

Implementação computacional da tomografia por impedância elétrica

Fábio Margotti
Eduardo Hafemann
Lucas Marcilio Santana

34^o

Colóquio
Brasileiro de
Matemática

impa



Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

Implementação computacional da tomografia por impedância elétrica

Implementação computacional da tomografia por impedância elétrica

Primeira impressão, setembro de 2023

Copyright © 2023 Fábio Margotti, Eduardo Hafemann e Lucas Marcílio Santana.

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

ISBN 978-85-244-0534-1 (print)

ISBN 978-85-244-0535-8 (ebook)

MSC (2020) Primary: 47J06, Secondary: 35R25, 47J25, 35R30, 78A46, 65N20

Coordenação Geral

Carolina Araujo

Produção Books in Bytes

Capa IMPA

Realização da Editora do IMPA

IMPA

Estrada Dona Castorina, 110

Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

www.impa.br

editora@impa.br

M329i

Margotti, Fabio

Implementação computacional da tomografia por impedância elétrica / Fábio Margotti, Eduardo Hafemann e Lucas Marcílio Santana. - 1.ed. -- Rio de Janeiro: IMPA, 2023.

34 Colóquio Brasileiro de Matemática; v. 7, 121p.: il.; 23cm

ISBN 978-85-244-0534-1 (print)

ISBN 978-85-244-0535-8 (ebook)

1. Tomografia por impedância elétrica. 2. Problemas inversos mal postos. 3. Métodos de regularização. I. Hafemann, Eduardo; Santana, Lucas Marcílio. II. Série. III. Título.

UDC: 519.6

Carolina Celano Lima/CRB-7: 2438

Sumário

Prefácio	ii
1 Modelos Matemáticos	1
1.1 Modelo Contínuo	2
1.1.1 Problemas Direto e Inverso	5
1.1.2 Derivada Direcional do Operador Direto	6
1.1.3 A Adjunta da Derivada	8
1.2 Modelos de Eletrodos	9
1.2.1 Gap Model	9
1.2.2 Shunt Model	9
1.2.3 Modelo Completo de Eletrodos – CEM	10
1.3 Formulação Variacional do CEM	10
1.3.1 Problemas Direto e Inverso	12
1.3.2 Derivada do Operador Direto	13
1.3.3 A Adjunta da Derivada	15
1.4 Exercícios	15
2 Implementação Computacional do Problema Direto	17
2.1 Discretização do Modelo Contínuo	18
2.1.1 Discretização da Equação Variacional	20
2.1.2 Discretização da Derivada do Operador Direto	22
2.2 Discretização do CEM	25
2.2.1 Discretização da Equação Variacional	25
2.2.2 Discretização da Derivada do Operador Direto	27

3	Testes de Consistência	30
3.1	Testes Numéricos no Modelo Contínuo	30
3.1.1	Testes de Consistência	32
3.1.2	Cálculo da Derivada do Operador Direto	35
3.2	Testes Numéricos no CEM	37
3.2.1	Testes de Consistência	40
3.2.2	Cálculo da Derivada do Operador Direto	46
4	Implementação Computacional do Problema Inverso	51
4.1	Testes Numéricos com Dados Sintéticos	51
4.1.1	Geração dos Dados Sintéticos	52
4.1.2	Reconstrução da Condutividade Elétrica	53
4.1.3	Resultados Numéricos	55
4.2	Testes Numéricos com Dados Reais	60
4.2.1	Medição dos Potenciais	60
4.2.2	Inicialização do Algoritmo	61
4.2.3	Resultados Numéricos	64
A	Teoria Clássica de Regularização de Problemas Inversos	69
A.1	A Pseudoinversa de Moore–Penrose	71
A.2	Problemas Inversos Lineares	75
A.3	Problemas Inversos Não Lineares	78
A.4	Exercícios	82
B	Métodos de Regularização para Problemas Inversos	84
B.1	Métodos de Regularização para Problemas Lineares	84
B.1.1	Método de Tikhonov	86
B.1.2	Método do Gradiente	88
B.2	Métodos de Regularização para Problemas Não Lineares	91
B.2.1	Métodos de Tikhonov e do Gradiente	92
B.2.2	Métodos de Newton Inexato	93
B.3	Exercícios	96
	Bibliografia	102
	Índice Remissivo	105

Prefácio

A Tomografia por Impedância Elétrica, *Electrical Impedance Tomography* (EIT) em inglês, é uma técnica de imagem que aplica correntes elétricas e mede os potenciais resultantes na superfície de um corpo, visando a reconstrução da condutividade (ou condutividade e permissividade) elétrica no interior desse corpo. A EIT é amplamente empregada em diversas áreas como medicina (monitoramento da função dos pulmões ou detecção de câncer de pele ou mama), geofísica (localização de depósitos subterrâneos) e em testes não destrutivos (determinação de falhas em materiais), veja Kirsch (2011) e as referências lá indicadas. No entanto, a reconstrução da condutividade elétrica no interior de um corpo, a partir de medições em sua superfície, é um problema matemático desafiador, devido principalmente à dependência não linear das medições em função da condutividade, bem como da dependência não contínua da condutividade em função das medições, veja Margaret Cheney e Newell (1999). Essas características dificultam a determinação precisa da condutividade, resultando em imprecisões ou inconsistências que tornam mais difícil a interpretação das imagens geradas pela EIT.

A primeira modelagem matemática para o problema da EIT foi proposta por Alberto Calderón, em seu trabalho intitulado *On an inverse boundary value problem*, Calderón (1980). Em sua abordagem, o autor sugeriu a descrição do problema direto da EIT pela solução de uma equação diferencial parcial (EDP) apropriada, a qual determina os potenciais elétricos na superfície, resultantes da aplicação de correntes elétricas conhecidas. Nessa situação, a condutividade elétrica é uma função, usada como parâmetro na EDP a ser resolvida. O problema inverso associado é, então, definido pela determinação da condutividade por meio do conhecimento da relação existente entre as correntes elétricas aplicadas e os potenciais elétricos resultantes.

Em geral, os problemas inversos buscam determinar a causa de um efeito observado. Por outro lado, o processo de determinar o efeito, conhecendo a sua causa, consiste no chamado problema direto. No caso particular da EIT, a resolução do problema direto consiste na determinação da solução da equação diferencial parcial que modela o problema.

Dependendo das condições envolvidas e do modelo, pode não ser possível determinar a solução exata de uma maneira simples, tornando necessário o emprego de métodos computacionais, como, por exemplo, o chamado método dos elementos finitos. De maneira similar, a resolução do problema inverso da EIT exige uma série de cuidados, uma vez que é o que chamamos de um problema mal posto, o qual se caracteriza pela dependência descontínua da solução em função dos dados. Esses problemas mal postos são tratados com os chamados métodos de regularização, os quais usualmente substituem a resolução do problema mal posto pela resolução de uma sequência de problemas bem postos. Em particular, para métodos de regularização iterativos, o problema direto precisa ser resolvido várias vezes até a obtenção de uma solução aproximada do problema inverso.

O método dos elementos finitos é utilizado para determinar uma aproximação da solução de uma equação variacional (podendo essa representar a solução fraca de uma EDP) em um subespaço apropriado de dimensão finita. A implementação computacional do método é complexa e dispendiosa, sendo, então, razoável o emprego de bibliotecas computacionais a fim de agilizar o processo. FEniCS é uma plataforma *open-source*, licença *GNU Lesser General Public License (LGPLv3)*, para resolver equações diferenciais parciais empregando elementos finitos em *Python*. Ela permite que o usuário traduza modelos científicos em um código eficiente, de alto nível, entre *Python* e *C++*, veja Logg, Mardal, Wells et al. (2012). A biblioteca será usada como base do código-fonte apresentado e estudado no presente livro.

Esse texto tem como objetivos principais estudar os aspectos matemáticos da EIT em duas dimensões (2D) e obter aproximações computacionais para o problema direto e sua derivada, além de resolver o problema inverso usando técnicas de regularização. Buscamos fornecer ao leitor uma fundamentação teórica sólida, abrangendo os principais aspectos da EIT e detalhar o método de elementos finitos empregado para a resolução do problema direto, descrevendo e estudando o comportamento de métodos de regularização clássicos para a resolução do problema inverso. Por fim, com o objetivo de testar os resultados teóricos, realizamos experimentos numéricos para a resolução do problema inverso da EIT, a partir da utilização de dados sintéticos e experimentais.

No contexto da EIT, existem diversos modelos matemáticos disponíveis para representar o problema direto. No Capítulo 1 deste livro, apresentamos alguns desses modelos e discutimos os principais resultados associados a cada um deles. O primeiro e mais simples é o Modelo Contínuo, apresentado originalmente em Calderón (1980), cujo nome faz referência às condições de contorno utilizadas na EDP que modela o problema. Entretanto, em algumas situações, essas condições de contorno precisam ser modificadas a fim de melhor representar o problema real. Assim é apresentado também, no Capítulo 1, a evolução dos modelos da EIT até o chamado Modelo Completo de Eletrodos, *Complete Electrode Model (CEM)* em inglês. Além disso, no Capítulo 1, também apresentamos a formulação variacional tanto do Modelo Contínuo quanto do CEM e estudamos a existência e a unicidade de soluções, sendo essas condições necessárias para a definição precisa dos problemas direto e inverso.

As soluções das equações que modelam a EIT no Capítulo 1 são geralmente aproximadas com o auxílio de um computador, uma vez que, no caso mais geral, não possuem

solução analítica conhecida. Por conta disso, o Capítulo 2 destina-se a apresentar estratégias de discretização dos modelos, tendo em vista sua implementação computacional. O código-fonte que emprega as discretizações, resolve os problemas direto e inverso e gera as figuras deste trabalho, estando disponível, juntamente com a sua documentação, em um repositório do *GitHub*¹.

O Capítulo 3 tem como objetivo a realização de testes numéricos, utilizando o código acima mencionado, a fim de determinar se as aproximações obtidas satisfazem as equações que modelam o problema. Os testes contemplam tanto o Modelo Contínuo quanto o CEM. Nesse capítulo, analisamos também a qualidade das aproximações obtidas por meio da aplicação de diferentes técnicas para a computação da derivada do operador direto.

O problema inverso é estudado no Capítulo 4, por testes numéricos realizados com o CEM. Nesse capítulo, a solução do problema inverso da EIT é aproximada utilizando dados sintéticos e experimentais. Os dados sintéticos são gerados com o mesmo código que resolve o problema direto, utilizando, porém, uma malha mais fina e introduzindo artificialmente ruídos em um nível controlado. Nesse caso, são estudados a performance de diferentes métodos clássicos de regularização, bem como a influência dos níveis de ruídos na reconstrução da solução do problema inverso. Já os dados experimentais, por sua vez, são coletados a partir de um recipiente contendo água salina e inclusões de metal e plástico, em diferentes posições e formatos. Para esse caso, são apresentadas técnicas para estimar os parâmetros necessários para inicializar o algoritmo de resolução do problema inverso, tais como as impedâncias de contato e o nível de ruídos. Depois, a performance de diferentes métodos de regularização é comparada, assim como a qualidade das reconstruções obtidas.

A discussão abordada no Capítulo 4 requer conhecimentos básicos sobre a teoria e métodos de regularização. Pensando nisso, os Apêndices A e B foram elaborados com o objetivo de fundamentar os conceitos da teoria de regularização de problemas inversos mal postos, bem como apresentar diferentes métodos de regularização para a resolução de problemas inversos lineares e não lineares. No final de cada um desses apêndices, uma série de exercícios, com diferentes níveis de dificuldade, é proposta para que o leitor tenha a oportunidade de reforçar seus conhecimentos.

É importante ressaltar o fato de que muitos tópicos de interesse não foram estudados neste livro, tais como a implementação computacional em três dimensões e a reconstrução simultânea da condutividade e permissividade elétrica. Além disso, diversos detalhes importantes para uma implementação eficiente do problema em questão não foram abordados, entre eles: técnicas de controle de malhas, métodos de regularização mais eficientes, técnicas de resolução de sistemas lineares e decomposição de matrizes etc. A justificativa que usamos para não discutir esses assuntos pertinentes é que a EIT é intensivamente estudada e possui uma teoria bastante abrangente, de modo que optamos por focar nos temas que acreditamos ser mais relevantes, mantendo assim um nível razoável de detalhes nas discussões. Dessa forma, acreditamos que este livro será útil para o leitor que planeja iniciar um estudo sério ao problema da Tomografia por Impedância Elétrica e da

¹Respectivamente, endereço para a documentação e repositório: https://hafemanne.github.io/FEIT_CBM34/, https://github.com/HafemannE/FEIT_CBM34.

sua implementação computacional.

Por último, os autores Fábio Margotti e Eduardo Hafemann gostariam de agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo financiamento parcial dos estudos dos autores relativo ao tema deste trabalho (Grant 406206/2021-0).

Florianópolis,
Julho de 2023

Eduardo Hafemann
Fábio Margotti
Lucas M. Santana

1

Modelos Matemáticos

No presente capítulo, descreveremos as equações diferenciais parciais que modelam matematicamente o problema físico da Tomografia por Impedância Elétrica (EIT, na abreviatura em inglês). Existem diversos modelos distintos, mas, daremos destaque aos chamados Modelo Contínuo e Modelo Completo de Eletrodos. Para esses modelos, estudaremos a existência e a unicidade de soluções da EDP associada, o que possibilitará a definição formal dos problemas direto e inverso em cada um dos casos.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto que representa uma seção transversal de um corpo. A superfície desta seção será representada pela fronteira do conjunto, a qual denotaremos por $\partial\Omega$. Seja $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a função que representa a *condutividade elétrica* em Ω . Ao aplicar-se uma *corrente elétrica* $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ na superfície da seção, um *potencial elétrico* $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é gerado e, como consequência, um *fluxo elétrico* é formado. Esse fluxo descreve a movimentação dos elétrons no interior de Ω , sendo, portanto, proporcional à condutividade elétrica. Além disso, o fluxo elétrico segue na direção em que o potencial decresce mais rapidamente, ou seja, na direção de $-\nabla u$. Sendo assim, o fluxo elétrico é descrito pela expressão:

$$-\gamma \nabla u.$$

Vamos assumir que não há fontes ou drenos elétricos no interior da seção, o que implica que o divergente do fluxo elétrico é nulo. Logo

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 \text{ em } \Omega. \quad (1.1)$$

A equação (1.1) é a base dos modelos matemáticos que descrevem a EIT. Vamos agora

analisar diferentes condições de fronteira, sendo que cada uma delas resulta num diferente modelo da EIT.

1.1 Modelo Contínuo

No Modelo Contínuo, introduzido em Calderón (1980), assumimos que o fluxo elétrico é totalmente transferido para a fronteira, resultando na equação

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} = g, \text{ em } \partial\Omega, \quad (1.2)$$

onde η é o vetor normal e unitário, que aponta para fora de Ω em cada ponto de $\partial\Omega$.

Vamos assumir temporariamente que as funções γ e u nas equações (1.1) e (1.2) sejam suaves o suficiente e que o conjunto Ω possui fronteira suave. Nesse caso, decorre da Primeira Identidade de Green que, para toda função $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente suave,

$$\int_{\partial\Omega} \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v \, dS - \int_{\Omega} \gamma \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} (\gamma \nabla u) v \, dx = 0.$$

Ou seja,

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} g v \, dS, \text{ para toda } v: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ suave.} \quad (1.3)$$

Em contrapartida, é possível provar que se as funções que aparecem na equação variacional (1.3) são suaves o suficiente, então a EDP (1.1), com condição de fronteira (1.2), é satisfeita, veja Evans (2010). Observe, no entanto, que (1.3) pode admitir soluções que não fazem sentido em (1.1). Chamamos tais soluções de *soluções fracas* para o Modelo Contínuo.

Analisaremos agora com mais cuidado a equação (1.3). Gostaríamos de determinar, sob quais condições essa equação variacional admite única solução. Para isso, vamos utilizar o seguinte lema:

Lema 1.1.1 (Lax–Milgram). *Seja H um espaço de Hilbert. Seja $B: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional bilinear que satisfaz as seguintes condições:*

- *limitação: Existe uma constante $c_1 > 0$ tal que $|B(u, v)| \leq c_1 \|u\| \|v\|$, $\forall (u, v) \in H \times H$;*

- *coercividade: Existe uma constante $c_2 > 0$ tal que $|B(u, u)| \geq c_2 \|u\|^2$, $\forall u \in H$.*

Então, para cada funcional linear e limitado $F: H \rightarrow \mathbb{R}$, existe um único $u \in H$ tal que

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H.$$

Prova: Veja Evans (ibid., Seção 6.2.1).

Com base no lema acima e tendo em vista a equação variacional (1.3), vamos fixar os funcionais $B_\gamma : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ e $F_g : H \longrightarrow \mathbb{R}$ definidos respectivamente por

$$B_\gamma(u, v) = \int_{\Omega} \gamma \nabla u \nabla v \, dx \quad (1.4)$$

e

$$F_g(v) = \int_{\partial\Omega} g v \, dS, \quad (1.5)$$

onde $H = H^1(\Omega)$. Nesse caso, H é um espaço de Hilbert munido da norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx.$$

O leitor não habituado à Teoria dos Espaços de Sobolev pode consultar, por exemplo, o livro Brezis (2010) para mais detalhes.

Supondo que o conjunto Ω seja regular o suficiente, decorre do *Teorema do Traço*, veja Brezis (ibid., página 315) que o traço da função v pertence ao espaço $H^{1/2}(\partial\Omega)$, sempre que v pertença a $H^1(\Omega)$. Sendo assim, para que o funcional F_g esteja bem definido, vamos assumir que a função g pertença ao espaço dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$, ou seja, $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$.¹ Por sua vez, para que B_γ esteja bem definido, assumimos que $\gamma \in L^\infty(\Omega)$.

Observe que se γ é limitada inferiormente por uma constante positiva, então

$$|B_\gamma(u, u)| = 0 \iff \nabla u = 0 \iff u = \text{constante}.$$

Logo a hipótese da coercividade no lema acima não é satisfeita por B_γ . Para contornar esse problema, vamos introduzir o espaço quociente

$$\tilde{H} = H/\mathbb{R},$$

onde uma função $u \in H$ é equivalente à função $v \in H$ se, e somente se, $u - v = \text{constante}$, veja Exercício 1.1.

Perceba que $B_\gamma : \tilde{H} \times \tilde{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como anteriormente, ainda está bem definida, já que se as funções $u_1, u_2 \in H$ estão na mesma classe de equivalência de \tilde{H} , então $u_1 - u_2 = c$, para alguma constante c , e assim, $\nabla u_1 = \nabla(u_2 + c) = \nabla u_2$. Ainda mais, para que $F_g : \tilde{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ fique bem definida, é necessário que se tenha $F_g(v) = F_g(v + c)$, para toda $v \in H$ e para toda c constante. Para isso, assumimos que $\int_{\partial\Omega} g \, dS = 0$, o que interpretamos fisicamente como a Lei da Conservação de Energia. Nessas condições, é fácil checar que F_g (B_γ) é um funcional linear (bilinear) bem definido, veja Exercício 1.5.

Agora, \tilde{H} munido da norma usual do espaço quociente dada por

$$\|u\| = \inf_{c \in \mathbb{R}} (\|u - c\|_{H^1(\Omega)}), \quad (1.6)$$

¹Como $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$, alguns autores preferem assumir que $g \in L^2(\partial\Omega)$.

²Mais precisamente, $u = \text{constante}$, quase sempre em Ω . Por simplicidade, escreveremos apenas $u = \text{constante}$.

é um espaço de Banach. Além disso, a norma usual é equivalente à norma asterisco, dada por

$$\|u\|_* = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (1.7)$$

a qual é induzida por um produto interno, fazendo de $(\tilde{H}, \|\cdot\|_*)$ um espaço de Hilbert, veja os Exercícios 1.3 e 1.4.

Temos que se γ é limitada inferiormente e superiormente por constantes positivas, então segue diretamente a limitação e a coercividade de B_γ . Já a limitação de F_g segue do Teorema do Traço. Portanto, aplicando o Lema de Lax–Milgram (Lema 1.1.1), obtemos a existência e a unicidade de solução da nossa equação variacional em \tilde{H} :

Proposição 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto com fronteira suave. Suponha que a condutividade elétrica γ pertença ao conjunto $L_+^\infty(\Omega)$. Então, para cada corrente elétrica $g \in H_\diamond^{-1/2}(\partial\Omega)$, existe uma única $u \in \tilde{H}$ tal que*

$$B_\gamma(u, v) = F_g(v), \quad \forall v \in \tilde{H}. \quad (1.8)$$

Obs.: Aqui usamos as definições

$$H_\diamond^{-1/2}(\partial\Omega) := \{g \in H^{-1/2}(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} g dS = 0\} \quad (1.9)$$

e

$$L_+^\infty(\Omega) := \{\gamma \in L^\infty(\Omega) : \gamma \geq c \text{ quase sempre em } \Omega\},$$

sendo $c > 0$ uma constante.³

Com essa proposição, obtemos a existência e a unicidade da solução em $\tilde{H} = H/\mathbb{R}$. Já em $H = H^1(\Omega)$, obtemos infinitas soluções que se diferenciam duas a duas por uma constante. Veja ainda que, entre essas soluções, existe apenas uma que satisfaz

$$\int_{\partial\Omega} u dS := \int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega} dS = 0,$$

veja Exercício 1.2.

Observação 1.1.2. • *A restrição à fronteira que aparece na segunda integral acima deve ser entendida no sentido do Teorema do Traço, ou seja, a integral do traço de u é zero. Ainda mais, se u é contínua em $\overline{\Omega}$, temos que o traço de u é de fato a restrição de u à fronteira. Devido a isso, usaremos a notação $u|_{\partial\Omega}$ para nos referir ao traço de u ;*

• *A integral de u , na fronteira, ser igual a zero é interpretada fisicamente como um aterramento do potencial;*

³De maneira análoga ao sentido empregado aqui, o símbolo \diamond , subscrito à notação do espaço vetorial, sempre indicará que os elementos daquele espaço possuem integral nula em $\partial\Omega$.

- Uma vez que cada classe de equivalência de \tilde{H} possui um único elemento de $H_\diamond^1(\Omega)$, veja Exercício 1.2, a equação variacional (1.8) é satisfeita para toda $v \in \tilde{H}$ se, e somente se, é satisfeita para toda $v \in H_\diamond^1(\Omega)$.

Em vista dessas observações, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto com fronteira suave e $\gamma \in L_+^\infty(\Omega)$. Então, para cada $g \in H_\diamond^{-1/2}(\partial\Omega)$, existe uma única $u \in H_\diamond^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} g v \, dS, \quad \forall v \in H_\diamond^1(\Omega). \quad (1.10)$$

1.1.1 Problemas Direto e Inverso

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto com fronteira suave. Suponha que a função γ , que representa a condutividade elétrica em Ω , esteja fixada e pertença a $L_+^\infty(\Omega)$. Então, segundo o resultado da Proposição 1.2, para cada corrente elétrica $g \in H_\diamond^{-1/2}(\partial\Omega)$, aplicada na fronteira de Ω , obtemos um único potencial elétrico $u \in H_\diamond^1(\Omega)$. Agora, de acordo com o Teorema do Traço, a *voltagem*, $f = u|_{\partial\Omega}$, pertence ao espaço $H_\diamond^{1/2}(\partial\Omega)$. Dessa forma, podemos definir o operador *Neumann-para-Dirichlet* (NpD), que associa a corrente elétrica g à voltagem resultante f :

$$\Lambda_\gamma : H_\diamond^{-1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow H_\diamond^{1/2}(\partial\Omega), \quad g \mapsto f. \quad (1.11)$$

O operador NpD é linear e contínuo, veja Exercício 1.7. Com o auxílio de Λ_γ , definimos os problemas direto e inverso da EIT:

Problema Direto: Dada $\gamma \in L_+^\infty(\Omega)$, determine o operador NpD Λ_γ . Ou seja, determine $f \in H_\diamond^{1/2}(\partial\Omega)$, para cada $g \in H_\diamond^{-1/2}(\partial\Omega)$. Assim o operador direto, que define a EIT no Modelo Contínuo, é dado por

$$F : L_+^\infty(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}\left(H_\diamond^{1/2}(\partial\Omega), H_\diamond^{-1/2}(\partial\Omega)\right), \quad \gamma \mapsto \Lambda_\gamma.$$

Problema Inverso: Determine a condutividade elétrica $\gamma \in L_+^\infty(\Omega)$ a partir do operador NpD Λ_γ .

Astala e Päiväranta (2006) demonstraram, sob condições apropriadas, a injetividade do operador direto F , o que garante a possibilidade teórica de reconstrução de γ a partir de Λ_γ . No entanto, na prática, é impossível conhecer o operador Λ_γ completamente. Sendo assim, é preciso primeiramente aproximar Λ_γ e, em seguida, reconstruir a condutividade γ . Para isso, aplicam-se $\ell \in \mathbb{N}$ correntes elétricas $g^{(i)}$, $i = 1, \dots, \ell$ e medem-se os potenciais elétricos resultantes $f^{(i)}$, obtendo-se assim uma aproximação para o operador NpD. Com essa informação, deseja-se, então, reconstruir uma condutividade elétrica $\gamma \in L_+^\infty(\Omega)$ tal que

$$\Lambda_\gamma \left(g^{(i)} \right) = f^{(i)}, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Há ainda um grande empecilho para a reconstrução da condutividade γ a partir de uma aproximação de Λ_γ , o qual diz respeito à estabilidade. De fato, o problema inverso da EIT é (exponencialmente) mal posto, o que significa que pequenas perturbações nos dados implicam em grandes erros na solução do problema inverso, veja Alessandrini (1988). Dessa forma, para a reconstrução de γ a partir de Λ_γ , é inevitável o uso de uma *técnica de regularização*, veja os Apêndices A e B.

1.1.2 Derivada Direcional do Operador Direto

Uma vez que o problema inverso da EIT é mal posto, a utilização de uma técnica de regularização é imprescindível para a sua resolução. Frequentemente isso implica na necessidade da determinação da derivada do operador direto F , o qual é Fréchet diferenciável, veja Lechleiter e Rieder (2008). Nessa seção, mostraremos, de uma maneira intuitiva e um tanto informal, que a derivada direcional do operador direto é a solução de uma equação variacional apropriada. O cálculo de derivadas direcionais será útil na construção de matrizes Jacobianas do operador direto discretizado, discutidas na Seção 2.1.2.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto com fronteira suave. Fixe o conjunto linearmente independente $G = \{g^{(1)}, \dots, g^{(\ell)}\} \subset H_\diamond^{-1/2}(\partial\Omega)$ de correntes elétricas. Para cada $i \in \{1, \dots, \ell\}$, defina o operador

$$F_i : L_+^\infty(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \longrightarrow H_\diamond^{1/2}(\partial\Omega), \gamma \mapsto \Lambda_\gamma(g^{(i)}) = f^{(i)}.$$

Defina também o operador

$$F_G : L_+^\infty(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \longrightarrow \left(H_\diamond^{1/2}(\partial\Omega)\right)^\ell, \gamma \mapsto \begin{bmatrix} F_1(\gamma) \\ \vdots \\ F_\ell(\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{(1)} \\ \vdots \\ f^{(\ell)} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Agora fixe $\gamma \in \text{int}(L_+^\infty(\Omega))$ e $\eta \in L^\infty(\Omega)$. Vamos computar a derivada direcional de F_G em γ na direção η . Para isso, calculamos antes a derivada de cada F_i em γ na direção η . Fixe $i \in \{1, \dots, \ell\}$ e note que $F_i(\gamma) = f^{(i)} = u_\gamma^{(i)}|_{\partial\Omega}$, onde $u_\gamma^{(i)}$ é a única solução da equação variacional (1.10) com a corrente elétrica $g = g^{(i)}$ e a condutividade elétrica γ . Defina o operador auxiliar

$$G_i : L_+^\infty(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \longrightarrow H_\diamond^1(\Omega), \gamma \mapsto u_\gamma^{(i)}.$$

Perceba que $F_i(\gamma)$ é igual ao traço de $G_i(\gamma)$. Agora

$$G_i'(\gamma)\eta = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G_i(\gamma + t\eta) - G_i(\gamma)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u_{\gamma+t\eta}^{(i)} - u_\gamma^{(i)}}{t} =: \omega^{(i)},$$

onde, de (1.10),

$$\int_\Omega \gamma \nabla u_\gamma^{(i)} \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} g^{(i)} v \, dS, \quad \forall v \in H_\diamond^1(\Omega)$$

e

$$\int_{\Omega} (\gamma + t\eta) \nabla u_{\gamma+t\eta}^{(i)} \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} g^{(i)} v \, dS, \quad \forall v \in H_{\diamond}^1(\Omega).$$

Então, fixando $v \in H_{\diamond}^1(\Omega)$, a diferença das últimas duas equações acima resulta em

$$\int_{\Omega} \left[(\gamma + t\eta) \nabla u_{\gamma+t\eta}^{(i)} - \gamma \nabla u_{\gamma}^{(i)} \right] \nabla v \, dx = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla \left(\frac{u_{\gamma+t\eta}^{(i)} - u_{\gamma}^{(i)}}{t} \right) \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} \eta \nabla u_{\gamma+t\eta}^{(i)} \nabla v \, dx.$$

Tomando $t \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla \omega^{(i)} \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} \eta \nabla u_{\gamma}^{(i)} \nabla v \, dx, \quad \forall v \in H_{\diamond}^1(\Omega). \quad (1.13)$$

A equação variacional (1.13) acima admite única solução $\omega^{(i)} \in H_{\diamond}^1(\Omega)$, conforme resultado provado em Lechleiter e Rieder (ibid.). Agora, denotando o operador do traço por $T: H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} F'_i(\gamma)\eta &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F_i(\gamma + t\eta) - F_i(\gamma)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(G_i(\gamma + t\eta)) - T(F_i(\gamma))}{t} \\ &= T \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G_i(\gamma + t\eta) - G_i(\gamma)}{t} \right) = T(\omega^{(i)}) = \omega^{(i)}|_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

já que o traço é um operador linear e contínuo. Portanto, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 1.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto com fronteira suave e*

$$G = \{g^{(1)}, \dots, g^{(\ell)}\}$$

um conjunto linearmente independente de correntes elétricas. Tome F_G o operador definido em (1.12). Então, para cada $\eta \in L^{\infty}(\Omega)$, temos que

$$F'_G(\gamma)\eta = \omega|_{\partial\Omega} := \begin{bmatrix} \omega^{(1)}|_{\partial\Omega} \\ \vdots \\ \omega^{(\ell)}|_{\partial\Omega} \end{bmatrix},$$

em que $\omega^{(i)}$ é a única solução em $H_{\diamond}^1(\Omega)$ da equação variacional (1.13).

