb{E}^s$  e  $\mathbb{E}^u$  respectivamente.

**Lema 6.1.** *Para todo  $p \in \mathbb{R}^2$ , temos que*

$$\begin{aligned} W_A^s(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2; x = p + v \text{ para algum } v \in \mathbb{E}^s\} \\ &:= p + \mathbb{E}^s \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W_A^u(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2; x = p + v \text{ para algum } v \in \mathbb{E}^u\} \\ &:= p + \mathbb{E}^u. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Provaremos apenas a igualdade envolvendo o conjunto estável. A outra é análoga. Consideremos

$$\tilde{W}_A^s(p) = \{x \in \mathbb{R}^2; x = p + v \text{ para algum } v \in \mathbb{E}^s\}$$

e provemos que  $W_A^s(p) = \tilde{W}_A^s(p)$ . Seja  $x \in \tilde{W}_A^s(p)$ . Neste caso,  $x = p + v$  para algum  $v \in \mathbb{E}^s$ . Combinando este fato com (6.3), segue que

$$\|A^n p - A^n x\| = \|A^n(p - x)\| = \|A^n v\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Portanto  $x \in W_A^s(p)$  e, consequentemente,  $\tilde{W}_A^s(p) \subset W^s(p)$ . Tomemos agora  $x \in W_A^s(p)$  e supomos que  $x \notin \tilde{W}_A^s(p)$ . Isto significa dizer que  $x - p \notin \mathbb{E}^s$ . Logo existem  $u \in \mathbb{E}^u$  e  $v \in \mathbb{E}^s$  com  $u \neq (0, 0)$  tais que  $x - p = u + v$ . Então, usando a desigualdade triangular e (6.3), segue que

$$\begin{aligned} \|A^n p - A^n x\| &= \|A^n(p - x)\| = \|A^n(u + v)\| \geq \|A^n u\| - \|A^n v\| \\ &\geq \lambda^{-n} \|u\| - \lambda^n \|v\|. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Portanto, como  $\lambda \in (0, 1)$  e  $\|u\| \neq 0$ , segue da expressão acima que  $\|A^n p - A^n x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , contradizendo o fato que  $x \in W_A^s(p)$ . Logo  $x \in \tilde{W}_A^s(p)$  e, consequentemente,  $W_A^s(p) \subset \tilde{W}_A^s(p)$ . Combinando as duas observações, concluímos que  $W_A^s(p) = \tilde{W}_A^s(p)$  conforme afirmado.  $\square$

Observe que dessa caracterização de  $W^s(p)$  e  $W^u(p)$  podemos concluir o seguinte.

**Corolário 6.2.** *Se  $x \in W_A^s(p)$ , então  $\|A^n p - A^n x\| \leq \lambda^n \|p - x\|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Ou seja, as órbitas futuras de  $p$  e  $x$  por  $A$  aproximam-se exponencialmente rápido. Analogamente se  $x \in W_A^u(p)$ , então  $\|A^n p - A^n x\| \geq \lambda^{-n} \|p - x\|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

Nosso próximo resultado relaciona conjuntos estáveis e instáveis locais com conjuntos estáveis e instáveis (lembre-se das definições dadas na Seção 1.13).

**Lema 6.3.** *Dados  $p \in \mathbb{R}^2$  e  $\varepsilon > 0$ , temos que*

$$W_{A,\varepsilon}^s(p) \subset W_A^s(p) \text{ e } W_{A,\varepsilon}^u(p) \subset W_A^u(p).$$

*Além disso,*

$$W_A^s(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{-n}(W_{A,\varepsilon}^s(A^n p)) \text{ e } W_A^u(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n(W_{A,\varepsilon}^u(A^{-n} p)).$$

*Demonstração.* Provaremos apenas as afirmações envolvendo conjuntos estáveis. As outras são análogas. Seja  $x \in W_{A,\varepsilon}^s(p)$  e suponha que  $x \notin W_A^s(p)$ . Nesse caso, segue do Lema 6.1 que  $x - p \notin \mathbb{E}^s$ . Logo existem  $u \in \mathbb{E}^u$  e  $v \in \mathbb{E}^s$  com  $\|u\| \neq 0$  tais que  $x - p = u + v$ . Procedendo como em (6.4) e utilizando que  $x \in W_{A,\varepsilon}^s(p)$ , concluímos que

$$\varepsilon \geq \|A^n p - A^n x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

o que é um absurdo. Logo  $W_{A,\varepsilon}^s(p) \subset W_A^s(p)$  conforme afirmado.

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $x \in A^{-n}(W_{A,\varepsilon}^s(A^n p))$ . Nesse caso,  $A^n x \in W_{A,\varepsilon}^s(A^n p)$ . Portanto

$$\|A^{k+n} p - A^{k+n} x\| = \|A^k(A^n p) - A^k(A^n x)\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

em que segue  $x \in W_A^s(p)$ . Consequentemente,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{-n}(W_{A,\varepsilon}^s(A^n p)) \subset W_A^s(p)$ . Tomemos agora  $x \in W_A^s(p)$ . Nesse caso, temos que

$$\|A^n p - A^n x\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Em particular, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|A^n p - A^n x\| \leq \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Ou seja,

$$\|A^k(A^{n_0}p) - A^k(A^{n_0}x)\| = \|A^{k+n_0}p - A^{k+n_0}x\| \leq \varepsilon \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Logo  $A^{n_0}x \in W_{A,\varepsilon}^s(A^{n_0}p)$  e, consequentemente,  $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{-n}(W_{A,\varepsilon}^s(A^n p))$ . Portanto  $W_A^s(p) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{-n}(W_{A,\varepsilon}^s(A^n p)) W_A^s(p)$  que, combinado com a observação anterior, conclui a prova.  $\square$

Por fim, deixamos um exercício simples que será usado na sequência (observe que uma questão semelhante já foi enunciada na Seção 1.13).

**Exercício 6.1.** Utilize as definições de  $W_A^s(p)$  e  $W_A^u(p)$  para mostrar que

$$A(W_A^s(p)) = W_A^s(A(p)) \text{ e } A^{-1}(W_A^s(p)) = W_A^s(A^{-1}(p)).$$

## 6.2 O toro $\mathbb{T}^2$

O toro  $\mathbb{T}^2$  é uma superfície (variedade de dimensão 2) usualmente representada por um desenho que tem a forma aproximada de uma câmara de pneu ou uma rosquinha. Ele pode ser visto como o quadrado unitário  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  com os lados opostos identificados:  $(x_1, 0) \sim (x_1, 1)$  e  $(0, x_2) \sim (1, x_2)$ . De forma intuitiva, é como se colássemos o lado esquerdo com o direito e o lado de cima com o de baixo do quadrado unitário. Isto é

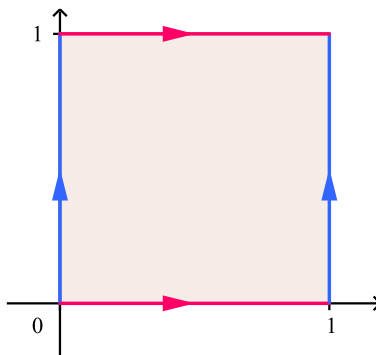


Figura 6.1: Quadrado unitário com os lados identificados.

equivalente a pensarmos em  $\mathbb{T}^2$  como o produto cartesiano de dois círculos unitários  $\mathbb{T}^2 =$

$\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$  (lembre-se das definições de  $\mathcal{S}^1$  dadas no Capítulo 5). Em particular, podemos munir  $\mathbb{T}^2$  com a métrica  $d_T$  dada por

$$d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_{\equiv}(x_1, y_1)^2 + d_{\equiv}(x_2, y_2)^2}$$

em que  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{T}^2 = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$ , ou seja,  $x_1, x_2, y_1, y_2$  são pontos de  $\mathcal{S}^1$ , e  $d_{\equiv}$  é a métrica em  $\mathcal{S}^1$  dada na Seção 5.2.3. Ao longo deste capítulo, sempre pensaremos em  $\mathbb{T}^2 \simeq [0, 1) \times [0, 1)$  como um “subconjunto” de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercício 6.2.** Verifique que  $d_T$  é de fato uma métrica em  $\mathbb{T}^2$  e que  $(\mathbb{T}^2, d_T)$  é um espaço métrico compacto.

Por fim, consideremos a aplicação  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  dada por

$$\pi(x_1, x_2) = (x_1 \bmod 1, x_2 \bmod 1).$$

Chamaremos esta aplicação de *projeção*, pois ela “projeta” pontos do plano em pontos do toro. Lembremos que, caso  $x \geq 0$ , o número “ $x \bmod 1$ ” é obtido a partir do número  $x$ , trocando sua parte inteira por 0. Por exemplo,  $326,789 \bmod 1$  é igual a 0,789. Já se  $x < 0$ , temos que “ $x \bmod 1$ ” é obtido fazendo “1 menos a parte decimal de  $|x|$ ”. Por exemplo,

$$-141,34 \bmod 1 = 1 - 0,34 = 0,66.$$

Uma propriedade simples da aplicação  $\pi$  é a seguinte.

**Lema 6.4.** *Dados pontos  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , temos que*

$$d_T(\pi(x), \pi(y)) \leq \|x - y\|.$$

*Em outras palavras,  $\pi$  é Lipschitz com constante de Lipschitz igual a 1. Além disso, se  $\|x - y\| < \frac{1}{2}$ , então*

$$d_T(\pi(x), \pi(y)) = \|x - y\|.$$

*Demonstração.* Sejam  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  pontos de  $\mathbb{R}^2$ . Então

$$d_T(\pi(x), \pi(y)) = \sqrt{d_{\equiv}(x_1 \bmod 1, y_1 \bmod 1)^2 + d_{\equiv}(x_2 \bmod 1, y_2 \bmod 1)^2}.$$

Agora, recordando da definição de  $d_{\equiv}$  dada na Seção 5.2.3, segue que

$$d_{\equiv}(x_1 \bmod 1, y_1 \bmod 1) \leq |x_1 \bmod 1 - y_1 \bmod 1| \leq |x_1 - y_1|.$$

Analogamente,  $d_{\equiv}(x_2 \bmod 1, y_2 \bmod 1) \leq |x_2 - y_2|$ . Logo

$$\begin{aligned} d_T(\pi(x), \pi(y)) &= \sqrt{d_{\equiv}(x_1 \bmod 1, y_1 \bmod 1)^2 + d_{\equiv}(x_2 \bmod 1, y_2 \bmod 1)^2} \\ &\leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} \\ &= \|x - y\| \end{aligned}$$



como queríamos.

Supomos agora que  $\|x - y\| < \frac{1}{2}$ . Isto é,  $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < \frac{1}{2}$ . Logo  $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < \frac{1}{4}$  e, consequentemente,  $(x_1 - y_1)^2 < \frac{1}{4}$  e  $(x_2 - y_2)^2 < \frac{1}{4}$ . Em particular,  $|x_1 - y_1| < \frac{1}{2}$  e  $|x_2 - y_2| < \frac{1}{2}$ . Então, recordando mais uma vez a definição de  $d_{\equiv}$ , segue que  $|x_1 - y_1| = d_{\equiv}(x_1, y_1)$  e  $|x_2 - y_2| = d_{\equiv}(x_2, y_2)$ . Portanto

$$\begin{aligned} d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \sqrt{d_{\equiv}(x_1, y_1)^2 + d_{\equiv}(x_2, y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ &= \|x - y\| \end{aligned}$$

conforme afirmado. □

**Exercício 6.3.** É fácil ver que  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  não é injetiva. Por exemplo, tomando  $x_1 = 1, 32$  e  $y_1 = 4, 32$ , temos que  $\pi((x_1, 3)) = \pi((y_1, 5))$ . Mostre, no entanto, que, restrita a qualquer bola aberta de raio menor do que  $\frac{1}{2}$ , a aplicação  $\pi$  é injetiva.

**Exercício 6.4.** Dados  $x, y \in \mathbb{T}^2$ , mostre que existem  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^2$  tais que  $\pi(\tilde{x}) = x$  e  $\pi(\tilde{y}) = y$  e, além disso,

$$d_T(x, y) = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|.$$

## 6.3 A aplicação induzida em $\mathbb{T}^2$

A matriz  $A$  induz uma transformação linear em  $\mathbb{R}^2$  (veja Apêndice B.2), a qual denotaremos também por  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Como os coeficientes de  $A$  são inteiros, vetores com coordenadas inteiras são levados em vetores com coordenadas inteiras. Isto é,  $A(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$ . Além disso, como  $\det(A) = -1$ ,  $A$  é invertível e  $A^{-1}$  também tem coordenadas inteiras. Por essa razão, a transformação inversa  $A^{-1}$  também satisfaz  $A^{-1}(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$ . Consequentemente,  $A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ . Esse fato nos permite induzir a partir de  $A$  uma aplicação no toro  $\mathbb{T}^2$  da seguinte forma. Consideremos a transformação  $f_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  dada por

$$\begin{aligned} f_A(x_1, x_2) &= \pi(A(x_1, x_2)) \\ &= (x_1 + x_2 \pmod{1}, x_1 \pmod{1}). \end{aligned}$$

Tal transformação é um exemplo de um *automorfismo hiperbólico* do toro  $\mathbb{T}^2$ .

Outra maneira equivalente de definir  $f_A$ , porém sem pensar em  $\mathbb{T}^2$  como um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , é a seguinte. Definamos  $f_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  como sendo a aplicação que satisfaça

$$f_A(\pi(y_1, y_2)) = \pi(A(y_1, y_2)) \text{ para todo } (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Observemos que  $f_A$  dada dessa forma está bem definida. De fato, se  $(y_1, y_2)$  e  $(z_1, z_2)$  são tais que  $\pi(y_1, y_2) = \pi(z_1, z_2)$ , então podemos escrever  $(y_1, y_2) = (z_1 + m_1, z_2 + m_2) = (z_1, z_2) + (m_1, m_2)$  com  $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ . Logo

$$\begin{aligned} f_A(\pi(y_1, y_2)) &= \pi(A(y_1, y_2)) \\ &= \pi(A((z_1, z_2) + (m_1, m_2))) \\ &= \pi(A(z_1, z_2) + A(m_1, m_2)) \\ &= \pi(A(z_1, z_2)) + \pi(A(m_1, m_2)) \\ &= \pi(A(z_1, z_2)) \end{aligned}$$

visto que  $\pi(A(m_1, m_2)) = (0, 0)$ , uma vez que  $A(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$  tendo em vista as observações anteriores. Em particular,  $f_A$  está bem definida.

**Lema 6.5.** *A aplicação  $f_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  dada acima é um homeomorfismo e sua inversa é dada por  $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ .*

*Demonstração.* Observemos inicialmente que  $f_A$  é contínua. Dado  $\varepsilon > 0$ , sejam  $x, y \in \mathbb{T}^2$  tais que  $d_T(x, y) < \varepsilon$ . Nesse caso, segue do Exercício 6.4 que, existem pontos  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^2$  tais que  $\pi(\tilde{x}) = x$  e  $\pi(\tilde{y}) = y$  e  $\|\tilde{x} - \tilde{y}\| = d_T(x, y) < \varepsilon$ . Então, utilizando o Lema 6.4, obtemos que

$$\begin{aligned} d_T(f_A(x), f_A(y)) &= d_T(f_A(\pi(\tilde{x})), f_A(\pi(\tilde{y}))) \\ &= d_T(\pi(A\tilde{x}), \pi(A\tilde{y})) \\ &\leq \|A\tilde{x} - A\tilde{y}\| \\ &\leq \|A\| \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \\ &\leq \|A\| \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto mostra não só que  $f_A$  é contínua, mas uniformemente contínua.

Verifiquemos agora que  $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ . De fato, como  $A^{-1}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ , segue que  $f_{A^{-1}}$  está bem definida. Além disso, um argumento análogo ao anterior mostra que  $f_{A^{-1}}$  também é contínua. Agora, dados  $x \in \mathbb{T}^2$  e  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$  tais que  $\pi(\tilde{x}) = x$ , temos que

$$\begin{aligned} f_{A^{-1}}(f_A(x)) &= f_{A^{-1}}(f_A(\pi(\tilde{x}))) \\ &= f_{A^{-1}}(\pi(A\tilde{x})) \\ &= \pi(A^{-1}A\tilde{x}) \\ &= \pi(\tilde{x}) \\ &= x. \end{aligned}$$

Analogamente verificamos que  $f_A(f_{A^{-1}}(x)) = x$  e, consequentemente,  $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ . Combinando, então, as observações anteriores, obtemos que  $f_A$  de fato é um homeomorfismo.  $\square$

## 6.4 Os pontos periódicos de $f_A$

A partir de agora, passaremos a estudar algumas propriedades dinâmicas da aplicação  $f_A$  começando pelo estudo de seus pontos periódicos.

**Proposição 6.6.** *Os pontos periódicos de  $f_A$  são densos em  $\mathbb{T}^2$ .*

*Demonstração.* Dado um número natural  $k \in \mathbb{N}$ , consideremos os pontos de  $\mathbb{T}^2$  da forma

$$\left(\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}\right) \in \mathbb{T}^2$$

com  $0 \leq i_1, i_2 < k$ . Denotemos o conjunto de todos esses pontos por  $\text{Rac}(k)$  (“pontos racionais de  $\mathbb{T}^2$  com numerador  $k$ ”). Observemos que esse é um conjunto finito (tem  $k^2$  pontos) e que, além disso,  $f_A(\text{Rac}(k)) \subset \text{Rac}(k)$ . De fato,

$$\begin{aligned} f_A\left(\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}\right) &= \pi\left(A\left(\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}\right)\right) \\ &= \pi\left(\frac{i_1}{k} + \frac{i_2}{k}, \frac{i_1}{k}\right) \\ &= \left(\frac{i_1 + i_2}{k} \bmod 1, \frac{i_1}{k} \bmod 1\right) \\ &= \left(\frac{j}{k}, \frac{i_1}{k}\right) \end{aligned}$$

sendo  $j = i_1 + i_2$  se  $i_1 + i_2 < k$  e  $j = i_1 + i_2 - k$  se  $i_1 + i_2 \geq k$ . Em particular,  $0 \leq j < k$  e, conseqüentemente,  $f_A(\text{Rac}(k)) \subset \text{Rac}(k)$  conforme afirmado. Portanto, sendo  $\text{Rac}(k)$  um conjunto finito e  $f_A$  uma bijeção, temos que  $f_A|_{\text{Rac}(k)}$ , isto é, a restrição da aplicação  $f_A$  ao conjunto  $\text{Rac}(k)$  é uma permutação de  $\text{Rac}(k)$ . Logo todos os pontos de  $\text{Rac}(k)$  são periódicos. Finalmente, como  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Rac}(k)$  é denso em  $\mathbb{T}^2$ , concluímos a demonstração.  $\square$

Como uma consequência direta desse fato, do Exercício 1.6 e da relação entre os conjuntos  $\text{Per}(f_A)$  e  $\Omega(f_A)$  dada no Exercício 1.7, temos o seguinte.

**Corolário 6.7.** *O conjunto dos pontos não errantes  $\Omega(f_A)$  de  $f_A$  coincide com  $\mathbb{T}^2$ .*

Mais do que apenas dizer que o  $\text{Per}(f_A)$  é denso em  $\mathbb{T}^2$  e, portanto, infinito, podemos calcular exatamente quantos são os pontos fixos de  $f_A^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Para tanto, utilizaremos o seguinte resultado auxiliar conhecido como Teorema de Pick, devido a Georg Alexander Pick (1859–1942), cuja demonstração pode ser encontrada em Aigner e Ziegler (2018).

**Teorema 6.8.** *Consideremos um polígono em  $\mathbb{R}^2$  cujos vértices têm coordenadas inteiras, isto é, são da forma  $(k_1, k_2)$  com  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . Denotemos por  $i$  o número de pontos com coordenadas inteiras no interior do polígono e por  $b$  o número de pontos com coordenadas inteiras nas bordas do polígono. Então a área deste polígono é dada por*

$$A = i + \frac{b}{2} - 1.$$

Como anteriormente, denotemos por  $\text{Fix}(f_A^n)$  o conjunto dos pontos fixos de  $f_A^n$  e por  $\#\text{Fix}(f_A^n)$  a cardinalidade desse conjunto.

**Proposição 6.9.**

$$\#\text{Fix}(f_A^n) = |(\lambda^u)^n + (\lambda^s)^n - 1 + (-1)^{n+1}|.$$

*Demonstração.* Observemos inicialmente que  $(x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$  satisfaz  $f_A^n((x_1, x_2)) = (x_1, x_2)$  se, e somente se,

$$A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \text{ para algum } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja,

$$(A^n - \text{Id}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \text{ para algum } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Agora a matriz  $A^n - \text{Id}$  leva o toro  $\mathbb{T}^2$  (visto como  $[0, 1) \times [0, 1)$ ) no paralelogramo

$$\mathcal{P} = \{\alpha u_1 + \beta u_2 : \alpha, \beta \in [0, 1)\}$$

em que

$$u_1 = (A^n - \text{Id}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } u_2 = (A^n - \text{Id}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Então o número de pontos  $(x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2 \simeq [0, 1) \times [0, 1)$  que satisfaz

$$(A^n - \text{Id}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \text{ para algum } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

é exatamente o número de pontos com coordenadas inteiras contidos no paralelogramo  $\mathcal{P}$ . Afirmamos agora que esse número é precisamente a área de  $\mathcal{P}$ . De fato, denotemos por  $i$  o número de pontos com coordenadas inteiras no interior de  $\mathcal{P}$ , por  $b$  o número de pontos com coordenadas inteiras nas bordas de  $\mathcal{P}$ , por  $b_1$  o número de pontos com coordenadas inteiras no lado  $\alpha u_1$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  de  $\mathcal{P}$  e por  $b_2$  o número de pontos com coordenadas inteiras no lado  $\beta u_2$ ,  $\beta \in [0, 1]$  de  $\mathcal{P}$ . Então  $b = 2b_1 + 2b_2 - 4$ , visto que em “ $2b_1 + 2b_2$ ” estamos contando os quatro vértices duas vezes. Além disso, o número de pontos com coordenadas inteiras contidos no paralelogramo  $\mathcal{P}$  é dado por  $i + b_1 + b_2 - 3$ . De fato, como os lados  $u_1 + \beta u_2$  com  $\beta \in [0, 1]$  e  $\alpha u_1 + u_2$  com  $\alpha \in [0, 1]$  não pertencem a  $\mathcal{P}$ ,

temos que somar “ $b_1 + b_2$ ” ao invés de  $b$ ; como  $\mathcal{P}$  contém apenas o vértice  $(0, 0)$  e em “ $b_1 + b_2$ ” estamos somando os quatro, temos que subtrair 3 da expressão “ $i + b_1 + b_2$ ”. Por outro lado, como  $A^n - \text{Id}$  é uma matriz com entradas inteiras, segue que o paralelogramo  $\mathcal{P}$  tem vértices com coordenadas inteiras e, consequentemente, temos pelo Teorema de Pick que a área de  $\mathcal{P}$  é dada por  $i + \frac{b}{2} - 1$ . Agora

$$i + \frac{b}{2} - 1 = i + \frac{2b_1 + 2b_2 - 4}{2} - 1 = i + b_1 + b_2 - 3.$$

Ou seja, o número de pontos com coordenadas inteiras contidos no paralelogramo  $\mathcal{P}$  coincide com a área de  $\mathcal{P}$  conforme afirmado. A área de  $\mathcal{P}$ , por sua vez, é dada por  $|\det(A^n - \text{Id})|$ . Então, se

$$A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

temos que

$$\begin{aligned} |\det(A^n - \text{Id})| &= \left| \det \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix} \right| \\ &= |(a-1)(d-1) - bc| \\ &= |-a - d + 1 + ad - bc| \\ &= |-\text{trac}(A^n) + 1 + \det(A^n)| \end{aligned}$$

em que  $\text{trac}(A^n) = a + d$  denota o traço da matriz  $A^n$ . Portanto, como  $\text{trac}(A^n) = (\lambda^u)^n + (\lambda^s)^n$  e  $\det(A^n) = (-1)^n$ , o resultado segue combinando as observações anteriores.  $\square$

## 6.5 Os conjuntos estáveis e instáveis de $f_A$

Nesta seção, estudaremos algumas propriedades dos conjuntos estáveis e instáveis de  $f_A$  dados por

$$W_{f_A}^s(p) = \{x \in \mathbb{T}^2; d_T(f_A^n(p), f_A^n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\}$$

e

$$W_{f_A}^u(p) = \{x \in \mathbb{T}^2; d_T(f_A^{-n}(p), f_A^{-n}(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\}.$$

Começaremos observando que eles nada mais são do que a projeção de conjuntos estáveis e instáveis de  $A$ . Além disso, veremos que restrito a conjuntos estáveis e instáveis locais,  $f_A$  contrai/expande distâncias de maneira exponencial.