Vamos usar esse resultado nas Seções 2.1.1 e 2.1.2.

Perceba que, para computar $F'_G(\gamma)\eta$, é necessário primeiramente determinar os vetores $u_{\gamma}^{(i)} = F_i(\gamma)$, para $i = 1, \dots, \ell$, e em seguida determinar a solução da equação variacional (1.13), para $i = 1, \dots, \ell$. Isso significa que a computação da derivada direcional de F_G demanda a solução de 2ℓ equações variacionais.

1.1.3 A Adjunta da Derivada

Como mencionado anteriormente, a aproximação da solução do problema inverso da EIT exige a aplicação de uma técnica de regularização. Muitas dessas técnicas, exigem a computação da derivada do operador direto ou, então, a computação da adjunta da derivada aplicada num vetor específico (veja o Método de Landweber não linear, c.f. (B.20)).

Caso o problema esteja discretizado (veja Capítulo 2), a derivada do operador direto, $F'_G(\gamma)$, pode ser representada pela matriz Jacobiana. Se esta estiver disponível, então a adjunta da derivada (referente ao produto interno usual) será representada simplesmente pela transposta dessa matriz, o que não exige nenhum esforço computacional extra. No entanto, a menos que seja estritamente necessário, o cálculo da matriz Jacobiana deve ser evitado, visto que o custo computacional para sua determinação pode ser elevado.

Uma vez que alguns métodos de regularização exigem apenas o conhecimento da adjunta da derivada aplicada num vetor específico, gostaríamos de um procedimento para determinar o resultado dessa aplicação de uma maneira mais barata computacionalmente. No que se segue, mostraremos como é possível computar $F'_G(\gamma)^*z$ pela determinação das soluções de equações variacionais apropriadas.

Para $i \in \{1, \dots, \ell\}$ fixado, tome $\sigma^{(i)} \in H_\diamond^{-1/2}(\Omega)$ e seja $\psi_\sigma^{(i)} \in H_\diamond^1(\Omega)$ a única solução de (1.10) com $g = \sigma^{(i)}$, isto é,

$$\int_\Omega \gamma \nabla \psi_\sigma^{(i)} \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} \sigma^{(i)} v \, dS, \quad \forall v \in H_\diamond^1(\Omega). \quad (1.14)$$

Fixe $\xi \in L^\infty(\Omega)$ e seja $\omega_\xi^{(i)} \in H_\diamond^1(\Omega)$ a única solução de (1.13) com $\eta = \xi$, o que significa que $F'_i(\gamma)\xi = \omega_\xi^{(i)}|_{\partial\Omega}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \langle F'_i(\gamma)^* \sigma^{(i)}, \xi \rangle &= \langle \sigma^{(i)}, F'_i(\gamma)\xi \rangle = \int_{\partial\Omega} \sigma^{(i)} \omega_\xi^{(i)} \stackrel{(1.14)}{=} \int_\Omega \gamma \nabla \psi_\sigma^{(i)} \nabla \omega_\xi^{(i)} \\ &= \int_\Omega \gamma \nabla \omega_\xi^{(i)} \nabla \psi_\sigma^{(i)} \stackrel{(1.13)}{=} - \int_\Omega \xi \nabla u_\gamma^{(i)} \nabla \psi_\sigma^{(i)} = \langle -\nabla u_\gamma^{(i)} \nabla \psi_\sigma^{(i)}, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Como a igualdade acima vale para todo $\xi \in L^\infty(\Omega)$, segue que

$$F'_i(\gamma)^* \sigma^{(i)} = -\nabla u_\gamma^{(i)} \nabla \psi_\sigma^{(i)}.$$

Por fim, usando (1.12), obtemos para $\sigma = (\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(\ell)}) \in (H_\diamond^{-1/2}(\Omega))^\ell$,

$$F'_G(\gamma)^* \sigma = \sum_{i=1}^{\ell} F'_i(\gamma)^* \sigma^{(i)} = - \sum_{i=1}^{\ell} \nabla u_\gamma^{(i)} \nabla \psi_\sigma^{(i)}.$$

1.2 Modelos de Eletrodos

Em aplicações práticas, é impossível controlar a corrente elétrica em todos os pontos da fronteira de Ω , como é assumido no Modelo Contínuo de Calderón. Da mesma forma, é impossível ler o potencial elétrico resultante em toda a fronteira. No procedimento mais comum, eletrodos são fixados em $\partial\Omega$ e informações sobre as correntes e potenciais elétricos ficam limitadas a essas regiões. Sendo assim, em muitos casos, é razoável substituir as hipóteses que as funções g e f devem satisfazer.¹

Vamos supor que $L \in \mathbb{N}$ eletrodos estão fixados sobre $\partial\Omega$. Denotamos a região de contato do i -ésimo eletrodo com Ω , pelo subconjunto aberto $E_i \subset \partial\Omega$, onde $1 \leq i \leq L$, $|E_i| > 0$ para todo i , e $\overline{E_j} \cap \overline{E_i} = \emptyset$ para $j \neq i$. Aqui $|E_i|$ denota a medida do i -ésimo eletrodo. Essa construção é a base dos modelos de eletrodos, sendo os mais importantes a seguir.

1.2.1 Gap Model

No modelo chamado *Gap Model* supõe-se que, no i -ésimo eletrodo, uma corrente elétrica constante $\frac{I_i}{|E_i|}$, é aplicada em cada um dos pontos de E_i . Já em $\partial\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^L E_i$, chamado de *gap*, não é aplicada corrente elétrica. Dessa forma,

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} = g = \begin{cases} \frac{I_i}{|E_i|}, & \text{em } E_i, \forall i \in \{1, \dots, L\} \\ 0, & \text{em } \partial\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^L E_i \end{cases}. \quad (1.15)$$

Assim (1.15) substitui a hipótese (1.2) do Modelo Contínuo.

Porém, a hipótese da corrente elétrica ser constante em cada eletrodo também não é realista, sendo substituída nos demais modelos.

1.2.2 Shunt Model

Diferentemente do *Gap Model*, no chamado *Shunt Model*, não se supõe que a corrente elétrica seja constante ou mesmo conhecida em cada um dos pontos do eletrodo E_i . Em vez disso, apenas a integral, $I_i \in \mathbb{R}$, da corrente elétrica nesse eletrodo é controlada. Como antes, não há corrente elétrica nos *gaps* $\partial\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^L E_i$. Dessa forma, obtemos as equações

$$\int_{E_i} \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} dS = I_i, \forall i \in \{1, \dots, L\} \quad (1.16)$$

e

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \text{ em } \partial\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^L E_i. \quad (1.17)$$

¹Mesmo não sendo o modelo padrão em alguns casos específicos, o Modelo Contínuo é importante e amplamente utilizado na prática, sendo frequentemente objeto de pesquisa.

Ainda assume-se que os eletrodos são condutores perfeitos, o que implica que o potencial elétrico deve ser constante em cada eletrodo, ou seja,

$$u|_{E_i} = U_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in \{1, \dots, L\}. \quad (1.18)$$

O *Shunt Model* é, então, modelado pelas equações (1.1) e (1.16) a (1.18). Em muitas aplicações práticas, o *Shunt Model* é o modelo padrão. Porém, a hipótese (1.18) desconsidera a chamada *impedância de contato*, presente nos eletrodos em algumas situações específicas. Isso motiva o estudo do chamado Modelo Completo de Eletrodos (*Complete Electrode Model* ou simplesmente CEM, na sua sigla em inglês).

1.2.3 Modelo Completo de Eletrodos – CEM

Conforme a argumentação apresentada em Somersalo, Cheney e Isaacson (1992), baseada em experimentos reais, em algumas aplicações específicas, a existência de um determinado fenômeno deve ser levada em consideração para a modelagem mais precisa da EIT. Por exemplo, se eletrodos são fixados à superfície do corpo humano, a umidade presente na pele pode criar uma fina camada de alta resistividade, a qual provoca uma diferença entre o potencial elétrico da superfície do corpo e aquele medido nos eletrodos. A queda do potencial, medido no eletrodo E_i , é proporcional à corrente elétrica, com uma constante de proporcionalidade $z_i > 0$, chamada de impedância de contato. Com isso, (1.18) é substituído por

$$u|_{E_i} + z_i \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} = U_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, L\}. \quad (1.19)$$

O Modelo Completo de Eletrodos é, então, modelado pela EDP (1.1) com as condições de contorno (1.16), (1.17) e (1.19).

1.3 Formulação Variacional do CEM

Similarmente ao que foi feito para o Modelo Contínuo na Seção 1.1, descreveremos nesta seção a formulação variacional do CEM. Depois aplicaremos o Lema de Lax–Milgram (Lema 1.1.1) para obter a existência e unicidade de soluções fracas, o que possibilitará a definição dos problemas direto e inverso do Modelo Completo de Eletrodos. O desenvolvimento é similar àquele apresentado na Seção 1.1 e, por conta disso, alguns detalhes serão omitidos. O leitor interessado nas provas das proposições apresentadas nesta seção pode consultar Somersalo, Cheney e Isaacson (ibid.).

Vamos iniciar os estudos com a descrição da equação variacional. Fixe o espaço de Hilbert $H = H^1(\Omega) \oplus \mathbb{R}^L$, o vetor de correntes elétricas nos eletrodos $I = (I_1, \dots, I_L) \in \mathbb{R}^L$ e o vetor de potenciais elétricos nos eletrodos $U = (U_1, \dots, U_L) \in \mathbb{R}^L$.

Proposição 1.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto com fronteira suave. Fixe as impedâncias de contato $z_i > 0$, $i = 1, \dots, L$, e o vetor de correntes elétricas $I \in \mathbb{R}^L$. Suponha*

que a função $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, que representa a condutividade elétrica, bem como os L eletrodos E_i e o par de potenciais $(u, U) \in H$, satisfazem as equações da EIT-CEM: (1.1), (1.16), (1.17) e (1.19). Então a equação variacional

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla u \nabla v \, dx + \sum_{i=1}^L \frac{1}{z_i} \int_{E_i} (u - U_i)(v - V_i) \, dS = \sum_{i=1}^L I_i V_i, \quad \forall (v, V) \in H, \quad (1.20)$$

é satisfeita. Reciprocamente se o par $(u, U) \in H$ satisfaz (1.20) com γ e u suaves o suficiente, então (u, U) é solução do CEM, i.e., satisfaz as equações (1.1), (1.16), (1.17) e (1.19).

Prova. Veja Somersalo, Cheney e Isaacson (ibid., Proposição 3.1).

A proposição acima garante que, assumindo regularidade suficiente das funções envolvidas e do conjunto Ω , temos que a EDP que modela a EIT-CEM é equivalente à equação variacional (1.20). Perceba, porém, que a equação (1.20) está bem definida e faz sentido para funções pouco regulares, as quais não fazem sentido na EDP que define o CEM. Isso significa que (1.20) pode admitir soluções generalizadas. Chamamos tais soluções de *soluções fracas* para o CEM.

Defina os funcionais $B_{\gamma}: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ e $F_I: H \rightarrow \mathbb{R}$ respectivamente por

$$B_{\gamma}((u, U), (v, V)) = \int_{\Omega} \gamma \nabla u \nabla v \, dx + \sum_{i=1}^L \frac{1}{z_i} \int_{E_i} (u - U_i)(v - V_i) \, dS \quad (1.21)$$

e

$$F_I(v, V) = \sum_{i=1}^L I_i V_i.$$

Assim (1.20) é equivalente a

$$B_{\gamma}((u, U), (v, V)) = F_I(v, V), \quad \text{para toda } (v, V) \in H.$$

Agora se γ é limitada inferiormente por uma constante positiva, então

$$|B_{\gamma}((u, U), (u, U))| = 0 \iff u = U_1 = \dots = U_L = \text{constante}.$$

A exemplo do que foi feito com o Modelo Contínuo, para que a hipótese da coercividade no Lema de Lax–Milgram (Lema 1.1.1) seja satisfeita por B_{γ} , devemos introduzir o espaço quociente

$$\tilde{H} = H/\mathbb{R},$$

onde (u, U) é equivalente a (v, V) se, e somente se, $u - v = U_1 - V_1 = \dots = U_L - V_L = \text{constante}$.

Perceba que o funcional $B_{\gamma}: \tilde{H} \times \tilde{H} \rightarrow \mathbb{R}$, dado da mesma forma, ainda está bem definido e é bilinear. Além disso, nesse modelo, a Lei da Conservação da Energia

é traduzida por $I \in \mathbb{R}_\diamond^L := \{I \in \mathbb{R}^L : \sum_{i=1}^L I_i = 0\}$. Com essa condição extra, o funcional $F_I : \tilde{H} \rightarrow \mathbb{R}$, definido como anteriormente, também está bem definido e é linear, veja Exercício 1.5.

Agora, note que \tilde{H} , quando munido da norma usual do espaço quociente, definida por

$$\|(u, U)\| = \inf_{c \in \mathbb{R}} \left(\|u - c\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|U - c\|_{\mathbb{R}^L}^2 \right)^{1/2},$$

é um espaço de Banach (veja Exercício 1.3). Além disso, a norma usual é equivalente à norma asterisco, definida por

$$\|(u, U)\|_* = \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^L \int_{E_i} |u - U_i|^2 dS \right)^{1/2},$$

veja Somersalo, Cheney e Isaacson (1992, Lema 3.2). Além do mais, essa última norma é induzida por um produto interno, fazendo de \tilde{H} um espaço de Hilbert. Com isso, provamos que F_I é limitado, e o mesmo vale para B_γ , caso γ seja limitada superiormente por uma constante.

Proposição 1.5. *Suponha que $\gamma \in L_+^\infty(\Omega)$. Então, para cada vetor $I \in \mathbb{R}_\diamond^L$, existe um único elemento $(u, U) \in \tilde{H}$ satisfazendo*

$$B_\gamma((u, U), (v, V)) = F_I(v, V), \quad \forall (v, V) \in \tilde{H}.$$

Prova. *O resultado segue do Lema de Lax–Milgram (Lema 1.1.1), veja Somersalo, Cheney e Isaacson (ibid., Teorema 3.3).*

Perceba que obtemos uma solução única $(u, U) \in \tilde{H}$ e, portanto, infinitas soluções em H , que se diferenciam uma da outra apenas por uma constante. Então, acrescentando a hipótese de que $\sum_{i=1}^L U_i = 0$, a qual é interpretada fisicamente como um aterramento do potencial elétrico, obtemos uma única solução para a equação variacional em H .

Proposição 1.6. *Suponha que $\gamma \in L_+^\infty(\Omega)$. Então, para cada vetor $I \in \mathbb{R}_\diamond^L$, existe um único par $(u, U) \in H^1(\Omega) \oplus \mathbb{R}_\diamond^L$ satisfazendo*

$$B_\gamma((u, U), (v, V)) = F_I(v, V), \quad \forall (v, V) \in H^1(\Omega) \oplus \mathbb{R}_\diamond^L.$$

Prova. *Veja Somersalo, Cheney e Isaacson (ibid., Corolário 3.4).*

1.3.1 Problemas Direto e Inverso

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto com fronteira suave e suponha que a função $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, que representa a condutividade elétrica, esteja fixada e pertença ao conjunto $L_+^\infty(\Omega)$.

Suponha que também estejam fixados L eletrodos $E_i \subset \partial\Omega$ satisfazendo as condições do CEM. Então, conforme resultado da última proposição, para cada vetor de correntes elétricas $I \in \mathbb{R}_\diamond^L$, aplicado nos eletrodos, obtemos um único vetor de potenciais elétricos resultantes $U \in \mathbb{R}_\diamond^L$. Dessa forma, podemos definir o operador *Neumann-para-Dirichlet* (NpD), que associa o vetor das correntes elétricas I ao vetor dos potenciais elétricos U :

$$\Lambda_\gamma : \mathbb{R}_\diamond^L \longrightarrow \mathbb{R}_\diamond^L, I \mapsto U$$

A exemplo do Modelo Contínuo, o operador NpD do EIT-CEM é linear (veja Exercício 1.7). Como Λ_γ opera entre espaços de dimensão finita, ele pode ser representado por uma matriz, sempre que uma base para os espaços esteja fixada. Com o auxílio desse operador, definimos os problemas direto e inverso da EIT-CEM:

Problema Direto: Dada $\gamma \in L_+^\infty(\Omega)$, determine o operador NpD Λ_γ . Ou seja, determine $U \in \mathbb{R}_\diamond^L$, para cada $I \in \mathbb{R}_\diamond^L$. Assim podemos definir o operador direto por

$$F : L_+^\infty(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}_\diamond^L, \mathbb{R}_\diamond^L), \gamma \mapsto \Lambda_\gamma. \quad (1.22)$$

Problema Inverso: Como esperado, no problema inverso, deve-se determinar a condutividade elétrica $\gamma \in L_+^\infty(\Omega)$, a partir do operador linear Λ_γ .

Perceba que, como Λ_γ opera entre espaços de dimensão finita, apenas um número finito de graus de liberdade da solução do problema inverso pode ser recuperado a partir do conhecimento do operador NpD. Mais precisamente, o número de graus de liberdade que podem ser recuperados é igual a $L(L-1)/2$, já que o espaço \mathbb{R}_\diamond^L tem dimensão $L-1$ e Λ_γ é simétrico, veja Somersalo, Cheney e Isaacson (ibid., Seção 4) ou Lechleiter e Rieder (2008). Uma vez que γ pertença a um espaço de dimensão infinita, isso implica que, em geral, é impossível recuperar a solução γ do problema inverso, a partir do uso apenas de Λ_γ , mesmo que esse operador seja conhecido exatamente. Sendo assim, entre todas as soluções do problema inverso, devemos escolher uma que seja mais conveniente pela imposição de algum tipo de informação *a priori* (selecionando, por exemplo, uma solução de menor norma, veja Definição A.3.6 no Apêndice A).

Ainda porque Λ_γ opera entre espaços de dimensão finita, esse operador será totalmente caracterizado se for conhecida a sua imagem num conjunto finito e suficientemente grande de vetores linearmente independentes $I^{(i)}$. Sendo assim, na prática, aplicam-se $\ell \in \mathbb{N}$ vetores de correntes elétricas $I^{(i)}$ nos eletrodos e medem-se os potenciais elétricos $U^{(i)}$ resultantes, também nos eletrodos. Com essas informações, deseja-se agora aproximar uma condutividade elétrica $\gamma \in L_+^\infty(\Omega)$ tal que

$$\Lambda_\gamma(I^{(i)}) = U^{(i)}, \quad \forall i \in \{1, \dots, \ell\}.$$

1.3.2 Derivada do Operador Direto

De maneira similar ao Modelo Contínuo, precisamos realizar o cálculo da derivada do operador direto F , aplicada em certa condutividade elétrica $\gamma \in \text{int}(D(F))$ e em certa

direção $\eta \in L^\infty(\Omega)$. Tal cálculo é útil na aplicação de métodos numéricos para a resolução do problema inverso e também na construção das matrizes Jacobianas, que representam a derivada do operador direto discretizado (veja Seção 2.2.2). O desenvolvimento desta seção é semelhante ao que foi apresentado na Seção 1.1.2, portanto omitiremos os cálculos e a demonstração do resultado final. Mais detalhes podem ser encontrados em Lechleiter e Rieder (2008).

Fixe $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira suave, L eletrodos satisfazendo as condições do CEM e $\{z_1, \dots, z_L\}$ o conjunto das impedâncias de contato. Agora fixe um conjunto linearmente independente de vetores de correntes elétricas $G = \{I^{(1)}, \dots, I^{(\ell)}\} \subset \mathbb{R}_\diamond^\ell$. Assim, para cada $i \in \{1, \dots, \ell\}$, podemos definir o operador

$$F_i : L_+^\infty(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_\diamond^L, \gamma \mapsto \Lambda_\gamma(I^{(i)}) = U^{(i)}.$$

Também podemos definir o operador

$$F_G : L_+^\infty(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \longrightarrow (\mathbb{R}_\diamond^L)^\ell, \gamma \mapsto \begin{bmatrix} F_1(\gamma) \\ \vdots \\ F_\ell(\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{(1)} \\ \vdots \\ U^{(\ell)} \end{bmatrix}.$$

Portanto, preservando a construção até aqui, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 1.7. *Seja $\gamma \in \text{int}(L_+^\infty(\Omega))$ a condutividade elétrica de Ω . Então, para cada $\eta \in L^\infty(\Omega)$, temos que*

$$F'_G(\gamma)\eta = \mathcal{W} := \begin{bmatrix} \mathcal{W}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathcal{W}^{(\ell)} \end{bmatrix},$$

onde $(\omega^{(i)}, \mathcal{W}^{(i)}) \in H^1(\Omega) \oplus \mathbb{R}_\diamond^L$ é solução de

$$\int_\Omega \gamma \nabla \omega^{(i)} \nabla v \, dx + \sum_{j=1}^L \frac{1}{z_j} \int_{E_j} (\omega^{(i)} - \mathcal{W}_j^{(i)}) (v - V_j) \, dS = - \int_\Omega \eta \nabla u^{(i)} \nabla v \, dx, \quad (1.23)$$

para todo $(v, V) \in H^1(\Omega) \oplus \mathbb{R}_\diamond^L$.

Perceba que o lado esquerdo da equação variacional (1.23) é igual a

$$B_\gamma \left((\omega^{(i)}, \mathcal{W}^{(i)}), (v, V) \right),$$

com B_γ definido em (1.21). Vamos usar esse resultado e também essa notação nas Seções 2.2.1 e 2.2.2.

Observação 1.3.1. É possível mostrar que o operador direto (1.22) é Fréchet-diferenciável. Porém, como $F'(\gamma)$ é linear e opera entre os espaços $L^\infty(\Omega)$ e $\mathcal{L}(\mathbb{R}_\diamond^L, \mathbb{R}_\diamond^L)$, sendo o primeiro de dimensão infinita e o segundo de dimensão finita, esse operador não pode ser injetivo. Lechleiter e Rieder (ibid.) mostraram que se o problema for corretamente discretizado e o número de eletrodos for suficientemente grande, então, em sua versão discretizada, $F'(\gamma)$ não só será injetivo como deve satisfazer a chamada Condição do Cone Tangencial, c.f. (A.11) no Apêndice A. Essa é uma condição utilizada para demonstrar a convergência de diferentes métodos iterativos de regularização (veja Apêndice B.2).

1.3.3 A Adjunta da Derivada

Utilizando-se um procedimento similar àquele descrito na Seção 1.1.3, provamos que, para $\sigma = (\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(\ell)}) \in (\mathbb{R}_\diamond^L)^\ell$, vale:

$$F'_G(\gamma)^* \sigma = - \sum_{i=1}^{\ell} \nabla u_\gamma^{(i)} \nabla \psi_\sigma^{(i)},$$

em que $u_\gamma^{(i)} = F_i(\gamma)$ e $\psi_\sigma^{(i)} \in H_\diamond^1(\Omega)$ é a única solução de (1.20) com $I = \sigma^{(i)}$ (veja Exercício 1.8).

1.4 Exercícios

Exerc. 1.1. Defina a relação \sim em $H^1(\Omega)$ da seguinte forma:

$$u \sim v \iff u - v = \text{constante}.$$

Mostre que \sim satisfaz as seguintes propriedades: para toda $u, v, w \in H^1(\Omega)$, vale

(i) reflexividade: $u \sim u$;

(ii) simetria: $u \sim v \implies v \sim u$;

(iii) transitividade: se $u \sim v$ e $v \sim w$, então $u \sim w$.

Isso prova que \sim é uma relação de equivalência em $H^1(\Omega)$, sendo o conjunto quociente \tilde{H} , definido na página 3, formado por todas as classes de equivalências induzidas por \sim .

Exerc. 1.2. Mostre que, em cada classe de equivalência de \tilde{H} , existe uma única função $u \in H^1(\Omega)$ satisfazendo $\int_{\partial\Omega} u \, dS = 0$.

Exerc. 1.3. Mostre que a função $u \mapsto \inf_{c \in \mathbb{R}} \|u - c\|_{H^1(\Omega)}$ (c.f. (1.6)) é uma norma em \tilde{H} . Prove ainda que, munido dessa norma, \tilde{H} é um espaço de Banach.

Exerc. 1.4. Mostre que a função $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ (c.f. (1.7)) é uma norma em \tilde{H} . Prove que essa norma é equivalente à norma dada no Exercício 1.3. Além disso, verifique que essa norma é induzida por um produto interno. (Dica: veja Somersalo, Cheney e Isaacson (1992, Lema 3.2).)

Exerc. 1.5. Sejam $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ e $g \in H_\diamond^{-1/2}(\partial\Omega)$ (c.f. (1.9)). Mostre que os funcionais $B_\gamma: \tilde{H} \times \tilde{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $F_g: \tilde{H} \longrightarrow \mathbb{R}$, em (1.4) e (1.5), estão bem definidos e são bilinear e linear respectivamente. Além disso, mostre que se \tilde{H} é munido com a norma $\|u\|_* = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ e γ é limitada inferiormente por uma constante positiva, então todas as hipóteses do Lema de Lax–Milgram (Lema 1.1.1) são satisfeitas. (Dica: para mostrar a limitação de F_g , use o Teorema do Traço.)

Exerc. 1.6. Sejam $u \in H_\diamond^1(\Omega)$ e $f = u|_{\partial\Omega}$ o traço de u . Mostre que

$$\|f\|_{L^2(\partial\Omega)} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

(Dica: defina a função $H: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $H(c) = \|f - c\|_{L^2(\partial\Omega)}^2$, onde $\mathbb{1}$ é a função constante igual a 1. Use a identidade $\|w - v\|^2 = \|w\|^2 - 2\langle w, v \rangle + \|v\|^2$ para calcular $H'(c)$. Conclua que $H'(c) = 0$ implica $c = 0$.)

Exerc. 1.7. Considere o operador Neumann-para-Dirichlet Λ_γ em (1.11).

- Mostre que Λ_γ é linear; (Dica: para mostrar que $\Lambda_\gamma(\lambda g) = \lambda \Lambda_\gamma(g)$, multiplique os dois lados da equação (1.10) pelo escalar λ . Para concluir que $\Lambda_\gamma(g + h) = \Lambda_\gamma(g) + \Lambda_\gamma(h)$, substitua g em (1.10) por h e some a equação resultante com (1.10).)
- Mostre que, visto como uma função de $L_\diamond^2(\partial\Omega)$ para $L_\diamond^2(\partial\Omega)$, o operador Λ_γ é contínuo. (Dica: sejam $u \in H_\diamond^1(\Omega)$ a única solução de (1.10) e $f = u|_{\partial\Omega}$ o traço de u . Tome $v = u$ e use $\gamma \geq c > 0$ para obter

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{c} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|f\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Tome $\bar{c} \in \mathbb{R}$ tal que $\|u - \bar{c}\|_{H^1(\Omega)} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|u - c\|_{H^1(\Omega)}$. Use a equivalência das normas (1.6) e (1.7) em \tilde{H} , juntamente com o Teorema do Traço, para obter uma constante \hat{c} que satisfaça

$$\|\bar{f}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \hat{c} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

onde $\bar{f} = (u - \bar{c})|_{\partial\Omega} = f - \bar{c}$. Use o Exercício 1.6 para concluir que $\|\Lambda_\gamma(g)\| \leq \frac{\hat{c}^2}{c} \|g\|$.