**Proposição 6.10.** *Para todo  $p \in \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^2$ , temos que*

$$W_{f_A}^s(p) = \pi(W_A^s(p)) \text{ e } W_{f_A}^u(p) = \pi(W_A^u(p)).$$

Além disso, existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$W_{f_A, \varepsilon}^s(p) = \pi(W_{A, \varepsilon}^s(p)) \text{ e } W_{f_A, \varepsilon}^u(p) = \pi(W_{A, \varepsilon}^u(p))$$

e, mais ainda, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$d_T(f_A^n(x), f_A^n(p)) \leq \lambda^n d_T(x, p) \text{ para todo } x \in W_{f_A, \varepsilon}^s(p) \quad (6.5)$$

e

$$d_T(f_A^{-n}(x), f_A^{-n}(p)) \leq \lambda^n d_T(x, p) \text{ para todo } x \in W_{f_A, \varepsilon}^u(p). \quad (6.6)$$

Em particular,

$$W_{f_A, \varepsilon}^s(p) \subset W_{f_A}^s(p) \text{ e } W_{f_A, \varepsilon}^u(p) \subset W_{f_A}^u(p).$$

*Demonstração.* Provemos inicialmente as afirmações envolvendo os conjuntos estáveis e estáveis locais, começando com a caracterização de  $W_{f_A}^s(p)$ . Fixemos  $x \in \pi(W_A^s(p))$ . Então existe  $y \in W_A^s(p)$  tal que  $x = \pi(y)$ . Nesse caso, como  $\pi(p) = p$ , segue do Lema 6.4 que

$$\begin{aligned} d_T(f_A^n(p), f_A^n(x)) &= d_T(f_A^n(\pi(p)), f_A^n(\pi(y))) \\ &= d_T(\pi(A^n p), \pi(A^n y)) \\ &\leq \|A^n p - A^n y\|. \end{aligned}$$

Agora, como  $y \in W_A^s(p)$ , segue que  $\|A^n p - A^n y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Portanto  $x \in W_{f_A}^s(p)$  e, consequentemente,  $\pi(W_A^s(p)) \subset W_{f_A}^s(p)$ .

Mostraremos agora que  $W_{f_A}^s(p) \subset \pi(W_A^s(p))$ . Fixado  $x \in W_{f_A}^s(p)$ , vamos mostrar que existe  $y \in W_A^s(p)$  tal que  $x = \pi(y)$ . Seja  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$d_T(f_A^n(x), f_A^n(p)) \leq \frac{1}{4\|A\|} \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então, como  $\pi(A^{n_0} p) = f_A^{n_0}(p)$ , existe um único  $z \in B(A^{n_0} p, \frac{1}{4})$  tal que  $\pi(z) = f_A^{n_0}(x)$ . Consideremos agora  $y = A^{-n_0} z$ . Nesse caso,

$$\pi(y) = \pi(A^{-n_0} z) = f_A^{-n_0}(\pi(z)) = f_A^{-n_0}(f_A^{n_0}(x)) = x.$$

Resta mostrarmos que  $y \in W_A^s(p)$ . Como  $\|z - A^{n_0} p\| \leq \frac{1}{4}$ , segue do Lema 6.4 que

$$\|z - A^{n_0} p\| = d_T(\pi(z), \pi(A^{n_0} p)) = d_T(f_A^{n_0}(x), f_A^{n_0}(p)) \leq \frac{1}{4\|A\|}.$$

Consequentemente

$$\|Az - A(A^{n_0} p)\| \leq \frac{1}{4}.$$

Portanto, combinando este fato com o Lema 6.4, segue que

$$\|Az - A(A^{n_0}p)\| = d_T(\pi(Az), \pi(A(A^{n_0}p))) = d_T(f_A^{n_0+1}(x), f_A^{n_0+1}(p)) \leq \frac{1}{4\|A\|}.$$

Procedendo recursivamente, obtemos que

$$\|A^n z - A^n(A^{n_0}p)\| = d_T(f_A^{n_0+n}(x), f_A^{n_0+n}(p)) \leq \frac{1}{4\|A\|} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, como  $d_T(f_A^{n_0+n}(x), f_A^{n_0+n}(p)) \rightarrow 0$  à medida que  $n \rightarrow +\infty$ , segue que  $z \in W_A^s(A^{n_0}p)$  e, consequentemente,  $y \in W_A^s(p)$ . Logo  $W_{f_A}^s(p) \subset \pi(W_A^s(p))$ . Combinando as duas observações anteriores, concluímos que  $W_{f_A}^s(p) = \pi(W_A^s(p))$  como queríamos. Mostremos agora que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $W_{f_{A,\varepsilon}}^s(p) = \pi(W_{A,\varepsilon}^s(p))$ .

Procedendo como no caso anterior, é fácil ver que  $\pi(W_{A,\varepsilon}^s(p)) \subset W_{f_{A,\varepsilon}}^s(p)$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Para mostrarmos a inclusão contrária, consideremos  $\varepsilon < \frac{1}{4\|A\|}$ . Nesse caso, dado  $x \in W_{f_{A,\varepsilon}}^s(p)$ , temos que

$$d_T(f_A^n(x), f_A^n(p)) \leq \frac{1}{4\|A\|} \text{ para todo } n \geq 0.$$

Procedendo, então, como na prova de  $W_{f_A}^s(p) \subset \pi(W_A^s(p))$ , podemos mostrar que existe  $y \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\pi(y) = x$  e, além disso,

$$\|A^n y - A^n p\| = d_T(f_A^n(x), f_A^n(p)) \leq \varepsilon < \frac{1}{4\|A\|} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente  $y \in W_{A,\varepsilon}^s(p)$  e  $x = \pi(y) \in \pi(W_{A,\varepsilon}^s(p))$ , seguindo que  $W_{f_{A,\varepsilon}}^s(p) \subset \pi(W_{A,\varepsilon}^s(p))$ . Combinando esse fato com a observação inicial, obtemos, conforme afirmado, que  $\pi(W_{A,\varepsilon}^s(p)) = W_{f_{A,\varepsilon}}^s(p)$ .

Consideremos agora  $x \in W_{f_{A,\varepsilon}}^s(p) = \pi(W_{A,\varepsilon}^s(p))$ . Nesse caso, existe  $y \in W_{A,\varepsilon}^s(p)$  tal que  $\pi(y) = x$ . Agora, como  $\varepsilon < \frac{1}{4\|A\|} < \frac{1}{2}$  e  $\pi(p) = p$ , usando o Lema 6.4 (duas vezes) e o Corolário 6.2, obtemos que

$$\begin{aligned} d_T(f_A^n(p), f_A^n(x)) &= d_T(f_A^n(\pi(p)), f_A^n(\pi(y))) \\ &= d_T(\pi(A^n p), \pi(A^n y)) \\ &\leq \|A^n p - A^n y\| \\ &\leq \lambda^n \|p - y\| \\ &= \lambda^n d_T(\pi(p), \pi(y)) \\ &= \lambda^n d_T(p, x) \end{aligned}$$

provando (6.5). O fato que  $W_{f_A, \varepsilon}^s(p) \subset W_{f_A}^s(p)$  segue diretamente do Lema 6.3 e das caracterizações anteriores. A prova das afirmações, envolvendo conjuntos instáveis e instáveis locais, pode ser feita de maneira análoga trocando simplesmente ‘iterados para o futuro’ por ‘iterados para o passado’ na prova anterior e usando que  $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ . A prova da proposição está completa.  $\square$

**Lema 6.11.** *Dados  $p \in \mathbb{T}^2$  e  $x \in W_{f_A}^s(p)$ , existe um único ponto  $\tilde{x} \in W_A^s(p)$  tal que  $x = \pi(\tilde{x})$ . Ou seja,*

$$\pi|_{W_A^s(p)}: W_A^s(p) \rightarrow W_{f_A}^s(p)$$

*é uma bijeção. Vale também um resultado análogo para  $W_{f_A}^u(p)$  e  $W_A^u(p)$ .*

*Demonstração.* Consideremos inicialmente o caso em que  $p = (0, 0)$ . Da Proposição 6.10, segue que  $W_{f_A}^s((0, 0)) = \pi(W_A^s((0, 0))) = \pi(\mathbb{E}^s)$ . Em particular, a existência de um ponto  $\tilde{x}$  como enunciado está assegurada. Resta, então, mostramos que tal ponto  $\tilde{x}$  é único. Para tanto, supomos que  $\tilde{z} \in W_A^s((0, 0)) = \mathbb{E}^s$  é um ponto tal que  $x = \pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{z})$  e mostremos que  $\tilde{x} = \tilde{z}$ .

Consideremos  $r = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ . Nesse caso, os pontos de  $\mathbb{E}^s$  têm coordenadas da forma  $(t, rt)$ . Em particular,  $\tilde{x}$  e  $\tilde{z}$  têm a forma  $\tilde{x} = (t_{\tilde{x}}, t_{\tilde{x}}r)$  e  $\tilde{z} = (t_{\tilde{z}}, t_{\tilde{z}}r)$  para algum  $t_{\tilde{x}}, t_{\tilde{z}} \in \mathbb{R}$ . Como  $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{z})$ , segue que  $t_{\tilde{x}} \equiv t_{\tilde{z}} \pmod{1}$  e  $t_{\tilde{x}}r \equiv t_{\tilde{z}}r \pmod{1}$ . Ou seja,  $t_{\tilde{x}} - t_{\tilde{z}} \in \mathbb{Z}$  e  $t_{\tilde{x}}r - t_{\tilde{z}}r \in \mathbb{Z}$ . Agora, como  $r$  é um número irracional, se  $t_{\tilde{x}} - t_{\tilde{z}} \in \mathbb{Z}$ , então só podemos ter  $(t_{\tilde{x}} - t_{\tilde{z}})r \in \mathbb{Z}$  caso  $t_{\tilde{x}} - t_{\tilde{z}} = 0$ . Portanto  $\tilde{x} = \tilde{z}$ , concluindo a prova no caso em que  $p = (0, 0)$ . O caso geral segue do anterior combinando o Lema 6.1 e a Proposição 6.10.  $\square$

Combinando, então, o lema anterior, a Proposição 6.10, o fato que  $W_{f_A, \varepsilon}^s(p)$  e  $W_{f_A, \varepsilon}^u(p)$  são segmentos de reta e a continuidade de  $\pi$ , obtemos que, localmente,  $W_{f_A}^s(p)$  e  $W_{f_A}^u(p)$  são “cópias” de um intervalo. Em outras palavras,

**Corolário 6.12.**  *$W_{f_A}^s(p)$  e  $W_{f_A}^u(p)$  são variedades de dimensão 1.*

Nosso próximo resultado nos diz que conjuntos estáveis e instáveis “se espalham” por todo o toro  $\mathbb{T}^2$ . Mais precisamente,

**Proposição 6.13.** *Dados  $p, q \in \mathbb{T}^2$ , os conjuntos estáveis e instáveis  $W_{f_A}^s(p)$  e  $W_{f_A}^u(q)$  são densos em  $\mathbb{T}^2$ . Além disso, o conjunto dos pontos de interseção de  $W_{f_A}^s(p)$  e  $W_{f_A}^u(q)$  também é denso em  $\mathbb{T}^2$ .*

Consideremos inicialmente o seguinte resultado auxiliar.

**Lema 6.14.** *Seja  $r \in \mathbb{R}$  um número irracional. Então o conjunto*

$$\{nr \pmod{1} : n \in \mathbb{Z}\}$$

*é denso no intervalo  $[0, 1]$ .*



*Demonstração.* Consideremos a sequência bilateral  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  dada por  $x_n = nr \pmod 1$ . Dado  $k \in \mathbb{N}$ , pelo Princípio da Casa dos Pombos (veja Seção 2.1) existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  distintos tais que  $x_{n_1}$  e  $x_{n_2}$  pertencem a um mesmo intervalo da forma  $[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]$  para algum  $0 \leq i \leq k-1$ . Supomos sem perda de generalidade que  $x_{n_2} \geq x_{n_1}$ . Nesse caso,  $0 \leq x_{n_2} - x_{n_1} < \frac{1}{k}$ , o que é equivalente a  $0 \leq (n_2 - n_1)r \pmod 1 < \frac{1}{k}$ . Ou seja,  $0 \leq x_{n_2 - n_1} < \frac{1}{k}$ . Esse argumento nos mostra que, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $n_k \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < x_{n_k} < \frac{1}{k}$  (a desigualdade  $0 < x_{n_k}$  segue do fato que  $x_{n_k} = n_k r \pmod 1$  e  $r$  é irracional).

Agora, dados  $\varepsilon > 0$  e  $x \in [0, 1]$ , tomemos  $k \in \mathbb{N}$  de modo que  $\frac{1}{k} < \varepsilon$  e fixemos  $0 \leq i_x < k$  tal que  $x \in [\frac{i_x}{k}, \frac{i_x+1}{k}]$ . Pelas observações anteriores, existe  $x_{n_k}$  satisfazendo  $0 < x_{n_k} < \frac{1}{k}$ . Então, tomando  $m = \lceil \frac{i_x}{k x_k} \rceil$ , em que  $\lceil y \rceil$  significa o menor inteiro maior ou igual a  $y$ , temos que  $m x_{n_k} \in [\frac{i_x}{k}, \frac{i_x+1}{k}]$ . Em particular,  $|x - m x_{n_k}| < \frac{1}{k} < \varepsilon$ . Finalmente, como  $m x_{n_k} = m n_k r \pmod 1$ , segue que  $m n_k r \pmod 1$  está a uma distância menor do que  $\varepsilon$  de  $x$ . Logo, como  $\varepsilon$  e  $x$  são arbitrários, segue o resultado.  $\square$

*Demonstração da Proposição 6.13.* Mostraremos que  $W_{f_A}^s(p)$  é denso em  $\mathbb{T}^2$ . O caso de  $W_{f_A}^u(p)$  é análogo. Para tanto, é suficiente mostrarmos que  $\pi(\mathbb{E}^s)$  é denso em  $\mathbb{T}^2$ . De fato, isso segue do Lema 6.1 e da Proposição 6.10. Então, dado um ponto  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{T}^2$ , vamos mostrar que existem pontos de  $\pi(\mathbb{E}^s)$  arbitrariamente próximos de  $y$ .

Como na prova do Lema 6.11, consideremos  $r = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ . Então o espaço  $\mathbb{E}^s$  coincide com a reta  $x_2 = r x_1$ . Ou seja, os pontos de  $\mathbb{E}^s$  têm coordenadas da forma  $(x_1, r x_1)$ . Como  $r$  é irracional, segue do Lema 6.14 que, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $n r \pmod 1$  está arbitrariamente próximo de  $y_2 - y_1 r \pmod 1$ . Isto significa que existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $n r + k$  está arbitrariamente próximo de  $y_2 - y_1 r$ . Nesse caso,  $n r + y_1 r = (y_1 + n) r$  está arbitrariamente próximo de  $y_2 - k$ . Em particular, o ponto  $(y_1 + n, (y_1 + n) r)$  está arbitrariamente próximo do ponto  $(y_1 + n, y_2 - k)$  em  $\mathbb{R}^2$ . Portanto, levando em consideração o Lema 6.4, obtemos que  $\pi((y_1 + n, (y_1 + n) r))$  está arbitrariamente próximo de  $\pi((y_1 + n, y_2 - k))$  em  $\mathbb{T}^2$ . Agora, como  $y_1 + n \equiv y_1 \pmod 1$  e  $y_2 - k \equiv y_2 \pmod 1$ , segue que  $\pi((y_1 + n, y_2 - k)) = (y_1, y_2)$ . Combinando essas observações, segue que  $\pi((y_1 + n, (y_1 + n) r))$  está arbitrariamente próximo de  $(y_1, y_2)$  em  $\mathbb{T}^2$ . Finalmente, como  $(y_1 + n, (y_1 + n) r) \in \mathbb{E}^s$ , segue que  $\pi(\mathbb{E}^s)$  é denso em  $\mathbb{T}^2$ .

A observação de que o conjunto dos pontos de interseção de  $W_{f_A}^s(p)$  e  $W_{f_A}^u(q)$  também é denso em  $\mathbb{T}^2$  segue diretamente dos fatos que  $\pi(\mathbb{E}^s)$  e  $\pi(\mathbb{E}^u)$  são densos em  $\mathbb{T}^2$  e  $\mathbb{E}^s$  e  $\mathbb{E}^u$  se intersectam transversalmente, veja (6.2).  $\square$

**Exercício 6.5.** Mostre que, para todo  $p \in \mathbb{T}^2$ , temos

$$f_A(W_{f_A}^s(p)) = W_{f_A}^s(f_A(p)) \text{ e } f_A^{-1}(W_{f_A}^u(p)) = W_{f_A}^u(f_A^{-1}(p)).$$

Note que se o leitor já fez o exercício da Seção 1.13, então o Exercício 6.5 é uma consequência direta daquele.

**Exercício 6.6.** Dados  $p \in \mathbb{T}^2$  e  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno como na Proposição 6.10, mostre que

$$W_{f_A}^s(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_A^{-n} \left( W_{f_A, \varepsilon}^s(f_A^n(p)) \right) \text{ e } W_{f_A}^u(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_A^n \left( W_{f_A, \varepsilon}^u(f_A^{-n}(p)) \right).$$

Observe que uma versão desse exercício para a aplicação  $A$  já foi demonstrada no Lema 6.3.

**Exercício 6.7.** Mostre que se  $\varepsilon > 0$  for suficientemente pequeno, então existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x, y \in \mathbb{T}^2$ ,

- (i)  $W_{f_A, \varepsilon}^s(x) \cap W_{f_A, \varepsilon}^u(y)$  consiste de no máximo um ponto;
- (ii) se  $d_T(x, y) < \delta$ , então  $W_{f_A, \varepsilon}^s(x) \cap W_{f_A, \varepsilon}^u(y)$  consiste de exatamente um ponto o qual denotamos por  $[x, y] := W_{f_A, \varepsilon}^s(x) \cap W_{f_A, \varepsilon}^u(y)$ .

Se um subconjunto  $M$  do espaço de fases de um sistema dinâmico é tal que (ii) é satisfeito para todo  $x, y \in M$  e, além disso,  $[x, y] \in M$ , então dizemos que  $M$  tem *estrutura de produto local*. Em particular,  $\mathbb{T}^2$  tem estrutura de produto local com relação a  $f_A$ .

**Exercício 6.8.** Utilizando o exercício anterior, mostre que se  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno, então existe  $\delta > 0$  de forma que se  $d_T(x, y) < \delta$  e  $z \in W_{f_A, \lambda \varepsilon}^s(y)$ , então  $W_{f_A, \varepsilon}^s(x) \cap W_{f_A, \varepsilon}^u(z)$  consiste de exatamente um ponto. Esse exercício será usado posteriormente. (Dica: observe que o ângulo entre os dois segmentos de reta  $W_{f_A, \varepsilon}^s(x)$  e  $W_{f_A, \varepsilon}^u(y)$  é independente de  $x$  e  $y$ . Faça um desenho para melhor compreender a situação.)

## 6.6 Novas métricas em $W_{f_A}^s$ e $W_{f_A}^u$

Vimos na Proposição 6.10 que, restrito a conjuntos estáveis e instáveis locais,  $f_A$  contrai/expande distâncias de maneira exponencial. Nosso objetivo nesta seção é introduzir novas métricas nos conjuntos estáveis e instáveis (globais) de forma que, com relação a essas novas métricas, a mesma propriedade continue válida nesses conjuntos maiores.