Exerc. 1.8. Sejam $\gamma \in \text{int}(L_+^\infty(\Omega))$, $\sigma = (\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(\ell)}) \in (\mathbb{R}_\diamond^L)^\ell$ e $u_\gamma^{(i)} = F_i(\gamma)$. Seja $\psi_\sigma^{(i)} \in H_\diamond^1(\Omega)$ a única solução de (1.20) com $I = \sigma^{(i)}$. Mostre que

$$F'_G(\gamma)^* \sigma = - \sum_{i=1}^{\ell} \nabla u_\gamma^{(i)} \nabla \psi_\sigma^{(i)}.$$

2

Implementação Computacional do Problema Direto

Neste capítulo, apresentaremos como determinamos computacionalmente as soluções das equações variacionais de cada modelo estudado no capítulo anterior, utilizando o método dos elementos finitos. Para mais detalhes sobre esse método, consulte o livro de Reddy (2018). Geralmente não é possível obtermos soluções analíticas de (1.3) ou de (1.20), consequentemente usaremos uma aproximação computacional do operador direto. Além disso, demonstraremos como aproximamos a derivada dos operadores diretos por meio de suas matrizes Jacobianas correspondentes.

Na determinação da solução computacional, utilizamos uma malha triangular em Ω e, com o auxílio dos triângulos e seus vértices, definimos bases para subespaços de dimensão finita. Em seguida, utilizamos essas bases para definir as funções de interesse. Dessa forma, podemos substituir nossas equações variacionais por problemas do tipo

$$Ax = b,$$

para matriz A e vetores x e b apropriados para cada subespaço e modelo abordado.

2.1 Discretização do Modelo Contínuo

Tome $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com condutividade elétrica γ satisfazendo as condições do Modelo Contínuo, bem como g , a corrente elétrica aplicada em $\partial\Omega$, u , o potencial elétrico resultante em Ω e $f = u|_{\partial\Omega}$ no sentido do Teorema do Traço. Essas funções serão fixadas nesta seção. A grande vantagem dos elementos finitos é a redução de um problema de dimensão infinita para dimensão finita, necessitando simplificar os espaços em que nossas funções se encontram.

Assim consideramos uma triangulação $\mathcal{T} := \{T_1, \dots, T_K\}$ do conjunto Ω . Suponha que existem K triângulos, com N vértices, sendo M deles localizados em $\partial\Omega$. Os vértices são denotados por P_1, \dots, P_N , e vamos enumerá-los de maneira que os pontos da fronteira sejam os primeiros. Veja um exemplo na Figura 2.1.

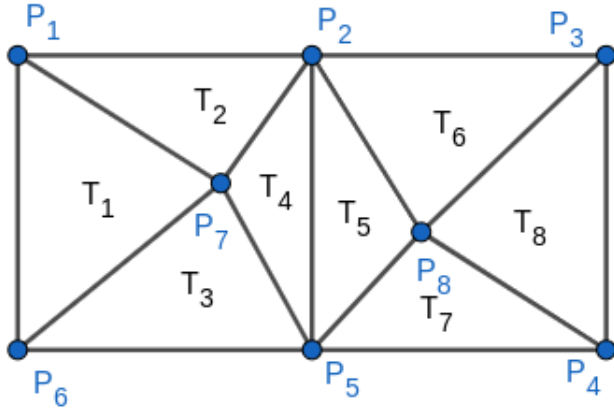


Figura 2.1: Triangulação de um conjunto Ω , em forma retangular, com $N = 8$, $M = 6$ e $K = 8$.

Com essas quantidades estabelecidas, podemos, então, construir as bases para as funções em questão. Para cada $i \in \{1, \dots, K\}$, tome $\mathcal{X}_{T_i} : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ a função indicadora do i -ésimo triângulo. Suponhamos que $\gamma \in \mathcal{V}_1 := \text{span} \{\mathcal{X}_{T_1}, \dots, \mathcal{X}_{T_K}\} \subset L^\infty(\Omega)$. Então existe um vetor $\tilde{\gamma} = (\gamma_j) \in \mathbb{R}^K$ tal que

$$\gamma = \sum_{j=1}^K \gamma_j \mathcal{X}_{T_j}.$$

Agora, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, tome $\Upsilon_i : \overline{\Omega} \rightarrow [0, 1]$ a *função barraca*, definida por

$$\Upsilon_i(P_j) := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$$

e afim em cada triângulo. Para melhor entendimento, fixe um triângulo T_k com vértices P_{k_1}, P_{k_2} e P_{k_3} . Note que os pontos $\Upsilon_j(P_{k_1})$, $\Upsilon_j(P_{k_2})$ e $\Upsilon_j(P_{k_3})$ definem um único plano ρ no \mathbb{R}^3 e também são vértices de um triângulo T'_k em ρ . Dessa forma, consideramos T'_k o gráfico de Υ_j aplicada em T_k . Veja um exemplo na Figura 2.2.

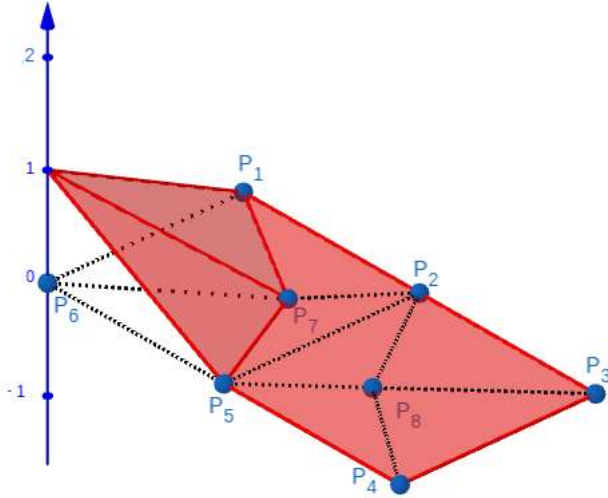


Figura 2.2: Função Υ_6 aplicada em Ω da Figura 2.1.

Suponha que $u \in \mathcal{V}_2 := \text{span} \{\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_N\} \subset H^1(\Omega)$, então existe um vetor $\tilde{u} = (u_j) \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$u = \sum_{j=1}^N u_j \Upsilon_j.$$

Em particular, note que $u(P_j) = u_j$, para cada $j \in \{1, \dots, N\}$.

Denote a restrição à fronteira das funções barracas por $\Psi_i = \Upsilon_i|_{\partial\Omega}$, para cada $i \in \{1, \dots, M\}$. A Figura 2.3 exemplifica seu comportamento em $\partial\Omega$. Com isso, suponha que $g, f \in \mathcal{V}_3 := \text{span} \{\Psi_1, \dots, \Psi_M\}$. Portanto existem vetores $\tilde{g} = (g_j)$, $\tilde{f} = (f_j) \in \mathbb{R}^M$ tais que

$$g = \sum_{j=1}^M g_j \Psi_j \quad \text{e} \quad f = \sum_{j=1}^M f_j \Psi_j.$$

Lembre que f_j se refere a j -ésima coordenada do vetor \tilde{f} , e não ao j -ésimo potencial medido, que foi denotado por $f^{(j)}$ nas seções anteriores. O mesmo vale para g_j e u_j . Assim é fácil perceber que $f_j = u_j$, para cada $j \in \{1, \dots, M\}$.

- se os pontos P_p e P_i não são ambos vértices do triângulo T_j , então $a_{pi} = 0$. Portanto A é esparsa, ou seja, possui um número considerável de coordenadas nulas. Similarmente se os pontos P_p e P_j não são pontos consecutivos na fronteira, $\Psi_p \cdot \Psi_j = 0$;
- cada $\nabla \Upsilon_p$ é constante em cada T_j , portanto a integral que aparece em (2.2) reduz-se a uma constante multiplicada por $|T_j|$.

Observe que (2.1) será satisfeita apenas para as funções testes $v \in H^1(\Omega)$, em particular, temos que \mathcal{V}_2 é um subespaço de $H^1(\Omega)$. Assim, fixando $p \in \{1, \dots, N\}$, para o lado esquerdo da equação (2.1), temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \gamma \nabla u \nabla \Upsilon_p \, dx &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^K \gamma_j \chi_{T_j} \right) \nabla \left(\sum_{i=1}^N u_i \Upsilon_i \right) \nabla \Upsilon_p \, dx \\
 &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^K \left(\gamma_j \chi_{T_j} \sum_{i=1}^N u_i \nabla \Upsilon_i \right) \nabla \Upsilon_p \, dx \\
 &= \sum_{j=1}^K \gamma_j \int_{\Omega} \chi_{T_j} \sum_{i=1}^N u_i \nabla \Upsilon_i \nabla \Upsilon_p \, dx \\
 &= \sum_{j=1}^K \gamma_j \sum_{i=1}^N u_i \int_{T_j} \nabla \Upsilon_i \nabla \Upsilon_p \, dx \\
 &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^K \gamma_j \int_{T_j} \nabla \Upsilon_i \nabla \Upsilon_p \, dx \right) u_i \\
 &= \sum_{i=1}^N a_{pi} u_i \\
 &= a_p \cdot \tilde{u},
 \end{aligned}$$

onde a_p é a p -ésima linha de A . Agora, ainda com p fixado, para o lado direito da equação (2.1), temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} g \Upsilon_p \, dS &= \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{j=1}^M g_j \Psi_j \right) \Upsilon_p \, dS \\
 &= \sum_{j=1}^M g_j \int_{\partial\Omega} \Psi_j \Upsilon_p \, dS = b_p,
 \end{aligned}$$

pois Υ_p restrito à fronteira de Ω é igual a Ψ_p por definição. Logo

$$a_p \cdot \tilde{u} = b_p.$$

Como isso vale para um p arbitrário, temos que

$$A\tilde{u} = b. \quad (2.3)$$

Repare que obtemos um sistema linear $N \times N$ que possui infinitas soluções, já que não podemos garantir que cada Υ_p tenha integral nula na fronteira (veja Proposição 1.1). Dessa forma, as soluções de (2.3) se diferenciam duas a duas apenas por uma constante. Ao longo deste trabalho, nos depararemos algumas vezes com esse problema e aplicaremos o seguinte método para recuperar a unicidade: Tome $\tilde{w} = (w_j) \in \mathbb{R}^N$ uma solução qualquer do sistema (2.3), assim obtemos

$$w = \sum_{i=1}^N w_i \Upsilon_i \in \mathcal{V}_2$$

solução de (2.1). Em particular, $w + c$ também é solução de (2.1), para qualquer constante c . Portanto, como estamos interessados em encontrar u de modo que $f := u|_{\partial\Omega}$ possua integral nula, tomamos a solução particular

$$u = w - \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} w \, dS.$$

Dessa forma,

$$F(\gamma)g = \Lambda_\gamma(g) = f = \sum_{j=1}^M f_j \Psi_j \in \mathcal{V}_3,$$

com F o operador direto do Modelo Contínuo. Assim podemos discretizar o operador direto pelo operador \tilde{F} , onde $\tilde{F}(\gamma)$ é definido por

$$\tilde{F}(\gamma) : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^M, \quad \tilde{g} \mapsto \tilde{f}.$$

Note que $\tilde{F}(\gamma)\tilde{g}$ é o vetor de decomposição de $F(\gamma)g$ na base de \mathcal{V}_3 , como sugere a notação com o til introduzida anteriormente.

2.1.2 Discretização da Derivada do Operador Direto

Esta subseção é destinada a mesclar os resultados deste capítulo até aqui apresentados com os resultados vistos em Seção 1.1.2. Então, de maneira similar à seção anterior, vamos discretizar a equação variacional que modela o cálculo da derivada direcional do operador direto do Modelo Contínuo.

Fixe $G = \{g^{(1)}, \dots, g^{(\ell)}\} \subset \mathcal{V}_3$ um conjunto linearmente independente de correntes elétricas e também $\eta \in \mathcal{V}_1$. Pela Proposição 1.3, temos que

$$F'_G(\gamma)\eta = \begin{bmatrix} F'_1(\gamma)\eta \\ \vdots \\ F'_\ell(\gamma)\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^{(1)}|_{\partial\Omega} \\ \vdots \\ \omega^{(\ell)}|_{\partial\Omega} \end{bmatrix},$$

onde $F'_i(\gamma)\eta = \omega^{(i)}|_{\partial\Omega}$ e $\omega^{(i)}$ é solução de

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla \omega^{(i)} \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} \eta \nabla u^{(i)} \nabla v \, dx, \quad \forall v \in H_{\diamond}^1(\Omega), \quad (2.4)$$

onde

$$u = u^{(i)} = \sum_{n=1}^N u_n^{(i)} \gamma_n$$

é solução de (2.1) para $g = g^{(i)}$. Agora, para facilitar a notação, fixemos a matriz

$$W^{(i)} = \left[w_{pj}^{(i)} \right] = \left[- \sum_{n=1}^N u_n^{(i)} \int_{T_j} \nabla \gamma_p \nabla \gamma_n \, dx \right] \in \mathbb{R}^{N \times K}. \quad (2.5)$$

Fixemos também o vetor $\tilde{\eta} = (\eta_j) \in \mathbb{R}^K$ tal que

$$\eta = \sum_{j=1}^K \eta_j \mathcal{X}_{T_j}.$$

Perceba que podemos discretizar a equação (2.4) de maneira similar ao que foi feito na subseção anterior. Aqui obtemos

$$A \tilde{\omega}^{(i)} = b^{(i)}, \quad (2.6)$$

onde $b^{(i)} := W^{(i)} \tilde{\eta}$ e $\tilde{\omega}^{(i)} = (\omega_1^{(i)}, \dots, \omega_N^{(i)}) \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\omega^{(i)} = \sum_{j=1}^N \omega_j^{(i)} \gamma_j \in \mathcal{V}_2,$$

e A é a matriz definida em (2.2). Assim, similarmente a subseção anterior, obtemos um sistema linear de infinitas soluções que se diferenciam duas a duas apenas por uma constante. Dessa forma, repetindo o método aplicado, tomamos uma solução qualquer de (2.6) e somamos uma constante apropriada de forma que $\omega^{(i)}|_{\partial\omega}$ possua integral nula e, portanto, aproximação da solução de (2.4) no subespaço \mathcal{V}_2 . Logo basta repetir esse processo para cada i , obtendo o valor de

$$F'_G(\gamma)\eta = \omega|_{\partial\Omega} = \begin{bmatrix} \omega^{(1)}|_{\partial\Omega} \\ \vdots \\ \omega^{(\ell)}|_{\partial\Omega} \end{bmatrix} \in (\mathcal{V}_3)^\ell.$$

Cálculo da Jacobiana do Operador Direto

Preservando a construção feita até aqui, podemos discretizar cada operador F'_i para obter \tilde{F}'_i , onde $\tilde{F}'_i(\gamma)$ é definido por

$$\tilde{F}'_i(\gamma) : \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^M, \tilde{\eta} \mapsto \begin{bmatrix} \omega_1^{(i)} \\ \vdots \\ \omega_M^{(i)} \end{bmatrix}.$$

Desta maneira, similar à seção anterior, $\tilde{F}'_i(\gamma)\tilde{\eta}$ é o vetor cujas coordenadas são os coeficientes da expansão de $F'_i(\gamma)\eta$ na base de \mathcal{V}_3 . Agora seja $\{e_1, \dots, e_K\}$ a base canônica de \mathbb{R}^K . Então perceba que podemos tomar cada operador \tilde{F}'_i como

$$\tilde{F}'_i : \text{int}(L_+^\infty(\Omega)) \subset L^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^{M \times K}, \gamma \mapsto [\tilde{F}'_i(\gamma)e_1 \quad \dots \quad \tilde{F}'_i(\gamma)e_K],$$

onde cada $\tilde{F}'_i(\gamma)e_j$ é calculado como vimos acima.

Ainda mais, podemos discretizar o operador F'_G para obter \tilde{F}'_G dado por

$$\tilde{F}'_G(\gamma)\tilde{\eta} = \begin{bmatrix} \tilde{F}'_1(\gamma)\tilde{\eta} \\ \vdots \\ \tilde{F}'_\ell(\gamma)\tilde{\eta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M \cdot \ell}.$$

Logo podemos considerar $\tilde{F}'_G(\gamma)$ como a matriz Jacobiana do operador F_G discretizado e aplicado em γ , ou seja,

$$\tilde{F}'_G(\gamma) = \begin{bmatrix} \tilde{F}'_1(\gamma)e_1 & \dots & \tilde{F}'_1(\gamma)e_K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{F}'_\ell(\gamma)e_1 & \dots & \tilde{F}'_\ell(\gamma)e_K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(M \cdot \ell) \times K}$$

Assim, para calcular um número elevado de derivadas direcionais do operador direto aplicado em uma mesma condutividade elétrica γ , podemos calcular inicialmente a sua Jacobiana. Após basta multiplicá-la pela decomposição vetorial de cada direção.

Porém perceba que o custo computacional do cálculo da Jacobiana é muito grande. Note que é necessário resolver $K + 1$ equações variacionais para cada bloco

$$[\tilde{F}'_i(\gamma)e_1 \quad \dots \quad \tilde{F}'_i(\gamma)e_K] \in \mathbb{R}^{M \times K},$$

totalizando $\ell(K + 1)$ equações variacionais. De fato, para o i -ésimo bloco, primeiro resolvemos (2.1) e obtemos $u = u^{(i)}$. Depois, para cada $\tilde{F}'_i(\gamma)e_j$, resolvemos (2.4) para $\eta = \mathcal{X}_{T_j}$ obtendo $\omega^{(i)}$ e, consequentemente, o vetor de decomposição de $\omega^{(i)}|_{\partial\Omega}$ na base de \mathcal{V}_3 . Na Seção 2.2.2 discutiremos como é possível reduzir o custo computacional para a determinação da matriz Jacobiana no CEM.

2.2 Discretização do CEM

Nesta seção, será apresentado como discretizamos a equação variacional, que modela o CEM e também a equação variacional que modela o cálculo da derivada direcional do operador direto do CEM. O desenvolvimento será semelhante ao que foi apresentado em Seção 2.1, portanto omitiremos boa parte dos cálculos. Será mantida a construção dos espaços \mathcal{V}_1 , \mathcal{V}_2 e \mathcal{V}_3 , assim como a decomposição de nossas funções de interesse nas respectivas bases.

2.2.1 Discretização da Equação Variacional

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira suave e condutividade elétrica $\gamma \in L_+^\infty(\Omega)$. Fixe L eletrodos satisfazendo as condições do CEM e seja $\{z_1, \dots, z_L\}$ o conjunto das impedâncias de contato. Veja um exemplo na Figura 3.16, onde $\Omega = B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < 1\}$ e $L = 8$, estando os eletrodos igualmente espaçados e cobrindo 50% da fronteira de Ω .

Agora fixe $I \in \mathbb{R}_\diamond^L$ um vetor de corrente elétrica e suponha que sejam satisfeitas as condições do CEM. Lembre que, segundo a Proposição 1.4, existe uma única solução $(u, U) \in H^1(\Omega) \oplus \mathbb{R}_\diamond^L$ de

$$B_\gamma((u, U), (v, V)) = \sum_{i=1}^L I_i V_i, \quad \forall (v, V) \in H^1(\Omega) \oplus \mathbb{R}_\diamond^L, \quad (2.7)$$

onde B_γ é o operador definido em (1.21).

Prosseguiremos com a discretização da equação variacional (2.7). Para mais detalhes sobre os métodos que serão implementados, consulte Polydorides e Lionheart (2002).

Fixemos as matrizes

$$A^{(1)} = [a_{pn}^{(1)}] = \left[\left(\sum_{j=1}^K \gamma_j \int_{T_j} \nabla \gamma_p \nabla \gamma_n \, dx \right) + \left(\sum_{j=1}^L \frac{1}{z_j} \int_{E_j} \gamma_p \gamma_n \, dS \right) \right] \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$A^{(2)} = [a_{pj}^{(2)}] = \left[\frac{-1}{z_j} \int_{E_j} \gamma_p \, dS \right] \in \mathbb{R}^{N \times L},$$

$$A^{(3)} = [a_{pn}^{(3)}] = \left[\frac{-1}{z_p} \int_{E_p} \gamma_n \, dS \right] \in \mathbb{R}^{L \times N},$$

$$A^{(4)} = [a_{pk}^{(4)}] = \left[\frac{1}{z_p} |E_p| \right] \in \mathbb{R}^{L \times L}$$

e

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} \\ A^{(3)} & A^{(4)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+L) \times (N+L)}. \quad (2.8)$$

Denote por $a_p^{(i)}$ a p -ésima linha de $A^{(i)}$. Fixemos também os vetores

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ U \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{I} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ I \end{bmatrix}$$

em $\mathbb{R}^{(N+L)}$.

Agora podemos discretizar de maneira similar ao que foi feito em Seção 2.1.1. Para cada $p \in \{1, \dots, N\}$, tome $v = \gamma_p$ e $V = \vec{0}$. Assim obtemos

$$B_\gamma((u, U), (v, V)) = a_p^{(1)} \cdot \tilde{u} + a_p^{(2)} \cdot U$$

e

$$\sum_{i=1}^L I_i V_i = 0,$$

logo, substituindo em (2.7), obtemos

$$a_p^{(1)} \cdot \tilde{u} + a_p^{(2)} \cdot U = 0.$$

Como isso vale para um p arbitrário, obtemos

$$A^{(1)}\tilde{u} + A^{(2)}U = \vec{0}.$$

Similarmente, para cada $p \in \{1, \dots, L\}$, tome $v = 0$ e $V = e_p$, onde e_p é o p -ésimo elemento da base canônica de \mathbb{R}^L . Assim obtemos

$$B_\gamma((u, U), (v, V)) = a_p^{(3)} \cdot \tilde{u} + a_p^{(4)} \cdot U$$

e

$$\sum_{i=1}^L I_i V_i = I_p,$$

logo, substituindo em (2.7), obtemos

$$a_p^{(3)} \cdot \tilde{u} + a_p^{(4)} \cdot U = I_p.$$

Como isso vale para um p arbitrário, obtemos

$$A^{(3)}\tilde{u} + A^{(4)}U = I.$$

Portanto concluímos que

$$A\hat{u} = \hat{I}. \tag{2.9}$$

Assim obtemos um sistema linear $(N + L) \times (N + L)$ com infinitas soluções que se diferenciam duas a duas apenas por uma constante. Para obter a solução de nosso interesse, basta determinar uma solução particular \hat{u} de (2.9), e definir a constante $s := \sum_{i=1}^L U_i$. Agora subtraindo-se s/L de \hat{u} , obtemos um novo vetor \hat{u} tal que $\tilde{u} \in \mathcal{V}_2$ e $U \in \mathbb{R}_\diamond^L$. Dessa forma,

$$F(\gamma)I = \Lambda_\gamma(I) = U,$$

com F sendo o operador direto do CEM.

2.2.2 Discretização da Derivada do Operador Direto

Esta subseção é destinada a mesclar os resultados obtidos neste capítulo com os resultados vistos em Seção 1.3.2. Então, de maneira similar à seção anterior, vamos discretizar a equação variacional que modela o cálculo da derivada direcional do operador direto do CEM.

Fixe $G = \{I^{(1)}, \dots, I^{(\ell)}\} \subset \mathbb{R}^L$ um conjunto linearmente independente de vetores de correntes elétricas e também $\eta \in \mathcal{V}_1$. Pela Proposição 1.7, temos que

$$F'_G(\gamma)\eta = \begin{bmatrix} F'_1(\gamma)\eta \\ \vdots \\ F'_\ell(\gamma)\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathcal{W}^{(\ell)} \end{bmatrix} =: \mathcal{W},$$

onde $(\omega^{(i)}, \mathcal{W}^{(i)}) \in H^1(\Omega) \oplus \mathbb{R}_\diamond^L$ é solução de

$$B_\gamma \left((\omega^{(i)}, \mathcal{W}^{(i)}), (v, V) \right) = - \int_\Omega \eta \nabla u^{(i)} \cdot \nabla v \, dx, \quad (2.10)$$

com $(u^{(i)}, U^{(i)})$ solução de (2.7) para $(u, U) = (u^{(i)}, U^{(i)})$ e $I = I^{(i)}$.

Agora a discretização da equação (2.10) é obtida de maneira similar ao apresentado anteriormente, logo

$$A\hat{\omega}^{(i)} = b^{(i)},$$

onde $b^{(i)} := W^{(i)}\tilde{\eta}$.

Observação 2.2.1. *Note que*

- *A é a matriz definida em (2.8), já que o lado esquerdo de (2.10) é equivalente ao lado esquerdo de (2.7);*
- *$W^{(i)}$ é a matriz definida em (2.5), já que o lado direito de (2.10) é equivalente ao lado direito de (2.4);*
- *$\hat{\omega}^{(i)}$ é o vetor definido por*

$$\hat{\omega}^{(i)} := \begin{bmatrix} \tilde{\omega}^{(i)} \\ \mathcal{W}^{(i)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N+L}.$$

Assim obtemos um sistema linear $(N+L) \times (N+L)$ com infinitas soluções que se diferenciam duas a duas apenas por uma constante. Dessa forma, repetindo o procedimento aplicado na Seção 2.2.1, obtemos $\omega^{(i)} \in \mathcal{V}_2$ e $\mathcal{W}^{(i)} \in \mathbb{R}_\diamond^L$ onde

$$F'_i(\gamma)\eta = \mathcal{W}^{(i)}. \quad (2.11)$$

Portanto, basta repetir este processo para cada i que, obtemos o valor de

$$F'_G(\gamma)\eta = \mathcal{W}.$$

Cálculo da Jacobiana do Operador Direto

Preservando a construção feita até aqui, perceba que podemos repetir o método aplicado em Seção 2.1.2 e calcular a matriz Jacobiana do operador direto. Portanto, para cada operador F'_i , tomamos o operador \tilde{F}'_i , onde $\tilde{F}'_i(\gamma)$ é definido por

$$\tilde{F}'_i(\gamma) : \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^L, \tilde{\eta} \mapsto \mathcal{W}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \mathcal{W}_L^{(i)} \end{bmatrix}.$$

Perceba que, disto e de (2.11), obtemos $\tilde{F}'_i(\gamma)\tilde{\eta} = F'_i(\gamma)\eta$. Assim podemos tomar cada operador \tilde{F}'_i como

$$\tilde{F}'_i : \text{int}(L_+^\infty(\Omega)) \subset L^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^{L \times K}, \gamma \mapsto \begin{bmatrix} \tilde{F}'_i(\gamma)e_1 & \dots & \tilde{F}'_i(\gamma)e_K \end{bmatrix},$$

onde e_j é o j -ésimo elemento da base canônica de \mathbb{R}^K e cada $\tilde{F}'_i(\gamma)e_j$ é calculado como vimos acima. Note também que $\tilde{F}'_i(\gamma)e_j = F'_i(\gamma)\mathcal{X}_{T_j}$.

Ainda mais, podemos discretizar o operador F'_G obtendo \tilde{F}'_G dado por

$$\tilde{F}'_G(\gamma)\tilde{\eta} = \begin{bmatrix} \tilde{F}'_1(\gamma)\tilde{\eta} \\ \vdots \\ \tilde{F}'_\ell(\gamma)\tilde{\eta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{L \cdot \ell}.$$

Logo podemos tomar \tilde{F}'_G aplicado em γ como a matriz Jacobiana do operador F_G discretizada e aplicada em γ , ou seja,

$$\tilde{F}'_G(\gamma) = \begin{bmatrix} \tilde{F}'_1(\gamma)e_1 & \dots & \tilde{F}'_1(\gamma)e_K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{F}'_\ell(\gamma)e_1 & \dots & \tilde{F}'_\ell(\gamma)e_K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(L \cdot \ell) \times K}.$$

Perceba que o custo computacional para obtermos a matriz Jacobiana é o mesmo do Modelo Contínuo, ou seja, é necessário resolver $\ell(K + 1)$ equações variacionais. Geralmente esse número é muito alto.

Pensando nisso, faz-se necessário um método mais barato para o cálculo da matriz Jacobiana. Veremos o método apresentado em Polydorides e Lionheart (2002).