Dados  $p \in \mathbb{T}^2$  e  $x, y \in W_{f_A}^s(p)$ , sejam  $\tilde{x}, \tilde{y} \in W_A^s(p)$  os pontos dados pelo Lema 6.11 tais que  $x = \pi(\tilde{x})$  e  $y = \pi(\tilde{y})$ . Definimos, então,  $d_p^s: W_{f_A}^s(p) \times W_{f_A}^s(p) \rightarrow [0, +\infty)$  como

$$d_p^s(x, y) = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|.$$

É fácil ver que  $d_p^s$  é de fato uma métrica, que nos dá uma noção de proximidade “dentro” do conjunto estável. Por exemplo, na Figura 6.2, os pontos  $x$  e  $y$  estão próximos segundo a métrica  $d_T$  do toro, mas estão longe segundo a métrica  $d_p^s$ . Esse último fato pode ser visto de maneira intuitiva da seguinte forma: para irmos de  $x$  para  $y$  sem sair de  $W_{f_A}^s((0, 0))$ ,

temos que “andar” sobre os segmentos de reta (que pertencem a  $W_{f_A}^s((0, 0))$ ) conforme a orientação dada pelas setas, lembrando que os lados de cima e de baixo do quadrado estão identificados, assim, como os lados esquerdo e direito. Então, ao partirmos de  $x$  e chegarmos no lado superior do quadrado, reiniciamos no outro segmento de reta cujo “início” tem a mesma primeira coordenada do “final” do segmento anterior (no caso do desenho, no segundo segmento de reta dentro do quadrado). Prosseguindo andamos até tocar o lado esquerdo do quadrado. Daí continuamos no último segmento de reta contido no quadrado (pois o “início” deste segmento tem a mesma segunda coordenada que o “final” do segmento anterior) e, assim por diante, até chegarmos em  $y$ . Dessa forma, fica claro que em  $W_{f_A}^s((0, 0))$ ,  $x$  e  $y$  estão distantes. Em particular, é falso que  $d_p^s(x, y) \leq d_T(x, y)$ . Por outro lado, é fácil ver que  $d_T(x, y) \leq d_p^s(x, y)$  para todo  $x, y \in W_{f_A}^s(p)$ . Quando não há risco de confusão, omitiremos o índice “ $p$ ” de  $d_p^s$  e escreveremos apenas  $d^s$ .

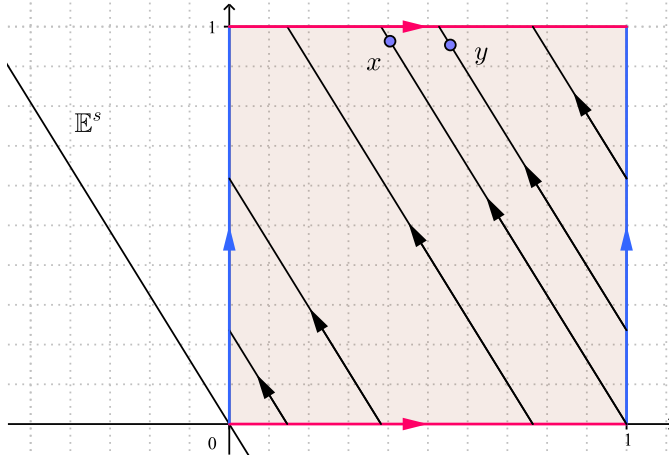


Figura 6.2: Representação de parte de  $W_{f_A}^s((0, 0))$ .

Uma propriedade importante da métrica  $d_p^s$  é a seguinte.

**Proposição 6.15.** *Dados  $p \in \mathbb{T}^2$  e  $x, y \in W_{f_A}^s(p)$ , temos*

$$d_{f_A(p)}^s(f_A(x), f_A(y)) \leq \lambda d_p^s(x, y).$$

*Ou seja, restrita ao conjunto estável,  $f_A$  é uma contração segundo a métrica  $d^s$ .*

**Observação 6.1.** Observe que devido ao Exercício 6.5, dados  $x, y \in W_{f_A}^s(p)$  temos

que  $f_A(x), f_A(y) \in W_{f_A}^s(f_A(p))$ . Em particular, faz sentido considerarmos a distância  $d_{f_A(p)}^s(f_A(x), f_A(y))$ .

*Demonstração.* Dados  $x, y \in W_{f_A}^s(p)$ , sejam  $\tilde{x}, \tilde{y} \in W_A^s(p)$  tais que  $\pi(\tilde{x}) = x$  e  $\pi(\tilde{y}) = y$ . Então

$$\begin{aligned} d_{f_A(p)}^s(f_A(x), f_A(y)) &= d_{f_A(p)}^s(f_A(\pi(\tilde{x})), f_A(\pi(\tilde{y}))) \\ &= d_{f_A(p)}^s(\pi(A\tilde{x}), \pi(A\tilde{y})). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Observemos agora que, por definição, temos  $f_A(p) = \pi(Ap)$ , ou seja, as respectivas coordenadas de  $f_A(p)$  e  $Ap$  têm a mesma parte fracionária. Em particular,  $Ap - f_A(p) \in \mathbb{Z}^2$ . Além disso, pela caracterização dada no Lema 6.1, temos que

$$W_A^s(f_A(p)) = f_A(p) + \mathbb{E}^s \text{ e } W_A^s(Ap) = Ap + \mathbb{E}^s. \quad (6.8)$$

Por outro lado, como  $\tilde{x} \in W_A^s(p)$ , segue do Exercício 6.1 que  $A\tilde{x} \in W_A^s(Ap)$ . Analogamente  $A\tilde{y} \in W_A^s(Ap)$ . Combinando essas observações, segue que existem  $v_x, v_y \in \mathbb{E}^s$  tais que

$$A\tilde{x} = Ap + v_x = v_x + f_A(p) + (Ap - f_A(p))$$

e

$$A\tilde{y} = Ap + v_y = v_y + f_A(p) + (Ap - f_A(p)).$$

Agora, como  $Ap - f_A(p) \in \mathbb{Z}^2$ , segue que

$$\pi(v_x + f_A(p) + (Ap - f_A(p))) = \pi(v_x + f_A(p)).$$

Ou seja,  $\pi(A\tilde{x}) = \pi(v_x + f_A(p))$ . Analogamente  $\pi(A\tilde{y}) = \pi(v_y + f_A(p))$ . Finalmente, como  $v_x + f_A(p)$  e  $v_y + f_A(p)$  pertencem a  $W_A^s(f_A(p))$  (recorde (6.8)), segue da unicidade dada no Lema 6.11, da definição de  $d_{f_A(p)}^s$  e de (6.3) que

$$\begin{aligned} d_{f_A(p)}^s(\pi(A\tilde{x}), \pi(A\tilde{y})) &= \|(v_x + f_A(p)) - (v_y + f_A(p))\| \\ &= \|v_x - v_y\| \\ &= \|A\tilde{x} - A\tilde{y}\| \\ &\leq \lambda \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \\ &= \lambda d_p^s(x, y). \end{aligned}$$

Combinando este fato com (6.7), concluímos a demonstração.  $\square$

**Exercício 6.9.** Utilizando as ideias da demonstração, anterior mostre que dado  $p \in \mathbb{T}^2$ ,

$$W_{f_A}^s(f_A(p)) = \pi(W_A^s(Ap)).$$

Para tanto, note que (6.8) nos dá a seguinte relação  $W_A^s(f_A(p)) = W_A^s(Ap) + f_A(p) - Ap$ .

De maneira análoga ao que fizemos para o conjunto estável, podemos construir uma nova métrica em  $W_{f_A}^u(p)$  com propriedades semelhantes: dados  $p \in \mathbb{T}^2$  e  $x, y \in W_{f_A}^u(p)$ , sejam  $\tilde{x}, \tilde{y} \in W_A^u(p)$  os pontos dados pelo Lema 6.11 tais que  $x = \pi(\tilde{x})$  e  $y = \pi(\tilde{y})$ . Definimos, então,  $d_p^u : W_{f_A}^u(p) \times W_{f_A}^u(p) \rightarrow [0, +\infty)$  como

$$d_p^u(x, y) = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|.$$

Procedendo de forma análoga ao que fizemos na Proposição 6.15, obtemos a seguinte propriedade de  $d^u$ .

**Proposição 6.16.** *Dados  $p \in \mathbb{T}^2$  e  $x, y \in W_{f_A}^u(p)$ , temos*

$$d_{f_A(p)}^u(f_A(x), f_A(y)) \geq \lambda^{-1} d_p^u(x, y).$$

*Ou seja, restrita ao conjunto instável,  $f_A$  é uma expansão segundo a métrica  $d^u$ .*

## 6.7 Transitividade, mixing topológico e expansividade de $f_A$

Nesta seção, mostraremos que  $f_A$  é transitiva, topologicamente *mixing* e expansiva, explorando as propriedades dos conjuntos estáveis e instáveis obtidas nas Seções 6.5 e 6.6.

**Proposição 6.17.** *A aplicação  $f_A$  é topologicamente transitiva.*

*Demonstração.* Para provarmos essa proposição, utilizaremos a caracterização de transitividade topológica dada na Proposição 1.6.

Sejam  $U, V \subset \mathbb{T}^2$  conjuntos abertos e  $p \in U$  e  $q \in V$  pontos periódicos (cuja existência é garantida pela Proposição 6.6). Seja  $m \in \mathbb{N}$  um múltiplo comum dos períodos de  $p$  e  $q$ . Em particular,  $f_A^m(p) = p$  e  $f_A^m(q) = q$ . Consideremos um ponto  $x \in W_{f_A}^s(p) \cap W_{f_A}^u(q)$  cuja existência segue da Proposição 6.13. Nesse caso, usando que  $f_A^{km}(p) = p$  e  $f_A^{km}(q) = q$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , segue que

$$d_T(p, f_A^{km}(x)) = d_T(f_A^{km}(p), f_A^{km}(x)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

e

$$d_T(q, f_A^{-km}(x)) = d_T(f_A^{-km}(q), f_A^{-km}(x)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Ou seja,  $f_A^{km}(x)$  converge para  $p$  e  $f_A^{-km}(x)$  converge para  $q$  à medida que  $k \rightarrow +\infty$ . Tomemos, então,  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f_A^{k_0 m}(x) \in U$  e  $f_A^{-k_0 m}(x) \in V$ . Logo  $f^{2k_0 m}(V) \cap U \neq \emptyset$  (pois  $z = f_A^{-k_0 m}(x) \in V$  e  $f_A^{2k_0 m}(z) = f_A^{k_0 m}(x) \in U$ ). Portanto, como os conjuntos  $U$  e  $V$  são arbitrários, segue que  $f_A$  é topologicamente transitiva.  $\square$

Usando ideias semelhantes as anteriores, mostraremos o seguinte.

**Proposição 6.18.** *A aplicação  $f_A$  é topologicamente mixing.*

Antes de iniciarmos a prova da proposição, introduziremos a seguinte nomenclatura: dizemos que  $r$  é um *segmento de reta em  $\mathbb{T}^2$*  se  $r = \pi(R)$ , em que  $R$  é um segmento de reta em  $\mathbb{R}^2$ . Por exemplo, na Figura 6.3,  $r = r_1 \cup r_2 \cup r_3$  é um segmento de reta em  $\mathbb{T}^2$ , pois ele pode ser obtido como  $\pi(R) = r$ , sendo  $R$  um segmento contido na reta  $t$  de  $\mathbb{R}^2$  obtido movendo-se sobre  $t$  para a direita a partir do ponto  $P$  e cujo comprimento coincide com a soma dos comprimentos de  $r_1, r_2$  e  $r_3$ .

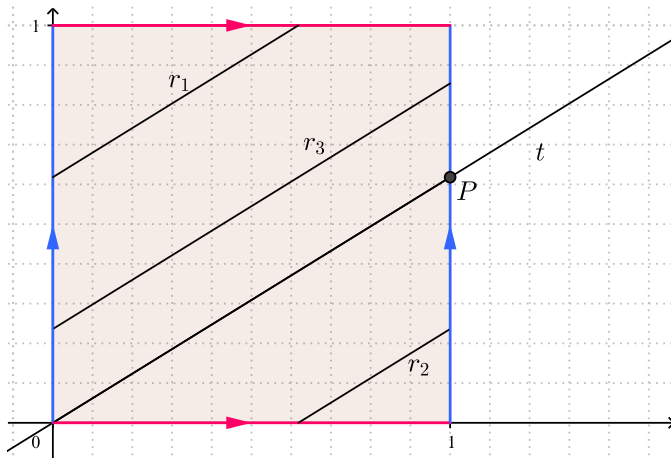


Figura 6.3: Exemplo de segmento de reta em  $\mathbb{T}^2$ .

*Demonstração.* Sejam  $U, V \subset \mathbb{T}^2$  conjuntos abertos. Pela Proposição 6.13, temos que  $W_{f_A}^u((0,0))$  é denso em  $\mathbb{T}^2$ . Em particular, existe um segmento de reta  $r$  de comprimento  $l$  contido em  $U \cap W_{f_A}^u((0,0))$ . Da Proposição 6.16 segue que ao aplicarmos  $f_A$  ao segmento  $r$ , seu comprimento aumenta por um fator maior ou igual a  $\lambda^{-1}$ . Ou seja, o comprimento de  $f_A(r)$  segundo a métrica  $d_{(0,0)}^u$  é maior ou igual a  $\lambda^{-1}l$ . Analogamente, aplicando  $f_A$   $n$ -vezes a  $r$ , obtemos que o comprimento do segmento  $f_A^n(r)$  segundo  $d_{(0,0)}^u$  é maior ou igual a  $\lambda^{-n}l$ . Em particular, como  $\lambda \in (0,1)$ ,  $\lambda^{-n}l \rightarrow +\infty$  à medida que  $n \rightarrow +\infty$ .

Agora, novamente como  $W_{f_A}^u((0,0))$  é densa em  $\mathbb{T}^2$ , segue que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $T > 0$  tal que todo segmento de tamanho maior ou igual a  $T$  com relação a  $d_{(0,0)}^u$ , contido em  $W_{f_A}^u((0,0))$ , intersecta qualquer bola de raio  $\varepsilon$  em  $\mathbb{T}^2$  (verifique). Para finalizar a demonstração, tomemos  $\varepsilon > 0$  tal que o conjunto aberto  $V$  contenha uma bola aberta de

raio  $\varepsilon$  e fixemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  de tal forma que o comprimento de  $f_A^{n_0}(r)$  com relação a  $d_{(0,0)}^u$  é maior do que  $T$ . Em particular,  $f_A^n(r)$  tem comprimento com relação a  $d_{(0,0)}^u$  maior do que  $T$  para todo  $n \geq n_0$ . Logo, segue das observações anteriores, que  $f_A^n(r)$  intersecta a bola de raio  $\varepsilon$  contida  $V$  para todo  $n \geq n_0$ . Portanto, como  $f_A^n(U) \supseteq f_A^n(r)$ , segue que  $f_A^n(U) \cap V$  para todo  $n \geq n_0$ .  $\square$

**Proposição 6.19.** *A aplicação  $f_A$  é expansiva, isto é, existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $x, y \in \mathbb{T}^2$  satisfazem*

$$d_T(f_A^n(x), f_A^n(y)) < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{Z},$$

*então  $x = y$ . Em particular,  $f_A$  tem dependência sensível às condições iniciais.*

*Demonstração.* Fixemos, por exemplo,  $\varepsilon = \frac{1}{10}$  e mostremos que  $f_A$  é  $\frac{1}{10}$ -expansiva. Sejam  $x, y \in \mathbb{T}^2$  pontos do toro tais que  $d_T(f_A^n(x), f_A^n(y)) < \frac{1}{10}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Pelo Exercício 6.4, temos que existem  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^2$  tais que  $\pi(\tilde{x}) = x$ ,  $\pi(\tilde{y}) = y$  e  $\|\tilde{x} - \tilde{y}\| = d_T(x, y)$ . Basta, então, mostramos que  $\tilde{x} = \tilde{y}$ .

Pela observação (6.2), temos que existem  $u \in \mathbb{E}^u$  e  $v \in \mathbb{E}^s$  tais que  $\tilde{x} - \tilde{y} = u + v$ . Vamos mostrar que  $u$  e  $v$  devem ser ambos o vetor nulo. Para fins de contradição, suponha que  $\|u\| \neq 0$ . Nesse caso, usando (6.3), segue que para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \|A^n(\tilde{x} - \tilde{y})\| &= \|A^n(u + v)\| \geq \|A^n u\| - \|A^n v\| \\ &\geq \lambda^{-n} \|u\| - \lambda^n \|v\|. \end{aligned}$$

Agora, como  $\lambda \in (0, 1)$  e  $\|u\| \neq 0$ , segue que

$$\|A^n(\tilde{x} - \tilde{y})\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (6.9)$$

Para finalizar a prova, observemos o seguinte. Por hipótese  $d_T(f_A^n(x), f_A^n(y)) < \frac{1}{10}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Em particular,  $d_T(x, y) < \frac{1}{10}$ , seguindo que  $\|\tilde{x} - \tilde{y}\| < \frac{1}{10}$ . Logo, como  $\|A\| < 5$ ,

$$\|A\tilde{x} - A\tilde{y}\| \leq \|A\| \|\tilde{x} - \tilde{y}\| < \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Neste caso, segue do Lema 6.4 e da definição de  $f_A$  que

$$\begin{aligned} \|A\tilde{x} - A\tilde{y}\| &= d_T(\pi(A\tilde{x}), \pi(A\tilde{y})) \\ &= d_T(f_A(\pi(\tilde{x})), f_A(\pi(\tilde{y}))) \\ &= d_T(f_A(x), f_A(y)) < \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando este fato e repetindo o argumento com  $A\tilde{x}$  e  $A\tilde{y}$  no lugar de  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$ , segue que

$$\|A^2\tilde{x} - A^2\tilde{y}\| \leq \|A\| \|A\tilde{x} - A\tilde{y}\| < \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

e, portanto, aplicando novamente o Lema 6.4 e a definição de  $f_A$ , obtemos que

$$\begin{aligned}\|A^2\tilde{x} - A^2\tilde{y}\| &= d_T(\pi(A^2\tilde{x}), \pi(A^2\tilde{y})) \\ &= d_T(f_A^2(\pi(\tilde{x})), f_A^2(\pi(\tilde{y}))) \\ &= d_T(f_A^2(x), f_A^2(y)) < \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Procedendo repetidamente dessa forma, concluímos que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|A^n\tilde{x} - A^n\tilde{y}\| < \frac{1}{10}$$

o que contradiz (6.9). Logo não podemos ter  $\|u\| \neq 0$ . Finalmente, assumindo  $\|v\| \neq 0$  e trocando  $n$  por  $-n$  nos argumentos anteriores, concluímos que não podemos ter  $\|v\| \neq 0$ . Logo  $\tilde{x} = \tilde{y}$  e, consequentemente,  $x = y$ , provando que  $f_A$  é expansiva.  $\square$

## 6.8 Estabilidade de transformações lineares hiperbólicas

O objetivo principal desta seção é mostrar que a transformação linear  $A$ , como transformação de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ , é *globalmente estável*. Isto é, mostrar que pequenas perturbações não lineares de  $A$  são topologicamente conjugadas a  $A$  e, em particular, sob certos aspectos, possuem a mesma dinâmica que  $A$ . Esses resultados serão usados na Seção 6.9 para mostrar que  $f_A$  satisfaz uma propriedade semelhante. A construção da conjugação de  $A$  com seu perturbado será feita utilizando a propriedade do sombreamento.

### 6.8.1 $A$ possui a propriedade do sombreamento

Começaremos com um lema auxiliar que nos diz que contrações e expansões possuem a referida propriedade.

**Lema 6.20.** *Dado  $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ , consideremos a transformação  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = ax$ . Então  $f$  possui a propriedade do sombreamento. De maneira mais precisa, existe uma constante  $C > 0$  tal que, dado  $\delta > 0$ , se  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma sequência em  $\mathbb{R}$  que satisfaz*

$$|f(x_n) - x_{n+1}| < \delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},$$

*então existe um único ponto  $x \in \mathbb{R}$  tal que*

$$|f^n(x) - x_n| < C\delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

*Demonstração.* Suponha que  $a \in (0, 1)$ . Observemos inicialmente que  $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  sombreia  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . De fato, dado  $n \in \mathbb{N}$ , aplicando a desigualdade triangular e utilizando



que  $a \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned}
 |f^n(x_0) - x_n| &= |a^n x_0 - x_n| \\
 &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a^{n-k} x_k - a^{n-(k+1)} x_{k+1}| \\
 &\leq \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-(k-1)} |a x_k - x_{k+1}| \\
 &\leq \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-(k-1)} \delta \\
 &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \delta \\
 &= \frac{\delta}{1-a}.
 \end{aligned}$$

Ou seja, tomando  $C = \frac{1}{1-a}$ , temos que  $|f^n(x_0) - x_n| < C\delta$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Observe-mos que isso ainda não conclui a prova, pois queremos sombrear toda a  $\delta$ -pseudo-órbita  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , e até agora sombreamos apenas a parte positiva.

Agora, dado  $m \in \mathbb{N}$ , consideremos a sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dada por  $z_n = x_{n-m}$ . Como ela é uma  $\delta$ -pseudo-órbita positiva, segue, do argumento anterior, que existe ponto  $y_m$  tal que

$$|f^n(y_m) - z_n| \leq C\delta \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então, lembrando da definição de  $z_n$ , segue que

$$|f^n(y_m) - x_{n-m}| \leq C\delta \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (6.10)$$

Ou seja, o ponto  $y_m$  sombreia a sequência  $(x_n)_{n \geq -m}$ . Tomemos agora  $x$  um ponto de acumulação de  $(f^m(y_m))_{m \in \mathbb{N}}$ . Isto é,  $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} f^{m_k}(y_{m_k})$  para alguma subsequência  $(f^{m_k}(y_{m_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  (note que tal ponto de acumulação sempre existe pois a sequência  $(f^m(y_m))_{m \in \mathbb{N}}$  é limitada. De fato, segue de (6.10) que  $|f^m(y_m) - x_0| \leq C\delta$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Ou seja, todos os pontos da sequência estão contidos em  $B(x_0, C\delta)$ ). Finalmente, dado  $n \in \mathbb{Z}$ , utilizando (6.10) e a continuidade de  $f$ , segue que

$$\begin{aligned}
 |f^n(x) - x_n| &= \lim_{k \rightarrow +\infty} |f^n(f^{m_k}(y_{m_k})) - x_n| \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} |f^{n+m_k}(y_{m_k}) - x_{(n+m_k)-m_k}| \\
 &\leq C\delta.
 \end{aligned}$$

Para concluirmos a prova, resta mostrarmos que o ponto  $x$  satisfazendo  $|f^n(x) - x_n| \leq C\delta$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  é único. Suponha que  $y \in \mathbb{R}$  também satisfaça  $|f^n(y) - x_n| \leq C\delta$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Nesse caso,

$$|f^n(x) - f^n(y)| \leq |f^n(x) - x_n| + |x_n - f^n(y)| \leq 2C\delta$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Ou seja,  $a^n|x - y| = |f^n(x) - f^n(y)| < 2C\delta$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Agora, como  $a \in (0, 1)$ , segue que  $a^n \rightarrow +\infty$  à medida que  $n \rightarrow -\infty$ . Logo,  $a^n|x - y|$  só pode ser limitado se  $|x - y| = 0$ . Ou seja,  $x = y$  provando a unicidade. O caso em que  $a \in (1, +\infty)$  pode ser tratado de forma similar, observando que  $f^{-1}$  é uma contração.  $\square$

Utilizando o lema anterior, podemos provar facilmente que a transformação linear definida pela matriz  $A$  tem a propriedade do sombreamento.

**Proposição 6.21** (Propriedade do sombreamento). *Existe uma constante  $C > 0$  tal que, dado  $\delta > 0$ , se  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma sequência em  $\mathbb{R}^2$  que satisfaz*

$$\|Ax_n - x_{n+1}\| < \delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},$$

*então existe um único ponto  $x \in \mathbb{R}^2$  tal que*

$$\|A^n x - x_n\| < C\delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Antes de partirmos para a prova da proposição propriamente dita, consideremos a seguinte construção que será útil ao longo desta seção. Vimos em (6.2) que  $\mathbb{R}^2$  pode ser escrito como a soma de subespaços invariantes  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^s$ . Em particular, dado  $x \in \mathbb{R}^2$ , podemos escrevê-lo de maneira única como  $x = x^u + x^s$  com  $x^u \in \mathbb{E}^u$  e  $x^s \in \mathbb{E}^s$ . Consideremos, então, a norma  $\|\cdot\|_a$  dada por

$$\|x\|_a := \max\{\|x^s\|, \|x^u\|\}. \quad (6.11)$$

**Exercício 6.10.** Verifique que  $\|\cdot\|_a$  é de fato uma norma em  $\mathbb{R}^2$  (veja Apêndice B).

Observemos que, como todas as normas em  $\mathbb{R}^2$  são equivalentes (veja Proposição B.2), existe  $D > 1$  tal que

$$\frac{1}{D}\|x\| \leq \|x\|_a \leq D\|x\| \quad (6.12)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . Com essa ferramenta em mãos, podemos partir para a prova da proposição.

*Demonstração da Proposição 6.21.* Escrevamos inicialmente todos elementos da  $\delta$ -pseudo-órbita  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  como  $x_n = x_n^u + x_n^s$  com  $x_n^u \in \mathbb{E}^u$  e  $x_n^s \in \mathbb{E}^s$ . Então, utilizando (6.11) e (6.12) obtemos que  $(x_n^u)_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma  $D\delta$ -pseudo-órbita de  $A$  em  $\mathbb{E}^u$  enquanto que  $(x_n^s)_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma  $D\delta$ -pseudo-órbita de  $A$  em  $\mathbb{E}^s$ . Já por (6.1), temos que a restrição de  $A$  a  $\mathbb{E}^s$  é uma contração enquanto que a restrição de  $A$  a  $\mathbb{E}^u$  é uma expansão. Logo, pelo Lema 6.20, segue que existem únicos  $x^s \in \mathbb{E}^s$  e  $x^u \in \mathbb{E}^u$  tais que

$$\|A^n x^s - x_n^s\| \leq CD\delta \quad \text{e} \quad \|A^n x^u - x_n^u\| \leq CD\delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Então, tomando  $x = x^s + x^u$  e usando (6.11), segue que

$$\|A^n x - x_n\|_a \leq CD\delta \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Finalmente, usando (6.12), obtemos que

$$\|A^n x - x_n\| \leq CD^2\delta \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

conforme afirmado. □

### 6.8.2 $A$ é globalmente estável

O resultado principal desta seção é o seguinte.

**Teorema 6.22** (Estabilidade global de  $A$ ). *Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação tal que*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|f(x)\| < \infty$$

e

$$\|f(x) - f(y)\| < c\|x - y\| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^2 \quad (6.13)$$

para algum  $c > 0$ . Então, se  $c$  for suficientemente pequeno, existe um homeomorfismo  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$A \circ H = H \circ (A + f). \quad (6.14)$$

Ou seja, perturbações limitadas e Lipschitz de  $A$  são de fato conjugadas a  $A$ . Por essa razão, dizemos que  $A$  é globalmente estável. Começaremos a prova do resultado anterior com alguns resultados auxiliares.

**Lema 6.23.** *Se  $c$  for suficientemente pequeno, então  $A + f$  é um homeomorfismo.*

*Demonstração.* Tome  $c > 0$  tal que  $c < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ . Observemos inicialmente que  $A + f$  é injetiva. De fato, dados  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , utilizando que  $\|Az\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|z\|$  e (6.13), obtemos que

$$\begin{aligned} \|Ax + f(x) - Ay - f(y)\| &\geq \|Ax - Ay\| - \|f(x) - f(y)\| \\ &\geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|x - y\| - c\|x - y\| \\ &\geq \left( \frac{1}{\|A^{-1}\|} - c \right) \|x - y\|. \end{aligned}$$

Logo, como  $\frac{1}{\|A^{-1}\|} - c > 0$ , a desigualdade acima prova que se  $x \neq y$ , então  $Ax + f(x) \neq Ay + f(y)$ . Portanto  $A + f$  é injetiva. Para provarmos que  $A + f$  é sobrejetiva, tomemos

$y \in \mathbb{R}^2$  e consideremos  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $G(x) = A^{-1}y - A^{-1}f(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . Neste caso, utilizando (6.13),

$$\begin{aligned} \|G(x) - G(z)\| &= \|A^{-1}y - A^{-1}f(x) - A^{-1}y + A^{-1}f(z)\| \\ &= \|A^{-1}f(x) - A^{-1}f(z)\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|f(x) - f(z)\| \\ &\leq \|A^{-1}\| c \|x - z\|, \end{aligned}$$

para todo  $x, z \in \mathbb{R}^2$ . Portanto, como  $\|A^{-1}\|c < 1$ , segue que  $G$  é uma contração. Em particular, existe  $x \in \mathbb{R}^2$  tal que  $G(x) = x$  (lembre-se que toda contração em  $\mathbb{R}^2$  possui um ponto fixo). Consequentemente  $x = A^{-1}y - A^{-1}f(x)$  implicando que  $Ax + f(x) = y$ . Ou seja, dado  $y \in \mathbb{R}^2$ , existe  $x \in \mathbb{R}^2$  tal que  $Ax + f(x) = y$  e, portanto,  $A + f$  é sobrejetiva. Combinando as duas observações, segue que  $A + f$  é uma bijeção e, em particular, possui inversa  $(A + f)^{-1}$ .

Para concluirmos a demonstração, resta observarmos que  $A + f$  e  $(A + f)^{-1}$  são contínuas. A continuidade de  $A + f$  segue diretamente do fato que  $A$  e  $f$  são contínuas. Resta observarmos que a inversa de  $A + f$  é também contínua. Definamos  $F := A + f$ . Nesse caso,  $F^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfaz  $F^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}(f(F^{-1}(x)))$  (verifique essa afirmação). Consequentemente

$$\begin{aligned} \|F^{-1}(x) - F^{-1}(y)\| &\leq \|A^{-1}x - A^{-1}y\| + \|A^{-1}(f(F^{-1}(x))) - A^{-1}(f(F^{-1}(y)))\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|x - y\| + \|A^{-1}\| \|f(F^{-1}(x)) - f(F^{-1}(y))\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|x - y\| + c \|A^{-1}\| \|F^{-1}(x) - F^{-1}(y)\|. \end{aligned}$$

Portanto, como  $c \|A^{-1}\| < 1$ , segue que

$$\|F^{-1}(x) - F^{-1}(y)\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - c \|A^{-1}\|} \|x - y\|.$$

Ou seja,  $F^{-1}$  é Lipschitz e, em particular, contínua. Isto mostra que  $A + f$  é um homeomorfismo concluindo a prova do lema.  $\square$

**Lema 6.24.** *Se  $c$  for suficientemente pequeno, então  $A + f$  tem constante de expansividade infinita. Mais precisamente, se*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|(A + f)^n(x) - (A + f)^n(y)\| < \infty,$$

*então  $x = y$ . Mais ainda, dados  $K > 0$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que se*

$$\|(A + f)^n(x) - (A + f)^n(y)\| < K$$

*para todo  $|n| \leq N$ , então  $\|x - y\| < \varepsilon$ .*

*Demonstração.* Mostraremos a contrapositiva da primeira afirmação. Ou seja, mostraremos que se  $x \neq y$ , então  $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|(A + f)(x) - (A + f)(y)\| = \infty$ . Consideremos a norma  $\|\cdot\|_a$  dada em (6.11). Observemos inicialmente que  $f$  é também Lipschitz com relação a essa norma. De fato, utilizando (6.12) e (6.13), segue que

$$\|f(x) - f(y)\|_a \leq D\|f(x) - f(y)\| \leq cD\|x - y\| \leq cD^2\|x - y\|_a$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Isto é,  $\|f(x) - f(y)\|_a \leq cD^2\|x - y\|_a$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^2$ .

Consideremos agora  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Segue da definição de  $\|\cdot\|_a$  que  $\|x - y\|_a = \|x^u - y^u\|$  ou  $\|x - y\|_a = \|x^s - y^s\|$ . Supomos inicialmente que  $\|x - y\|_a = \|x^u - y^u\|$ . Nesse caso, utilizando a observação anterior,

$$\begin{aligned} \|(A + f)(x) - (A + f)(y)\|_a &\geq \|A(x - y)\|_a - \|f(x) - f(y)\|_a \\ &\geq \|A(x^u - y^u)\| - \|f(x) - f(y)\|_a \\ &\geq |\lambda^u| \|x^u - y^u\| - cD^2\|x - y\|_a \\ &= (|\lambda^u| - cD^2)\|x - y\|_a. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Por outro lado, como para todo  $z \in \mathbb{R}^2$  temos  $\|z^s\| \leq \|z\|_a \leq D\|z\|$ , segue utilizando (6.13) que

$$\begin{aligned} \|((A + f)(x) - (A + f)(y))^s\| &\leq \|A(x^s - y^s)\| + \|(f(x) - f(y))^s\| \\ &\leq \|A(x^s - y^s)\| + D\|f(x) - f(y)\| \\ &\leq |\lambda^s| \|x^s - y^s\| + cD\|x - y\| \\ &\leq |\lambda^s| \|x - y\|_a + cD^2\|x - y\|_a \\ &\leq (|\lambda^s| + cD^2)\|x - y\|_a. \end{aligned}$$

Portanto se  $c > 0$  for suficientemente pequeno de modo que, por exemplo,  $|\lambda^s| + cD^2 < 1 < |\lambda^u| - cD^2$  (lembre-se que  $|\lambda^s| < 1$  e  $|\lambda^u| > 1$ ), temos que

$$(|\lambda^u| - cD^2)\|x - y\|_a \geq (|\lambda^s| + cD^2)\|x - y\|_a.$$

Logo, como

$$\begin{aligned} \|(A + f)(x) - (A + f)(y)\|_a &= \\ &= \max\{\|((A + f)(x) - (A + f)(y))^s\|, \|((A + f)(x) - (A + f)(y))^u\|\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

segue combinando as observações acima que

$$\|(A + f)(x) - (A + f)(y)\|_a = \|((A + f)(x) - (A + f)(y))^u\|.$$

Em particular, podemos aplicar a desigualdade (6.15) com  $(A + f)(x)$  e  $(A + f)(y)$  no lugar de  $x$  e  $y$  respectivamente, obtendo

$$\begin{aligned} \|(A + f)^2(x) - (A + f)^2(y)\|_a &\geq (|\lambda^u| - cD^2)\|(A + f)(x) - (A + f)(y)\|_a \\ &\geq (|\lambda^u| - cD^2)^2\|x - y\|_a. \end{aligned}$$

Procedendo recursivamente, obtemos que

$$\|(A + f)^n(x) - (A + f)^n(y)\|_a \geq (|\lambda^u| - cD^2)^n \|x - y\|_a \quad (6.17)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Em particular, como  $|\lambda^u| - cD^2 > 1$ , se  $x \neq y$  segue que

$$\|(A + f)^n(x) - (A + f)^n(y)\|_a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Utilizando, então, (6.12) obtemos que

$$\|(A + f)^n(x) - (A + f)^n(y)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

conforme afirmado. Mais ainda, utilizando (6.12) e (6.17) segue

$$\frac{D^2}{(|\lambda^u| - cD^2)^n} \|(A + f)^n(x) - (A + f)^n(y)\| \geq \|x - y\|.$$

Logo, tomando  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{D^2 K}{(|\lambda^u| - cD^2)^N} < \varepsilon$ , segue da desigualdade acima que se  $\|(A + f)^n(x) - (A + f)^n(y)\| < K$  para todo  $|n| \leq N$ , então  $\|x - y\| < \varepsilon$ .

No caso em que  $\|x - y\|_a = \|x^s - y^s\|$ , podemos proceder de forma análoga e obter que se  $x \neq y$ , então

$$\|(A + f)^{-n}(x) - (A + f)^{-n}(y)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Mais ainda, pode-se mostrar que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que se  $\|(A + f)^n(x) - (A + f)^n(y)\| < K$  para todo  $|n| \leq N$ , então  $\|x - y\| < \varepsilon$ . Deixamos os detalhes desse fato a cargo do leitor. Isto conclui a demonstração do lema.  $\square$

*Demonstração do Teorema 6.22.* Temos que construir um homeomorfismo  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazendo (6.14). Seja  $\delta > 0$  tal que  $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|f(x)\| < \delta$  (note que a existência de tal  $\delta$  nos é assegurada pela hipótese  $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|f(x)\| < \infty$ ). Então, para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , a órbita de  $x$  por  $A + f$  dada por  $((A + f)^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma  $\delta$ -pseudo-órbita de  $A$ . De fato,

$$\begin{aligned} \|A(A + f)^n(x) - (A + f)^{n+1}(x)\| &= \|A(A + f)^n(x) - (A + f)(A + f)^n(x)\| \\ &\|f((A + f)^n(x))\| < \delta \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Logo, pela propriedade do sombreamento dada na Proposição 6.21, segue que para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  existe um único ponto  $y \in \mathbb{R}^2$  tal que

$$\|A^n y - (A + f)^n(x)\| < C\delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}. \quad (6.18)$$

Definimos, então,  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como  $H(x) = y$  sendo  $y$  o único ponto que satisfaz (6.18). Ou seja,  $H(x)$  é o único ponto cuja órbita por  $A$  sombreia a  $\delta$ -pseudo-órbita  $((A +$

$f)^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Observemos inicialmente que tal  $H$  satisfaz (6.14). De fato, de (6.18), segue que

$$\|A^{n+1}H(x) - (A + f)^{n+1}(x)\| < C\delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}. \quad (6.19)$$

Ou seja,

$$\|A^n A(H(x)) - (A + f)^n(A + f)(x)\| < C\delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Portanto a órbita de  $A(H(x))$  por  $A$  sombreia a  $\delta$ -pseudo-órbita  $((A + f)^n(z))_{n \in \mathbb{Z}}$  com  $z = (A + f)(x)$ . Da definição de  $H$  segue, então, que  $H(z) = A(H(x))$ . Ou seja,  $H((A + f)(x)) = A(H(x))$ . Em particular, (6.14) é satisfeita. Resta verificarmos que  $H$  é um homeomorfismo.

O fato de que  $H$  é contínua pode ser provado como segue: seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $\mathbb{R}^2$  que converge para  $x$ . Vamos mostrar que  $(H(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $H(x)$  e, para tanto, é suficiente mostrarmos que o único ponto de acumulação de  $(H(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  é  $H(x)$ . Seja  $y$  um ponto de acumulação de  $(H(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . Isto é,  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} H(x_{m_k})$  para alguma subsequência  $(H(x_{m_k}))_{k \in \mathbb{Z}}$ . Nesse caso, dado  $j \in \mathbb{Z}$ , utilizando a continuidade de  $A$  e  $A + f$  e a definição de  $H$ , temos que

$$\|A^j y - (A + f)^j(x)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^j(H(x_{m_k})) - (A + f)^j(x_{m_k})\| < C\delta.$$

Logo, segue novamente da definição de  $H$  que,  $y = H(x)$ . Consequentemente o único ponto de acumulação de  $(H(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  é  $H(x)$  e  $H$  é contínua.

A injetividade de  $H$  é consequência direta do Lema 6.24. De fato, supomos que existam  $x, z \in \mathbb{R}^2$  tais que  $H(x) = H(z)$ . Nesse caso, segue da definição de  $H$  que

$$\|A^n H(x) - (A + f)^n(x)\| < C\delta \quad \text{e} \quad \|A^n H(z) - (A + f)^n(z)\| < C\delta$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Combinando essas observações e lembrando que  $H(x) = H(z)$ , segue que

$$\begin{aligned} \|(A + f)^n(x) - (A + f)^n(z)\| &\leq \|(A + f)^n(x) - A^n H(x)\| \\ &\quad + \|A^n H(z) - (A + f)^n(z)\| \\ &< 2C\delta \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Portanto, segue do Lema 6.24 que,  $x = z$  e, consequentemente,  $H$  é injetiva.

Observemos agora que  $H$  é sobrejetiva. Para tanto, faremos uso do teorema do ponto fixo de Brower, veja, por exemplo, Lima (2020b). Fazendo  $n = -1$  em (6.19), obtemos que

$$\|H(x) - x\| \leq C\delta \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2. \quad (6.20)$$

Ou seja,  $H$  está próxima da identidade. Consideremos, então,  $h(x) = H(x) - x$ . Em particular,  $\|h\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|h(x)\| \leq C\delta$ . Dado  $y \in \mathbb{R}^2$ , mostremos que existe  $x \in \mathbb{R}^2$  tal que  $H(x) = y$ . Para tanto, consideremos a aplicação  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $G(x) =$

$y - h(x)$ . Então, dado  $x \in \overline{B(y, C\delta)}$  (isto é,  $x$  pertencente a bola fechada de centro em  $y$  e raio  $C\delta$ ), como  $\|h\|_\infty \leq C\delta$ , segue que

$$\|y - G(x)\| = \|y - (y - h(x))\| = \|h(x)\| \leq C\delta.$$

Ou seja,  $G(x) \in \overline{B(y, C\delta)}$ . Portanto a aplicação contínua  $G$  leva a bola fechada  $\overline{B(y, C\delta)}$  nela mesma. Consequentemente segue do teorema do ponto fixo de Brower que  $G$  tem um ponto fixo em  $\overline{B(y, C\delta)}$ . Ou seja, existe  $x \in \overline{B(y, C\delta)}$  tal que  $G(x) = x$ . Consequentemente  $y - h(x) = x$ . Finalmente lembrando da definição de  $h$ , segue que  $H(x) = y$  concluindo a prova de que  $H$  é sobrejetiva.

Para concluirmos a prova, resta mostrarmos que  $H^{-1}$  é contínua. Para tanto, mostraremos que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\rho > 0$  tal que se  $\|x - y\| < \rho$ , então  $\|H^{-1}(x) - H^{-1}(y)\| < \varepsilon$ . Começemos observando que (6.20) implica que

$$\|x - H^{-1}(x)\| = \|H(H^{-1}(x)) - H^{-1}(x)\| \leq C\delta \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2. \quad (6.21)$$

Ou seja,  $H^{-1}$  também está próxima da identidade. Além disso, (6.14) implica que

$$(A + f)^n(H^{-1}(x)) = H^{-1}(A^n(x)) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2. \quad (6.22)$$

Para finalizar, seja  $N \in \mathbb{N}$  associado às constantes  $K = 3C\delta$  e  $\varepsilon > 0$  pelo Lema 6.24. Como  $A^j$  é (uniformemente) contínua para todo  $j \in \mathbb{Z}$ , existe  $\rho > 0$  tal que se  $\|x - y\| < \rho$ , então

$$\|A^n x - A^n y\| \leq C\delta \text{ para todo } |n| \leq N.$$

Portanto, usando este fato, (6.21) e (6.22) segue que se  $\|x - y\| < \rho$ , então

$$\begin{aligned} \|(A + f)^n(H^{-1}(x)) - (A + f)^n(H^{-1}(y))\| &= \|H^{-1}(A^n(x)) - H^{-1}(A^n(y))\| \\ &\leq \|H^{-1}(A^n(x)) - A^n(x)\| \\ &\quad + \|A^n(x) - A^n(y)\| \\ &\quad + \|A^n(y) - H^{-1}(A^n(y))\| \\ &\leq 3C\delta \end{aligned}$$

para todo  $|n| < N$ . Logo segue do Lema 6.24 que  $\|H^{-1}(x) - H^{-1}(y)\| < \varepsilon$ . Consequentemente, temos que  $H^{-1}$  é contínua, concluindo a prova do teorema.  $\square$

## 6.9 $f_A$ é estruturalmente estável

Nesta seção, veremos que a aplicação  $f_A$  é estruturalmente estável. Isto é, que sistemas próximos de  $f_A$  são conjugados a  $f_A$ . Para tanto, utilizaremos os resultados da Seção 6.8.2. Começemos recordando algumas construções auxiliares que podem ser estudadas com mais profundidade em Lima (2012).



**Definição 6.1.** Sejam  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  e  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  aplicações quaisquer e  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  a projeção dada na Seção 6.2. Dizemos que  $F$  é um *levantamento* de  $f$  se

$$f \circ \pi = \pi \circ F.$$

Em particular, a aplicação linear  $A$  é um levantamento de  $f_A$ . Observemos que  $\pi$  não é uma conjugação entre  $f$  e  $F$ , visto que não é injetiva. Na sequência, veremos algumas propriedades de levantamentos.