Antes, lembre que, para calcular

$$F'_i(\gamma)\mathcal{X}_{T_j} = \tilde{F}'_i(\gamma)e_j =: \mathcal{W}^{(i,j)} \in \mathbb{R}^L,$$

precisamos primeiramente obter $u^{(i)}$ onde

$$B_\gamma \left(\left(u^{(i)}, U^{(i)} \right), (v, V) \right) = I^{(i)} \cdot V, \quad \forall (v, V) \in H, \quad (2.12)$$

com $H = H^1(\Omega) \oplus \mathbb{R}_\diamond^L$ e $I^{(i)} \cdot V = \sum_{j=1}^L I_j^{(i)} V_j$, o produto interno usual do \mathbb{R}^L . Após obtemos $\mathcal{W}^{(i,j)}$ de $(\omega^{(i,j)}, \mathcal{W}^{(i,j)})$, onde

$$B_\gamma \left((\omega^{(i,j)}, \mathcal{W}^{(i,j)}) , (v, V) \right) = - \int_{T_j} \nabla u^{(i)} \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall (v, V) \in H. \quad (2.13)$$

Com isso, seja d_j o j -ésimo elemento da base canônica de \mathbb{R}^L . Vamos denotar por $(y^{(j)}, Y^{(j)}) \in H$ a solução de (2.12) para $I^{(i)} = d_j$, ou seja,

$$B_\gamma \left((y^{(j)}, Y^{(j)}) , (v, V) \right) = d_j \cdot V, \quad \forall (v, V) \in H. \quad (2.14)$$

Logo calculemos $F'_i(\gamma) \mathcal{X}_{T_j} = \mathcal{W}^{(i,j)}$, fazendo:

$$\begin{aligned} F'_i(\gamma) \mathcal{X}_{T_j} &= \mathcal{W}^{(i,j)} = (\mathcal{W}_1^{(i,j)}, \dots, \mathcal{W}_L^{(i,j)}) \\ &= (d_1 \cdot \mathcal{W}^{(i,j)}, \dots, d_L \cdot \mathcal{W}^{(i,j)}) \\ &\stackrel{(2.14)}{=} (B_\gamma \left((y^{(1)}, Y^{(1)}) , (\omega^{(i,j)}, \mathcal{W}^{(i,j)}) \right), \dots, B_\gamma \left((y^{(L)}, Y^{(L)}) , (\omega^{(i,j)}, \mathcal{W}^{(i,j)}) \right)) \\ &\stackrel{(*)}{=} (B_\gamma \left((\omega^{(i,j)}, \mathcal{W}^{(i,j)}) , (y^{(1)}, Y^{(1)}) \right), \dots, B_\gamma \left((\omega^{(i,j)}, \mathcal{W}^{(i,j)}) , (y^{(L)}, Y^{(L)}) \right)) \\ &\stackrel{(2.13)}{=} - \left(\int_{T_j} \nabla u^{(i)} \cdot \nabla y^{(1)} \, dx, \dots, \int_{T_j} \nabla u^{(i)} \cdot \nabla y^{(L)} \, dx \right), \end{aligned}$$

onde a igualdade $(*)$ é dada pela simetria do operador B_γ . Portanto, basta obtermos cada $u^{(i)}$ em (2.12) e cada $y^{(j)}$ em (2.14) para obter todos os dados necessários para os cálculos de cada entrada da matriz. Perceba que o custo computacional desse método é muito menor, pois precisamos resolver apenas $\ell + L$ equações variacionais.

3

Testes de Consistência

Nos Capítulos 1 e 2, apresentamos a discretização das equações variacionais do Modelo Contínuo e CEM para a EIT, bem como a discretização das equações usadas para computar suas derivadas. Neste capítulo, será abordada a implementação numérica desses modelos pelo método de elementos finitos. Além disso, serão realizados testes de consistência, a fim de verificar se as soluções encontradas satisfazem as condições impostas pelo modelo.

A implementação numérica do método de elementos finitos para duas ou mais dimensões demanda uma série de rotinas numéricas que costumam ser dispendiosas em tempo. Portanto, é razoável empregar bibliotecas de elementos finitos para focar apenas na formulação variacional e nos principais aspectos da modelagem. Assim, usaremos a linguagem de programação *Python* com o auxílio da biblioteca *FEniCS*. Os códigos desta seção empregam a biblioteca FEIT (FEniCS-EIT), desenvolvida pelos dois primeiros autores desse livro, cuja documentação, em conjunto aos códigos, está disponibilizada em um repositório do *GitHub*¹.

3.1 Testes Numéricos no Modelo Contínuo

Esta seção destina-se aos testes numéricos do problema direto da EIT do Modelo Contínuo, utilizando a biblioteca FEIT. Será analisada a diferença entre a solução exata u e a solução computada u^* , bem como a diferença entre as restrições à fronteira, i.e. as voltagens resultantes, f e f^* , respectivamente. Nesta seção, denotaremos com o sobrescrito $*$ as soluções numéricas.

Seja $\Omega = B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < 1\}$ com condutividade elétrica γ constante e igual a 1. Lembre-se que as equações diferenciais parciais que descrevem o Modelo Contínuo são

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 \text{ em } \Omega \quad (3.1)$$

e

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} = g \text{ em } \partial\Omega. \quad (3.2)$$

Então, de (3.1), obtemos

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0. \quad (3.3)$$

Suponha que, para uma determinada corrente elétrica g , aplicada em $\partial\Omega$, o potencial elétrico gerado u seja dado por

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Tal potencial satisfaz (3.3). Note que, pelo Teorema do Traço, obtemos

$$\begin{aligned} f &= u|_{\partial\Omega}: \partial\Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 - y^2. \end{aligned}$$

A Figura 3.1 ilustra o potencial elétrico u e a função f definidos acima. Ainda mais, por (3.2), obtemos

$$g(x, y) = \eta(x, y) \cdot \nabla u(x, y) = (x, y) \cdot (2x, -2y) = 2(x^2 - y^2),$$

para cada $(x, y) \in \partial\Omega$. Note que $g = 2f$. A Figura 3.2 ilustra a corrente elétrica g definida acima.

Considere o operador direto F do Modelo Contínuo da EIT. Queremos que f seja a imagem do operador NpD (1.11) em g , i.e. $F(\gamma)g = f$. Observe que f e g devem possuir integral nula. Seja φ definida por

$$\varphi: [0, 2\pi) \longrightarrow \partial\Omega, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

uma parametrização de $\partial\Omega$. Então, de fato, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} f \, dS &= \int_0^{2\pi} f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t) \cdot 1 \, dt \\ &= \left[\cos t \sin t \right]_{t=0}^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

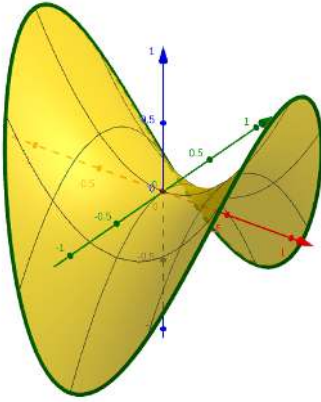


Figura 3.1: Potenciais elétricos u na cor amarela e f na cor verde.

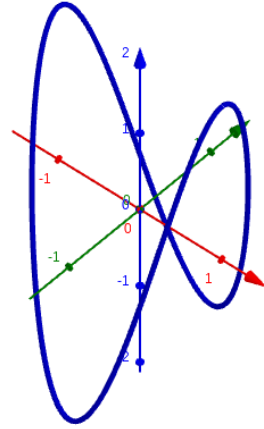


Figura 3.2: Corrente elétrica g .

Logo,

$$\int_{\partial\Omega} g \, dS = 2 \int_{\partial\Omega} f \, dS = 0.$$

Portanto, temos que de fato $F(\gamma)g = f$ é a solução exata do problema direto da EIT para o Modelo Contínuo.

A seguir, será utilizado o método de elementos finitos, apresentado no capítulo anterior, para obter a solução numérica de $F(\gamma)g = f^*$, a qual será comparada com a solução exata f .

A solução numérica u^* é calculada a partir da triangulação \mathcal{T} de Ω , definida na Figura 3.3, considerando a condutividade elétrica γ constante e igual a 1, bem como a mesma corrente elétrica g apresentada anteriormente. Espera-se, portanto, que u^* seja uma aproximação de u . Além disso, espera-se que f^* seja uma aproximação de f .

Ao aplicar o algoritmo para solucionar o problema direto do sistema montado acima, obteve-se a solução numérica u^* , apresentada na Figura 3.4. A partir dessa solução, também foi possível obter f^* , cujo gráfico da composição com φ é ilustrado na Figura 3.5. Todos os testes de consistência serão realizados empregando u^* .

3.1.1 Testes de Consistência

Esta seção tem como objetivo verificar se a solução numérica u^* , veja Figura 3.4, satisfaz as condições impostas pelo Modelo Contínuo, bem como sua proximidade com a solução exata u . Para isso, serão realizados testes de consistência sobre o sistema definido anteriormente, a fim de avaliar a precisão da solução obtida.

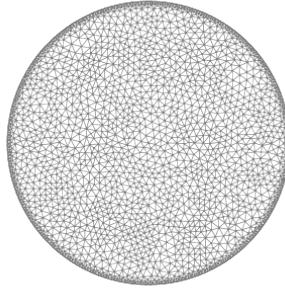


Figura 3.3: Triangulação \mathcal{T} de Ω , com $N = 2666$, $M = 700$ e $K = 4630$.

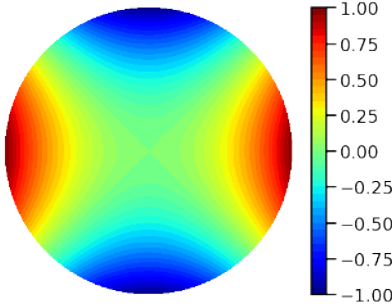


Figura 3.4: Potencial elétrico computado u^* .

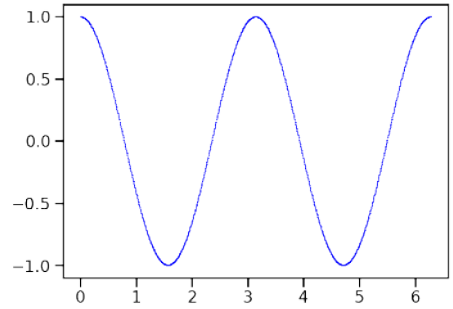


Figura 3.5: Potencial elétrico computado na fronteira f^* .

Primeiramente, podemos verificar se a condição de divergência nula, i.e. (3.1), é satisfeita para $u = u^*$. A princípio, a solução computada u^* não possui regularidade para o cálculo do divergente. A partir da biblioteca de elementos finitos, podemos interpolar u^* em uma base de regularidade maior a fim de calcular o divergente e verificar se a condição é satisfeita. A Figura 3.6 ilustra o resultado obtido com o algoritmo interpolando em uma base de regularidade superior. Concluimos que de fato o divergente do fluxo elétrico obtido é praticamente nulo. Também investigamos se $u \approx u^*$ na Figura 3.7, onde vemos que a diferença entre $u - u^*$ é próxima a zero, como esperado.

Conforme a seção anterior, espera-se que $f^* \approx f$, ou equivalentemente, $f - f^* \approx 0$. Analogamente, se espera o mesmo comportamento para a corrente elétrica,

$$g^* := \gamma \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \approx g,$$

ou equivalentemente, $g - g^* \approx 0$. A Figura 3.8 ilustra o gráfico de $(f - f^*) \circ \varphi$, e a

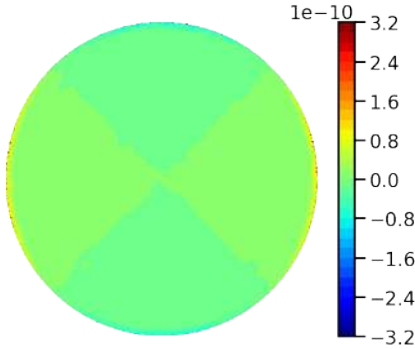


Figura 3.6: Gráfico de $\text{div}(\gamma \cdot \nabla u^*)$ obtido em Ω .

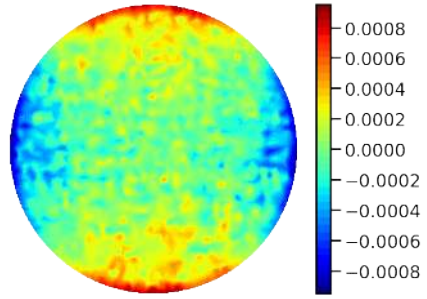


Figura 3.7: Gráfico de $u - u^*$.

Figura 3.9 ilustra o gráfico de $(g - g^*) \circ \varphi$. Em ambos os casos, a diferença entre a solução exata e a computada está próxima de zero.

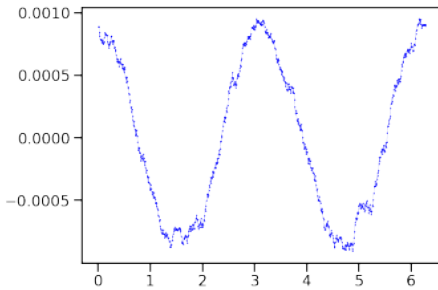


Figura 3.8: Diferença entre f e f^* .

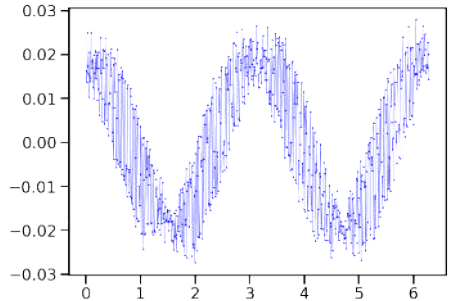
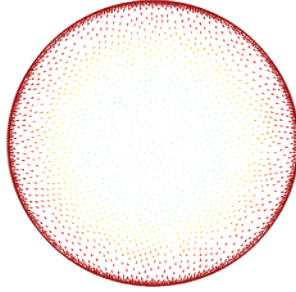


Figura 3.9: Diferença entre g e g^* .

Fisicamente, temos que $-\gamma(x, y)\nabla u(x, y)$ representa a movimentação dos elétrons no interior do conjunto Ω . Para ilustrar esse fenômeno, plotamos na Figura 3.10 o fluxo elétrico, dado por

$$-\gamma(x, y)\nabla u(x, y) = -(2x, -2y) = 2(-x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Note que, como esperado, os elétrons se deslocam das regiões de maior potencial elétrico para as regiões de menor potencial, seguindo na direção oposta à ∇u (c.f. Figura 3.4).

Figura 3.10: Fluxo elétrico resultante em Ω .

3.1.2 Cálculo da Derivada do Operador Direto

Esta subseção tem como objetivo realizar e avaliar o cálculo da derivada do operador direto para a EIT, utilizando os dois métodos diferentes apresentados na Seção 2.1.2. Ambos os cálculos serão efetuados pelo algoritmo mencionado no início deste capítulo. Vale ressaltar que a construção definida anteriormente será mantida: $\Omega = B_1(0)$ com triangulação \mathcal{T} , γ constante e igual a 1, e $g(x, y) = 2(x^2 - y^2)$.

Primeiramente, iremos definir a direção na qual a derivada será calculada. Fixe a direção $\eta \in L^\infty(\Omega)$ dada por

$$\eta = \mathcal{X}_\Omega + \frac{1}{2}\mathcal{X}_B, \quad (3.4)$$

onde $B = B_{\frac{4}{10}}(\frac{3}{10}, \frac{3}{10})$ é a bola de raio $\frac{4}{10}$ e centrada em $(\frac{3}{10}, \frac{3}{10}) \in \mathbb{R}^2$. Veja a Figura 3.11 para melhor entendimento.

Para aplicar o algoritmo FEIT, é necessário aproximar a função η por um vetor de \mathcal{V}_1 . Com esse objetivo, aplicaremos o seguinte procedimento: Seja $v \in H^1(\Omega)$ fixado. Representaremos $v^* \in \mathcal{V}_1$ da seguinte forma: para um triângulo T_k qualquer na triangulação \mathcal{T} , denotamos seu baricentro por B_k . Então definimos v^* constante em T_k de tal forma que

$$v^*|_{T_k} := v(B_k),$$

para cada $k \in \{1, \dots, K\}$. Dessa forma, a função η pode ser aproximada em \mathcal{V}_1 por

$$\eta^*|_{T_k} := \begin{cases} 3/2, & \text{se } B_k \in B \\ 1, & \text{se } B_k \notin B \end{cases}.$$

Considerando a triangulação \mathcal{T} da Figura 3.3, obtivemos o gráfico de η^* ilustrado na Figura 3.12. É importante ressaltar que quanto maior o número de triângulos, ou seja, quanto mais fina a malha, melhor será a aproximação de η (e das demais funções em $H^1(\Omega)$) em \mathcal{V}_2 .

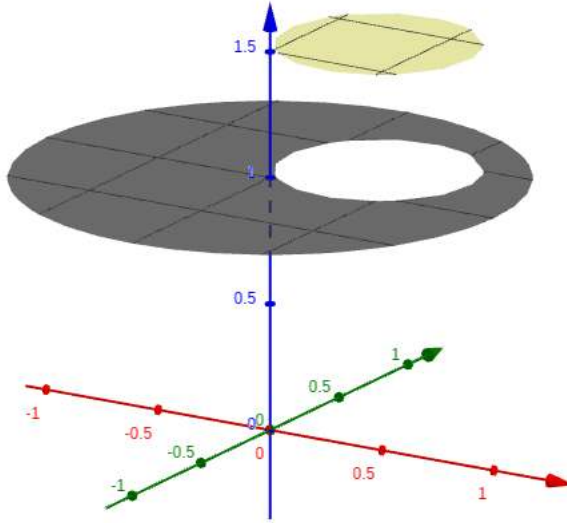


Figura 3.11: Gráfico da direção η definida em (3.4).

Visando aplicar a discretização vista na Seção 2.1.2, fixe também o conjunto (unitário) de correntes elétricas $G = \{g\}$. Note que basta tomar $\ell = 1$ e $g^{(1)} = g$ para termos o conjunto G que já estamos habituados. Dessa forma, denotando $F_G = F_1$ apenas por F , pretendemos calcular

$$F'(\gamma)\eta.$$

O cálculo de $F'(\gamma)\eta$ pode ser feito de duas formas: pela resolução de uma equação variacional ou com o auxílio da matriz Jacobiana. Para o método variacional apresentado na Seção 2.1.2, resolvemos o seguinte sistema

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla \omega \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} \eta \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in H_{\diamond}^1(\Omega), \quad (3.5)$$

e então, determinamos a solução numérica ω^* , ilustrada na Figura 3.13. Restringindo ω^* à fronteira, tem-se $F'(\gamma)\eta$.

O segundo método para a determinação de $F'(\gamma)\eta$ demanda primeiramente o cálculo da matriz Jacobiana, que representa a derivada da discretização de F no ponto γ e, em seguida, a aplicação dessa matriz nos coeficientes da expansão de η^* em \mathcal{V}_2 , conforme Seção 2.1.2. A Figura 3.14 ilustra o gráfico de $F'(\gamma)\eta \circ \varphi$ calculado através de ambos métodos.

A Figura 3.14 indica que os resultados são praticamente indistinguíveis na escala usual. No entanto, para evidenciar a diferença entre os métodos, observe a Figura 3.15, que ilustra a diferença entre os resultados obtidos para a aproximação da derivada direcional pelos dois métodos.

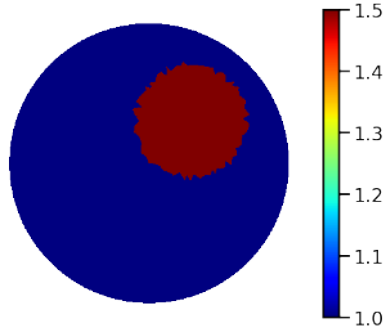


Figura 3.12: Direção η discretizada pelo algoritmo.

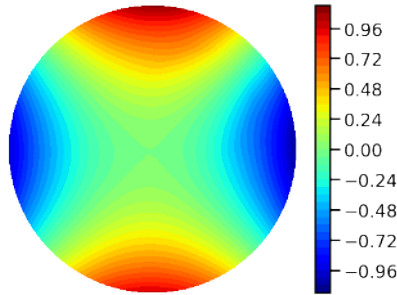


Figura 3.13: Cálculo computacional de ω^* solução de (3.5).

3.2 Testes Numéricos no CEM

Esta seção se concentrará nos testes de consistência do CEM, de maneira análoga ao Modelo Contínuo. As implementações numéricas se dão com a utilização da biblioteca FEIT para o CEM.

Inicialmente, vamos definir as condições para gerar os potenciais U , usando o algoritmo mencionado. Em seguida, vamos verificar se as soluções numéricas obtidas satisfazem as equações que modelam o CEM por meio dos testes de consistência. Diferentemente do Modelo Contínuo, não vamos trabalhar com soluções exatas para o CEM, pois elas são consideravelmente mais complexas nesse caso. Portanto, denotaremos as soluções computadas de (1.21) por $(u, U) := (u^*, U^*)$, i.e. iremos omitir o sobrescrito \star .

Seja $\Omega = B_1(0)$ a bola centrada na origem e de raio 1. Tome $L = 8$ eletrodos disjuntos, igualmente espaçados, de mesmo tamanho em $\partial\Omega$ e cobrindo 50% da fronteira. Repare que essa configuração satisfaz as condições do CEM. Suponha que a impedância

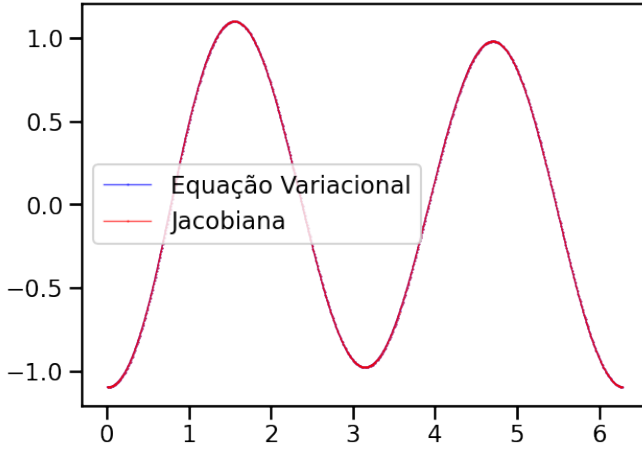


Figura 3.14: Cálculo de $F'(\gamma)\eta$.

de contato z_i do i -ésimo eletrodo seja igual a $2,5 \times 10^{-5}$ para cada $i \in \{1, \dots, L\}$. Tome a triangulação \mathcal{T} de Ω definida na Figura 3.16, assim como a enumeração e posição dos eletrodos apresentadas.

Defina a condutividade elétrica γ como

$$\gamma = \mathcal{X}_\Omega + \mathcal{X}_B,$$

onde $B = B_{\frac{3}{10}}(-\frac{3}{10}, -\frac{3}{10})$ é a bola de raio $\frac{3}{10}$ e centrada em $-\frac{3}{10}(1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Analogamente ao Modelo Contínuo na Seção 3.1.2, representamos γ a partir da triangulação \mathcal{T} de Ω por γ^* , sendo a última ilustrada na Figura 3.17. Por simplicidade, denotaremos $\gamma = \gamma^*$.

Agora iremos definir as correntes elétricas aplicadas para a geração dos dados. Seja $\ell = L - 1 = 7$ o número de vetores de correntes elétricas que aplicaremos nos eletrodos. Defina a matriz

$$I := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times L} \quad (3.6)$$

e denote por $I^{(i)} \in \mathbb{R}^L$ a transposta da i -ésima linha. Dessa forma, considere o conjunto linearmente independente $G = \{I^{(1)}, \dots, I^{(\ell)}\}$. A partir das quantidades definidas,

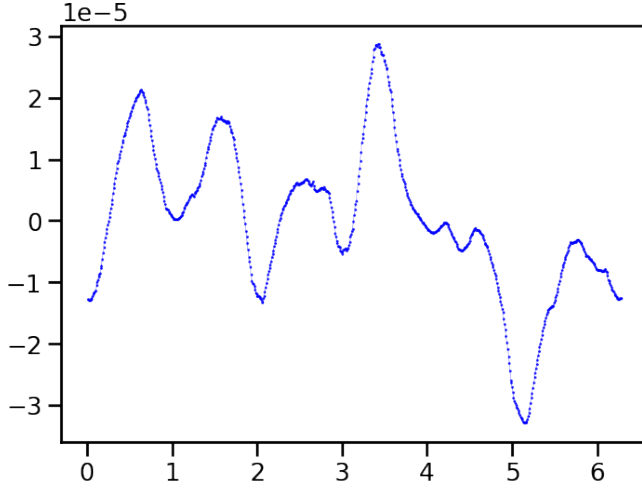


Figura 3.15: Diferença entre as soluções obtidas para o cálculo da derivada direcional por meio da resolução do sistema variacional (3.5) e da computação da matriz Jacobiana.

podemos aplicar o algoritmo e resolver a equação variacional

$$B_\gamma((u, U), (v, V)) = \sum_{j=1}^L I_j V_j, \quad \forall (v, V) \in H^1(\Omega) \oplus \mathbb{R}_\diamond^L,$$

para cada $I = I^{(i)}$. Lembre que o operador B_γ é o mesmo definido em (1.21). Assim, obtém-se o par $(u^{(i)}, U^{(i)}) = (u^{*(i)}, U^{*(i)})$ como solução de (1.21) a partir de $I^{(i)}$. Na Figura 3.18, ilustramos os potenciais elétricos $u^{(i)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ para cada experimento $i \in \{1, \dots, \ell\}$.

Na segunda entrada da solução $(u^{(i)}, U^{(i)})$, tem-se o vetor $U^{(i)} \in \mathbb{R}^L$, dado pela i -ésima linha da matriz $U \in \mathbb{R}^{\ell \times L}$. Após um arredondamento de cinco casas decimais em cada entrada, essa matriz é dada por

$$\begin{bmatrix} 0,60876 & -0,61029 & -0,18260 & -0,07688 & -0,01846 & 0,02149 & 0,07609 & 0,18189 \\ 0,18236 & 0,61004 & -0,60764 & -0,17982 & -0,07462 & -0,02551 & 0,01791 & 0,07728 \\ 0,07669 & 0,18241 & 0,61022 & -0,60406 & -0,17196 & -0,07899 & -0,03120 & 0,01689 \\ 0,01315 & 0,07157 & 0,17677 & 0,60887 & -0,58871 & -0,16425 & -0,08374 & -0,03367 \\ -0,02475 & 0,01521 & 0,06432 & 0,15729 & 0,58174 & -0,56846 & -0,15454 & -0,07081 \\ -0,06626 & -0,01165 & 0,03176 & 0,07955 & 0,16006 & 0,57398 & -0,59983 & -0,16762 \\ -0,18058 & -0,07479 & -0,01541 & 0,03268 & 0,08274 & 0,16647 & 0,59868 & -0,60978 \end{bmatrix}$$

Perceba que partimos de cada $I^{(i)} \in \mathbb{R}_\diamond^L$ e obtemos cada $U^{(i)} \in \mathbb{R}_\diamond^L$. Para uma melhor visualização de cada vetor de potenciais $U^{(i)}$ relativo a cada experimento de corrente $I^{(i)}$, veja a Figura 3.19, que ilustra o gráfico de cada $U^{(i)}$ no intervalo $[i, i + 1)$ em uma cor distinta. Esta maneira de apresentar uma matriz se repetirá neste capítulo.

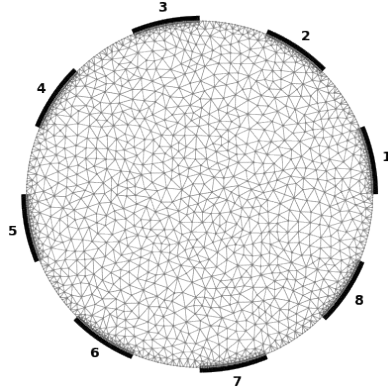


Figura 3.16: Triangulação \mathcal{T} de Ω com $N = 1681$, $M = 480$, $K = 2880$ e $L = 8$.

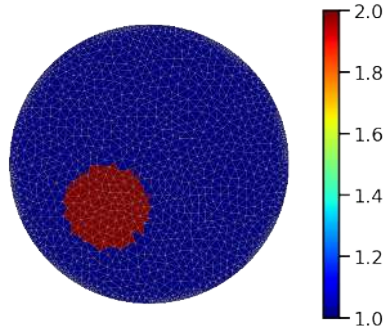


Figura 3.17: Condutividade elétrica γ^* de Ω .

3.2.1 Testes de Consistência

Esta subseção é destinada a verificar se as condições de contorno e modelagem do CEM são satisfeitas para as soluções obtidas pelo algoritmo. Usaremos as mesmas soluções da seção anterior.

Como vimos na Seção 1.2.3, o CEM é modelado pelas seguintes equações:

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 \text{ em } \Omega, \quad (3.7)$$

$$\int_{E_j} \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} dS = I_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, L\}, \quad (3.8)$$

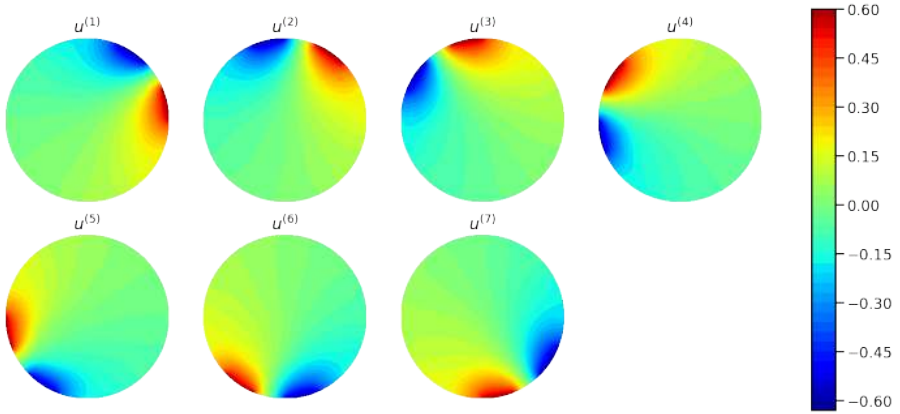


Figura 3.18: Potenciais elétricos $u^{(i)}$ resultantes em Ω .