**Lema 6.25.** *Seja  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  uma aplicação contínua. Então*

- (i) *existem levantamentos contínuos de  $f$ . Além disso, dados  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^2$  tais que  $f(\pi(x_0)) = \pi(y_0)$ , existe levantamento contínuo  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $f$  satisfazendo  $F(x_0) = y_0$ ;*
- (ii) *se  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um levantamento contínuo de  $f$ , então  $F + k$  também o é para todo  $k \in \mathbb{Z}^2$ ;*
- (iii) *se  $F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  são levantamentos contínuos de  $f$ , então existe  $k \in \mathbb{Z}^2$  tal que*

$$F_2(x) = F_1(x) + k \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2;$$

- (iv) *se  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um levantamento contínuo de  $f$  e  $q \in \mathbb{Z}^2$ , então existe  $k_q \in \mathbb{Z}^2$  tal que*

$$F(x + q) - F(x) = k_q \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

*Demonstração.* (i) Como  $f$  é contínua e o toro  $\mathbb{T}^2$  é compacto, temos que  $f$  é uniformemente contínua. Ou seja, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $d_T(x, y) < \delta$ , então  $d_T(f(x), f(y)) < \varepsilon$ . Fixemos, então,  $\delta > 0$  associado a  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  pela continuidade uniforme. Dado  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ , consideremos  $y_0 \in \mathbb{R}^2$  tal que  $f(\pi(x_0)) = \pi(y_0)$ . Agora, dado  $x \in B(x_0, \delta)$ , segue do Lema 6.4 que  $d_T(\pi(x), \pi(x_0)) < \delta$ . Consequentemente, da escolha do  $\delta$  segue que  $d_T(f(\pi(x)), f(\pi(x_0))) < \frac{1}{2}$ . Isto é,  $d_T(f(\pi(x)), \pi(y_0)) < \frac{1}{2}$ . Logo existe um único  $y \in B(y_0, \frac{1}{2})$  tal que  $\pi(y) = f(\pi(x))$ . Definamos, então,  $F(x) = y$ . Da forma como definimos  $F$ , temos obviamente que  $\pi(F(x)) = f(\pi(x))$  para todo  $x \in B(x_0, \delta)$ . Além disso, não é difícil ver que  $F$  é contínua. Agora, dado  $x_1 \in B(x_0, \delta)$ , podemos proceder como acima e estender  $F$  de maneira contínua a  $B(x_0, \delta) \cup B(x_1, \delta)$  de tal forma que  $\pi(F(x)) = f(\pi(x))$  para todo  $x \in B(x_0, \delta) \cup B(x_1, \delta)$ . Repetindo esse procedimento um número finito de vezes, podemos estender  $F$ , por exemplo, a um quadrado de lados  $2 \times 2$  contendo  $x_0$  de tal forma que  $F$  é contínua nesse quadrado e satisfaz  $\pi \circ F = f \circ \pi$ . Finalmente deixamos ao leitor verificar que a relação  $\pi(F(x)) = f(\pi(x))$  define  $F$  contínua de maneira única para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . Isto conclui a prova do item (i).

- (ii) Segue direto da definição.

(iii) Observemos inicialmente que, como  $F_1$  e  $F_2$  são levantamentos contínuos de  $f$ , vale  $\pi \circ F_1 = \pi \circ F_2$ . Isto implica, por exemplo, que  $F_1(x) - F_2(x) \in \mathbb{Z}^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . Além disso, como  $F_1$  e  $F_2$  são contínuas, segue que  $F_1 - F_2$  também é contínua. Agora as únicas transformações contínuas de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{Z}^2$  são as constantes. Logo  $F_1 - F_2$  deve ser constante. Em particular, existe  $k \in \mathbb{Z}^2$  tal que  $F_1(x) - F_2(x) = k$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  conforme afirmado.

(iv) Consideremos  $F_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $F_q(x) = F(x + q)$ . Então

$$\pi(F_q(x)) = \pi(F(x + q)) = f(\pi(x + q)) = f(\pi(x)).$$

Ou seja,  $F_q$  é também um levantamento contínuo de  $f$ . Logo segue do item (iii) que existe  $k_q \in \mathbb{Z}^2$  tal que  $F_q(x) - F(x) = k_q$ . Isto conclui a demonstração de (iv) e, consequentemente, do lema. □

**Lema 6.26.** *Dado  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, sejam  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  e  $g: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  aplicações contínuas tais que*

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^2} d_T(f(x), g(x)) < \delta$$

*e  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um levantamento contínuo de  $f$ . Então existe levantamento contínuo  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $g$  tal que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|F(x) - G(x)\| < \delta.$$

*Demonstração.* Supomos que  $\delta > 0$  é suficientemente pequeno de forma que, por exemplo,  $\delta < \frac{1}{10}$ . Dado  $p \in \mathbb{T}^2$ , consideremos  $B_{\mathbb{T}^2}(f(p), \delta)$  a bola aberta em  $\mathbb{T}^2$  de raio  $\delta$  centrada em  $f(p)$ . Em particular, temos que  $g(p) \in B_{\mathbb{T}^2}(f(p), \delta)$ . Observemos que  $\pi^{-1}(B_{\mathbb{T}^2}(f(p), \delta))$ , isto é, a pré-imagem de  $B_{\mathbb{T}^2}(f(p), \delta)$  por  $\pi$ , consiste de uma quantidade enumerável de conjuntos abertos e disjuntos  $V_j$ . De fato, tendo em vista o Lema 6.4, temos que estes conjuntos  $V_j$  nada mais são do que bolas de raio  $\delta$  em  $\mathbb{R}^2$  centradas em pontos de  $\pi^{-1}(f(p))$ ; enquanto que  $\pi^{-1}(f(p))$  é um conjunto discreto que contém exatamente um ponto em cada quadrado unitário com vértices em  $\mathbb{Z}^2$  (dado qualquer  $z \in \pi^{-1}(f(p))$  temos que  $\pi^{-1}(f(p)) = z + \mathbb{Z}^2$ ). A relação  $\pi \circ F = f \circ \pi$  nos garante que para cada  $x \in \pi^{-1}(p)$ , existe um e somente um conjunto  $V_j$ , o qual denotaremos por  $V_j(x)$ , tal que  $F(x) \in V_j(x)$ . Agora, como  $\pi^{-1}(g(p))$  intersecta cada  $V_j$  em um único ponto, definimos  $G(x) := V_j(x) \cap \pi^{-1}(g(p))$ . Segue diretamente da construção que  $\pi(G(x)) = g(\pi(x))$ , ou seja, que  $G$  é um levantamento de  $g$  e que  $\|F(x) - G(x)\| < \delta$ , pois  $F(x), G(x) \in V_j(x)$ . Além disso, não é difícil ver que  $G$  é contínua. Isto conclui nossa demonstração. □

Para que possamos obter o resultado mencionado no início da seção, precisamos de uma noção de proximidade entre aplicações de  $\mathbb{T}^2$  um pouco mais forte do que apenas proximidade ponto a ponto.

**Definição 6.2.** Dadas aplicações  $f, g: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  e constantes  $c > 0$  e  $\varepsilon > 0$ , dizemos que  $f$  e  $g$  estão  $(c, \varepsilon)$ -Lipschitz próximas se

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^2} d_T(f(x), g(x)) < \varepsilon$$

e, além disso, pensando em  $\mathbb{T}^2 \simeq [0, 1) \times [0, 1)$  como subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  e, consequentemente, em  $f(x)$  e  $g(x)$  como pontos de  $\mathbb{R}^2$ , temos que

$$\|(f(x) - g(x)) - (f(y) - g(y))\| \leq c\|x - y\| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{T}^2.$$

O resultado principal desta seção é o seguinte.

**Teorema 6.27.** *Seja  $g: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  uma aplicação  $(c, \varepsilon)$ -Lipschitz próxima de  $f_A$ . Então, se  $c > 0$  e  $\varepsilon > 0$  forem suficientemente pequenos, existe um homeomorfismo  $h: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  tal que*

$$f_A \circ h = h \circ g. \quad (6.23)$$

*Demonstração.* Começemos lembrando que  $A$  é um levantamento de  $f_A$ . Então, segue do Lema 6.26 que, se  $\varepsilon > 0$  for suficientemente pequeno, existe levantamento contínuo  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $g$  tal  $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|A(x) - G(x)\| < \varepsilon$ . Consideremos agora  $p(x) = G(x) - A(x)$ . Vamos mostrar que  $p$  é invariante por translação inteira, isto é,  $p(x + q) = p(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  e  $q \in \mathbb{Z}^2$ . Observemos inicialmente que, pelo Lema 6.25, existe  $k_q \in \mathbb{Z}^2$  tal que  $G(x + q) = G(x) + k_q$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . Logo

$$\begin{aligned} p(x + q) &= G(x + q) - A(x + q) \\ &= G(x) + k_q - A(x + q) \\ &= p(x) + k_q - Aq. \end{aligned}$$

Agora, como  $q \in \mathbb{Z}^2$  e  $A$  tem coeficientes inteiros, segue que  $p(x + q) - p(x) = k_q - Aq \in \mathbb{Z}^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . Portanto, como  $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|A(x) - G(x)\| < \varepsilon$  e, consequentemente,  $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|p(x + q) - p(x)\| < 2\varepsilon$ , segue que se, por exemplo,  $\varepsilon < \frac{1}{4}$ , então  $p(x + q) - p(x)$  deve ser o vetor nulo. Logo  $p(x + q) = p(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  conforme afirmado. Além disso,  $p$  satisfaz a seguinte propriedade cuja prova apresentaremos no final da seção.

**Lema 6.28.**  *$p$  é uma transformação  $c$ -Lipschitz em  $\mathbb{R}^2$ . Isto é,*

$$\|p(x) - p(y)\| \leq c\|x - y\| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Então, utilizando o Lema 6.28, recordando que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|p(x)\| < +\infty$$

e  $G(x) = Ax + p(x)$ , segue do Teorema 6.22 que se  $c > 0$  for suficientemente pequeno, então existe aplicação  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $A \circ H = H \circ G$ . Mais ainda, segue da prova do referido teorema que  $H(x)$  é o único ponto de  $\mathbb{R}^2$  que satisfaz

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A^n(H(x)) - G^n(x)\| < \infty.$$

Observemos agora que  $H$  satisfaz  $H(x + q) = H(x) + q$  para todo  $q \in \mathbb{Z}^2$ . De fato, como  $p(x + q) = p(x)$ , segue que  $G(x + q) = G(x) + Aq$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  e  $q \in \mathbb{Z}^2$ . Então, como  $Aq \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$\begin{aligned} G^2(x + q) &= G(G(x + q)) \\ &= G(G(x) + Aq) \\ &= G(G(x)) + A^2q \\ &= G^2(x) - A^2(x) + A^2(x + q). \end{aligned}$$

Consequentemente  $G^2(x + q) - A^2(x + q) = G(x) - A(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  e  $q \in \mathbb{Z}^2$ . Procedendo recursivamente, obtemos que

$$G^n(x + q) - A^n(x + q) = G(x) - A(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $q \in \mathbb{Z}^2$  e  $n \in \mathbb{Z}$ . Em particular, podemos escrever  $G^n(x) = A^n x + p_n(x)$  com  $p_n(x + q) = p_n(x)$  para todo  $q \in \mathbb{Z}^2$  e  $x \in \mathbb{R}^2$ . Logo

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A^n(H(x) + q) - G^n(x + q)\| &= \\ &= \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A^n(H(x)) + A^n q - A^n(x + q) - p_n(x + q)\| \\ &= \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A^n(H(x)) - A^n(x) - p_n(x)\| \\ &= \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A^n(H(x)) - G^n(x)\| < \infty. \end{aligned}$$

Segue, então, da unicidade dada na definição de  $H(x + q)$  que  $H(x + q) = H(x) + q$  para todo  $q \in \mathbb{Z}^2$ . Utilizando esse fato, segue que  $h: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  dada por  $h(\pi(x)) = \pi(H(x))$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  está bem definida. Além disso,

$$\begin{aligned} f_A \circ h \circ \pi(x) &= f_A \circ \pi \circ H(x) \\ &= \pi \circ A \circ H(x) \\ &= \pi \circ H \circ G(x) \\ &= h \circ \pi \circ G(x) \\ &= h \circ g \circ \pi(x) \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . Logo  $f \circ h = h \circ g$  como queríamos.  $\square$

**Observação 6.2.** A noção de proximidade dada na Definição 6.2 e utilizada no Teorema anterior não é a mais “natural” para se considerar em  $\mathbb{T}^2$ , pois ela se utiliza do espaço ambiente  $\mathbb{R}^2$ . Na maioria das situações, considera-se a distância  $C^1$  em  $\mathbb{T}^2$ : tanto  $f(x)$  e  $g(x)$  devem estar próximas quanto suas derivadas. Porém, para podermos falar de derivada de uma aplicação de  $\mathbb{T}^2$  em  $\mathbb{T}^2$ , precisamos utilizar a teoria de variedades diferenciáveis, que

foge ao escopo destas notas. Para os leitores mais familiarizados com estas noções, deixamos como exercício verificar que se  $g: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  está  $C^1$  próxima de  $f_A$ , então  $f_A$  e  $g$  são topologicamente conjugadas. A prova desse fato pode ser obtida fazendo pequenas adaptações à prova anterior. Observemos ainda que apenas a proximidade ponto a ponto dada por

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^2} d_T(f_A(x), g(x)) < \varepsilon$$

não é suficiente para garantir que toda transformação contínua próxima de  $f_A$  é topologicamente conjugada a  $f_A$ . Ela é suficiente apenas para garantir que  $f_A$  e sua perturbação são semiconjugadas conforme veremos no Exercício 6.14.

Na sequência, apresentaremos a prova do Lema 6.28. Para tanto, faremos uso do seguinte exercício.

**Exercício 6.11.** Sejam  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^2$  pontos tais que  $\|x_i - x_j\| \leq \frac{1}{10}$  para todo  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Verifique que

$$\|x_1 + x_2 - x_3 - x_4\| \leq \|\pi(x_1) + \pi(x_2) - \pi(x_3) - \pi(x_4)\|.$$

*Demonstração do Lema 6.28.* Nosso objetivo é mostrar que  $p$  é uma transformação  $c$ -Lipschitz em  $\mathbb{R}^2$ . A prova desse fato é simples, porém exige alguns passos. Começemos observando que, como  $\sup_x \|G(x) - Ax\| < \varepsilon$  e  $A$  e  $G$  são uniformemente contínuas em  $[0, 1] \times [0, 1]$  (veja Exercício A.2), segue que existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x, y \in [0, 1] \times [0, 1]$  satisfazendo  $\|x - y\| < \delta$  vale  $\|G(x) - G(y)\| < \varepsilon$ ,  $\|Ax - Ay\| < \varepsilon$  e  $\|G(x) - Ay\| < 2\varepsilon$ . Logo, tomando  $\varepsilon < \frac{1}{30}$ , segue do Exercício 6.11 que

$$\begin{aligned} \|p(x) - p(y)\| &\leq \|G(x) - Ax - (G(y) - Ay)\| \\ &\leq \|\pi(G(x)) - \pi(Ax) - (\pi(G(y)) - \pi(Ay))\|. \end{aligned}$$

Combinando, então, essa observação com o fato que  $f_A$  e  $g$  estão  $(c, \varepsilon)$ -Lipschitz próximas em  $\mathbb{T}^2$  obtemos que

$$\begin{aligned} \|p(x) - p(y)\| &\leq \|\pi(G(x)) - \pi(Ax) - (\pi(G(y)) - \pi(Ay))\| \\ &= \|g(\pi(x)) - f_A(\pi(x)) - (g(\pi(y)) - f_A(\pi(y)))\| \\ &= \|g(x) - f_A(x) - (g(y) - f_A(y))\| \\ &\leq c\|x - y\|. \end{aligned}$$

Ou seja, para todo  $x, y \in [0, 1] \times [0, 1]$  tal que  $\|x - y\| < \delta$  temos

$$\|p(x) - p(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Consideremos agora  $x, y \in [0, 1] \times [0, 1]$  tal que  $\|x - y\| < 2\delta$ . Tomando  $z = \frac{x+y}{2} \in [0, 1] \times [0, 1]$ , temos que  $\|x - z\| < \delta$  e  $\|z - y\| < \delta$ . Utilizando, então, a observação

anterior obtemos que

$$\begin{aligned}\|p(x) - p(y)\| &\leq \|p(x) - p(z)\| + \|p(z) - p(y)\| \\ &\leq c\|x - z\| + c\|z - y\| \\ &= c\|x - y\|.\end{aligned}$$

Consequentemente, para todo  $x, y \in [0, 1) \times [0, 1)$  tal que  $\|x - y\| < 2\delta$ , vale

$$\|p(x) - p(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Repetindo esse argumento um número finito de vezes, concluímos que

$$\|p(x) - p(y)\| \leq c\|x - y\|$$

para todo  $x, y \in [0, 1) \times [0, 1)$ . Utilizando ainda a continuidade de  $p$  e a desigualdade anterior, obtemos que

$$\|p(x) - p(y)\| \leq c\|x - y\|$$

para todo  $x, y \in [0, 1] \times [0, 1]$ . Portanto, como  $p$  é invariante por translação inteira, segue que

$$\|p(x) - p(y)\| \leq c\|x - y\| \tag{6.24}$$

para todo  $x, y \in [k_1, k_1 + 1] \times [k_2, k_2 + 1]$  e  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . Isto é,  $p$  é  $c$ -Lipschitz quando restrita a qualquer quadrado unitário fechado e com vértices em pontos de  $\mathbb{Z}^2$ .

Finalmente, dados  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , consideremos o segmento de reta que liga  $x$  a  $y$  e tomemos as interseções  $z_1, z_2, \dots, z_k$  desse segmento com os lados dos quadrados unitários com vértices em pontos de  $\mathbb{Z}^2$ . Supomos que os pontos  $z_i$ 's estão ordenados de forma que o  $z_i$  seja o  $i$ -ésimo ponto mais próximo de  $x$ . Então, como todos os pontos  $z_1, z_2, \dots, z_k$ ,  $x$  e  $y$  estão sobre uma reta, segue que

$$\|x - z_1\| + \|z_1 - z_2\| + \dots + \|z_n - y\| = \|x - y\|.$$

Logo, como quaisquer dois pontos consecutivos da sequência  $\{x, z_1, z_2, \dots, z_k, y\}$  estão contidos no mesmo quadrado unitário fechado com vértices em pontos de  $\mathbb{Z}^2$ , utilizando (6.24), segue que

$$\begin{aligned}\|p(x) - p(y)\| &\leq \|p(x) - p(z_1)\| + \|p(z_1) - p(z_2)\| + \dots + \|p(z_k) - p(y)\| \\ &\leq c\|x - z_1\| + c\|z_1 - z_2\| + \dots + c\|z_n - y\| \\ &= c\|x - y\|.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|p(x) - p(y)\| \leq c\|x - y\| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^2$$

concluindo a prova do lema. □

## 6.10 Propriedade do sombreamento

Nosso objetivo agora é mostrar que  $f_A$  tem a propriedade do sombreamento (veja Seção 1.19). Existem diversas formas diferentes de fazer tal prova, porém, apresentaremos uma demonstração que usa de maneira fundamental os conjuntos estáveis e instáveis locais de  $f_A$ , tanto para ilustrar sua importância quanto porque essa prova se adapta a contextos mais gerais que serão introduzidos na Seção 6.14.

**Proposição 6.29.** *A aplicação  $f_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  tem a propriedade do sombreamento. Isto é, dado  $\rho > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para toda sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  em  $\mathbb{T}^2$  satisfazendo*

$$d_T(x_{n+1}, f_A(x_n)) \leq \delta \text{ para todo } n \in \mathbb{Z},$$

*existe  $x \in \mathbb{T}^2$  tal que*

$$d_T(x_n, f_A^n(x)) \leq \rho \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

*Além disso, se  $\rho > 0$  for suficientemente pequeno, por exemplo, menor do que a metade da constante de expansividade de  $f_A$ , então o ponto  $x$  dado acima é único.*

*Demonstração.* Dado  $\rho > 0$ , sejam  $\varepsilon > 0$  e  $\lambda \in (0, 1)$  dados pela Proposição 6.10 com  $\varepsilon$  suficientemente pequeno de modo que  $\frac{\varepsilon}{1-\lambda} < \rho$ . Segue, então, de (6.5) e (6.6) que

$$f_A(W_{f_A, \varepsilon}^s(x)) \subset W_{f_A, \lambda \varepsilon}^s(f_A(x)) \quad (6.25)$$

e

$$f_A^{-1}(W_{f_A, \varepsilon}^u(x)) \subset W_{f_A, \lambda \varepsilon}^u(f_A^{-1}(x)).$$

Tomemos agora  $\delta \in (0, \varepsilon)$  suficientemente pequeno de forma que se  $d_T(x, y) < \delta$  e  $z \in W_{f_A, \lambda \varepsilon}^s(y)$ , então  $W_{f_A, \varepsilon}^s(x) \cap W_{f_A, \varepsilon}^u(z)$  consiste de exatamente um ponto (veja Exercício 6.8). Construiremos agora uma sequência de pontos auxiliar  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de maneira recursiva. Tomemos  $z_0 = x_0$  e, para  $n \geq 1$ , consideremos

$$z_n = W_{f_A, \varepsilon}^s(x_n) \cap W_{f_A, \varepsilon}^u(f_A(z_{n-1})).$$

Observemos que  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  está bem definida. De fato, como  $z_{n-1} \in W_{f_A, \varepsilon}^s(x_{n-1})$ , segue de (6.25) que  $f_A(z_{n-1}) \in W_{f_A, \lambda \varepsilon}^s(f_A(x_{n-1}))$ . Logo, como  $d_T(x_n, f_A(x_{n-1})) < \delta$ , segue da escolha de  $\delta$  que  $W_{f_A, \varepsilon}^s(x_n) \cap W_{f_A, \varepsilon}^u(f_A(z_{n-1}))$  consiste exatamente de um ponto, o qual chamamos de  $z_n$ . Consequentemente  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  está bem definida.

Observamos agora que, como para todo  $1 \leq i \leq n$  vale  $z_i \in W_{f_A, \varepsilon}^u(f_A(z_{i-1}))$ , usando (6.6), segue que para todo  $j \geq 1$ ,

$$d_T(f_A^{-j}(z_i), f_A^{-j+1}(z_{i-1})) = d_T(f_A^{-j}(z_i), f_A^{-j}(f_A(z_{i-1}))) \leq \lambda^j \varepsilon.$$

Então, combinando esta observação com a desigualdade triangular, obtemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} d_T\left(f_A^{-j}(z_n), z_{n-j}\right) &\leq \sum_{i=0}^{j-1} d_T\left(f_A^{-j+i}(z_{n-i}), f_A^{-j+i+1}(z_{n-i-1})\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{j-1} \lambda^{j-i} \varepsilon \\ &= \sum_{i=1}^j \lambda^i \varepsilon \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, como  $z_{n-j} \in W_{f_A, \varepsilon}^s(x_{n-j})$ ,

$$\begin{aligned} d_T\left(f_A^{-j}(z_n), x_{n-j}\right) &\leq d_T\left(f_A^{-j}(z_n), z_{n-j}\right) + d_T(z_{n-j}, x_{n-j}) \\ &\leq \sum_{i=1}^j \lambda^i \varepsilon + \varepsilon = \sum_{i=0}^j \lambda^i \varepsilon \\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i \varepsilon = \frac{\varepsilon}{1-\lambda} < \rho. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Consideremos agora a sequência  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dada por  $y_n = f_A^{-n}(z_n)$ . Segue, então, de (6.26) que

$$\begin{aligned} d_T\left(f_A^j(y_n), x_j\right) &= d_T\left(f_A^{-n+j}(z_n), x_j\right) \\ &= d_T\left(f_A^{-(n-j)}(z_n), x_{n-(n-j)}\right) \\ &< \rho \end{aligned}$$

para todo  $1 \leq j \leq n$ . Isto é,

$$d_T\left(f_A^j(y_n), x_j\right) < \rho \text{ para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Seja  $p$  um ponto de acumulação de  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (que sempre existe pois  $\mathbb{T}^2$  é compacto). Isto é,  $p = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k}$  para alguma subsequência  $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Então, como  $f_A$  é contínua,

$$d_T\left(f_A^j(p), x_j\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} d_T\left(f_A^j(y_{n_k}), x_j\right) \leq \rho$$

para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Ou seja, a órbita de  $p$  sombreia a  $\delta$ -pseudo-órbita positiva  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Verifiquemos agora que existe um ponto cuja órbita sombreia toda a  $\delta$ -pseudo-órbita bilateral



$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Para tanto, procederemos como na prova do Lema 6.20. Apesar da semelhança entre os dois argumentos, apresentaremos a prova completa para benefício do leitor.