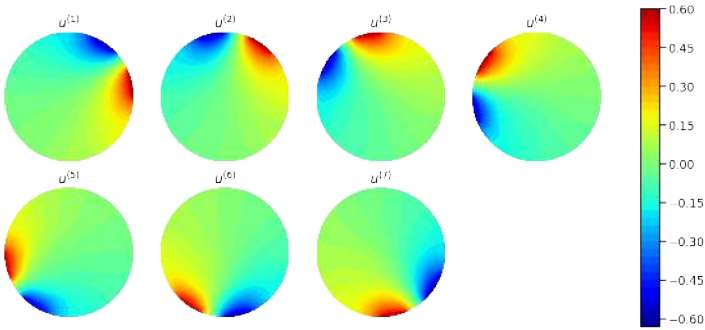


Figura 3.19: Potenciais elétricos $U^{(i)}$ resultantes nos eletrodos.

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ em } \partial\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^L E_j, \quad (3.9)$$

$$u|_{E_j} + z_j \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} = U_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, L\}. \quad (3.10)$$

Serão elaborados quatro testes numéricos, visando verificar se as quatro equações acima são satisfeitas para as soluções computadas.

Teste 1

O teste 1 consiste em verificar se a única condição ao interior de Ω é satisfeita, ou seja, se a equação (3.7) é satisfeita para cada $u = u^{(i)}$. Novamente temos o problema da regu-

laridade da solução u , resolvido de maneira análoga ao Modelo Contínuo. A Figura 3.20 ilustra o resultado do cálculo do divergente do fluxo elétrico para cada $u^{(i)}$.

Pela escala da Figura 3.20, percebe-se que o erro é praticamente irrelevante em todo domínio Ω . De fato, $\text{div}(\gamma \nabla u) \approx 1 \times 10^{-10} \approx 0$ em todos os pontos de Ω . Os pontos de maior divergência estão exatamente na posição dos eletrodos, onde a corrente é aplicada. Naturalmente há maior oscilação de u nessa região, ocasionando maior erro.

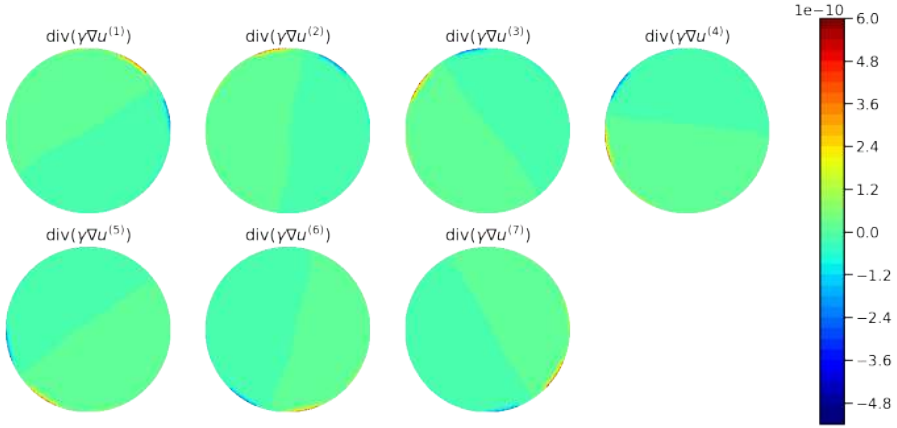


Figura 3.20: Gráfico de cada $\text{div}(\gamma \nabla u^{(i)})$ em Ω .

Teste 2

O segundo teste propõe-se a investigar a primeira condição de contorno, ou seja, se a equação (3.8) é satisfeita para cada $u = u^{(i)}$. A fim de prosseguir com o teste, defina a matriz

$$I^* := [I_j^{*(i)}] = \left[\int_{E_j} \gamma \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \eta} dS \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times L}.$$

Ainda mais, denote a transposta da i -ésima linha de I^* por

$$I^{*(i)} := \begin{bmatrix} I_1^{*(i)} & \dots & I_L^{*(i)} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^L.$$

Assim, se espera que

$$I^{(i)} \approx I^{*(i)},$$

e

$$I \approx I^*.$$

Com auxílio das rotinas computacionais, determinamos a matriz I^* e, considerando um arredondamento de cinco casas decimais, obtemos a matriz $I - I^*$ igual a

$$\begin{bmatrix} 0,204\,49 & -0,197\,79 & 0,007\,03 & 0,001\,27 & 0,000\,86 & -0,000\,40 & -0,000\,63 & -0,005\,37 \\ -0,001\,59 & 0,206\,99 & -0,220\,61 & 0,006\,26 & 0,001\,93 & 0,000\,16 & 0,000\,01 & -0,000\,92 \\ 0,000\,67 & -0,008\,24 & 0,216\,96 & -0,224\,53 & 0,007\,36 & 0,001\,19 & 0,000\,38 & -0,000\,15 \\ 0,000\,92 & -0,002\,27 & -0,005\,05 & 0,223\,77 & -0,208\,54 & 0,006\,91 & 0,001\,17 & 0,000\,24 \\ 0,001\,15 & -0,000\,90 & -0,000\,73 & -0,006\,29 & 0,202\,87 & -0,216\,12 & 0,006\,77 & 0,001\,12 \\ 0,002\,83 & -0,000\,46 & 0,000\,15 & -0,000\,82 & -0,004\,59 & 0,216\,55 & -0,209\,46 & 0,006\,73 \\ 0,009\,93 & -0,000\,08 & 0,000\,63 & -0,000\,04 & -0,000\,28 & -0,006\,82 & 0,206\,13 & -0,219\,93 \end{bmatrix}.$$

Para uma melhor visualização, observe a Figura 3.21, que ilustra o gráfico de cada $I^{(i)} - I^{*(i)}$ no intervalo $[i, i + 1)$ e numa cor diferente.

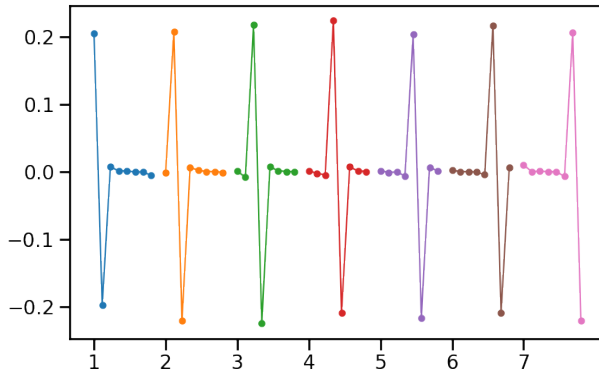


Figura 3.21: Diferença entre as matrizes de correntes elétricas I e I^* .

A Figura 3.21 mostra que os erros estão concentrados nos eletrodos onde correntes elétricas foram aplicadas, que correspondem às regiões onde o potencial atinge seus extremos, e, portanto, é natural que os erros sejam maiores. Convertendo para erro relativo, a diferença nos emissores chega a cerca de 0,2, o que é relativamente alto.

Teste 3

O objetivo do terceiro teste é verificar se a corrente elétrica nos *gaps* é nula, ou seja, se a equação (3.9) é satisfeita para cada $u = u^{(i)}$. Para tal, é necessário calcular o fluxo elétrico resultante em $\partial\Omega$ para cada experimento $u = u^{(i)}$ e analisar o valor nos pontos que não pertençam aos eletrodos.

A Figura 3.22 ilustra os gráficos de $\left(\gamma \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \eta}\right) \circ \varphi$ aplicados em $\partial\Omega$. Os valores de interesse, que indicam a presença ou ausência de corrente elétrica nos *gaps*, estão destacados em azul.

Perceba que os erros se concentram em pontos dos *gaps* próximos a eletrodos que possuem valores de fluxo elétrico não nulo. Isso ocorre pelo salto de descontinuidade existente entre o fluxo elétrico no eletrodo e no *gap* vizinho.

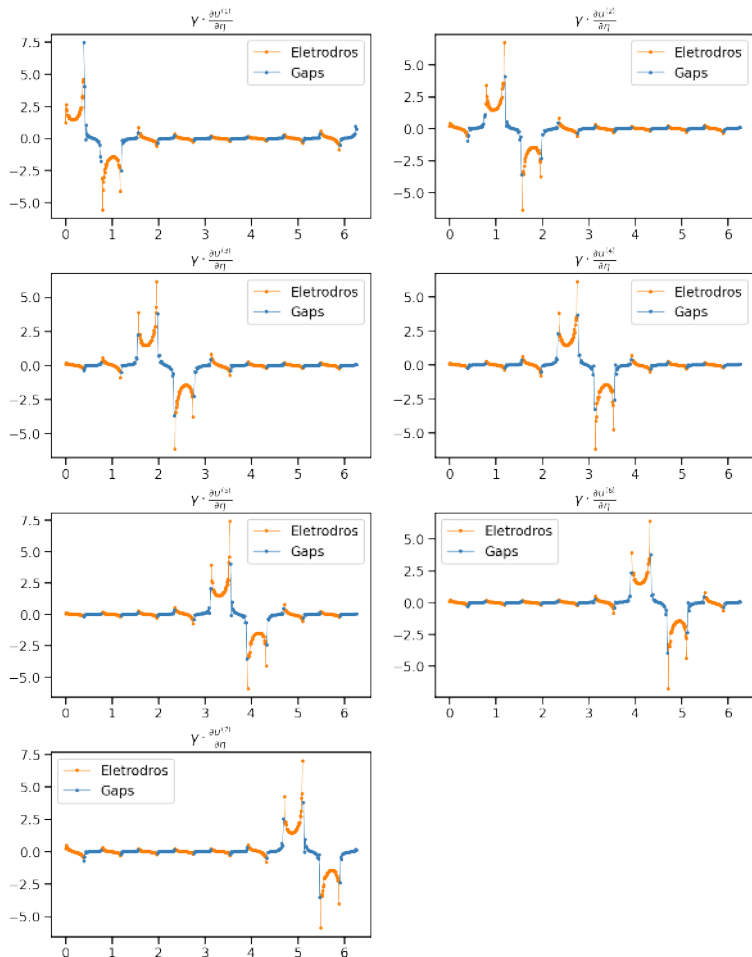


Figura 3.22: Gráfico de cada $\gamma \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \eta}$ em $\partial \Omega$.

Teste 4

Por fim, o quarto teste se concentra em verificar se a equação (3.10) é satisfeita para cada $(u, U) = (u^{(i)}, U^{(i)})$. A análise será feita individualmente em cada eletrodo para avaliar se o potencial elétrico de cada um deles satisfaz a equação apresentada. Ao final, será apresentado o comportamento de toda a fronteira, de maneira análoga ao Teste 3. Defina, para cada $(i, j) \in \{1, \dots, \ell\} \times \{1, \dots, L\}$,

$$U_j^{\star(i)}(x) := u^{(i)}|_{E_j}(x) + z_j \gamma \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \eta}(x),$$

em que $x \in E_j$. Espera-se que cada valor $U_j^{\star(i)}(x)$ seja constante e próximo a $U_j^{(i)}$. Na Figura 3.23, é apresentado o gráfico de $U_1^{\star(1)}$. Observe que o potencial deixa de ser constante nas extremidades, porém a diferença é pequena. É importante notar que $\varphi|_{[0, \pi/8]}$ é a parametrização utilizada para representar E_1 , o que justifica a presença desse intervalo no eixo x do gráfico.

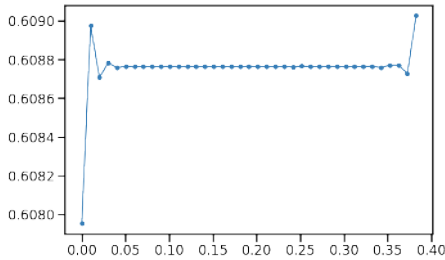


Figura 3.23: Gráfico de $U_1^{\star(1)}$ aplicado em E_1 .

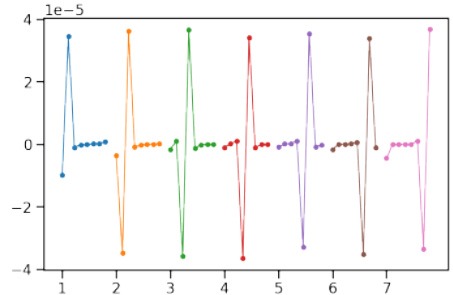


Figura 3.24: Diferença entre as matrizes de potenciais elétricos U e U^* .

Os gráficos dos demais potenciais nos eletrodos apresentam comportamento similar, com valores praticamente constantes, porém com pequenos erros nas extremidades.

Para realizar uma comparação com os valores de $U^{(i)}$, cada valor de $U_j^{\star(i)}$ é aproximado pela média aritmética dos valores encontrados nos pontos de E_j . Defina a matriz

$$U^* := \left[U_j^{\star(i)} \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times L}$$

e denote a transposta da i -ésima linha de U^* por

$$U^{\star(i)} := \left[U_1^{\star(i)} \quad \dots \quad U_L^{\star(i)} \right]^T \in \mathbb{R}^L.$$

Então espera-se que $U_j^{\star(i)} \approx U_j^{(i)}$ e, conseqüentemente, é esperado que $U^* \approx U$.

Com base nos resultados obtidos, foi possível traçar o gráfico de $U^{(i)} - U^{*(i)}$ para cada eletrodo, no intervalo $[i, i + 1)$, similarmente ao que feito no segundo teste. O resultado obtido está ilustrado na Figura 3.24. É possível observar que os erros se concentram apenas nos eletrodos em que foram aplicadas correntes elétricas, o que é esperado, estando na ordem de grandeza de 10^{-5} .

Analogamente à Figura 3.22, avaliamos o comportamento da equação (3.10) em toda a fronteira $\partial\Omega$ na Figura 3.25. Esperamos que os valores sejam constantes em cada um dos eletrodos. Perceba que o CEM não faz qualquer imposição em relação ao valor dos potenciais fora dos eletrodos. Dentro da escala apresentada, não é perceptível a diferença das extremidades visualizada na Figura 3.24.

3.2.2 Cálculo da Derivada do Operador Direto

Nesta subseção, o cálculo da derivada direcional do operador direto do CEM, aplicado em γ , para a mesma direção η definida em (3.4), é realizado. Primeiramente vamos calcular a derivada por meio da solução da equação variacional

$$B_\gamma \left((\omega^{(i)}, \mathcal{W}^{(i)}), (v, V) \right) = - \int_\Omega \eta \nabla u^{(i)} \nabla v \, dx, \quad \forall (v, V) \in H^1(\Omega) \oplus \mathbb{R}_\diamond^L, \quad (3.11)$$

conforme o cálculo apresentado na Seção 2.2.2. Depois vamos calcular a derivada direcional com o auxílio da matriz Jacobiana da versão discretizada do operador direto, das duas formas descritas na Seção 2.2.2. Serão, então, realizados testes para comparar a qualidade das soluções obtidas pelos três métodos propostos. Esses cálculos são aplicados pelo algoritmo citado no início deste capítulo, sendo a construção feita até aqui preservada.

Como citado acima, fixe a direção $\eta \in L^\infty(\Omega)$, definida em (3.4), veja a Figura 3.11. Usando o algoritmo e a triangulação definida na Figura 3.16, representamos η como na Figura 3.26. Perceba que a triangulação definida na Figura 3.3 difere desta, logo obtemos representações diferentes.

Visamos aplicar a discretização vista na Seção 2.2.2, então retome a configuração fixada no início da Seção 3.2. Dessa forma, denotando F_G apenas por F , pretendemos calcular

$$F'(\gamma)\eta = \begin{bmatrix} F'_1(\gamma)\eta \\ \vdots \\ F'_\ell(\gamma)\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathcal{W}^{(\ell)} \end{bmatrix} =: \mathcal{W} \in \mathbb{R}^{\ell \cdot L}$$

Para esse cálculo, podemos resolver (3.11), em que cada $u^{(i)}$ foi obtido na resolução do problema direto (c.f. Figura 3.18). Dessa forma, obtemos os pares $(\omega^{(i)}, \mathcal{W}^{(i)})$ apresentados nas Figuras 3.27 e 3.28. Note que a Figura 3.28 ilustra cada $\mathcal{W}^{(i)}$ no intervalo $[i, i + 1)$ e numa cor diferente, de maneira similar ao visto anteriormente.

Vimos anteriormente que o cálculo da derivada direcional pode ser realizado computando primeiramente a matriz Jacobiana $\tilde{F}'(\gamma) \in \mathbb{R}^{(\ell \cdot L) \times K}$ e, em seguida, multiplicando-a

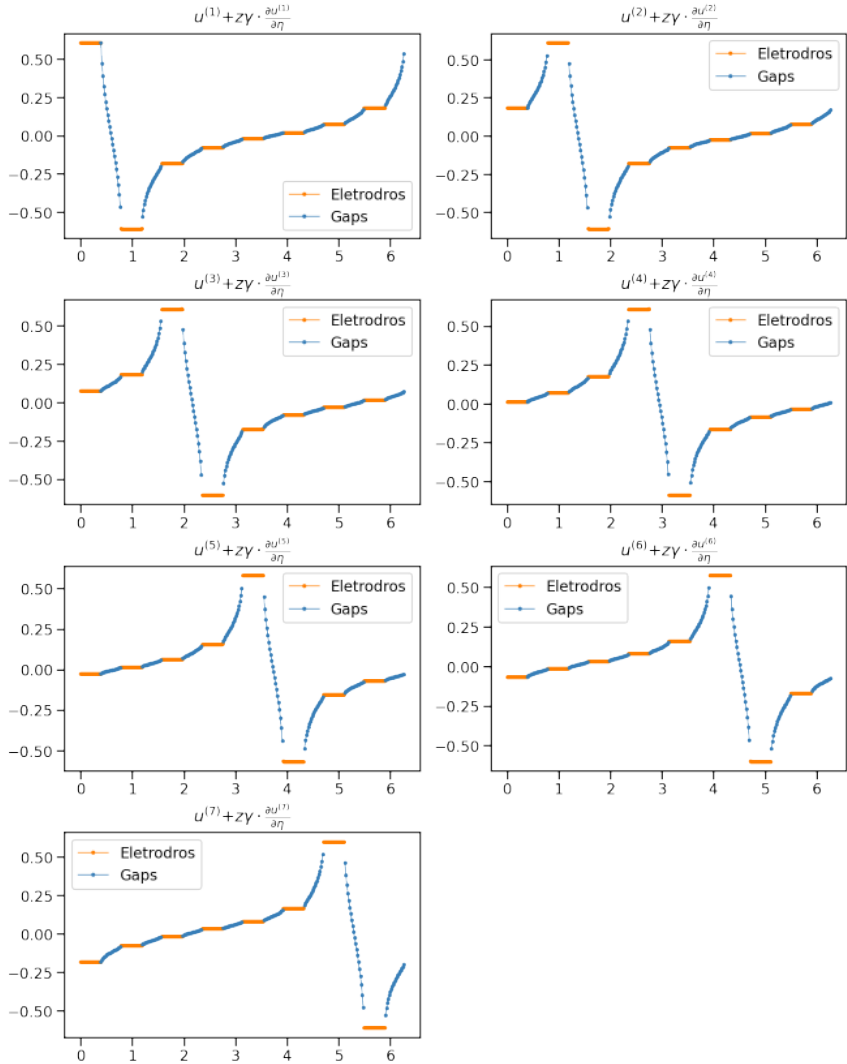


Figura 3.25: Gráfico do potencial calculado em $\partial\Omega$

pele vetor $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}^K$, da decomposição de η na base de \mathcal{V}_1 . A Seção 2.2.2 apresenta duas maneiras para realizar o cálculo da Jacobiana. O método usual, que requer grande esforço computacional, é aquele que determina explicitamente a matriz Jacobiana com o auxílio do método variacional. Já o método que requer menos esforço é o método que foi apre-

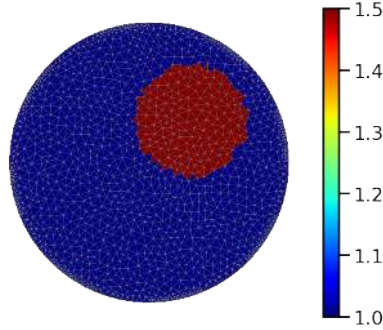


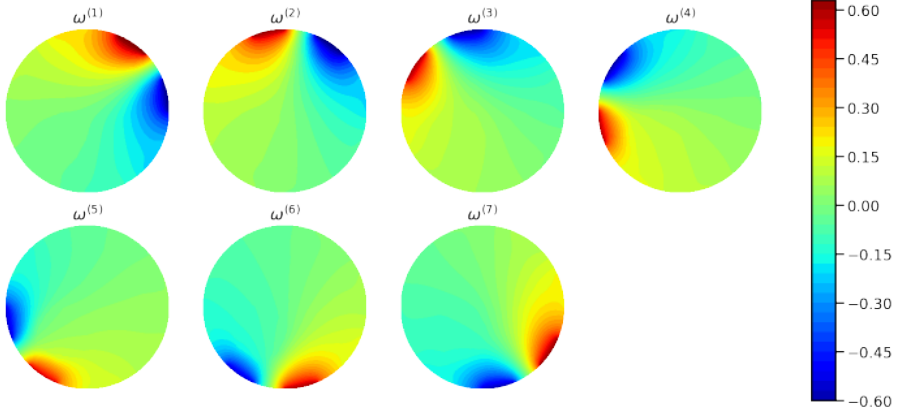
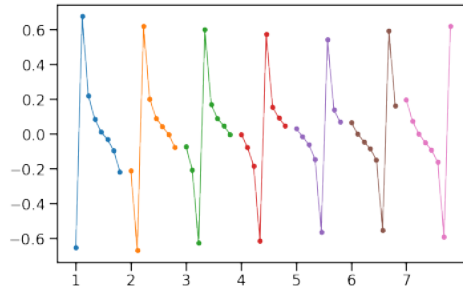
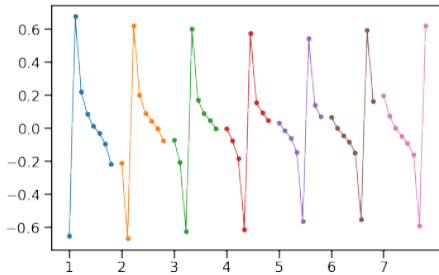
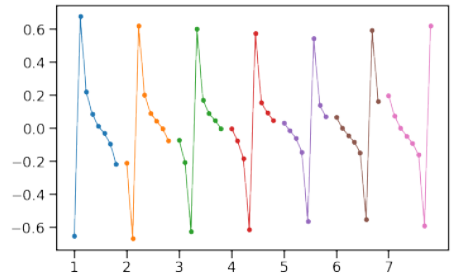
Figura 3.26: Direção η .

sentado originalmente em Polydorides e Lionheart (2002), que chamaremos de *método de Polydorides*.

A Figura 3.29 ilustra \mathcal{W} obtido pelo método usual, enquanto que a Figura 3.30 ilustra \mathcal{W} obtido pelo método computacionalmente mais barato. Visualmente podemos concluir que os resultados estão bem próximos. A Figura 3.31 ilustra a diferença entre os resultados apresentados nas Figuras 3.29 e 3.30. De fato, a diferença é pequena, na ordem de 10^{-12} .

Comparamos também as aproximações obtidas pelo método usual para o cálculo da Jacobiana e pelo método da equação variacional na Figura 3.32, tomando a diferença entre as respostas encontradas nas Figuras 3.28 e 3.29. Percebe-se que a diferença no cálculo de \mathcal{W} é na ordem de 10^{-15} . Portanto, o método usual e o método variacional produzem resultados praticamente idênticos nesse caso.

Concluimos com esses experimentos que todos os métodos nos trazem soluções bastante próximas. Lembre que o método variacional soluciona apenas duas equações variacionais para cada combinação entre condutividade γ e direção η , enquanto que o método de Polydorides fixa uma condutividade γ e calcula a Jacobiana ao resolver $\ell + L$ equações variacionais, sendo essa aplicável a qualquer número de direções η . Mais detalhes foram apresentados na Seção 2.2.2. Dessa forma, é computacionalmente mais vantajoso usar o método de Polydorides quando a derivada, aplicada numa condutividade fixa, é usada diversas vezes, como por exemplo, em métodos do tipo Newton, veja Apêndice B.2.2.

Figura 3.27: Soluções $\omega^{(i)}$.Figura 3.28: $F'(\gamma)\eta = W$ calculado pela equação variacional (3.11).Figura 3.29: W calculado pelo método usual.Figura 3.30: W calculado pelo método de Polydorides.

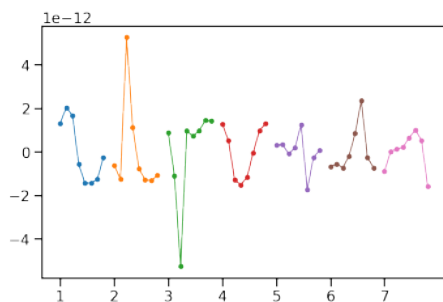


Figura 3.31: Diferença entre \mathcal{W} do método usual e de Polydorides.

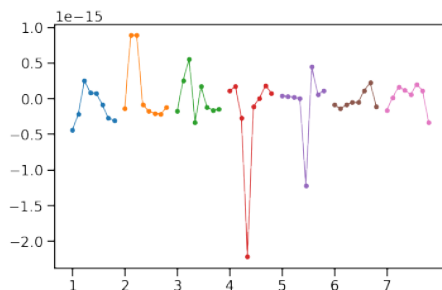


Figura 3.32: Diferença entre as derivadas $\mathcal{W} = F'(\gamma)\eta$ obtidas pelo método da equação variacional e pelo método usual.

4

Implementação Computacional do Problema Inverso

Neste capítulo, discutiremos a implementação do problema inverso da EIT com foco no CEM. Em primeiro lugar, realizaremos testes numéricos com dados sintéticos, gerando o vetor de potenciais U e, em seguida, tentando reconstruir a condutividade elétrica γ a partir de U . Posteriormente, abordaremos um desafio maior, que consiste em reconstruir γ a partir de um conjunto de dados experimentais, disponível em Hauptmann et al. (2017).

4.1 Testes Numéricos com Dados Sintéticos

Esta seção é dedicada à resolução do problema inverso da EIT a partir de dados sintéticos. O processo consiste em gerar os dados e adicionar ruídos, para então recuperar a condutividade original. Devemos tomar o cuidado de utilizar uma malha mais fina para gerar os dados evitando assim o chamado *crime inverso*. Mais precisamente, adotaremos o seguinte procedimento:

1. Fixamos um refinamento Θ de uma triangulação \mathcal{T} ;
2. Definimos uma solução γ^+ como uma combinação de funções características dos elementos de Θ ;
3. Geramos os dados (exatos) $U^{(j)} := F_j(\gamma^+) \in \mathbb{R}^L$, para $j = 1, \dots, \ell$, resolvendo a equação variacional (2.7). Definimos então o vetor U por meio da concatenação

dos vetores $U^{(j)}$.

4. Geramos dados contaminados U^δ , adicionando ruídos artificiais a U ;
5. Recuperamos γ^+ na malha original \mathcal{T} a partir de U^δ .

4.1.1 Geração dos Dados Sintéticos

Em todos os experimentos desta seção, serão adotados os seguintes parâmetros para a geração dos dados: fixamos $\Omega = B_1(0)$, a bola aberta de raio 1 e centrada na origem. Na fronteira $\partial\Omega$, definimos $L = 16$ eletrodos, igualmente espaçados e cobrindo 50% da fronteira. Fixamos o número de experimentos $\ell = 15$ e aplicamos o *padrão de corrente adjacente*, definido como o conjunto de vetores $I^{(j)} := (0, \dots, 1, -1, 0, \dots, 0)^\top$, com 1 na j -ésima coordenada, -1 imediatamente na próxima e zero nas demais. Tome $I := \{I^{(1)}, \dots, I^{(\ell)}\} \in \mathbb{R}^{L \times \ell}$ em um processo análogo ao utilizado para a definição da matriz (3.6). As impedâncias de contato são tomadas iguais: $z_i = 2,5 \times 10^{-5}$ para $i = 1, \dots, L$.

A fim de evitar o crime inverso, duas malhas distintas são geradas: a malha grossa \mathcal{T} (Figura 4.1a) e o seu refinamento Θ (Figura 4.1b). A malha fina Θ é usada exclusivamente para a geração de dados sintéticos $U^{(j)}$ e, então, descartada. Em sequência, apenas a malha grossa será usada para a reconstrução da condutividade.

A partir da malha fina, definimos a condutividade elétrica γ como sendo a função dada por

$$\gamma := \mathcal{X}_\Omega + \mathcal{X}_B,$$

onde $B := B_{\frac{3}{10}}(\frac{3}{10}, \frac{3}{10})$ é a bola de raio $\frac{3}{10}$ centrada em $(\frac{3}{10}, \frac{3}{10}) \in \mathbb{R}^2$. A solução do problema inverso, discretizada na malha Θ , é denotada por γ^+ , e está ilustrada na Figura 4.1c (veja o procedimento descrito na Seção 3.1.2).