Dado  $m \in \mathbb{N}$ , consideremos a sequência  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dada por  $w_n = x_{n-m}$ . Como é uma  $\delta$ -pseudo-órbita positiva, segue do argumento anterior que existe um ponto  $p_m$  tal que

$$d_T(f_A^n(p_m), w_n) \leq \rho \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então, lembrando da definição de  $w_n$ , segue que

$$d_T(f_A^n(p_m), x_{n-m}) \leq \rho \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (6.27)$$

Ou seja, o ponto  $p_m$  sombreia a sequência  $(x_n)_{n \geq -m}$ . Tomemos agora  $x$  um ponto de acumulação de  $(f_A^m(p_m))_{m \in \mathbb{N}}$ , que novamente existe, pois  $\mathbb{T}^2$  é compacto. Isto é,  $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_A^{m_k}(p_{m_k})$  para alguma subsequência  $(f_A^{m_k}(p_{m_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(f_A^m(p_m))_{m \in \mathbb{N}}$ . Então, dado  $n \in \mathbb{Z}$ , utilizando (6.27) e a continuidade de  $f_A$ , segue que

$$\begin{aligned} d_T(f_A^n(x), x_n) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} d_T(f_A^n(f_A^{m_k}(p_{m_k})), x_n) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} d_T(f_A^{n+m_k}(p_{m_k}), x_{(n+m_k)-m_k}) \\ &\leq \rho. \end{aligned}$$

Ou seja, a órbita de  $x$  sombreia a  $\delta$ -pseudo-órbita  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  conforme afirmado. Resta, então, verificarmos que se  $\rho$  é suficientemente pequeno, então o ponto  $x$  satisfazendo  $d_T(f_A^n(x), x_n) \leq \rho$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  é único.

Suponha que  $y \in \mathbb{T}^2$  também satisfaça  $d_T(f_A^n(y), x_n) \leq \rho$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Neste caso, segue da desigualdade triangular que

$$d_T(f_A^n(x), f_A^n(y)) \leq d_T(f_A^n(x), x_n) + d_T(x_n, f_A^n(y)) \leq 2\rho$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Então, se  $\rho$  for menor do que a metade da constante de expansividade de  $f_A$ , segue da Proposição 6.19 que  $x = y$ . Isto conclui a demonstração da proposição.  $\square$

**Exercício 6.12.** Verifique que para todo  $\rho > 0$  suficientemente pequeno existe  $\delta > 0$  tal que se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma  $\delta$ -pseudo-órbita periódica, então o ponto  $x$  dado pela proposição anterior é um ponto periódico. Lembrando que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma  $\delta$ -pseudo-órbita periódica se existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$x_{n+k} = x_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

**Exercício 6.13.** Será que é possível obter uma prova da propriedade do sombreamento para  $f_A$ , utilizando que  $A$  tem tal propriedade em  $\mathbb{R}^2$  (veja Proposição 6.21)?

**Exercício 6.14.** Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $g: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  uma transformação contínua tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^2} d_T(f_A(x), g(x)) < \varepsilon.$$

Mostre que se  $\varepsilon > 0$  for suficientemente pequeno, então  $g$  e  $f_A$  são semiconjugadas. Dica: utilize a propriedade do sombreamento de  $f_A$  de maneira semelhante ao que fizemos na Seção 6.8.2.

## 6.11 Entropia topológica de $f_A$

Nesta seção, calcularemos a entropia topológica de  $f_A$ . Para tanto, utilizaremos a caracterização de entropia em termos de  $\text{cov}(n, \varepsilon, f)$  dada em (1.5), veja Seção 1.22.

**Proposição 6.30.** *A entropia topológica de  $f_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  é dada por*

$$h_{\text{top}}(f_A) = \log |\lambda^u|.$$

*Demonstração.* Consideremos a norma  $\|\cdot\|_a$  dada em (6.11). Além disso, dado  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos

$$d_n^a(x, y) = \max\{\|x - y\|_a, \|Ax - Ay\|_a, \dots, \|A^n x - A^n y\|_a\},$$

$$d_n(x, y) = \max\{\|x - y\|, \|Ax - Ay\|, \dots, \|A^n x - A^n y\|\},$$

e

$$d_{T,n}(x, y) = \max\{d_T(x, y), d_T(f_A(x), f_A(y)), \dots, d_T(f_A^n(x), f_A^n(y))\}.$$

Observemos que uma bola de raio  $\varepsilon > 0$  com relação a  $\|\cdot\|_a$  é um paralelogramo cujos lados têm comprimento  $2\varepsilon$  e são paralelos a  $v^u$  e  $v^s$ . Agora, com relação a métrica  $d_n^a$  em  $\mathbb{R}^2$ , uma bola de raio  $\varepsilon > 0$  é um paralelogramo cujos lados são paralelos a  $v^u$  e  $v^s$  e tem comprimento  $2\varepsilon|\lambda^u|^{-n}$  na direção  $v^u$  e  $2\varepsilon$  na direção  $v^s$ , visto que vetores na direção  $v^u$  são expandidos a uma taxa  $|\lambda^u|$  pela ação de  $A$  enquanto que na direção  $v^s$  vetores são contraídos a uma taxa  $|\lambda^s|$  pela ação de  $A$ . Consequentemente a área Euclidiana de uma bola de raio  $\varepsilon$  com relação a  $d_n^a$  em  $\mathbb{R}^2$  não é maior do que  $4\varepsilon^2|\lambda^u|^{-n}$  (lado  $\times$  lado). Então, como as normas  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|_a$  são equivalentes (veja Proposição B.2), existe  $C > 0$  independente de  $n$  tal que a área Euclidiana de uma bola de raio  $\varepsilon$  com relação a  $d_n$  em  $\mathbb{R}^2$  não é maior do que  $4C\varepsilon^2|\lambda^u|^{-n}$ . Agora, como pelo Lema 6.4  $\pi: (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{T}^2, d_T)$  é localmente uma isometria e  $\pi \circ A = f_A \circ \pi$ , segue que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno a área Euclidiana de uma bola de raio  $\varepsilon$  com relação a  $d_{T,n}$  em  $\mathbb{T}^2$  também não é maior do que  $4C\varepsilon^2|\lambda^u|^{-n}$ . Logo o número mínimo de bolas de raio  $\varepsilon$  com relação a  $d_{T,n}$  necessárias para cobrir  $\mathbb{T}^2$  é pelo menos

$$\frac{\text{Área de } \mathbb{T}^2}{\text{Área de uma bola de raio } \varepsilon} \geq \frac{1}{4C\varepsilon^2|\lambda^u|^{-n}} = \frac{|\lambda^u|^n}{4C\varepsilon^2}.$$

Portanto, como todo conjunto de diâmetro  $\varepsilon$  está contido numa bola de raio  $\varepsilon$ , segue que

$$\text{cov}(n, \varepsilon, f_A) \geq \frac{|\lambda^u|^n}{4C\varepsilon^2}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(f_A) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\text{cov}(n, \varepsilon, f)) \\ &\geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log\left(\frac{|\lambda^u|^n}{4C\varepsilon^2}\right) \\ &= \log |\lambda^u|. \end{aligned}$$

Por outro lado, como bolas de raio  $\varepsilon$  com relação a  $d_n^a$  são paralelogramos, podemos cobrir  $\mathbb{R}^2$  por bolas de raio  $\varepsilon$  cujos interiores não se intersectam. Além disso, como os lados de uma tal bola medem  $2\varepsilon|\lambda^u|^{-n}$  e  $2\varepsilon$ , a área Euclidiana dessas bolas/paralelogramos é dada por  $4\varepsilon^2|\lambda^u|^{-n}\sin(\theta)$  sendo  $\theta$  o ângulo entre  $v^u$  e  $v^s$  (base  $\times$  altura). Agora, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, qualquer bola de raio  $\varepsilon$  com relação a  $d_n^a$  que intersecta o quadrado unitário  $[0, 1] \times [0, 1]$  está totalmente contida no quadrado  $[-1, 2] \times [-1, 2]$ . Portanto o número de tais bolas que intersecta  $[0, 1] \times [0, 1]$  é menor ou igual a

$$\frac{\text{Área}([-1, 2] \times [-1, 2])}{\text{Área de uma bola de raio } \varepsilon} = \frac{9}{4\varepsilon^2|\lambda^u|^{-n}\sin(\theta)} = \frac{9|\lambda^u|^n}{4\varepsilon^2\sin(\theta)}.$$

Portanto, novamente como  $\pi: (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{T}^2, d_T)$  é localmente uma isometria e  $\pi \circ A = f_A \circ \pi$ , segue que, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, o toro  $\mathbb{T}^2$  pode ser coberto por  $\frac{9|\lambda^u|^n}{4\varepsilon^2\sin(\theta)}$  bolas fechadas de raio  $\varepsilon$  com relação a  $d_{T,n}$ . Em particular,

$$\text{cov}(n, \varepsilon, f_A) \leq \frac{9|\lambda^u|^n}{4\varepsilon^2\sin(\theta)}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(f_A) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\text{cov}(n, \varepsilon, f)) \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log\left(\frac{9|\lambda^u|^n}{4\varepsilon^2\sin(\theta)}\right) \\ &= \log |\lambda^u|. \end{aligned}$$

Combinando as duas observações, concluímos que  $h_{\text{top}}(f_A) = \log |\lambda^u|$  conforme afirmado.  $\square$

Agora, como  $|\lambda^s|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  e  $|\lambda^u|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , segue combinando a proposição anterior com a Proposição 6.9 que

**Corolário 6.31.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\# \text{Fix}(f_A^n)}{e^{n \cdot h_{\text{top}}(f_A)}} = 1.$$

Ou seja,  $h_{\text{top}}(f)$  nos dá a taxa de crescimento exponencial do número de pontos fixos de  $f^n$ , assim como no caso do *shift*.

## 6.12 Partições de Markov

Nosso objetivo agora é apresentar uma relação entre o automorfismo hiperbólico  $f_A$  e *subshifts* de tipo finito estudados na Seção 3.5. Nos Exercícios 3.3 e 3.10,

vimos que os espaços de sequências  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  são totalmente desconexos. Em particular, como o domínio  $X_B$  de qualquer *subshift* de tipo finito é um subconjunto de um desses espaços (dependendo se ele é unilateral ou bilateral), temos que  $X_B$  também é totalmente desconexo. Por outro lado, o toro  $\mathbb{T}^2$  é um espaço conexo. Consequentemente não existe nenhum homeomorfismo  $h: X_B \rightarrow \mathbb{T}^2$ . Em particular, nossa aplicação  $f_A$  não pode ser conjugada a um *subshift* de tipo finito. Observaremos, no entanto, que ela é *semiconjugada* a uma tal transformação. A construção desta semiconjugação pode ser feita utilizando um objeto conhecido como *partição de Markov*.

De maneira informal, uma partição de Markov para  $f_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  é simplesmente uma cobertura finita de  $\mathbb{T}^2$  por conjuntos  $\{R_0, R_1, \dots, R_{l-1}\}$ , os quais chamaremos de retângulos, satisfazendo certas propriedades dinâmicas que descreveremos abaixo. Agora, dado um ponto  $x \in \mathbb{T}^2$ , sua órbita pode ser codificada de acordo com as visitas aos retângulos  $\{R_0, R_1, \dots, R_{l-1}\}$ . Por exemplo, associaremos a sequência

$$(\dots, 3, \bar{2}, 1, 0, 1, \dots) \in \{0, 1, 2, \dots, l-1\}^{\mathbb{Z}}$$

ao ponto  $x$  se  $f_A^{-1}(x) \in R_3$ ,  $x \in R_2$ ,  $f_A(x) \in R_1$ ,  $f_A^2(x) \in R_0$ ,  $f_A^3(x) \in R_1$  e assim por diante. A grande dificuldade desse processo é construir uma família de retângulos de tal forma que, a cada sequência em  $\{0, 1, 2, \dots, l-1\}^{\mathbb{Z}}$ , exista no máximo um ponto com este itinerário.

A definição formal de partição de Markov é um pouco mais técnica, porém vamos apresentá-la mesmo assim, pois é fundamental para quem deseja seguir seus estudos em Sistemas Dinâmicos e também para enfatizar uma vez mais a importância dos conjuntos estáveis e instáveis tanto explorados em seções anteriores.

Um subconjunto  $R \subset \mathbb{T}^2$  é dito um *retângulo* se possuir ‘diâmetro pequeno’ e satisfizer

$$[x, y] \in R \text{ para todo } x, y \in R$$

sendo  $[x, y]$  como no Exercício 6.7. Em particular,  $R$  tem estrutura de produto local. Observemos que a palavra “retângulo”, nesse contexto, não coincide com a noção que frequentemente usamos em geometria, pois, por exemplo, seus “lados” podem ser curvas e os ângulos entre “lados” adjacentes não precisam ser retos. Diremos que o retângulo  $R$  é *próprio* se  $R = \overline{\text{int}(R)}$ . Ou seja, se o fecho do interior de  $R$  coincide com  $R$ . Para  $x \in R$ , consideremos

$$W_{f_A}^s(x, R) = W_{f_A, \varepsilon}^s(x) \cap R \text{ e } W_{f_A}^u(x, R) = W_{f_A, \varepsilon}^u(x) \cap R$$

sendo  $\varepsilon > 0$  pequeno e o diâmetro de  $R$  menor ainda quando comparado com  $\varepsilon$ .

**Definição 6.3.** Uma *partição de Markov* de  $\mathbb{T}^2$  para  $f_A$  é uma cobertura  $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_{l-1}\}$  de  $\mathbb{T}^2$  por retângulos próprios satisfazendo

- (i)  $\text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ . Ou seja, os interiores de retângulos distintos não se intersectam;

(ii) se  $x \in \mathbb{T}^2$  é tal que  $x \in \text{int}(R_i)$  e  $f_A(x) \in \text{int}(R_j)$ , então

$$f_A(W_{f_A}^s(x, R_i)) \subset W_{f_A}^s(f_A(x), R_j) \text{ e } f_A(W_{f_A}^u(x, R_i)) \supset W_{f_A}^u(f_A(x), R_j).$$

Um primeiro resultado importante a respeito de partições de Markov é o seguinte.

**Teorema 6.32.**  $f_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  admite uma partição de Markov  $\mathcal{R}$  com diâmetro arbitrariamente pequeno.

*Demonstração.* Ao invés de apresentarmos uma prova completa desse resultado, vamos apenas exibir uma partição de Markov específica para  $(\mathbb{T}^2, f_A)$ . A partição de Markov que vamos apresentar é composta por dois retângulos. Os lados desses retângulos serão formados por conjuntos estáveis e instáveis de  $f_A$ . Para tanto, comecemos lembrando que a Proposição 6.10 nos diz que conjuntos estáveis e instáveis de  $f_A$  nada mais são do que projeções dos conjuntos estáveis e instáveis respectivos de  $A$ . Além disso, o Lema 6.1 nos mostra que conjuntos estáveis e instáveis de  $A$  nada mais são do que translações de  $\mathbb{E}^s$  e  $\mathbb{E}^u$  respectivamente. Em particular, são retas paralelas a  $\mathbb{E}^s$  e  $\mathbb{E}^u$ . Na sequência, explicaremos como foi construída a partição de Markov dada na Figura 6.4. Dividiremos nossa construção em passos.

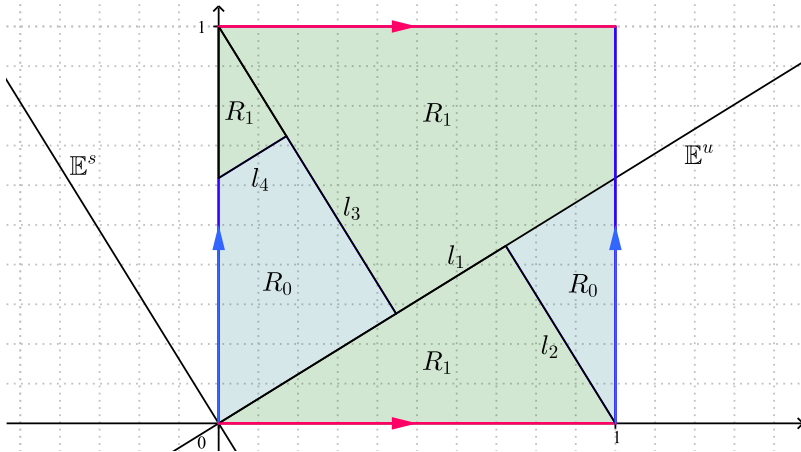


Figura 6.4: Exemplo de partição de Markov de  $(\mathbb{T}^2, f_A)$ .

- Comecemos traçando  $\mathbb{E}^u$  e consideremos  $l_1$  como sendo a interseção dessa reta com  $[0, 1) \times [0, 1)$ ;

- Tracemos agora o conjunto estável de  $A$ , passando pelo ponto  $(1, 0)$ , e consideremos  $l_2$  como sendo o segmento contido nesse conjunto, que vai do ponto  $(1, 0)$  até a interseção com  $\mathbb{E}^u$ ;
- Para obtermos o segmento  $l_3$ , tracemos o conjunto estável de  $A$  passando pelo ponto  $(0, 1)$  e consideremos  $l_3$  como sendo o segmento contido nesse conjunto, que vai do ponto  $(0, 1)$  até a interseção com o segmento  $l_1$ ;
- Por fim, para obtermos o segmento  $l_4$ , consideremos a parte de  $\mathbb{E}^u$  contida no primeiro quadrante. O “início” desta semirreta deu origem ao segmento  $l_1$ . Projetando a “sequência” dessa semirreta via  $\pi$ , obtemos o segmento  $l_4$ . Observe, porém, que  $l_4$  é a parte da projeção de  $\mathbb{E}^u$  obtida até encontrarmos o segmento  $l_3$ .

Dessa forma, obtemos os conjuntos  $R_0$  e  $R_1$  como na figura. Não é difícil verificar que  $R_0$  e  $R_1$  são de fato retângulos próprios segundo a definição dada acima. Também não é difícil mostrar que esses conjuntos satisfazem as propriedades (i) e (ii) da definição de partição de Markov. Deixamos isso a cargo do leitor (veja Figura 6.5).

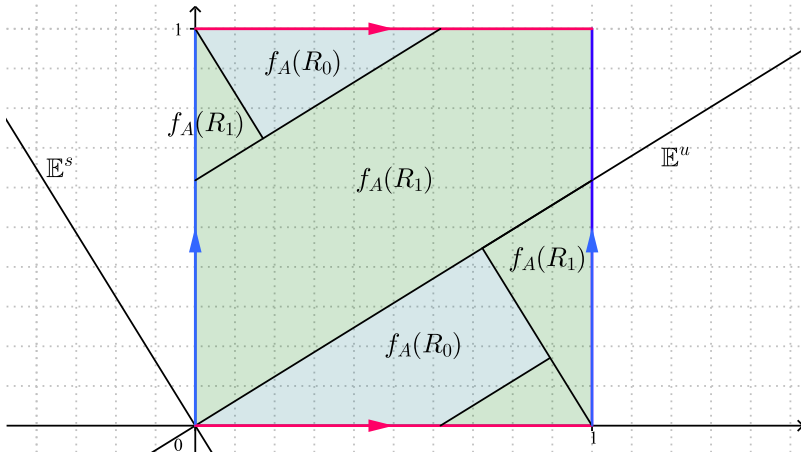


Figura 6.5: Imagem da partição de Markov por  $f_A$ .

Obviamente o que apresentamos acima, não é uma prova completa do teorema, que pode por sua vez ser bem intrincada, fugindo assim dos objetivos destas notas. Salientamos, porém, que esse resultado vale em contextos até mais gerais e uma prova completa desse fato pode ser encontrada, por exemplo, em Bowen (2008) ou Katok e Hasselblatt (1995, Chapter 18, Section 7).  $\square$

Agora, munidos de uma partição de Markov  $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_{l-1}\}$ , queremos usá-la para associar  $f_A$  a um *subshift* de tipo finito, que pode ser feito da seguinte forma: consideremos a matriz de transição  $B = (b_{ij})$  dada por

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \text{int}(f_A(R_i)) \cap \text{int}(R_j) \neq \emptyset; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja,  $b_{ij}$  será 1 se os interiores de  $f_A(R_i)$  e  $R_j$  se intersectam e, em particular, existam elementos de  $R_i$  que vão para  $R_j$  pela ação de  $f_A$ , e 0 caso contrário. Observemos que, como a partição de Markov  $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_{l-1}\}$  tem  $l$  elementos, a matriz de transição associada será uma matriz quadrada  $l \times l$  e o *subshift* de tipo finito será um subconjunto do espaço de sequências  $\{0, 1, 2, \dots, l-1\}^{\mathbb{Z}}$  (Veja Exercício 3.25). De posse da matriz de transição, temos nosso espaço de sequências  $B$ -admissíveis dado por

$$X_B = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \{0, 1, \dots, l-1\}^{\mathbb{Z}} : b_{x_n x_{n+1}} = 1 \ \forall n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Consideremos, então, a restrição do *shift* bilateral ao conjunto  $X_B$ , obtendo o *subshift* de tipo finito

$$f_B : X_B \rightarrow X_B.$$

Então a principal relação entre  $f_A$  e o *subshift* de tipo finito  $f_B$  é dada pelo seguinte resultado cuja prova pode ser encontrada, por exemplo, em Bowen (2008) ou Katok e Hasselblatt (1995, Chapter 18, Section 7), que nos mostra de maneira clara a importância das partições de Markov.