A partir de I , Θ , z_i e γ^+ , geramos os vetores de dados sintéticos $U^{(j)} \in \mathbb{R}_\diamond^L$, para $j = 1, \dots, \ell$, resolvendo o problema direto do CEM, definido pela solução da equação variacional (2.7). Tome $U \in \mathbb{R}^{\ell L}$, o vetor obtido pela concatenação dos $U^{(i)}$ com $i = 1, \dots, \ell$. Adicionamos, então, ruídos artificiais aos dados sintéticos U com o *nível de ruídos relativo* $\delta > 0$:

$$U^\delta = U + \delta \|U\|_2 \Delta, \quad (4.1)$$

onde $\Delta \in \mathbb{R}^{\ell L}$ é um vetor contendo uma distribuição aleatória normal de variáveis, com $\|\Delta\|_2 = 1$. Os vetores U , U^δ e Δ estão ilustrados na Figura 4.2 para um nível específico de ruídos. Observe que o nível de ruídos relativo δ satisfaz

$$\delta = \frac{\|U^\delta - U\|_2}{\|U\|_2}. \quad (4.2)$$

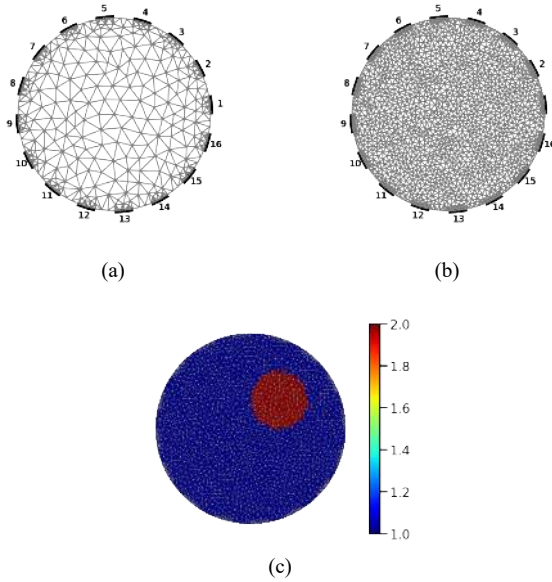


Figura 4.1: Experimentos com dados sintéticos: (a) Malha grossa \mathcal{T} com $N = 378$, $M = 160$ e $K = 594$; (b) Malha fina Θ com $N = 2091$, $M = 480$ e $K = 3700$; (c) Condutividade γ^+ para geração dos dados sintéticos.

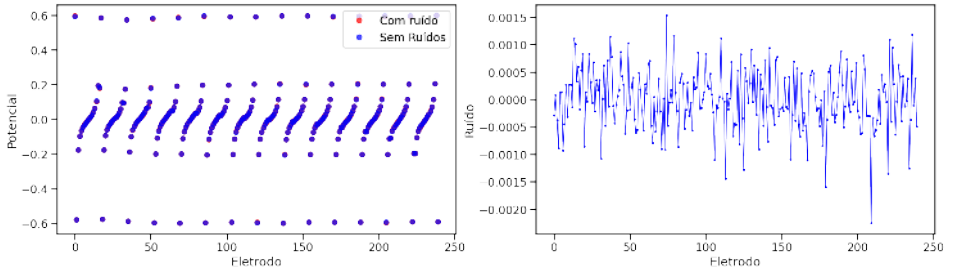


Figura 4.2: Esquerda: Vetor de potenciais simulados U (em azul) e sua perturbação U^δ (em vermelho). Direita: Distribuição uniforme de ruídos Δ com nível de ruídos relativo de $\delta = 0,1\%$.

4.1.2 Reconstrução da Condutividade Elétrica

A partir dos dados contaminados U^δ , conforme (4.1), buscamos reconstruir a condutividade elétrica γ^+ na malha mais grossa \mathcal{T} . Entretanto, a EIT é um problema severamente

mal posto, tornando métodos de regularização necessários.

Existem diversas técnicas de regularização para a reconstrução de γ^+ (veja Apêndice B.2). Neste estudo, foram selecionados quatro métodos iterativos para problemas inversos não lineares. O primeiro deles é o método do tipo gradiente chamado de Landweber (LW), c.f. (B.21). Os demais métodos são métodos do tipo Newton inexato, apresentados na Apêndice B.2.2. O primeiro dos métodos do tipo Newton estudados é o chamado método de Levenberg–Marquardt (LM), definido pela iteração (B.22), Apêndice B. Para os experimentos aqui utilizados, usamos apenas a sequência (α_n) constante. Os dois métodos remanescentes são casos particulares do método do tipo Newton inexato REGINN, o qual utiliza uma iteração interna para aproximar as soluções de sistemas lineares auxiliares. Nos testes que apresentaremos a seguir, analisaremos as iterações internas geradas pelos métodos de Landweber (NLW) e Tikhonov-iterado estacionário (NTK) (veja o Apêndice B.2.2 e os Exercícios B.13 a B.15).¹

É importante notar que se usarmos apenas uma iteração interna nos métodos NLW e NTK, obteremos exatamente os métodos LW e LM, respectivamente, veja o Exercício B.16.

A quantidade de iterações internas do REGINN deve ser finita. Para definir essa quantidade, seguiremos o procedimento descrito por Rieder (2006): a iteração interna será interrompida pelo uso do parâmetro $\mu \in (0, 1]$, podendo este ser fixo ou atualizado em cada iteração, isto é, $\mu = \mu_n$ (veja Apêndice B.2.2 e equação (B.23)). Nos experimentos que realizaremos, o parâmetro $\mu = \mu_n$ será atualizado *a posteriori* por meio da seguinte regra:

$$\tilde{\mu}_n := \begin{cases} \mu_{\max} \cdot \max(1 - \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} (1 - \mu_{n-1}), R\mu_{n-1}) & : r_{n-1} \geq r_{n-2} \\ \nu\mu_{n-1} & : \text{Se não} \end{cases} \quad (4.3)$$

onde μ_{\max} é o valor máximo permitido e r_n é o número de passos na iteração interna n . Já R é a proporção máxima de decréscimo, e ν define o decréscimo no parâmetro μ_n .

Todos os algoritmos são interrompidos na primeira iteração n , em que a seguinte variação do Princípio da Discrepância de Morozov é satisfeito (c.f. (B.19) no Apêndice B):

$$\frac{\|U_{\gamma_n}^\delta - U^\delta\|_2}{\|U^\delta\|_2} \leq \tau\delta, \quad (4.4)$$

para uma constante $\tau > 1$ pré-definida. Aqui $U_{\gamma_n}^\delta$ representa os potenciais obtidos a partir da aplicação do operador direto na condutividade elétrica γ_n . Denotaremos por n_δ a primeira iteração n em que (4.4) é satisfeita.

Os métodos utilizados para a reconstrução da condutividade elétrica são iterativos e requerem uma aproximação inicial, definida como $\gamma_0 = 1$, a qual coincide com o valor da condutividade fora da inclusão. Para comparar adequadamente os resultados obtidos,

¹Para os métodos lineares de Landweber e Tikhonov-iterado estacionário, usados na iteração interna do REGINN, consulte as Seções Apêndice B.1.2 e Apêndice B.1.1, respectivamente, e os exercícios lá sugeridos.

definimos o *erro relativo* como

$$E_n := 100 \cdot \frac{\|\tilde{\gamma}_n - \gamma^+\|_{L^2(\Omega)}}{\|\gamma^+\|_{L^2(\Omega)}}, \quad (4.5)$$

onde $\tilde{\gamma}_n$ é a interpolação de γ_n na malha refinada Θ . Note que o cálculo do *erro relativo* só é possível, em geral, com dados simulados, já que a solução exata deve ser conhecida. Também definimos o *resíduo relativo* como

$$res_n := 100 \cdot \frac{\|U_{\gamma_n}^\delta - U^\delta\|_2}{\|U^\delta\|_2}. \quad (4.6)$$

4.1.3 Resultados Numéricos

Serão executados dois experimentos numéricos nesta seção. Primeiramente iremos investigar diferentes métodos de regularização e suas reconstruções (Experimento 1), posteriormente iremos selecionar o melhor método e, então, estudar o efeito do nível de ruídos nas reconstruções (Experimento 2).

Experimento 1

Neste experimento numérico, avaliamos o desempenho de quatro diferentes métodos de regularização para a reconstrução de γ^+ : LW, LM, NLW e NTK. Comparamos o resíduo relativo e o erro relativo a cada iteração, bem como a qualidade visual da reconstrução. A derivada do operador direto é calculada pelo método de Polydorides (veja Seção 2.2.2).

Os parâmetros para os experimentos numéricos (c.f. Apêndice B.2) foram selecionados da seguinte forma: $\lambda = 20$ para o passo dos métodos LW e NLW; $\alpha = 0,001$ para LM e NTK. A tolerância μ_n utilizada para encerrar a iteração interna do método REGINN para os métodos NLW e NTK, c.f. (B.23), Apêndice B, foi determinada *a posteriori* com o auxílio dos parâmetros $\mu_0 = 0,85$, $\mu_{max} = 0,999$, $\nu = 0,97$ e $R = 0,97$ (veja (4.3)), limitando-se o número de iterações internas a 1000 iterações. Para todos os algoritmos, tomamos $\tau = 1,05$ para controlar o término da iteração externa, c.f. (4.4), sendo limitada a um número máximo de 100 iterações. O nível de ruídos relativo δ adicionado nos dados, conforme (4.1), foi de 0,25(%).

Em sequência, serão apresentadas as conclusões e discussões baseadas nos resultados das reconstruções de γ^+ , conforme os dados referentes às Figuras 4.3 e 4.4 e à Tabela 4.1.

- **(Formatos)** Na Figura 4.3 observamos que os métodos do tipo Newton NLW, NTK e LM atingiram formatos bem definidos e circulares, na região correta, enquanto que o formato não é definido para o método LW. Certos artefatos e instabilidades são observados na fronteira, especialmente em LM, NLW e NTK.

- **(Valores de Condutividade)** A condutividade da reconstrução variou entre 0,8 e 1,85. Valores mais altos são vistos para LM, NLW, NTK. Em geral, a condutividade

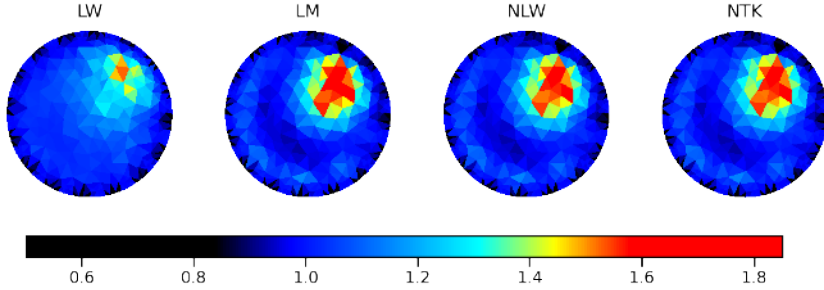


Figura 4.3: Experimento 1 com dados sintéticos: Reconstruções γ_{n_δ} para os algoritmos: Landweber (LW), Levenberg–Marquardt (LM), REGINN com Landweber (NLW) e REGINN com Tikhonov Iterado (NTK).

	LW	LM	NLW	NTK
res_{n_δ}	0,58	0,26	0,25	0,26
E_{n_δ}	21,02	16,62	16,14	16,53
Tempo (s)	72,00	23,00	23,00	9,00

Tabela 4.1: Resumo dos resultados numéricos dos métodos de regularização LW, LM, NLW e NTK para a reconstrução da condutividade elétrica.

do *background* permaneceu constante ou próxima a 1, porém não foi possível alcançar exatamente o valor da condutividade igual a 2, referente a inclusão.

• **(Esforço Computacional)** Observando a Figura 4.4a e a Figura 4.4c, concluímos que, de um modo geral, houve aumento no número de iterações internas dos métodos baseados no algoritmo REGINN, conforme o decréscimo do resíduo. Apesar desse fato, se compararmos os métodos LM com NTK e LW com NLW, observa-se um menor número de iterações externas, sendo a operação de maior demanda computacional para o algoritmo REGINN, resultando no menor tempo de execução (visto na Tabela 4.1).

Observa-se o motivo da melhor performance dos métodos tipo Newton por meio das curvas de resíduo e erro na Figura 4.4. Conforme a Figura 4.4a, os métodos LM, NLW e NTK satisfizeram o princípio da discrepância de Morozov antes de excederem o limite de iterações, enquanto que o método LW terminou precocemente. A consequência desse término precoce é vista na Figura 4.4b, em que o erro relativo alcançado é inferior aos outros métodos.

Há pouco espaço para melhoria da performance dos métodos LW e NLW, uma vez que o aumento do tamanho do passo causa problemas de convergência aos algoritmos. Embora LW inicie com uma queda rápida no resíduo relativo, como pode ser visto no primeiro passo da Figura 4.4a, ele desacelera rapidamente, obtendo uma performance inferior aos outros métodos.

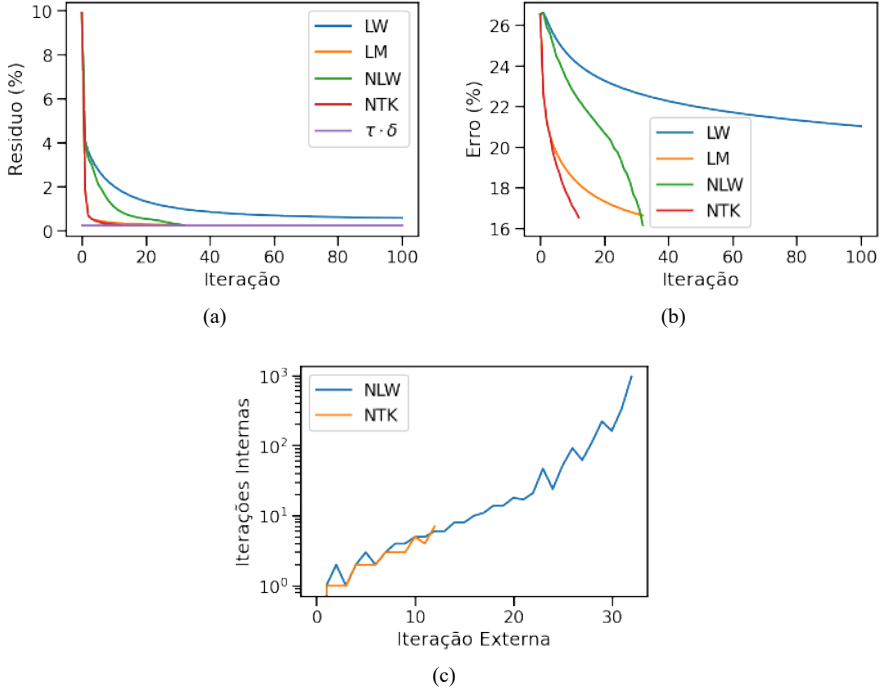


Figura 4.4: Experimento 1 com dados sintéticos: comparação entre algoritmos. (a) Resíduo relativo, (b) Erro relativo e (c) Número de iterações internas

Experimento 2

No experimento 2, usaremos apenas o método NTK, que obteve a melhor performance no experimento 1. Temos dois objetivos: investigar a influência do nível de ruídos na reconstrução da condutividade elétrica γ^+ e avaliar a eficiência do princípio da discrepância como critério de parada. Novamente serão comparados o resíduo relativo e o erro relativo a cada iteração, bem como a qualidade visual da reconstrução.

Avaliamos a reconstrução de γ^+ para quatro níveis de ruídos: 0,5%, 1,0%, 1,5% e 2,0%. Testamos duas situações: na primeira terminou-se a iteração externa com o princípio da discrepância (4.4), usando $\tau = 1,05$. Já na segunda, iteramos até a iteração de número 30, independentemente dessa ser ou não igual a n_8 , c.f. (B.19), Apêndice B. Os parâmetros usados para o algoritmo NTK foram os mesmos do experimento 1, ou seja, $\alpha = 0,01$; $\mu_0 = 0,85$, $\mu_{max} = 0,999$, $\nu = 0,97$ e $R = 0,97$, sendo porém, o número de iterações internas limitada a 100. Apresentamos as conclusões e discussões dos resultados das reconstruções de γ^+ , avaliando as Figuras 4.5 e 4.6 e a Tabela 4.2.

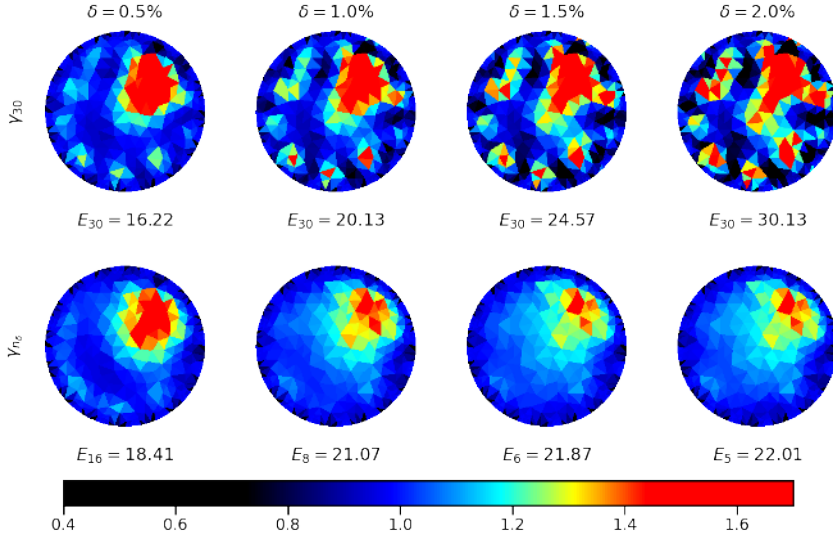


Figura 4.5: Experimento 2 com dados sintéticos: reconstruções obtidas com o uso do algoritmo NTK com diferentes níveis de ruídos. Diferentes colunas representam diferentes níveis de contaminação.

	$\delta = 0,5\%$	$\delta = 1,0\%$	$\delta = 1,5\%$	$\delta = 2,0\%$
n_δ	16	8	6	5
res_{n_δ}	0,52	1,04	1,54	1,98
E_{n_δ}	18,41	21,07	21,87	22,01

Tabela 4.2: Resultados obtidos para o Experimento 2 na iteração n_δ (critério de parada usando o Princípio da Discrepância) para diferentes níveis de ruídos.

A Figura 4.5 deixa claro que quanto maior o nível de ruídos, pior a qualidade da reconstrução, principalmente quando é iterado excessivamente, i.e. após o princípio da discrepância estar satisfeito. A Tabela 4.2, por sua vez, mostra que, quanto maior o nível de ruídos, menor é o índice da iteração de parada do princípio da discrepância n_δ . Ao mesmo tempo, quanto menor o nível de ruídos, menor é o erro final e o resíduo, o que sugere, em particular, que a propriedade de regularização é satisfeita: $\gamma_{n_\delta} \rightarrow \gamma^+$ quando $\delta \rightarrow 0$.

A partir da análise da Figura 4.6a, observa-se que o resíduo é decrescente para qualquer nível de ruídos fixado. Entretanto, na Figura 4.6b, nota-se que o erro de iteração decresce até certo ponto e, então, começa a aumentar. Além disso, a iteração diverge mais cedo, conforme o aumento do nível de ruídos. Esse é um fenômeno bastante comum aos problemas inversos, chamado de *semiconvergência*, que indica que a iteração precisa ser

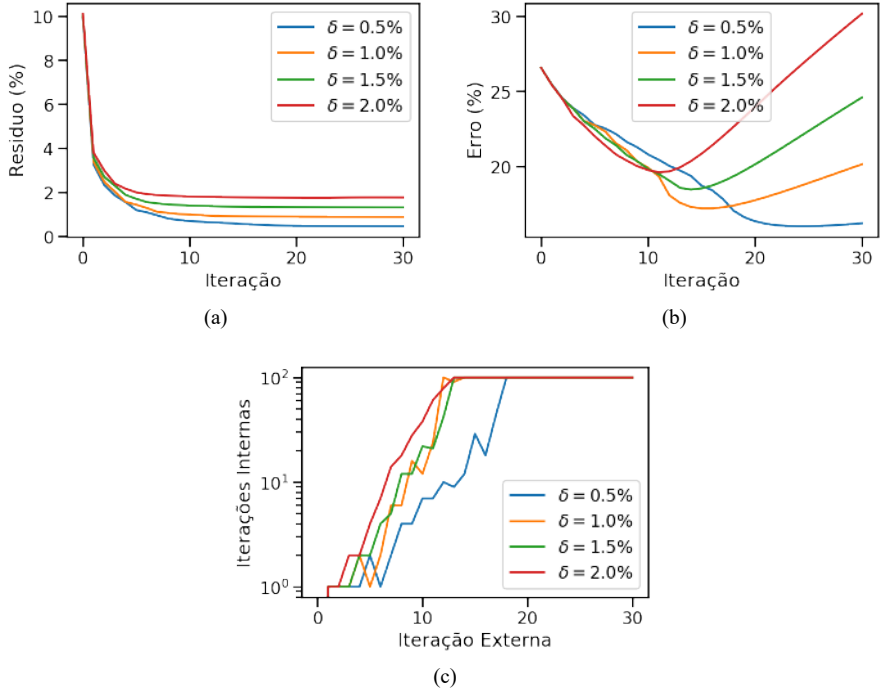


Figura 4.6: Experimento 2 com dados sintéticos e com 30 iterações externas. Comparação de diferentes níveis de ruídos: (a) Resíduo relativo, (b) Erro relativo e (c) Número de iterações internas

terminada no momento correto para evitar a amplificação do erro devido aos ruídos. Por fim, a Figura 4.6c indica que o número de iterações internas cresce mais rapidamente com o aumento do ruído.

Com base nos resultados desse experimento, podemos concluir que, quanto maior o nível de ruídos, menor é o número de iterações externas necessárias para que a sequência gerada pelo algoritmo comece a divergir. Além disso, o aumento do nível de ruídos piora a qualidade da reconstrução de γ^+ . Nesse sentido, observa-se que o princípio da discrepância permite controlar o número de iterações, de modo que o índice de parada n_δ fique próximo ao ponto em que o erro de iteração atinja seu mínimo.

4.2 Testes Numéricos com Dados Reais

Nesta seção, será explorada a reconstrução da condutividade elétrica γ^+ a partir de dados reais. A geração desses dados foi feita pelo sistema de medição KIT4, na Universidade da Finlândia Oriental, estando os dados disponíveis em Hauptmann et al. (2017). Além do sistema de injeção de correntes e medição de potenciais, o protótipo possui um sensor formado por um tanque cilíndrico preenchido com água salina, (que chamaremos de *background*) onde uma ou mais inclusões, feitas de metal ou plástico, são adicionadas para a determinação da condutividade elétrica. O tamanho, posição e formato das inclusões variam.

4.2.1 Medição dos Potenciais

O raio do tanque é igual a 14 cm, sua fronteira é composta de 16 eletrodos igualmente espaçados com 2,5 cm de comprimento cada. Essas informações são suficientes para criar uma triangulação para o CEM análogo à Figura 4.1a, porém com $N = 681$, $M = 160$ e $K = 1200$. Fixamos $\ell = 15$. Os dados foram gerados usando o protocolo chamado de *Todos contra 1*, definido por $I^{(j)} := (1, 0, \dots, -1, 0, \dots)^\top$, com 1 e -1 nas posições 1 e $j + 1$, respectivamente.

Fixado $j \in \{1, \dots, \ell\}$, assumimos que, para cada vetor de corrente elétrica $I^{(j)} = (I_1, \dots, I_L)^\top \in \mathbb{R}^L$, temos um vetor de potenciais $U^{(j)} = (U_1, \dots, U_L)^\top \in \mathbb{R}^L$ medido. Entretanto, na prática, o protocolo de aquisição de dados pode variar. De fato, isso acontece com os dados gerados pelo sistema KIT4. Por exemplo, nossa modelagem reflete a hipótese de que os dados são aferidos referentes a um ponto de aterramento. Porém, as medições do KIT4 são executadas a partir da diferença de potencial entre eletrodos consecutivos. Isto significa que o operador Neumann-para-Dirichlet Λ_γ , que mapeia corrente elétrica para potenciais, é reescrito nessa situação da seguinte forma

$$I^{(j)} \mapsto V^{(j)} = \begin{pmatrix} U_1 - U_2 \\ U_2 - U_3 \\ \vdots \\ U_{L-1} - U_L \\ U_L - U_1 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Existem duas abordagens possíveis para tratar os dados gerados pelo sistema KIT4. Uma abordagem consiste em converter os dados para a base definida neste trabalho, que reflete a hipótese de aferição referente a um ponto de aterramento. A outra abordagem é converter o operador Λ_γ para a base diferencial dos dados aferidos. No momento, optamos pela primeira abordagem, por ser mais simples de implementar.

Para recuperar os vetores $U = U^{(j)}$ a partir de $V = V^{(j)}$, basta executar o seguinte procedimento: fixe o vetor auxiliar $\tilde{U} \in \mathbb{R}^L$, de maneira que $\tilde{U}_1 = 0$, para $i \in \{2, \dots, L\}$,

tem-se

$$\tilde{U}_i = \sum_{k=1}^{i-1} V_k.$$

Defina agora a constante c a partir da soma das entradas desse vetor:

$$c := \sum_{i=1}^L \tilde{U}_i = \sum_{i=2}^L \sum_{k=1}^{i-1} V_k.$$

Afirmarmos que

$$U_i = \frac{c}{L} - \tilde{U}_i,$$

para todo $i \in \{1, \dots, L\}$. De fato, note que, de (4.7) e da definição de \tilde{U}_i , obtemos

$$\tilde{U}_i = \sum_{k=1}^{i-1} V_k = U_1 - U_i,$$

para todo $i \in \{2, \dots, L\}$. Como $\sum_{i=1}^L U_i = 0$, segue da definição de c que

$$c = \sum_{i=2}^L (U_1 - U_i) = (L-1) \cdot U_1 - \sum_{i=2}^L U_i = L \cdot U_1.$$

Isso implica que

$$\frac{c}{L} - \tilde{U}_1 = \frac{c}{L} = U_1$$

e

$$\frac{c}{L} - \tilde{U}_i = \frac{L \cdot U_1}{L} - (U_1 - U_i) = U_i,$$

para $i = \{2, \dots, L\}$, o que prova a afirmação. Portanto cada vetor $U = U^{(j)} \in \mathbb{R}_{\diamond}^L$ pode ser recuperado a partir do vetor $V = V^{(j)} \in \mathbb{R}_{\diamond}^L$.

4.2.2 Inicialização do Algoritmo

Diferentemente dos dados sintéticos, os dados reais não fornecem, a princípio, informações necessárias para iniciar a reconstrução, tais como o nível de ruídos δ , as impedâncias de contato z_i e até mesmo o valor do *background* γ_0 (utilizado como estimativa inicial). Para estimar δ , z_i e γ_0 , utilizamos os procedimentos apresentados por Winkler e Rieder (2015, Seção 4.1).

Estimativa do Nível de Ruídos

O nível de ruídos costuma ser inacessível para diversos problemas inversos. Particularmente para a EIT-CEM, os dados são redundantes e essa informação pode ser explorada a fim de estimar o nível de ruídos.

Defina a matriz de potenciais $\mathcal{U} := \{U^{(1)}, \dots, U^{(\ell)}\} \in \mathbb{R}^{L \times \ell}$ e a matriz de correntes $\mathcal{I} := \{I^{(1)}, \dots, I^{(\ell)}\} \in \mathbb{R}^{L \times \ell}$, que possui posto completo (lembre que $\dim \mathbb{R}_\diamond^L = L - 1 = \ell$). Denote por \mathcal{I}^\dagger a matriz pseudoinversa de \mathcal{I} (c.f. Apêndice A.1) e \mathcal{U}^δ uma perturbação da matriz \mathcal{U} . Sabemos que a matriz

$$\Lambda_\gamma = \mathcal{U} \mathcal{I}^\dagger$$

é simétrica. Entretanto, no caso com ruídos, isso não é necessariamente verdade. Portanto, defina

$$E^v := \mathcal{U}^\delta \mathcal{I}^\dagger - (\mathcal{U}^\delta \mathcal{I}^\dagger)^\top \quad \text{e} \quad e_v := \|E^v\|_{Fro}^2,$$

como sendo a *matriz de erro simétrico* e o *erro de simetria*, respectivamente, onde $\|\cdot\|_{Fro}$ é a norma Frobenius. Supondo uma distribuição aleatória normal de ruídos, Winkler e Rieder (2015) determinam que o nível de ruídos absoluto nos dados é

$$\delta^{CEM} := \sqrt{\ell L v^{CEM}}, \quad (4.8)$$

com

$$v^{CEM} := \frac{e_v}{2(L-1)} \left\| \mathcal{I}^\dagger \right\|_{Fro}^{-2}.$$

Repare que δ^{CEM} é um valor absoluto, ao invés do valor relativo de δ visto em (4.2).

Estimativa da Condutividade do *background* e das Impedâncias de Contato

Iremos introduzir dois métodos. O primeiro determina apenas o valor da condutividade elétrica do *background*, supondo que as impedâncias de contato sejam pequenas. Já o segundo, determina simultaneamente as impedâncias de contato e a condutividade elétrica do *background*.

Para o primeiro método, fixe a função constante $\tilde{\gamma} = 1$ e seja $\tilde{\mathcal{U}} \in \mathbb{R}^{\ell L}$, o vetor de potenciais correspondente (obtido computacionalmente) a partir de $\tilde{\gamma}$, referente ao padrão de correntes $\mathcal{I} = \{I^{(1)}, \dots, I^{(\ell)}\}$ e com impedâncias de contato conhecidas \tilde{z}_i . A estimativa de condutividade elétrica do *background*, γ_0^{CEM} , é determinada a partir do vetor de dados experimentais $\mathcal{U}^\delta = \{U^{(1)}, \dots, U^{(\ell)}\} \in \mathbb{R}^{\ell L}$, produzido por medições realizadas no tanque de água salino, sem inclusões, e com impedâncias de contato desconhecidas z_i . A partir da resolução de um problema de mínimos quadrados, obtemos a estimativa:

$$\gamma_0^{CEM} := \frac{\sum_{j=1}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^L \left(\tilde{U}_i^{(j)} - \frac{\tilde{z}_i}{|\tilde{E}_i|} I_i^{(j)} \right) I_i^{(j)} \right)^2}{\sum_{j=1}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^L \left((U^\delta)_i^{(j)} - \frac{z_i}{|E_i|} I_i^{(j)} \right) I_i^{(j)} \right) \left(\sum_{i=1}^L \left(\tilde{U}_i^{(j)} - \frac{\tilde{z}_i}{|\tilde{E}_i|} I_i^{(j)} \right) I_i^{(j)} \right)}, \quad (4.9)$$

onde $|E_i|$ é o comprimento do i -ésimo eletrodo. Para os casos com $\gamma_0 \gg z_i$, os valores de z_i não interferem significativamente na estimativa acima e pode-se, portanto, usar quaisquer valores pequenos.

Para a determinação de γ_0^{CEM} , é necessário assumir a hipótese de que os eletrodos são pequenos e suficientemente espaçados entre si. Assim é razoável assumir que o potencial $u^{(j)}$ em cada eletrodo é praticamente constante, isto é, $u^{(j)}|_{E_i} \approx \text{constante}$. Aproximando a corrente elétrica no eletrodo pelo seu valor médio, obtemos:

$$U_i^{(j)} = u^{(j)}|_{E_i} + z_i \gamma \frac{\partial u^{(j)}}{\partial \eta} \approx u^{(j)}|_{E_i} + z_i \frac{I_i^{(j)}}{|E_i|}. \quad (4.10)$$

Uma desvantagem desse método é que as impedâncias de contato devem ser conhecidas ou desprezíveis.

No segundo método, assumimos que as impedâncias de contato dos eletrodos são aproximadamente iguais. Assim

$$z_i \approx z > 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, L,$$

e podemos reescrever (4.9) como o seguinte conjunto de equações:

$$a_j \hat{\rho}_0 + b_j \hat{z} = c_j, \quad j = 1, \dots, \ell,$$

onde

$$\begin{aligned} a_j &= \sum_{i=1}^L \left(\tilde{U}_i^{(j)} - \frac{\tilde{z}_i}{|E_i|} I_i^{(j)} \right) I_i^{(j)}, \\ b_j &= \sum_{i=1}^L |E_i|^{-1} \left(I_i^{(j)} \right)^2, \\ c_j &= \sum_{i=1}^L (U^\delta)_i^{(j)} I_i^{(j)} \end{aligned}$$

e $\hat{\rho}_0 := \gamma_0^{-1}$. Desse modo, chegamos ao seguinte problema de regressão linear sobre-determinado:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_\ell & b_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_0 \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_\ell \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

o qual pode ser resolvido por mínimos quadrados.

Para valores baixos de impedância de contato, $z \ll \gamma_0$, a solução do sistema pode retornar valores negativos e, nesse caso, tomamos como solução um valor pequeno positivo: fixe $0 < z_{\min} \ll 1$ e defina a estimativa de impedância de contato por

$$z^{CEM} := \max\{\hat{z}, z_{\min}\},$$

onde \hat{z} é a solução de (4.11) obtida a partir de \tilde{U} com $\tilde{z}_i = z_{min}$. Ainda mais, definimos a correspondente estimativa de condutividade por

$$\gamma^{CEM,z} := \begin{cases} \hat{\rho}_0^{-1} & : \text{se } z^{CEM} > z_{min}, \\ \gamma^{CEM}, \text{ com } z_i = z_{min} \text{ em (4.9)} & : \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.12)$$

Embora a solução de (4.11) com $\tilde{z}_i = z_{min}$ forneça uma estimativa inicial para as impedâncias de contato, nem sempre essa estimativa representa o valor ótimo. Em nossos testes numéricos, percebemos que a qualidade da solução está ligada ao quão próximo está \tilde{z}_i de z . Com base nessa observação, desenvolvemos um algoritmo iterativo para melhorar essa estimativa, que funciona da seguinte maneira: usando o valor constante $\tilde{z}_0 = z_{min}$, como aproximação inicial para todas as impedâncias de contato \tilde{z}_i , computamos o par $(\gamma_k^{CEM,z}, z_k^{CEM})$, por meio da minimização do funcional $\|\mathcal{U}_k - \mathcal{U}^\delta\|_2$, em que $\mathcal{U}_k \in \mathbb{R}^{\ell \cdot L}$ é o vetor de potenciais obtido a partir de $(\gamma_k^{CEM,z}, z_k^{CEM})$, sendo \mathcal{U}^δ o vetor de potenciais medidos. Em seguida, atualizamos \tilde{z} para o valor encontrado para z na iteração anterior, ou seja, $\tilde{z}_{k+1} := z_k^{CEM}$. Dessa forma, após um número razoável de iterações, digamos m , obtemos as estimativas $\gamma_0 \approx \gamma_m^{CEM,z}$ e $z \approx z_m^{CEM}$ para os valores da condutividade do *background* e para as impedâncias de contato respectivamente.

Para resolver esse problema de otimização descrito, usamos o método quase Newton de Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno (BFGS), descrito em Nocedal e Wright (2006, p. 136) e implementado na biblioteca *Scipy* em Virtanen et al. (2020).

4.2.3 Resultados Numéricos

Nesta subseção, detalhamos dois experimentos numéricos realizados a partir dos dados experimentais descritos nas subseções anteriores. No primeiro experimento (Experimento 1), utilizaremos os métodos de regularização NLW e NTK para reconstruir as condutividades elétricas procuradas. Já para o segundo experimento (Experimento 2), usaremos uma variação do método LM, proposto pelos autores em Margotti e Hafemann (2022), chamado de Método de Levenberg–Marquardt com projeções relaxadas (*range-relaxed Levenberg–Marquardt*, rrLM).

Em todos os casos, as funções procuradas representam o sistema de água salina descrito, contendo diferentes tipos de inclusões: um cilindro metálico oco (γ_1^+), dois cilindros metálicos ocos de tamanhos diferentes (γ_2^+) e um cilindro metálico oco e um triângulo de plástico (γ_3^+). Os tamanhos e posicionamentos das inclusões variam.

Para as reconstruções das condutividades, foi elaborada uma triangulação \mathcal{T} contendo 1200 elementos e 681 vértices. Como não temos informações precisas sobre as impedâncias de contato z_i e sobre a condutividade do *background* γ_0 , essas quantidades foram estimadas a partir de uma medição sem inclusões utilizando a equação (4.11), conforme descrito nas subseções anteriores. O nível de ruídos de cada experimento também é desconhecido, assim estimamos cada δ_j referente aos dados da inclusão γ_j^+ para $j \in \{1, 2, 3\}$ a partir da equação (4.8). Os valores obtidos para as impedâncias de contato e para a condutividade do *background* foram $z_i = 7,82 \times 10^{-2}$, onde $i = 1, \dots, L$, e $\gamma_0 = 0,93$.

Já para o nível de ruídos dos dados, estimamos $\delta_1 = 2,68 \times 10^{-2}$ (aproximadamente 0,42%), $\delta_2 = 2,67 \times 10^{-2}$ (aproximadamente 0,43%), $\delta_3 = 3,00 \times 10^{-2}$ (aproximadamente 0,44%). O método (4.11), iniciado com z_{min} , não foi capaz de retornar um resultado ótimo, sendo necessário aplicar o algoritmo iterativo sugerido na Seção 4.2.2.

Experimento 1

Os parâmetros usados para o algoritmo NTK foram $\alpha = 5 \times 10^{-3}$ com um limite de 100 iterações internas. Já para o método NLW, tomamos $\lambda = 1$ e limitamos a 500 iterações internas. Ambas iterações internas foram controladas por (4.3) com os parâmetros: $\mu_0 = 0,85$, $\mu_{max} = 0,999$, $\nu = 0,98$ e $R = 0,98$. O critério de parada empregado para a iteração externa foi o princípio da discrepância (4.4), com $\tau = 1,1$ ou 50 iterações externas, o que ocorrer primeiro. Os resultados das reconstruções de γ_j^+ para $j = 1, 2, 3$, são apresentadas nas Figuras 4.7 e 4.8. As conclusões e a análise dos resultados estão apresentados a seguir.

- **(Formatos)** Na Figura 4.7, observamos que, para γ_1^+ e γ_3^+ , os formatos reconstruídos por NTK e NLW são parecidos. Ambos tiveram dificuldades na forma triangular. Já para γ_2^+ , NTK obteve maior sucesso em separar as duas inclusões.

- **(Valores de Condutividade)** A reconstrução das condutividades apresentou valores na faixa de 0,1 a 3,0. Em todos os casos, os valores obtidos pelo método NTK foram superiores aos obtidos pelo método NLW. Além disso, a condutividade do *background* não se manteve constante, apresentando instabilidades, principalmente nas regiões próximas às inclusões e às bordas do tanque.

- **(Esforço Computacional)** O método NTK apresentou menor número de iterações externas, o que indica menor esforço computacional em comparação ao NLW. Além disso, o algoritmo NLW atingiu o número máximo de iterações externas. Ainda mais, maiores valores de λ para NLW causam a divergência da sequência gerada pelo algoritmo, principalmente para γ_3^+ , tornando inviável a aceleração do método pelo aumento desse parâmetro.

É importante destacar que ambos os métodos tiveram dificuldades na reconstrução de γ_3^+ . Uma possível causa é a baixa condutividade do plástico. Segundo a teoria, γ precisa ser limitada inferiormente por uma constante positiva ($\gamma \in L_+^\infty(\Omega)$), mas, para γ_3^+ , essa função está muito próxima de zero dentro da região onde se encontra a inclusão de plástico.

Experimento 2

Para realizar este experimento, não usamos um método de regularização clássico, como aqueles descritos no Apêndice B. Em vez disso, aplicamos um algoritmo proposto mais recentemente, o qual pode ser considerado uma adaptação do método LM, c.f. (B.22). O objetivo desse experimento é convencer o leitor de que melhores resultados, do que aqueles apresentados no Experimento 1, podem ser obtidos usando métodos mais sofisticados.

O algoritmo que usamos nesse experimento foi proposto em Margotti e Hafemann (ibid.), sendo chamado de Método de Levenberg–Marquardt com projeções relaxadas

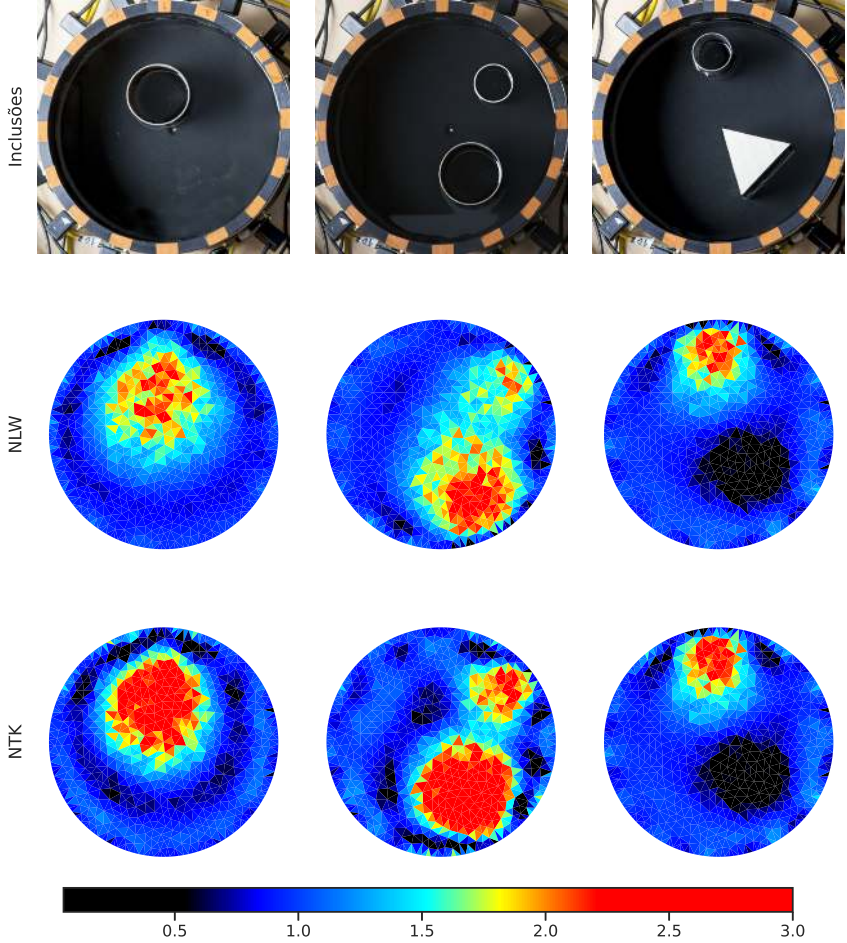


Figura 4.7: Experimentos com os dados reais KIT4: reconstruções γ_{n_g} dos algoritmos NLW e NTK para diferentes inclusões.

(rrLM). Explicaremos a seguir, o funcionamento do método rrLM, porém não apresentaremos todos os detalhes. O leitor interessado, deve considerar ler o artigo original, Margotti e Hafemann (2022), que descreve o algoritmo, faz uma análise completa da convergência do método proposto e apresenta experimentos numéricos, realizados em uma estrutura bastante similar a esta aqui descrita.

O método rrLM se aplica a operadores definidos entre espaços de Banach regulares o suficiente. Ao invés do funcional da norma, $h(x) = \|x\|^2/2$, comumente usado em espa-

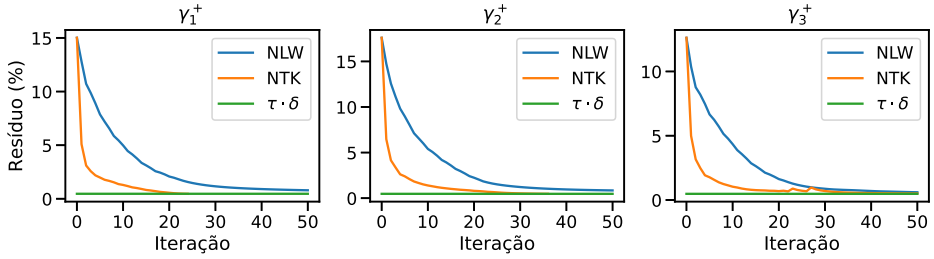


Figura 4.8: Experimentos com os dados reais KIT4: valores do resíduo para as soluções γ_1^+ , γ_2^+ e γ_3^+

ços de Hilbert, esse método utiliza como termo de penalização (termo que multiplica α_n em (B.22)), a chamada *distância de Bregman*, induzida por um funcional uniformemente convexo.

Sob condições adequadas, provamos, para os métodos clássicos, que $\gamma_{n_\delta} \rightarrow \gamma^\dagger$ quando $\delta \rightarrow 0$, sendo γ^\dagger a solução de norma mínima (veja Exercício B.7). Modificando o termo de penalização h , por um funcional mais apropriado H , a família $(\gamma_{n_\delta})_{\delta>0}$ irá convergir, sob condições apropriadas, para a solução do problema inverso que tiver o menor valor funcional em H . Desse modo, é possível incorporar informações *a priori* pela utilização de um funcional conveniente, de modo que a família $(\gamma_{n_\delta})_{\delta>0}$ convirja à solução mais apropriada.

A estratégia das projeções relaxadas, também usada no algoritmo rrLM, consiste em um método de determinação *a posteriori* para a sequência (α_n) em (B.22), visando a aceleração do algoritmo. Nesse caso, a determinação de α_n é dada de maneira implícita e exige, em cada passo do método, a resolução de um problema auxiliar, o qual se baseia na projeção do vetor atual γ_n em um determinado conjunto fechado e convexo, que separa as soluções do problema inverso do vetor γ_n .

Como mencionado acima, a execução do método rrLM requer o uso de um funcional uniformemente convexo. Nesse experimento, utilizamos como base o funcional convexo chamado de *Varição Total* (*Total Variation - TV*), que pode ser definido de uma maneira simplificada nesse contexto por

$$TV(\gamma) = \int_{\Omega} |\nabla \gamma(x)| \, dx = \|\nabla \gamma\|_{L^1(\Omega)}.$$

Como é bem sabido, esse é um funcional apropriado para a detecção de descontinuidades (veja e.g. Chambolle e Lions (1997)). Infelizmente o funcional TV não é uniformemente convexo em nosso espaço de interesse e, por conta disso, foi necessário utilizar uma combinação desse funcional com a norma de $L^2(\Omega)$, resultando em

$$H(\gamma) = (1 - \lambda)TV(\gamma) + \lambda\|\gamma\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

com $0 < \lambda < 1$. Desse modo, o funcional H é uniformemente convexo em $L^2(\Omega)$, e a distância de Bregman induzida por H foi o termo de penalização escolhido para realizar o experimento aqui descrito.

Esse experimento foi conduzido utilizando a mesma triangulação, bem como as estimativas de condutividade, impedâncias de contato e nível de ruídos descritas na Seção 4.2.3. Os resultados obtidos estão exibidos na Figura 4.9, em que na primeira linha se vê a imagem real do experimento realizado; na segunda, a reconstrução obtida pelo método rrLM.

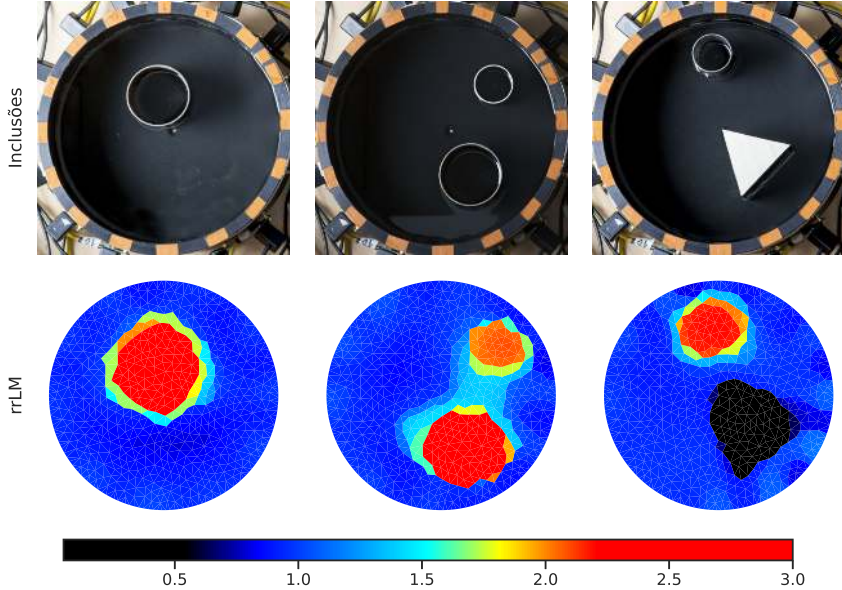


Figura 4.9: Experimentos com dados reais utilizando o KIT4: reconstruções γ_{n_s} do algoritmo rrLM, combinado com o funcional da Variação Total, conforme Margotti e Hafeemann (2022).

É visualmente claro que, nas reconstruções, obtidas pelo método rrLM, as formas e o posicionamento das inclusões são melhor detectadas do que naquelas obtidas pelos métodos NLW e NTK, apresentados na Figura 4.7. Percebe-se também uma variação muito menor no *background*, quando se considera a reconstrução obtida pelo método rrLM.



Teoria Clássica de Regularização de Problemas Inversos

Em co-autoria com Marco Antônio Pauleti

Neste apêndice, estudaremos a teoria clássica de regularização, utilizada para obter-se soluções estáveis de problemas inversos mal postos. Apesar de grande parte das ideias aqui expostas poder ser adaptada a problemas não lineares definidos em espaços mais gerais, para facilitar a compreensão, vamos nos concentrar em problemas lineares em espaços de Hilbert, incluindo apenas ideias básicas da teoria para problemas não lineares ou espaços de Banach mais gerais.

O matemático francês Hadamard (1902) propôs a seguinte definição de Problema bem posto.

Definição A.0.1 (Hadamard). Sejam X e Y espaços normados e $\mathcal{A}: X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado. Diremos que a tripla (\mathcal{A}, X, Y) é um problema *bem posto* se:

- i. (Existência) Para cada $y \in Y$, existe pelo menos um elemento $x \in X$ tal que $\mathcal{A}x = y$;
- ii. (Unicidade) Para cada $y \in Y$, existe no máximo um elemento $x \in X$ tal que $\mathcal{A}x = y$;
- iii. (Estabilidade) Se $\mathcal{A}x = y$, então, para qualquer sequência $(x_k) \subset X$ que satisfaça $\mathcal{A}x_k \longrightarrow y$, vale $x_k \longrightarrow x$.

Se (\mathcal{A}, X, Y) não é bem posto, diremos que é um problema *mal posto*.

Hadamard, assim como muitos de seus contemporâneos, acreditava que se um problema real fosse corretamente modelado, então ele deveria ser bem posto ("a natureza

não faz saltos”). Caso isso não ocorresse, o problema era considerado incorretamente modelado e, por isso, chamado de mal posto.

Claramente os itens (i) e (ii) da definição de Hadamard significam que o operador \mathcal{A} é bijetivo e, portanto, invertível. O item (iii), por sua vez, significa que a inversa de \mathcal{A} é contínua. Perceba que o item (iii) não é totalmente independente de (i) e (ii), pois se X e Y são espaços de Banach, então, como \mathcal{A} é contínua, o item (iii) será automaticamente satisfeito pelo Teorema da Aplicação Aberta, veja Kreyszig (1991).

O terceiro item é certamente o mais delicado dos três que aparecem na definição. Perceba que (i) e (ii) dependem apenas das características algébricas do operador \mathcal{A} e são, portanto, independentes da topologia fixada nos espaços X e Y . Além disso, os problemas de injetividade e sobrejetividade do operador \mathcal{A} podem ser tratados utilizando-se o conceito de soluções generalizadas, como teremos a oportunidade de ver na próxima seção.

A não verificação do item (iii) inevitavelmente acarreta problemas de instabilidade, fazendo com que soluções obtidas a partir de um vetor levemente perturbado no lado direito da equação $\mathcal{A}x = y$ estejam arbitrariamente distantes da solução procurada.

Exemplo 1 (operador integral). Sejam $X := \mathcal{C}[0, 1]$, o espaço das funções reais contínuas definidas no intervalo $[0, 1]$, e $Y := \mathcal{C}_*^1[0, 1] := \{f \in \mathcal{C}[0, 1] : f' \in \mathcal{C}[0, 1] \text{ e } f(0) = 0\}$. Considere o operador integral $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$ definido por

$$(\mathcal{A}f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Então \mathcal{A} está bem definido, é linear e bijetivo (veja Exercício A.6). Ainda, munindo os espaços X e Y com a norma do supremo,

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\},$$

o operador \mathcal{A} é limitado, pois, para toda $f \in X$, temos

$$\left| \int_0^x f(t)dt \right| \leq \int_0^x |f(t)|dt \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| \int_0^x dt = \|f\|(x - 0),$$

e, portanto,

$$\|\mathcal{A}f\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^x f(t)dt \right| \leq \|f\|.$$

Sendo assim, os itens (i) e (ii) da definição de Hadamard são satisfeitos. Porém o item (iii) é violado, pois para a sequência $f_n(x) = x^n$ temos que

$$(\mathcal{A}f_n)(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

e, portanto,

$$\|\mathcal{A}f_n\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} \frac{1}{n+1} |x|^{n+1} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

mas

$$\|f_n\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |x|^n = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo $\mathcal{A}f_n \rightarrow 0 = \mathcal{A}0$, mas $f_n \not\rightarrow 0$.

Tomando a sequência $f_n(x) = n \sin(x/n^2)$ no exemplo acima, obtemos que $\|\mathcal{A}f_n\| \rightarrow 0$, ao mesmo tempo que $\|f_n\| \rightarrow \infty$ (veja Exercício A.6).

A.1 A Pseudoinversa de Moore–Penrose

Sejam X e Y espaços de Hilbert. Vamos usar a notação $\mathcal{B}(X, Y)$ para nos referir ao conjunto de todos os operadores $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$ lineares e contínuos. Nesta seção, vamos assumir que $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Nosso objetivo principal é relaxar a definição de Hadamard. Para isso, introduziremos a noção de solução generalizada através do uso da pseudoinversa. Apresentaremos os principais resultados, mas apenas alguns poucos serão provados. As demonstrações podem ser encontradas em Rieder (2003, Seção 2.1) e Pauleti (2021, Apêndice A.1).

Nosso primeiro passo será uma tentativa de relaxar a exigência sobre a sobrejetividade do operador \mathcal{A} . Para isso, vamos procurar um vetor $\hat{x} \in X$ que satisfaça a seguinte propriedade:

$$\forall x \in X, \|\mathcal{A}\hat{x} - y\| \leq \|\mathcal{A}x - y\|. \quad (\text{A.1})$$

Se tal vetor existir, diremos que é uma *solução de mínimos quadrados*. O teorema a seguir caracteriza essas soluções.

Teorema A.1.1. *Sejam X e Y espaços de Hilbert, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ e $y \in Y$. Considere o subespaço fechado $M = \mathcal{R}(\mathcal{A})$ de Y . Então são equivalentes:*

- I. $\hat{x} \in X$ satisfaz (A.1);
- II. $\hat{x} \in X$ é tal que $\mathcal{A}\hat{x} = \text{proj}_M(y)$;
- III. $\hat{x} \in X$ satisfaz a equação normal $\mathcal{A}^* \mathcal{A}x = \mathcal{A}^* y$.

No Teorema acima, $\mathcal{A}^*: Y \rightarrow X$ é a adjunta de \mathcal{A} .

Considere o conjunto $\mathcal{S}(y) := \{x \in X : \mathcal{A}^* \mathcal{A}x = \mathcal{A}^* y\}$ de todas as soluções de mínimos quadrados, relativas ao vetor $y \in Y$. Como \mathcal{A} é linear e contínuo, segue que $\mathcal{S}(y)$ é convexo e fechado (veja Exercício A.2). Além disso, temos o seguinte resultado:

Teorema A.1.2. *Sejam X e Y espaços de Hilbert, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ e $y \in Y$. Então*

$$\mathcal{S}(y) \neq \emptyset \iff y \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp.$$

O conjunto $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ é um subespaço denso no espaço vetorial Y . Além disso, o conjunto $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subset Y$ é fechado se, e somente se, $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp = Y$, conforme resultado do Teorema A.1.6 abaixo. Como \mathcal{A} é linear, temos, em particular, que uma solução de mínimos quadrados sempre existe caso X ou Y tenha dimensão finita (Exercício A.5).

De um modo geral, podemos garantir a existência de uma solução de mínimos quadrados sempre que o lado direito do sistema $Ax = y$ pertencer a um subespaço adequado, denso em Y . Isso resolve parcialmente o problema da sobrejetividade de A . Analisemos agora a injetividade. O conjunto $\mathcal{S}(y)$, quando não vazio, pode conter mais de um elemento. Sendo assim, devemos impor uma condição *a priori* para seleccionar um elemento de interesse.

Teorema A.1.3. *Sejam X e Y espaços de Hilbert e $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Se $y \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$, então o conjunto das soluções de mínimos quadrados, $\mathcal{S}(y)$, admite um único vetor de norma mínima, isto é, existe $\hat{x} \in \mathcal{S}(y)$ tal que para todo $x \in \mathcal{S}(y)$, distinto de \hat{x} , temos que $\|\hat{x}\| < \|x\|$.*

Sendo assim, para cada $y \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp \subset Y$, existe uma única solução de mínimos quadrados de menor norma, a qual denotaremos por x^\dagger . A função que associa y a x^\dagger é justamente a pseudoinversa de A .