**Teorema 6.33.** *Sejam  $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_{l-1}\}$  uma partição de Markov para  $(\mathbb{T}^2, f_A)$  e  $(X_B, f_B)$  o subshift de tipo finito associado como acima. Então existe uma transformação  $h : X_B \rightarrow \mathbb{T}^2$ , contínua e sobrejetiva, que satisfaz*

$$h \circ f_B = f_A \circ h.$$

*Ou seja,  $h$  é uma semiconjugação entre  $f_B$  e  $f_A$ . Além disso, em geral  $h$  não é injetiva, porém no máximo  $l^2$  pontos de  $X_B$  são levados a um mesmo ponto de  $\mathbb{T}^2$ . Mais ainda,  $h$  tem uma expressão ‘explícita’: dado  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X_B$ , temos que*

$$h((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_A^{-n}(R_{x_n}).$$

*Em particular,  $h((x_n)_{n \in \mathbb{Z}})$  é o único ponto de  $\mathbb{T}^2$  cujo itinerário é dado pela sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .*

Aplicando o raciocínio anterior à partição de Markov  $\{R_0, R_1\}$  de  $(\mathbb{T}^2, f_A)$  apresentada na prova do Teorema 6.32, não é difícil ver que a matriz de transição associada é dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, considerando o *subshift* de tipo finito  $f_B: X_B \rightarrow X_B$  associado a  $B$ , segue do teorema anterior que  $f_B$  é semiconjugado a  $f_A$ , obtendo, assim, a relação entre nossa dinâmica e um *subshift* de tipo finito que buscávamos.

Para finalizar, observamos que partições de Markov em geral não são únicas e que partições diferentes dão origem a *subshifts* de tipo finito diferentes, podendo envolver mais ou menos símbolos de acordo com o número de elementos da partição. Além disso, ressaltamos a importância dos conjuntos estáveis e instáveis na obtenção de uma partição de Markov. De fato, sempre que tivermos conjuntos estáveis e instáveis “bonitos”, a existência de uma tal partição é garantida.

## 6.13 Automorfismos do toro em dimensão maior

Nesta seção, observaremos que as construções feitas até aqui podem ser generalizadas para dimensão maior. Para tanto, consideremos a matriz  $d \times d$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}.$$

Dizemos que  $A$  é *hiperbólica* se todos os seus autovalores têm módulo diferente de 1. Uma primeira observação sobre matrizes hiperbólicas é a seguinte.

**Lema 6.34.** *Suponha que todos os autovalores de  $A$  têm módulo menor do que 1. Então, existem constantes  $C > 0$  e  $\lambda \in (0, 1)$  tais que*

$$\|A^n v\| \leq C \lambda^n \|v\| \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^d.$$

*Demonstração.* Como todos os autovalores de  $A$  têm módulo menor do que 1, existem  $\rho \in (0, 1)$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que  $\|A^{n_0}\| < \rho < 1$  (por quê?). Tome  $C_0 = \sup\{\|A^j\| : j = 0, 1, 2, \dots, n_0\}$ ,  $\lambda = \rho^{\frac{1}{n_0}}$  e  $C = \frac{C_0}{\rho} = \frac{C_0}{\lambda^{n_0}}$ . Então, dado  $n \in \mathbb{N}$ , podemos escrevê-lo como  $n = n_0 k + r$  com  $0 \leq r < n_0$ . Nesse caso,

$$\begin{aligned} \|A^n\| &= \|A^{n_0 k + r}\| \leq \|A^{n_0 k}\| \|A^r\| \\ &\leq \|A^{n_0}\|^k \|A^r\| \leq \rho^k C_0 \\ &= C \lambda^{n_0 k} \lambda^{n_0 k} \leq C \lambda^{n_0 k + r} \\ &= C \lambda^n \end{aligned}$$

em que segue o resultado. □

Utilizando o lema anterior, pode-se provar o seguinte resultado análogo ao que provamos no caso da nossa matriz  $A$   $2 \times 2$  dada no início do capítulo.



**Exercício 6.15.** Seja  $A$  uma matriz hiperbólica. Mostre que existem subespaços  $\mathbb{E}^s$  e  $\mathbb{E}^u$  ditos subespaços estável e instável respectivamente, tais que

- (i)  $\mathbb{R}^d = \mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^s$ ;
- (ii)  $A(\mathbb{E}^s) = \mathbb{E}^s$  e  $A(\mathbb{E}^u) = \mathbb{E}^u$ ;
- (iii) Existem  $C > 0$  e  $\lambda \in (0, 1)$  tais que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|A^n v\| \leq C \lambda^n \|v\| \text{ para todo } v \in \mathbb{E}^s$$

e

$$\|A^{-n} v\| \leq C \lambda^n \|v\| \text{ para todo } v \in \mathbb{E}^u;$$

- (iv) Para todo  $p \in \mathbb{R}^d$ ,  $W_A^s(p) = p + \mathbb{E}^s$  e  $W_A^u(p) = p + \mathbb{E}^u$ .

Consideremos agora o toro  $\mathbb{T}^d$ , que nada mais é do que uma “versão” do toro  $\mathbb{T}^2$ , porém em dimensão  $d$ . Mais precisamente,  $\mathbb{T}^d$  pode ser visto como

$$\mathbb{T}^d = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{d\text{-vezes}}.$$

Em  $\mathbb{T}^d$ , consideremos a distância

$$d_T((x_1, x_2, \dots, x_d), (y_1, y_2, \dots, y_d)) = \sqrt{d_{\equiv}(x_1, y_1)^2 + \dots + d_{\equiv}(x_d, y_d)^2}$$

sendo  $(x_1, x_2, \dots, x_d), (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{T}^d$  e  $d_{\equiv}$  é a métrica em  $S^1$  dada na Seção 5.2.3. Consideremos ainda a projeção  $\pi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  dada por

$$\pi(x_1, x_2, \dots, x_d) = (x_1 \bmod 1, x_2 \bmod 1, \dots, x_d \bmod 1).$$

Por fim, se  $A$  é uma matriz com coeficientes inteiros, isto é, se  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$  para todo  $i, j = 1, 2, \dots, d$ , e  $\det(A) = \pm 1$ , então, procedendo de forma análoga ao que fizemos na Seção 6.3, vemos que aplicação  $f_A: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  induzida por  $A$  em  $\mathbb{T}^d$  e dada por

$$f_A(x_1, x_2, \dots, x_d) = \pi(A(x_1, x_2, \dots, x_d)) \quad (6.28)$$

está bem definida. Como no caso de dimensão 2, uma transformação obtida dessa forma é dita um *automorfismo do toro*  $\mathbb{T}^d$ . Se, além disso, a matriz  $A$  for hiperbólica, então dizemos que  $f_A$  é um automorfismo *hiperbólico* do toro  $\mathbb{T}^d$ .

**Exercício 6.16.** Seja  $A$  uma matriz  $d \times d$  hiperbólica, com coeficientes inteiros e satisfazendo  $\det(A) = \pm 1$ . Verifique que as propriedades obtidas anteriormente para a transformação  $f_A$  induzida pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

continuam válidas para a transformação mais geral dada em (6.28).

## 6.14 Transformações hiperbólicas em geral

Nas seções anteriores, estudamos automorfismos hiperbólicos do toro, que nada mais são do que exemplos específicos de transformações mais gerais, apresentadas na sequência. Para tanto, faremos uso de noções um pouco mais avançadas como difeomorfismos, variedades e espaço tangente cujas definições não recordaremos aqui. Esta seção tem um caráter ‘motivacional’ e, como consequência, apenas apresentaremos as definições e resultados básicos sem qualquer prova. Para um estudo mais aprofundado sobre o tema recomendamos, por exemplo, as referências Brin e Stuck (2002), Katok e Hasselblatt (1995), Hasselblatt e Katok (2003) e Shub (1987).

**Definição 6.4.** Seja  $f: X \rightarrow X$  um difeomorfismo definido numa variedade compacta  $X$ . Um subconjunto  $M \subset X$  compacto e invariante por  $f$  é dito *hiperbólico* se para cada  $x \in M$  existem subespaços  $\mathbb{E}^s(x) \subset T_x X$  e  $\mathbb{E}^u(x) \subset T_x X$ , satisfazendo

- (i)  $T_x X = \mathbb{E}^u(x) \oplus \mathbb{E}^s(x)$ ;
- (ii)  $Df_x(\mathbb{E}^s(x)) = \mathbb{E}^s(f(x))$  e  $Df_x(\mathbb{E}^u(x)) = \mathbb{E}^u(f(x))$ ;
- (iii) Existem  $C > 0$  e  $\lambda \in (0, 1)$  tais que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|(Df^n)_x v\| \leq C \lambda^n \|v\| \text{ para todo } v \in \mathbb{E}^s(x)$$

e

$$\|(Df^{-n})_x v\| \leq C \lambda^n \|v\| \text{ para todo } v \in \mathbb{E}^u(x).$$

Como consequência do que vimos nas seções anteriores, pode-se facilmente verificar que  $\mathbb{T}^d$  é um conjunto hiperbólico para automorfismos hiperbólicos de toro. Quando o espaço todo for um conjunto hiperbólico, como no caso dos automorfismos hiperbólicos do toro, dizemos que trata-se de um *difeomorfismo de Anosov* em homenagem ao matemático russo Dmitri Anosov (1936 - 2014). Quando o conjunto não errante  $\Omega(f)$  é hiperbólico e, além disso,  $\Omega(f) = \overline{\text{Per}(f)}$ , dizemos que  $f$  trata-se de um difeomorfismo *Axioma A*. Finalmente dizemos que  $f$  é *hiperbólico* quando o conjunto limite  $L(f)$  é hiperbólico (lembre-se das relações entre  $\text{Per}(f)$ ,  $L(f)$  e  $\Omega(f)$  dadas no Exercício 1.7).

Na sequência, apresentamos alguns resultados clássicos sobre esse tipo de sistemas.

**Teorema 6.35** (Teorema da variedade estável). *Se  $f: X \rightarrow X$  é um difeomorfismo de classe  $C^r$  e  $M \subset X$  é um conjunto hiperbólico, então existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $x \in M$  temos que*

- $W_{f,\varepsilon}^s(x)$  é uma subvariedade de classe  $C^r$  e  $T_x W_{f,\varepsilon}^s(x) = \mathbb{E}^s(x)$ ;
- $W_{f,\varepsilon}^s(x) \subset W^s(x)$  e
- $W^s(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(W_{f,\varepsilon}^s(x))$ .

Analogamente para  $W_{f,\varepsilon}^u(x)$ .

Observe que resultados semelhantes foram obtidos para a nossa transformação  $f_A$  do início do capítulo. Valem ainda as seguintes propriedades:

- se  $f$  é Anosov, então  $f$  é Axioma A;
- se  $f$  é Axioma A, então  $f$  é hiperbólico;
- difeomorfismos de Anosov são  $C^r$ -estruturalmente estáveis. Ou seja, qualquer difeomorfismo  $C^r$ -próximo de  $f$  é conjugado a  $f$ ;
- se  $f$  é  $C^1$ -estruturalmente estável, então  $f$  é Axioma A. Observemos que ainda se trata de um problema em aberto saber se é possível trocar  $C^1$  por  $C^r$ ,  $r > 1$ , nesse resultado.

Vimos, nas seções anteriores, que automorfismos hiperbólicos do toro são transitivos e topologicamente *mixing*. Isto pode não ser mais válido para transformações hiperbólicas em geral. Porém vale o seguinte resultado que nos diz que podemos decompor  $L(f)$  e  $\Omega(f)$  em subconjuntos transitivos e topologicamente *mixing*. Mais precisamente,

**Teorema 6.36** (Teorema da decomposição espectral). *Sejam  $f : X \rightarrow X$  um difeomorfismo e  $\Lambda = L(f)$  ou  $\Lambda = \Omega(f)$ . Se  $\Lambda$  é um conjunto hiperbólico, então existem subconjuntos  $M_1, M_2, \dots, M_m \subset X$  tais que*

- $\Lambda = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_m$ ;
- os subconjuntos  $M_1, M_2, \dots, M_m$  são disjuntos;
- cada  $M_j$  é compacto e invariante por  $f$  e
- a restrição  $f|_{M_j} : M_j \rightarrow M_j$  de  $f$  a cada  $M_j$  é transitiva.

Além disso, cada  $M_j$  pode ser decomposto como a união disjunta de conjuntos compactos  $M_j = M_1^j \cup M_2^j \cup \dots \cup M_{n_j}^j$  tais que

- $f(M_i^j) = M_{i+1}^j$  para todo  $i = 1, \dots, n_j - 1$  e  $f(M_{n_j}^j) = M_1^j$ ; e
- $f^{n_j}|_{M_i^j} : M_i^j \rightarrow M_i^j$  é topologicamente *mixing* para todo  $i = 1, 2, \dots, n_j$ .

Os resultados acima são apenas uma pequena amostra do que se sabe sobre esse tipo de sistemas. De fato, a teoria de sistemas hiperbólicos é vasta e bastante consolidada. Salientamos ainda que existem outras noções mais fracas de hiperbolicidade. Por exemplo, outras classes de sistemas muito estudados são os sistemas *parcialmente hiperbólicos* e os sistemas *não uniformemente hiperbólicos*, porém não abordaremos essas noções nestas notas. Para mais informações, sugerimos, por exemplo, Barreira e Pesin (2007) e Crovisier e Potrie (2015).



# Noções de espaços métricos

---

Neste apêndice, apresentaremos alguns conceitos básicos que são utilizados ao longo do texto. Sua finalidade é servir como uma referência rápida para o leitor.

Nesta seção, apresentaremos brevemente algumas noções básicas associadas a espaços métricos. Para mais informações sobre o assunto, sugerimos consultar Lima (1977).

Seja  $M$  um conjunto qualquer. Então uma função  $d : M \times M \rightarrow [0, +\infty)$  é dita uma *métrica* ou então uma *distância* se

- (i) (positividade)  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ ;
- (ii) (simetria)  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in M$ ;
- (iii) (desigualdade triangular)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  para todo  $x, y, z \in M$ .

Um conjunto  $M$  munido de uma métrica  $d$  é dito um *espaço métrico*. Em geral, denotamos um espaço métrico por  $(M, d)$  em que  $M$  é o conjunto e  $d$  é a métrica.

**Exemplo A.1.** Considere  $M = \mathbb{R}$  e  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  dado por  $d(x, y) = |x - y|$ . Segue facilmente das propriedades do valor absoluto que  $(M, d)$  é um espaço métrico. De fato,  $0 = d(x, y) = |x - y|$  se, e somente se,  $x - y = 0$  que, por sua vez, é equivalente a  $x = y$ ;  $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$ ; e usando a desigualdade triangular do valor absoluto segue que

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

## A.1 Sequências

Uma *sequência* num espaço métrico  $(M, d)$  é simplesmente um conjunto ordenado e enumerável de pontos

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

Em geral, denotaremos a sequência acima por  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dizemos que a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *converge* para o ponto  $x$  se à medida que  $n$  cresce os pontos  $x_n$  se aproximam de  $x$ . De forma mais precisa, se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  temos que  $d(x_n, x) < \varepsilon$ . Nesse caso, escrevemos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ .

Uma *subsequência* da sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma nova sequência obtida simplesmente excluindo termos de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Observe que a ordem entre os termos remanescentes deve ser preservada. Por exemplo, se a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é dada por

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots$$

então

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$$

é uma subsequência de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Já

$$2, 1, 4, 6, 8, 10, \dots$$

não é uma subsequência de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , pois, apesar desses termos serem também termos de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , a ordem foi modificada. Por exemplo, no último exemplo, o 1 aparece à direita do 2 ao contrário do que ocorre na sequência original. Em geral, denotaremos por  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  uma subsequência de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sendo  $n_k$  números naturais satisfazendo  $n_k < n_{k+1}$ .

Um *ponto de acumulação* da sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é simplesmente um ponto  $y \in M$  para o qual existe alguma subsequência  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergindo para  $y$ . Em outras palavras,  $y$  é ponto de acumulação de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se existem termos da sequência cada vez mais próximos de  $y$ . Observemos que aqui não é necessário que *todos* os termos da sequência se aproximem de  $y$  à medida que  $n$  cresce, basta que existam termos com essa propriedade.

## A.2 Conjuntos abertos, fechados e compactos

Dados um número real  $r > 0$  e um ponto  $x_0 \in M$ , a *bola de centro em  $x_0$  e raio  $r$*  é o conjunto

$$B(x_0, r) = \{x \in M; d(x, x_0) < r\}.$$

Isto é, o conjunto de todos os pontos  $x$  de  $M$  cuja distância até  $x_0$  é menor do que  $r$ . Um conjunto  $U \subset M$  é dito *aberto* se, para todo  $x \in U$ , existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset U$ . Uma *vizinhança* de  $x$  é simplesmente um subconjunto aberto  $U$  de  $M$  tal que  $x \in U$ .

**Lema A.1.** *Toda bola  $B(x_0, r)$  é um conjunto aberto. Em particular,  $B(x_0, r)$  é uma vizinhança de  $x_0$ .*

*Demonstração.* Dado  $x \in B(x_0, r)$ , temos que  $d(x_0, x) < r$ . Consequentemente  $s := r - d(x_0, x) > 0$ . Observemos agora que  $B(x, s) \subset B(x_0, r)$ . De fato, dado  $y \in B(x, s)$ , utilizando a desigualdade triangular, temos que

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + s = d(x_0, x) + r - d(x_0, x) = r.$$

Logo  $y \in B(x_0, r)$  e, portanto,  $B(x, s) \subset B(x_0, r)$ . Segue, então, que  $B(x_0, r)$  é de fato um conjunto aberto.  $\square$

Um conjunto  $F \subset M$  é dito *fechado* se seu complementar  $F^c = \{x \in M; x \notin F\}$  for aberto. De forma equivalente,  $F$  é um conjunto fechado se toda sequência convergente  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  contida em  $F$  converge a um ponto  $x$  que pertence a  $F$ . O *fecho* de um subconjunto  $U \subset M$ , denotado por  $\overline{U}$ , é o conjunto formado por todos os pontos  $x \in M$  que são limites de alguma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  contida em  $U$ , isto é, tal que  $x_n \in U$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Observemos que o fecho  $\overline{U}$  de qualquer conjunto  $U$  é sempre um conjunto fechado. Além disso,  $F$  é um subconjunto fechado se, e somente se,  $F = \overline{F}$ .

**Exemplo A.2.** O conjunto  $(0, 1] \subset \mathbb{R}$  não é fechado, pois, por exemplo, a sequência  $x_n = \frac{1}{n}$  está contida em  $(0, 1]$ , sendo convergente, porém converge para 0 que não está em  $(0, 1]$ . Alternativamente,  $(0, 1]$  não é fechado, pois seu complementar  $(0, 1]^c = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$  não é aberto. Além disso,  $(0, 1]$  tampouco é aberto, pois não existe nenhuma bola centrada em  $1 \in (0, 1]$ , que esteja inteiramente contida em  $(0, 1]$ . Observemos ainda que o fecho de  $(0, 1]$  é o conjunto  $[0, 1]$ . Finalmente é importante notar que o fato de um conjunto ser aberto não exclui a possibilidade desse conjunto também ser fechado. Por exemplo, o conjunto  $\mathbb{R}$  é um subconjunto aberto e fechado de  $\mathbb{R}$  (verifique).

Um subconjunto  $U \subset X \subset M$  é dito *denso* em  $X$  se  $X \subset \overline{U}$ . Isto é, se o fecho de  $U$  contém  $X$ . Isto significa que, entre outros fatos, para todo  $x \in X$  existe algum ponto de  $U$  arbitrariamente próximo de  $x$ . De forma mais precisa, para todo  $x \in X$  e  $\varepsilon > 0$  existe  $z \in U$  tal que  $d(x, z) < \varepsilon$ . Por exemplo, o conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  é denso em  $\mathbb{R}$ , pois dado um número real  $r$  existe  $z \in \mathbb{Q}$  tão próximo de  $x$  quanto queiramos (verifique).

Um conjunto  $K \subset M$  é dito *compacto* se toda sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  contida em  $K$  possui uma subsequência que converge a um ponto de  $K$ . Por exemplo,  $[0, 1]$  é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$ . É fácil ver que todo conjunto compacto é também fechado. Já a recíproca não é verdadeira. Por exemplo,  $F = [0, +\infty)$  é fechado, porém não é compacto (verifique). Outra maneira equivalente de caracterizar um conjunto compacto é a seguinte: uma coleção arbitrária de subconjuntos abertos  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  é dita uma *cobertura* aberta de  $K$  se  $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ . Uma *subcobertura* de  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  é uma coleção de elementos de  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  que ainda cobre  $K$ . Então, o conjunto  $K$  é compacto se, e somente se, toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita.

## A.3 Funções contínuas e homeomorfismos

Sejam  $(M, d)$  e  $(N, d')$  dois espaços métricos. Dizemos que uma função  $f: M \rightarrow N$  é *contínua num ponto*  $x_0 \in M$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  (que pode depender de  $x_0$ ) tal que

$$\text{se } d(x_0, x) < \delta \text{ então } d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

Em palavras, uma função é contínua em  $x_0$  se à medida que  $x$  se aproxima de  $x_0$  em  $M$ ,  $f(x)$  se aproxima de  $f(x_0)$  em  $N$ . De forma geral, a função  $f$  é dita *contínua* se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

**Exemplo A.3.** A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 3x + 5$  é contínua. De fato, dados um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}$  qualquer e  $\varepsilon > 0$ , tome  $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ . Nesse caso, se  $|x_0 - x| < \delta$ , então

$$|f(x_0) - f(x)| = |3x_0 + 5 - (3x + 5)| = |3(x_0 - x)| \leq 3|x_0 - x| < 3\delta < \varepsilon.$$

Ou seja,  $f$  é contínua em  $x_0$ . Agora, como  $x_0$  foi tomado arbitrário, segue que  $f$  é contínua em todos os pontos do seu domínio.

A função  $f: M \rightarrow N$  é dita *uniformemente contínua* se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Ou seja, nesse caso, o  $\delta$  associado a  $\varepsilon$  é uniforme: não depende do ponto em questão (veja Exemplo A.3). Em particular, toda função uniformemente contínua é contínua. Já a recíproca, em geral, não é verdadeira.

**Exercício A.1.** Apresente um exemplo de função contínua que não é uniformemente contínua.

No entanto, quando o espaço  $(M, d)$  é compacto, temos que toda função contínua é uniformemente contínua.

**Exercício A.2.** Sejam  $(M, d)$  e  $(N, d')$  espaços métricos e  $f: M \rightarrow N$  uma função contínua. Mostre que se  $(M, d)$  é compacto, então  $f$  é uniformemente contínua.

Uma função  $f: M \rightarrow N$  é dita *injetiva* se ‘leva’ pontos distintos em pontos distintos. De maneira mais precisa, se, para todo  $x_1, x_2 \in M$  com  $x_1 \neq x_2$ , temos que  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Dizemos que a função  $f: M \rightarrow N$  é *sobrejetiva* se todo elemento do  $N$  é imagem de algum elemento de  $M$  por  $f$ . Isto é, se para todo  $y \in N$  existe  $x \in M$  tal que  $f(x) = y$ . Uma função que é simultaneamente injetiva e sobrejetiva é dita uma função *bijetiva* ou uma *bijeção*. Toda função bijetiva  $f: M \rightarrow N$  possui uma função inversa  $f^{-1}: N \rightarrow M$ , isto é, uma função que ‘desfaz’ o que a função original fez:  $f^{-1}(f(x)) = x$  e  $f(f^{-1}(y)) = y$  para todo  $x \in M$  e  $y \in N$ . Uma bijeção contínua  $f: M \rightarrow N$  cuja inversa  $f^{-1}: N \rightarrow M$  também é contínua é dita um *homeomorfismo*.

# B

## Noções de álgebra linear

---

Neste apêndice, apresentaremos definições e resultados básicos sobre álgebra linear em dimensão 2. Para uma análise mais aprofundada sobre o tema sugerimos os livros clássicos como, por exemplo, Lay, Lay e McDonald (2018) e Lima (2020a).

Denotaremos o espaço Euclidiano de dimensão 2 por  $\mathbb{R}^2$ . Elementos de  $\mathbb{R}^2$  são vetores que escreveremos na forma de coluna

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ou na forma de linha como  $x = (x_1, x_2)$ , sendo  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . De outra maneira,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

### B.1 Matrizes

Uma *matriz*  $2 \times 2$  real é um “quadrado” formado por números reais da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

com  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ . Nessa notação,  $a_{ij}$  significa a entrada da matriz  $A$  que está na linha  $i$  e na coluna  $j$ . Dado um elemento  $x = (x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  (que às vezes chamaremos



de vetor e outras simplesmente de ponto), o produto da matriz  $A$  pelo vetor  $x$  é dado por

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Note que  $Ax$  é também um elemento de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo B.1.** Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } x = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix},$$

então

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Dada outra matriz  $2 \times 2$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

a soma das matrizes  $A$  e  $B$  é uma nova matriz, denotada por  $A + B$ , dada por

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

Note que  $A + B$  é obtida a partir de  $A$  e  $B$ , somando as respectivas entradas das matrizes. O produto das matrizes  $A$  e  $B$  é também uma nova matriz, denotada por  $A \cdot B$  ou simplesmente por  $AB$ , definida como

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Além disso, dado um número real  $r \in \mathbb{R}$ , podemos considerar o produto de  $A$  por  $r$ , denotado por  $rA$ , obtido simplesmente multiplicando cada entrada de  $A$  por  $r$ . Mais precisamente,

$$rA = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} \\ ra_{21} & ra_{22} \end{pmatrix}.$$

**Exemplo B.2.** Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } 5A = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Observemos que  $A \cdot B \neq B \cdot A$ . Em particular, o produto de matrizes não é comutativo. Ou seja, a ordem em que cada matriz aparece no produto é importante.

Uma matriz importante é a matriz *identidade* dada por

$$\text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ela tem a propriedade que  $A \cdot \text{Id} = \text{Id} \cdot A = A$  qualquer que seja a matriz  $A$ . Ou seja, ela é o *elemento neutro* para multiplicação de matrizes.

A matriz  $A$  é dita *invertível* se existe uma matriz  $B$  tal que  $AB = BA = \text{Id}$ . Neste caso, denotamos a matriz inversa de  $A$  por  $A^{-1}$ .

**Exemplo B.3.** A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é invertível e sua inversa  $A^{-1}$  é dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

De fato, é fácil ver que  $AA^{-1} = \text{Id}$  e  $A^{-1}A = \text{Id}$

Ao longo do texto, utilizaremos a notação  $A^n$  e  $A^{-n}$  para  $n \in \mathbb{N}$ , significando

$$A^n = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A \cdot A}_{n\text{-vezes}} \quad \text{e} \quad A^{-n} = \underbrace{A^{-1} \cdot \dots \cdot A^{-1} \cdot A^{-1}}_{n\text{-vezes}}.$$

O *determinante* da matriz  $A$  dada em (B.1) é definido como o número

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Esse número nos dá informações importantes sobre a matriz  $A$ . Por exemplo,

**Proposição B.1.** A matriz  $A$  é invertível se, e somente se,  $\det(A) \neq 0$ . Além disso, se  $\det(A) \neq 0$ , então a inversa da matriz  $A$  dada em (B.1) é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

**Exemplo B.4.** Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

temos que  $\det(A) = 8$ . Em particular,  $A$  é invertível e sua inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

O *polinômio característico* da matriz  $A$  dada em (B.1) é definido como

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda \text{Id}) \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Ou seja,  $p(\lambda)$  é um polinômio de grau 2 na variável  $\lambda$ . Utilizando o método resolutivo para equações do segundo grau, também conhecido como fórmula de Bhaskara, podemos determinar as raízes de  $p(\lambda)$ . Ou seja, os valores de  $\lambda$  para os quais  $p(\lambda) = 0$ . É bem sabido que, no conjunto dos números complexos,  $p(\lambda)$  sempre tem raízes, podendo ser uma raiz de multiplicidade dois ou, então, duas raízes distintas. Denotemos tais raízes por  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  (no caso de termos uma raiz com multiplicidade dois, temos  $\lambda_1 = \lambda_2$ ). As raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  do polinômio característico de  $A$  são ditos *autovalores* da matriz  $A$ . A multiplicidade de  $\lambda$  como autovalor de  $A$  é a multiplicidade de  $\lambda$  como raiz do polinômio característico  $p(\lambda)$ . Um *autovetor* de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$  é um vetor não nulo  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , que satisfaz

$$Av = \lambda v.$$

Observemos que se  $v$  é autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ , então dado  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , o vetor  $rv$  também é autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ . Além disso, se  $u \in \mathbb{R}^2$  é outro autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ ,  $u + v$  também o é. Em particular, o conjunto dos autovetores associados a  $\lambda$  forma um *subespaço vetorial*.

**Exemplo B.5.** Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nesse caso, o polinômio característico de  $A$  é dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -4 \\ -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Logo, como as raízes de  $p(\lambda)$  são  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 3$ , segue que esses são os autovalores de  $A$ . Para determinarmos um autovetor associado, por exemplo, ao autovalor  $\lambda_2 = 3$ , basta resolvermos a equação

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 3x_1 \\ -x_1 + x_2 = 3x_2 \end{cases}$$

Logo, como  $x = (2, -1)$  é solução do sistema, segue que é um autovetor associado ao autovalor  $\lambda_2 = 3$ . De maneira análoga, resolvendo a equação

$$A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

obtemos um autovalor associado ao autovetor  $\lambda_1 = -1$ . Por exemplo,  $y = (2, 1)$  é autovetor associado a  $\lambda_1 = -1$ .

## B.2 Transformações lineares em $\mathbb{R}^2$

Uma transformação  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *linear* se

- $L(rx) = rL(x)$  para todo número  $r \in \mathbb{R}$  e todo vetor  $x \in \mathbb{R}^2$  e
- $L(x + y) = L(x) + L(y)$  para todo par de vetores  $x, y \in \mathbb{R}^2$ .

Matrizes e transformações lineares em  $\mathbb{R}^2$  estão intimamente relacionadas. De fato, dada uma matriz  $A$ , temos associada a ela a transformação linear dada por  $Lx = Ax$  (multiplicação do vetor  $x$  pela matriz  $A$ ). Reciprocamente dada uma transformação linear  $L$ , consideremos os vetores

$$v_1 = L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos, então, a matriz  $A$  cuja primeira coluna é formada pelo vetor  $v_1$  e cuja segunda coluna é formada pelo vetor  $v_2$ . Nesse caso, a transformação linear  $L$  satisfaz  $Lx = Ax$ . Em particular, o estudo de matrizes e transformações lineares estão fortemente associados. Chamaremos a matriz  $A$  acima de *representação matricial de  $L$*  (na base canônica). Note que a transformação linear  $Lx = Ax$  é invertível se, e somente se, a matriz  $A$  é invertível e, nesse caso,  $L^{-1}x = A^{-1}x$ .

## B.3 Normas em $\mathbb{R}^2$

Uma *norma* em  $\mathbb{R}^2$  é uma transformação  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$  que satisfaz

- (a)  $\|x\| = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ ;
- (b)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e
- (c)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^2$ .

Exemplos de normas em  $\mathbb{R}^2$  são dados por

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \quad \text{e} \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

para  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercício B.1.** Verifique que  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$  dadas acima de fato são normas. Isto é, verifique que elas satisfazem as propriedades (a), (b) e (c) da definição de norma.

Um resultado interessante de Álgebra Linear é o seguinte: apesar de existirem diversas normas em  $\mathbb{R}^2$ , todas elas são equivalentes. Mais precisamente,

**Proposição B.2.** *Dados duas normas  $\|\cdot\|_a$  e  $\|\cdot\|_b$  em  $\mathbb{R}^2$ , existe uma constante  $C > 1$  tal que*

$$\frac{1}{C} \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq C \|x\|_b \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

Ao longo do texto, exceto menção explícita em contrário, sempre estaremos trabalhando com a norma  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

A norma de uma transformação linear  $A$  (ou da sua matriz associada) é definida como

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Utilizando as propriedades da norma em  $\mathbb{R}^2$ , é fácil ver que

- $\|A\| = 0$  se e somente se  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;
- $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$  para toda matriz  $A$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  para todas matrizes  $A$  e  $B$ .

Ou seja, a norma de uma matriz/transformação linear é de fato uma norma. Isto é, satisfaz as propriedades (a), (b) e (c) da definição de norma.

# Bibliografia

---

- M. Aigner e G. Ziegler (2018). *Proofs from THE BOOK*. Including illustrations by Karl H. Hofmann. Berlin: Springer, viii+326 pp. MR: 3823190 (ver p. 121).
- L. Barreira e Y. Pesin (2007). *Nonuniform hyperbolicity*. Dynamics of systems with non-zero Lyapunov exponents. Cambridge: Cambridge University Press, pp. xiv+513. MR: 2348606 (ver p. 161).
- L. Block e W. Coppel (1992). *Dynamics in One Dimension*. Lecture Notes in Mathematics No. 1513. New York: Springer-Verlag, pp. viii+249. MR: 1176513 (ver p. 16).
- R. Bowen (2008). *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Vol. 470. Lecture Notes in Mathematics. Second revised edition. With a preface by David Ruelle. Edited by Jean-René Chazottes. Berlin: Springer-Verlag, pp. viii+75. MR: 2423393 (ver pp. 156, 157).
- M. Brin e G. Stuck (2002). *Introduction to dynamical systems*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. xii+240. MR: 1963683 (ver pp. 20, 70, 160).
- S. Crovisier e R. Potrie (2015). *Introduction to partially hyperbolic dynamics*. Lecture notes for a School on Dynamical Systems, ICTP, Trieste, p. 68 (ver p. 161).
- R. L. Devaney (2003). *An introduction to chaotic dynamical systems*. Studies in Nonlinearity. Reprint of the second (1989) edition. Boulder, CO: Westview Press, pp. xvi+335. MR: 1979140 (ver p. 88).
- S. N. Elaydi (2008). *Discrete Chaos*. With applications in science and engineering. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, pp. xx+419. MR: 2364977 (ver p. 17).
- B. Hasselblatt e A. Katok (2003). *A first course in dynamics*. With a panorama of recent developments. New York: Cambridge University Press, pp. x+424. MR: 1995704 (ver p. 160).
- A. Katok e B. Hasselblatt (1995). *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. With a supplementary chapter by Anatole Katok and Leonardo Mendoza, Também disponível em português em Katok e Hasselblatt 2005. Cambridge: Cambridge University Press, pp. xviii+802. MR: 4362895 (ver pp. 59, 65, 74, 156, 157, 160).

- (2005). *A moderna teoria de sistemas dinâmicos*. Traduzido do original em inglês e com um suplemento por Luis Barreira. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, pp. xviii+840 (ver p. 172).
- S. Kolyada e L. Snoha (1997). “Some aspects of topological transitivity - a survey”. *Grazer Math. Ber.* 334. MR: 1644768 (ver p. 14).
- D. C. Lay, S. R. Lay e J. J. McDonald (2018). *Álgebra Linear e suas Aplicações*. 5ª ed. Livros Técnicos Científicos, p. 480 (ver p. 166).
- T.-Y. Li e J. A. Yorke (1975). “Period three implies chaos”. *Am. Math. Month.* 82. MR: 0385028 (ver p. 16).
- E. L. Lima (1977). *Espaços métricos*. Vol. 4. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, pp. viii+299. MR: 0654506 (ver pp. 14, 60, 93, 162).
- (2009). *Análise Real, Volume 1*. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. MR: 0159341 (ver p. 75).
- (2012). *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. 4ª ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, p. 210 (ver p. 142).
- (2020a). *Álgebra Linear*. 10ª ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (ver p. 166).
- (2020b). *Curso de Análise, Volume 2*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. MR: 0654862 (ver p. 141).
- Y. Pesin (1997). *Dimension Theory in Dynamical Systems*. Chicago Lectures in Mathematics. Contemporary Views and Applications. Chicago, IL: University of Chicago Press, pp. xii+304. MR: 1489237 (ver p. 23).
- M. Shub (1987). *Global stability of dynamical systems*. With the collaboration of Albert Fathi and Rémi Langevin. New York: Springer-Verlag, pp. xii+150. MR: 0869255 (ver p. 160).
- M. Viana e K. Oliveira (2019). *Fundamentos da Teoria Ergódica*. 2ª ed. Fronteiras da Matemática. Rio de Janeiro: SBM, p. 520 (ver p. 34).

# Índice Remissivo

---

## A

aplicação logística, 83  
atrator, 11  
    global, 12  
autômatos celulares, 65  
automorfismo  
    do toro  $\mathbb{T}^d$ , 159  
    hiperbólico, 119  
    hiperbólico do toro  $\mathbb{T}^d$ , 159  
autovalor, 169  
autovetor, 169

## B

bacia de atração, 12  
bifurcação, 85  
bola, 163

## C

cadeia de Markov topológica, 61  
cilindro, 44  
Conjectura de Collatz, 31  
conjugação, 18  
conjunto  
     $\alpha$ -limite, 7  
    aberto, 163  
    compacto, 164  
    de Cantor, 46

denso, 164

estável, 13

    local, 13

fechado, 164

hiperbólico, 160

instável, 13

    local, 13

invariante, 4

    para o futuro, 4

    para o passado, 4

limite, 8

minimal, 10

$\omega$ -limite, 6

perfeito, 46

totalmente desconexo, 46

constante de expansividade, 16

## D

delta de Dirac, 34

desigualdade triangular, 162

determinante, 168

difeomorfismo

    Axioma A, 160

    de Anosov, 160

    hiperbólico, 160

distância, 162



**E**

entropia topológica, 21

espaço

de Cantor, 46

de fases, 2

de sequências (bilaterais), 55

de sequências (unilaterais), 41

estável, 114

instável, 114

métrico, 162

estabilidade estrutural, 20

estrutura de produto local, 128

estruturalmente estável, 20

expansividade, 15

**F**

família quadrática, 83

fator, 19

fecho, 164

função

contínua, 165

uniformemente contínua, 165

**H**

homeomorfismo, 165

**I**

interseção

heteroclínica, 59

homoclínica, 59

invariante topológico, 21

**L**

levantamento, 143

**M**

matriz, 166

de transição, 60

eventualmente positiva, 63

hiperbólica, 113, 158

identidade, 168

irredutível, 63

positiva, 63

medida de probabilidade, 34

invariante, 36

**N**

norma, 170

de uma transformação linear, 171

normas equivalentes, 171

**O**

órbita, 2

periódica, 5

**P**

palavra, 44

partição de Markov, 154

período, 5

polinômio característico, 169

ponto

de acumulação, 163

errante, 9

eventualmente periódico, 97

fixo, 5

não errante, 9

periódico, 5

pré-periódico, 97

recorrente, 8

para o futuro, 8

para o passado, 8

pré-imagem, 3

Princípio da Casa dos Pombos, 26

probabilidade, 34

invariante, 36

problema  $3n + 1$ , 31projeção  $\pi$ , 118

propriedade do sombreamento, 18

pseudo-órbita, 17

periódica, 98

*pushforward*, 37**R**

repulsor, 13

retângulo, 154

próprio, 154

**S**

semiconjugação, 19

sensibilidade às condições iniciais, 16

sequência, 163

admissível, 60

convergente, 163

*shift*

bilateral, 56

unilateral, 46

sistema

caótico, 16

dinâmico, 2

sombreamento, 18

subsequência, 163

*subshift*, 73

de tipo finito, 61

## T

tenda, 81

topologicamente *mixing*, 15

toro  $\mathbb{T}^2$ , 117

transformação

expansora, 91, 112

linear, 170

transitividade, 14

*trapping region*, 11

## V

vizinhança, 76, 163

# *Lista de Símbolos*

---

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais incluindo o zero, página 1
$\mathbb{N}_*$	Conjunto dos números naturais sem o zero, página 1
$\mathbb{R}$	Conjuntos dos números reais, página 1
$\mathbb{Z}$	Conjuntos dos números inteiros, página 1
$\text{Den}(f)$	Conjunto dos pontos cuja órbita é densa por $f$ , página 50
$\text{Fix}(f^n)$	Conjunto dos pontos fixos de $f^n$ , página 54
$h_{\text{top}}(f)$	Entropia topológica de $f$ , página 21
$\text{Per}(f)$	Conjunto de todos os pontos periódicos de $f$ , página 5
$\text{Rec}(f)$	Conjunto de todos os pontos recorrentes de $f$ , página 8
$\alpha(x)$	Conjunto $\alpha$ -limite de $x$ , página 7
$\omega(x)$	Conjunto $\omega$ -limite de $x$ , página 6
$\Omega(f)$	Conjunto dos pontos não errantes de $f$ , página 9
$L(f)$	Conjunto limite de $f$ , página 8
$[w]$	Cilindro no espaço das sequências, página 44
$\#A$	Cardinalidade do conjunto $A$ , página 54
$\text{cov}(n, \varepsilon, f)$	Cardinalidade mínima de uma cobertura de $X$ por conjuntos de diâmetro com relação a $d_n$ menor do que $\varepsilon$ , página 23

$\text{sep}(n, \varepsilon, f)$	Cardinalidade máxima de um conjunto $(n, \varepsilon)$ -separado, página 21
$\text{span}(n, \varepsilon, f)$	Cardinalidade mínima de um conjunto $(n, \varepsilon)$ - <i>spanning</i> , página 23
$B(A)$	Bacia de atração do conjunto $A$ , página 12
$d_T$	Distância em $\mathbb{T}^2$ , página 118
$d_{\equiv}$	Distância induzida em $[0, 1)$ pela relação “ $x \bmod 1$ ”, página 107
$d_{S^1}$	Distância no círculo unitário $S^1$ , página 103
$f_B$	Subshift de tipo finito associado a matriz de transição $B$ , página 61
$O(x)$	Órbita do ponto $x$ , página 2
$W_f^s(x)$	Conjunto estável de $x$ , página 13
$W_{f,\varepsilon}^s(x)$	Conjunto estável local de $x$ , página 13
$W_f^u(x)$	Conjunto instável de $x$ , página 13
$W_{f,\varepsilon}^u(x)$	Conjunto instável local de $x$ , página 13

## **Títulos Publicados — 34º Colóquio Brasileiro de Matemática**

**Uma introdução à convexidade em grafos** – *Júlio Araújo, Mitre Dourado, Fábio Protti e Rudini Sampaio*

**Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos** – *Lucas Backes, Alexandre Tavares Baraviera e Flávia Malta Branco*

**Introdução aos espaços de Banach** – *Aldo Bazán, Alex Farah Pereira e Cecília de Souza Fernandez*

**Contando retas em superfícies no espaço projetivo** – *Jacqueline Rojas, Sally Andria e Wallace Mangueira*

**Paths and connectivity in temporal graphs** – *Andrea Marino e Ana Silva*

**Geometry of Painlevé equations** – *Frank Loray*

**Implementação computacional da tomografia por impedância elétrica** – *Fábio Margotti, Eduardo Hafemann e Lucas Marcilio Santana*

**Regularidade elíptica e problemas de fronteiras livres** – *João Vitor da Silva e Gleydson Ricarte*

**The  $\infty$ -Laplacian: from AMLEs to Machine Learning** – *Damião Araújo e José Miguel Urbano*

**Homotopical dynamics for gradient-like flows** – *Guido G. E. Ledesma, Dahisy V. S. Lima, Margarida Mello, Ketty A. de Rezende e Mariana R. da Silveira*



Instituto de  
Matemática  
Pura e Aplicada

---

## Lucas Backes

Lucas é natural de Campina das Missões-RS, um pequeno município próximo da fronteira com a Argentina. Inspirado por seus professores da escola, decidiu cursar licenciatura em Matemática. Suas experiências ao longo da graduação na UFRGS o levaram para o IMPA, onde cursou mestrado e doutorado. Realizou também um estágio de pós-doutorado na Universidade de Chicago. Atualmente é professor da UFRGS, atuando na área de Sistemas Dinâmicos.

## Alexandre Tavares Baraviera

Alexandre é natural de Marília-SP, mas foi criado em Brasília; fez seus estudos em São Paulo e no Rio de Janeiro, onde conheceu a Flávia. Mora em Porto Alegre desde 2002, lecionando Matemática na UFRGS. Em suas horas vagas, pode ser visto correndo (cada vez mais devagar) no parque da Redenção ou pedalando na pequena e agradável cidade de Canela.

## Flávia Malta Branco

Flávia é natural de Rio Grande, a cidade mais antiga do RS. Costumava passar as férias na praia do Cassino, aproveitando os seus mais de 200 km de extensão. Sempre gostou de ensinar e de matemática. Seus estudos a levaram ao Rio de Janeiro, onde conheceu o Alexandre, e a Porto Alegre, onde mora desde 1997. É mãe do Pedro e professora da UFRGS. Além de contribuir para a formação de novos professores, adora quebra-cabeças, enigmas e um dia ainda vai aprender a equilibrar-se sobre patins.

---

## Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos

impa



Instituto de  
Matemática  
Pura e Aplicada

ISBN 978-85-244-0542-6



9 788524 405426