Definição A.1.4. *Sejam X e Y espaços de Hilbert e $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Defina o conjunto $\mathcal{D}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$ e o operador $A^\dagger: \mathcal{D}(A^\dagger) \subset Y \longrightarrow X$, $y \mapsto x^\dagger$. O operador A^\dagger é chamado de *pseudoinversa* (ou *inversa de Moore–Penrose*) de A . O vetor $x^\dagger = A^\dagger y$ é chamado de *solução de norma mínima* (ou *solução generalizada*) para o sistema $Ax = y$.*

Como se vê, a função A^\dagger associa cada vetor $y \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ ao único vetor de norma mínima, solução da equação normal $A^*Ax = A^*y$. Em particular, o Teorema A.1.1 implica que $AA^\dagger y = \text{proj}_{\mathcal{R}(A)}(y)$ para todo $y \in \mathcal{D}(A^\dagger)$.

Teorema A.1.5. *Sejam X e Y espaços de Hilbert, $A \in \mathcal{B}(X, Y)$, $y \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ e $x^\dagger = A^\dagger y$. Então $x^\dagger \in \mathcal{N}(A)^\perp$ e $\mathcal{S}(y) = x^\dagger + \mathcal{N}(A)$. Em particular, x^\dagger é a única solução de mínimos quadrados que pertence ao subespaço $\mathcal{N}(A)^\perp$.*

O teorema a seguir revela importantes propriedades da pseudoinversa em espaços de Hilbert.

Teorema A.1.6. *Sejam X e Y espaços de Hilbert e $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Então A^\dagger possui as seguintes propriedades:*

- I. A^\dagger está definido em todo o espaço Y se, e somente se, $\mathcal{R}(A)$ é um subespaço fechado;
- II. $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A)^\perp$;
- III. $\mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A)^\perp$;
- IV. A^\dagger é linear;
- V. A^\dagger é contínuo se, e somente se, $\mathcal{R}(A)$ é um subespaço fechado.

Prova (dos itens IV e V):

(IV) Pelo segundo item, temos que $\mathcal{R}(\mathcal{A}^\dagger)$ é um subespaço de X e $\mathcal{R}(\mathcal{A}^\dagger) \cap \mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{0\}$. Seja $M = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$ e tome vetores $y, \bar{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ e um escalar λ . Então

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda \mathcal{A}^\dagger y + \mathcal{A}^\dagger \bar{y}) &= \lambda \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger y + \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger \bar{y} \\ &= \lambda \text{proj}_M(y) + \text{proj}_M(\bar{y}) \\ &= \text{proj}_M(\lambda y + \bar{y}) \\ &= \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger(\lambda y + \bar{y}) \\ &= \mathcal{A}(\mathcal{A}^\dagger(\lambda y + \bar{y})). \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos que $(\lambda \mathcal{A}^\dagger y + \mathcal{A}^\dagger \bar{y} - \mathcal{A}^\dagger(\lambda y + \bar{y})) \in \mathcal{R}(\mathcal{A}^\dagger) \cap \mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{0\}$. Ou seja, temos $\mathcal{A}^\dagger(\lambda y + \bar{y}) = \lambda \mathcal{A}^\dagger y + \mathcal{A}^\dagger \bar{y}$.

(V) Assuma que \mathcal{A}^\dagger é contínuo. Do item anterior, temos que \mathcal{A}^\dagger é um operador linear e contínuo definido num subespaço denso de Y . Assim existe uma extensão linear e contínua $\mathcal{T}: Y \rightarrow X$ de \mathcal{A}^\dagger . Como \mathcal{A} também é contínuo, temos que $\mathcal{A}\mathcal{T}: Y \rightarrow Y$ é contínuo. Considere o subespaço fechado $M = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$. Lembre que o operador $\text{proj}_M: Y \rightarrow Y$ é contínuo. Além disso, perceba que:

$$\forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger), \mathcal{A}\mathcal{T}y = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger y = \text{proj}_M(y).$$

Então $\mathcal{A}\mathcal{T}$ e proj_M são operadores contínuos que coincidem num subconjunto denso. Logo coincidem em todo o espaço. Daí $\mathcal{A}\mathcal{T} = \text{proj}_M$, obtendo que:

$$\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})} = M = \mathcal{R}(\text{proj}_M) = \mathcal{R}(\mathcal{A}\mathcal{T}) \subset \mathcal{R}(\mathcal{A}).$$

Segue que $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é um subespaço fechado.

Reciprocamente assuma que $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é um subespaço fechado. Pelo primeiro item, temos $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger) = Y$. Queremos mostrar que $\mathcal{A}^\dagger: Y \rightarrow X$ é contínuo. Como já sabemos que \mathcal{A}^\dagger é linear, então basta mostrar que \mathcal{A}^\dagger é limitado. Perceba que $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp \subset X$ e $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subset Y$ são ambos subespaços fechados e, portanto, ambos são completos. Defina o operador:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{A}}: \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp &\rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{A}) \\ x &\mapsto \mathcal{A}x \end{aligned}$$

Daí $\widehat{\mathcal{A}}$ está bem definido, é bijetivo, linear e contínuo. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, temos que $\widehat{\mathcal{A}}^{-1}$ é limitado. Além disso, como sabemos que $\mathcal{R}(\mathcal{A}^\dagger) = \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$, então, para $y \in Y$, fica bem definida a expressão $\widehat{\mathcal{A}}\mathcal{A}^\dagger y$. Considere o subespaço fechado

$M = \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Então, para qualquer $y \in Y$, temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}^\dagger y\| &= \|\widehat{\mathcal{A}}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}}\mathcal{A}^\dagger y)\| \leq \|\widehat{\mathcal{A}}^{-1}\| \|\widehat{\mathcal{A}}\mathcal{A}^\dagger y\| \\ &= \|\widehat{\mathcal{A}}^{-1}\| \|\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger y\| = \|\widehat{\mathcal{A}}^{-1}\| \|\text{proj}_M(y)\| \leq \|\widehat{\mathcal{A}}^{-1}\| \|y\|. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } \|\mathcal{A}^\dagger\| \leq \|\widehat{\mathcal{A}}^{-1}\| < \infty. \quad \square$$

O último teorema garante que se $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é fechada em Y , então uma solução generalizada sempre existirá e dependerá continuamente dos dados. Por outro lado, caso $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ não seja fechada em Y , nenhum dos dois resultados será válido. Sendo assim, observamos que os itens (i), (ii) e (iii) da definição de Hadamard serão válidos (para uma solução generalizada) se, e somente se, $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$. Isso motiva a próxima definição, proposta originalmente por Nashed (1987):

Definição A.1.7. Sejam X e Y espaços de Hilbert e $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dizemos que a tripla (\mathcal{A}, X, Y) é um *problema bem posto* (no sentido de Nashed) se $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é um subespaço fechado de Y . Caso contrário, essa tripla é chamada de *problema mal posto*.

Daqui em diante, sempre que mencionarmos que (\mathcal{A}, X, Y) é um problema mal posto, tal afirmação deve ser interpretada no sentido de Nashed.

Terminamos esta seção mostrando que, mesmo sob condições pouco restritivas, os problemas inversos associados a operadores compactos (c.f. Definição A.3.3) são sempre mal postos.

Teorema A.1.8. Sejam X e Y espaços de Hilbert e $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ um operador compacto. Então $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é um subespaço fechado se, e somente se, $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é de dimensão finita.

Prova:

Se $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é de dimensão finita, então sabemos que é um subespaço fechado. Reciprocamente suponha que $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é um subespaço fechado. Neste caso, observe que $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp \subset X$ e $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subset Y$ são ambos subespaços fechados e, portanto, ambos são completos. Considere o operador:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{A}}: \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp &\longrightarrow \mathcal{R}(\mathcal{A}) \\ x &\longmapsto \mathcal{A}x \end{aligned}$$

como na prova do último teorema. Então $\widehat{\mathcal{A}}$ está bem definido, é bijetivo, linear e compacto. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, temos que $\widehat{\mathcal{A}}^{-1}$ é limitado. Assim o operador identidade $\mathcal{I}_{\mathcal{R}(\mathcal{A})} = \widehat{\mathcal{A}} \circ \widehat{\mathcal{A}}^{-1}$ é compacto, pois é a composição de um operador compacto com um limitado. Sendo $\mathcal{I}_{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$ compacto, segue que $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é de dimensão finita. □

Corolário A.1.8.1. *Sejam X e Y espaços de Hilbert e $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ compacto. Suponha que $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é de dimensão infinita. Então, a tripla (\mathcal{A}, X, Y) é um problema mal posto.*

□

A.2 Problemas Inversos Lineares

Sejam X e Y espaços de Hilbert e $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$. Estamos interessados em aproximar a solução generalizada $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y \in X$ do problema inverso

$$\mathcal{A}x = y, \quad (\text{A.2})$$

em que $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ é um vetor fixado. Em situações práticas, o vetor y é o resultado de medições e, por isso, é inevitável que esse esteja contaminado por ruídos. Vamos, então, assumir que apenas uma versão perturbada $y^\delta \in Y$ satisfazendo

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta, \quad (\text{A.3})$$

está disponível.

Se a tripla (\mathcal{A}, X, Y) é um problema bem posto, isto é, se a imagem do operador \mathcal{A} é fechada em Y , então o vetor $x_\delta^\dagger := \mathcal{A}^\dagger y^\delta$ aproxima a solução generalizada no seguinte sentido

$$\|x_\delta^\dagger - x^\dagger\| = \|\mathcal{A}^\dagger(y^\delta - y)\| \leq \|\mathcal{A}^\dagger\|\delta \longrightarrow 0, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0.$$

Por outro lado, se estivermos tratando de um problema mal posto, não teremos garantias de que o vetor y^δ pertença ao domínio da pseudoinversa, uma vez que $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger) \neq Y$. Além disso, mesmo que $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$, a convergência acima não está garantida, visto que \mathcal{A}^\dagger é descontínua e, portanto, não possui uma norma bem definida.

A principal ideia da teoria de regularização é substituir a pseudoinversa de \mathcal{A} por um *operador de reconstrução*. Por definição, esse deve ser um operador contínuo (não necessariamente linear) $\mathcal{R}: Y \longrightarrow X$ satisfazendo $\mathcal{R}(0) = 0$. Uma vez que dispomos de um operador de reconstrução \mathcal{R} , podemos tomar $x^\delta = \mathcal{R}y^\delta$ como uma solução aproximada do problema inverso. Nesse caso, teremos

$$\|x^\delta - x^\dagger\| = \|\mathcal{R}y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y\| \leq \|\mathcal{R}y^\delta - \mathcal{R}y\| + \|\mathcal{R}y - \mathcal{A}^\dagger y\|.$$

Perceba que o primeiro termo no lado direito da desigualdade será "pequeno", uma vez que y^δ está próximo de y , e o operador de reconstrução é contínuo. Para garantir a estabilidade da reconstrução, precisamos de algum modo manter também o segundo termo sob controle.

Nossa estratégia será aproximar \mathcal{A}^\dagger por uma família $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}$ de operadores de reconstrução. Para $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ e uma versão com ruídos $y^\delta \in Y$ satisfazendo $\|y - y^\delta\| \leq \delta$, queremos ser capazes de extrair uma família de elementos do conjunto $(\mathcal{R}_\alpha y^\delta)_{\alpha>0}$

que se aproxime de \mathcal{A}^\dagger y assintoticamente com o nível de ruídos decrescente. Ou seja, queremos selecionar um subconjunto $(\alpha = \alpha(\delta, y^\delta))_{\delta > 0}$ do conjunto de parâmetros $\alpha > 0$ para o qual se aplica $\|\mathcal{R}_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y\| \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0^+$. A escolha de parâmetros deve ser possível para todo $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$, e a convergência do erro deve ocorrer uniformemente na bola fechada de raio δ e centro em y .

Definição A.2.1. Sejam X e Y espaços de Hilbert e $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$. Seja $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha > 0}$ uma família de operadores de reconstrução. Se existir uma função $\alpha: (0, \infty) \times Y \rightarrow (0, \infty)$ tal que para todo $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ tivermos:

$$\sup \{ \alpha(\delta, y^\delta) : y^\delta \in Y, \|y - y^\delta\| \leq \delta \} \rightarrow 0, \text{ quando } \delta \rightarrow 0 \quad (\text{A.4})$$

e

$$\sup \{ \|\mathcal{R}_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y\| : y^\delta \in Y, \|y - y^\delta\| \leq \delta \} \rightarrow 0, \text{ quando } \delta \rightarrow 0, \quad (\text{A.5})$$

então o par $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha > 0}, \alpha)$ é chamado de *método de regularização* para o operador \mathcal{A}^\dagger . Falamos de *regularização linear* se todos os \mathcal{R}_α forem lineares. A função α é chamada de *escolha de parâmetro*, e o valor numérico $\alpha(\delta, y^\delta)$ é chamado de *parâmetro de regularização*. Se α depende apenas de δ , então falamos de uma escolha de parâmetros *a priori* e, caso contrário, de uma escolha de parâmetros *a posteriori*.

Observação A.2.2. Podemos restringir os valores que o parâmetro $\alpha > 0$ atinge. Isto é, podemos assumir que $\alpha \in S \subset (0, \infty)$, onde S é tal que zero é um ponto de acumulação deste conjunto, de forma que faça sentido tomar o limite $\alpha \rightarrow 0$. Por exemplo, podemos considerar o conjunto discreto $S = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$. Em geral, vamos formular definições e enunciar resultados para $S = (0, \infty)$, mas que fique implícito que sempre é possível fazer tal restrição.

Uma consequência de (A.5) é que $\forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ vale a convergência:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\mathcal{R}_{\alpha(\delta, y)} y - \mathcal{A}^\dagger y\| = 0. \quad (\text{A.6})$$

Defina o conjunto $\Lambda = \{\alpha(\delta, y) : \delta > 0, y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)\}$ que coleta todos os parâmetros de regularização, que desempenham um papel no limite em (A.6). Por causa de (A.4), temos que zero é ponto de acumulação de Λ . Além disso, temos (A.6) implicando em

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \Lambda}} \|\mathcal{R}_\lambda y - \mathcal{A}^\dagger y\| = 0, \quad (\text{A.7})$$

para todo $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$. Com isso, provamos o seguinte resultado:

Proposição A.1. Sejam X e Y espaços de Hilbert e $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$. Seja $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha > 0}, \alpha)$ um método de regularização para \mathcal{A}^\dagger . Então a subfamília $(\mathcal{R}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge pontualmente em $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ para \mathcal{A}^\dagger quando $\lambda \rightarrow 0^+$.

□

No caso de um problema mal posto, a família $(\|\mathcal{R}_\alpha\|)_{\alpha>0}$ não pode ser limitada.

Proposição A.2. *Sejam X e Y espaços de Hilbert e $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Seja $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}, \alpha)$ um método de regularização para A^\dagger . Se a imagem de A não é fechada em Y , então o conjunto $(\|\mathcal{R}_\alpha\|)_{\alpha>0}$ não é limitado superiormente.*

Prova: Essa é uma consequência da última proposição em conjunto com o Teorema de Banach–Steinhaus, veja Rieder (2003, p. 54).

□

O erro de reconstrução $\|\mathcal{R}_\alpha y^\delta - A^\dagger y\|$ de uma regularização linear é composto pelo erro de dados e pelo erro de aproximação:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_\alpha y^\delta - A^\dagger y\| &\leq \underbrace{\|\mathcal{R}_\alpha y^\delta - \mathcal{R}_\alpha y\|}_{\text{erro de dados}} + \underbrace{\|\mathcal{R}_\alpha y - A^\dagger y\|}_{\text{erro de aproximação}} \\ &\leq \delta \|\mathcal{R}_\alpha\| + \|\mathcal{R}_\alpha y - A^\dagger y\| \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Quando o parâmetro $\alpha > 0$ tende a zero, o erro de aproximação também tende a zero. Por outro lado, o erro de dados fica arbitrariamente grande. Em geral, o erro de reconstrução explode tanto para $\alpha \rightarrow 0^+$ quanto para $\alpha \rightarrow \infty$. A questão que se coloca é a escolha do parâmetro de regularização ótimo, que se caracteriza por minimizar o erro de reconstrução a medida que atinge o equilíbrio entre os erros de aproximação e de dados.

Note que na Definição A.2.1 mencionamos a possibilidade de α não depender de y^δ . Daí é natural nos perguntarmos: Seria possível α não depender de δ ? No caso em que o problema é mal posto, a resposta é negativa, como mostra o teorema a seguir.

Teorema A.2.3 (Veto de Bakushinskii). *Sejam X e Y espaços de Hilbert e $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Então existe um método de regularização $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}, \alpha)$ para A^\dagger tal que α não depende de δ se, e somente se, $\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$.*

Prova:

(\Rightarrow) Assuma a existência de tal método de regularização. Como α não depende de δ , escrevemos $\alpha = \alpha(y^\delta)$. Fixe uma sequência (δ_k) satisfazendo $\delta_k \rightarrow 0^+$. Segue de (A.5) que, para todo $y \in \mathcal{D}(A^\dagger)$, temos que:

$$\sup\{\|\mathcal{R}_{\alpha(y^\delta)} y^\delta - A^\dagger y\| : y^\delta \in Y, \|y - y^\delta\| \leq \delta\} \rightarrow 0 \text{ quando } \delta \rightarrow 0^+. \quad (\text{A.9})$$

Em particular, para todo $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$, obtemos $\mathcal{R}_{\alpha(y)} y = \mathcal{A}^\dagger y$. Seja $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ arbitrário e tome uma sequência $(y_n) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ tal que $y_n \rightarrow y$. Queremos mostrar que $\mathcal{A}^\dagger y_n \rightarrow \mathcal{A}^\dagger y$ para concluir a continuidade de \mathcal{A}^\dagger . Tome uma subsequência $(\mathcal{A}^\dagger y_{n_k})$ tal que $\|y - y_{n_k}\| \leq \delta_k$ para todo $k \geq 1$. Segue de (A.9) que $\mathcal{R}_{\alpha(y_{n_k})} y_{n_k} = \mathcal{A}^\dagger y_{n_k} \rightarrow \mathcal{A}^\dagger y$ quando $k \rightarrow \infty$. Repetindo esse procedimento, mostramos que toda subsequência de $(\mathcal{A}^\dagger y_n)$ possui ela própria uma subsequência convergindo para $\mathcal{A}^\dagger y$. Logo $\mathcal{A}^\dagger y_n \rightarrow \mathcal{A}^\dagger y$. Assim \mathcal{A}^\dagger é contínua e, portanto, $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$ pelo Teorema A.1.6.

(\Leftarrow) Assuma que $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$. Nesse caso, sabemos que $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger) = Y$ e que $\mathcal{A}^\dagger: Y \rightarrow X$ é contínua (Teorema A.1.6). Para qualquer função α que não dependa de δ , faça $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{A}^\dagger$ que temos um método de regularização. □

Uma característica interessante é que não é possível provar taxas de convergência uniforme para métodos de regularização (ou qualquer método) que se dispõe a resolver o problema inverso $\mathcal{A}x = y$.

Teorema A.2.4. *Sejam X e Y espaços de Hilbert e $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$. Seja $((\mathcal{R}_\alpha), \alpha)$ um método de regularização para \mathcal{A}^\dagger . Então não existe função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, com $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(\delta) = 0$, tal que a desigualdade*

$$\|\mathcal{R}_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y\| \leq f(\delta)$$

seja válida para todo $\delta > 0$ e para todo $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ com $\|y\| \leq 1$.

Prova:

Veja Engl, Hanke e Neubauer (2000, Prop. 3.11). □

A convergência de um método de regularização, quando aplicado a um problema mal posto, é, portanto, arbitrariamente lenta. Sendo assim, taxas de convergência podem ser obtidas apenas sob restrições adicionais impostas sob a solução generalizada x^\dagger do problema inverso. Tais restrições são chamadas de *condições de fonte* e envolvem a comparação de diferentes métodos de regularização com o chamado *erro do pior caso*, veja Engl, Hanke e Neubauer (ibid., Seção 3.2) ou Rieder (2003, Seção 3.2).

A.3 Problemas Inversos Não Lineares

Muitos problemas inversos de interesse prático são não lineares como, por exemplo, a Tomografia por Impedância Elétrica, estudada neste livro. Nesta seção, apresentaremos de maneira resumida alguns dos principais resultados sobre a caracterização de problemas mal postos não lineares e suas conexões com os problemas lineares. Iniciemos com a definição de problema localmente mal posto.

Definição A.3.1. Sejam X e Y espaços de Banach e $F : \mathcal{D}(F) \subset X \longrightarrow Y$ um operador (possivelmente não linear) contínuo. Diremos que a tripla (F, X, Y) é um *problema localmente bem posto* em $\bar{x} \in \mathcal{D}(F)$ se existe $r > 0$, tal que, para qualquer sequência $(x_n) \subset B_r(\bar{x}) \cap \mathcal{D}(F)$, vale a implicação

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n) - F(\bar{x})\| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{x}\| = 0.$$

Se a tripla (F, X, Y) não for um problema localmente bem posto em $\bar{x} \in \mathcal{D}(F)$, diremos que esta é um *problema localmente mal posto* nesse ponto.

Note que:

- Na definição acima, usamos a notação $B_r(\bar{x})$ para nos referir à bola com centro em \bar{x} e raio r , isto é, $B_r(\bar{x}) := \{x \in X : \|x - \bar{x}\| < r\}$;
- A definição de localmente bem posto (e de localmente mal posto) depende também de $\mathcal{D}(F)$, no entanto omitimos esse conjunto na tripla (F, X, Y) , assumindo que está embutido na definição de F ;
- (F, X, Y) é um problema localmente mal posto em $\bar{x} \in \mathcal{D}(F)$ se, para cada $r > 0$, existe uma sequência $(x_n) \subset B_r(\bar{x}) \cap \mathcal{D}(F)$ tal que

$$F(x_n) \longrightarrow F(\bar{x}), \quad \text{mas} \quad x_n \not\rightarrow \bar{x}. \quad (\text{A.10})$$

Segue imediatamente da definição que se \bar{x} não é um ponto isolado da pré-imagem de $y \in Y$, então (F, X, Y) é localmente mal posto em \bar{x} .

Sabemos que em espaços de Hilbert X e Y , com $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$, a tripla (\mathcal{A}, X, Y) é um problema bem posto se, e somente se, $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})} = \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Observe que a definição de malposição local se aplica em particular a problemas lineares. De fato, é fácil perceber que a tripla (\mathcal{A}, X, Y) é um problema localmente bem posto num ponto particular $\bar{x} \in X$ se, e somente se, é localmente bem posto em qualquer ponto de X . Sendo assim, podemos afirmar simplesmente, sem problemas de ambiguidade, que (\mathcal{A}, X, Y) é *localmente bem posto* (caso seja localmente bem posto em algum ponto e, portanto, em todos os pontos) ou *localmente mal posto* (caso seja localmente mal posto em algum ponto, e portanto em todos os pontos).

Temos ainda, a seguinte caracterização para problemas lineares em espaços de Hilbert, veja Rieder (ibid., Exercício 7.2): a tripla (\mathcal{A}, X, Y) é um problema localmente bem posto se, e somente se, \mathcal{A} é injetiva e $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})} = \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Logo

$$(\mathcal{A}, X, Y) \text{ é localmente mal posto} \iff \mathcal{N}(\mathcal{A}) \neq \{0\} \text{ ou } \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})} \neq \mathcal{R}(\mathcal{A}).$$

Em particular, as noções de problema localmente mal posto e mal posto (no sentido de Nashed) coincidem se \mathcal{A} é injetivo.

No que se segue, vamos supor que o operador não linear F é Fréchet-diferenciável em $\bar{x} \in \text{int}(\mathcal{D}(F))$ (veja Definição B.1.1 abaixo) e analisar as relações existentes entre a má-posição local de (F, X, Y) em \bar{x} e a má-posição local de (\mathcal{A}, X, Y) , onde $\mathcal{A} := F'(\bar{x})$. Temos o seguinte resultado:

Proposição A.3. *Sejam X e Y espaços de Hilbert e suponha que $F: \mathcal{D}(F) \subset X \longrightarrow Y$ seja Fréchet-diferenciável com derivada localmente Lipschitz contínua em $\bar{x} \in \text{int}(\mathcal{D}(F))$, isto é, existe uma constante $L > 0$ e um raio $r > 0$ tais que*

$$\|F'(x) - F'(\bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|, \text{ para todo } x \in B_r(\bar{x}) \subset \mathcal{D}(F).$$

Se a tripla (F, X, Y) é um problema localmente mal posto em \bar{x} , então $(F'(\bar{x}), X, Y)$ é localmente mal posto, isto é, o operador linear $F'(\bar{x})$ é não injetivo ou tem imagem não fechada em Y .

Prova: Veja Rieder (2003, Teorema 7.3.5). □

A recíproca da proposição acima é falsa, veja e.g. Rieder (ibid., Exemplo 7.3.6). No entanto, na presença da chamada *Condição do Cone Tangencial*, temos a equivalência entre a má-posição local de (F, X, Y) em \bar{x} e a de $(F'(\bar{x}), X, Y)$.

Condição do Cone Tangencial (TCC): existe um vetor $x_0 \in X$ e constantes $0 \leq \eta < 1$ e $\rho > 0$ tais que

$$\|F(x) - F(w) - F'(w)(x - w)\| \leq \eta\|F(x) - F(w)\|, \text{ para todo } x, w \in B_\rho(x_0). \quad (\text{A.11})$$

A condição do cone tangencial é amplamente utilizada como hipótese para provar a convergência de métodos de regularização para problemas não lineares. Como se vê, representa uma restrição na não linearidade do operador F . De fato, é fácil perceber que essa condição é satisfeita com $\eta = 0$ e $\rho > 0$ qualquer se F é linear. Reciprocamente, se ela é satisfeita com $\eta = 0$, então, na bola $B_\rho(x_0)$, F é uma função linear mais uma constante. De uma maneira informal, quanto menor é o valor de η em (A.11), mais próxima de uma função linear estará F .

Métodos do tipo Newton inexato são métodos de regularização que substituem um problema não linear por uma sequência de problemas linearizados, e por conta disso, uma condição que controle o erro de linearização é necessária (veja a Apêndice B.2.2). No Exercício A.7, algumas implicações de (A.11) são estudadas.

Teorema A.3.2. *Sejam X e Y espaços de Hilbert e suponha que $F: \mathcal{D}(F) \subset X \longrightarrow Y$ satisfaça a Condição do Cone Tangencial (A.11). Então:*

- *A tripla (F, X, Y) é um problema localmente bem posto em $\bar{x} \in B_\rho(x_0)$ se, e somente se, $(F'(\bar{x}), X, Y)$ é localmente bem posto;*
- *A tripla (F, X, Y) é um problema localmente mal posto em $\bar{x} \in B_\rho(x_0)$ se, e somente se, $(F'(\bar{x}), X, Y)$ é localmente mal posto.*

Prova: As afirmações são uma consequência das desigualdades apresentadas no Exercício A.7, veja Rieder (ibid., Teorema 7.3.7). □

A seguir, vamos analisar as relações entre operadores (não lineares) compactos e má-posição local.

Definição A.3.3. Um operador $F: \mathcal{D}(F) \subset X \longrightarrow Y$ entre espaços normados X e Y é *compacto*, se a imagem de conjuntos limitados é pré-compacta, isto é,

$$U \subset \mathcal{D}(F) \text{ limitado} \implies \overline{F(U)} \text{ compacto.}$$

Um operador compacto e contínuo é chamado de *totalmente contínuo*.

Observe que se um operador linear é compacto então ele é limitado e, portanto, totalmente contínuo.

Definição A.3.4. Um operador $F: \mathcal{D}(F) \subset X \longrightarrow Y$ entre espaços de Hilbert X e Y é *fracamente sequencialmente fechado* se para qualquer sequência $(x_n) \subset \mathcal{D}(F)$ vale a implicação

$$x_n \rightharpoonup x \in X \text{ e } F(x_n) \rightarrow y \in Y \implies x \in \mathcal{D}(F) \text{ e } F(x) = y.$$

Uma propriedade importante de operadores F , que são totalmente contínuos e fracamente sequencialmente fechados, é que transformam sequências fracamente convergentes em sequências fortemente convergentes. Mais precisamente, se $(x_n) \subset \mathcal{D}(F)$ e $x \in \mathcal{D}(F)$, então

$$x_n \rightharpoonup x \implies F(x_n) \longrightarrow F(x), \quad (\text{A.12})$$

veja Exercício A.8.

Similarmente ao que ocorre no caso linear, c.f. Teorema A.1.8, operadores compactos estão fortemente relacionados a problemas localmente mal postos:

Teorema A.3.5. *Sejam X e Y espaços de Hilbert e $F: \mathcal{D}(F) \subset X \longrightarrow Y$ um operador totalmente contínuo e fracamente sequencialmente fechado. Assuma que X é separável, $\dim X = \infty$ e que $\bar{x} \in \text{int}(\mathcal{D}(F))$. Então (F, X, Y) é localmente mal posto em \bar{x} .*

Prova:

Seja $r > 0$. Como X é um espaço de Hilbert separável com dimensão infinita, X admite uma base ortonormal (e_n) . Agora, como $\bar{x} \in \text{int}(\mathcal{D}(F))$, existe $s > 0$ tal que $B_s[\bar{x}] := \{x \in X : \|x - \bar{x}\| \leq s\} \subset \mathcal{D}(F)$. Tome $0 < t < \min\{s, r\}$ e defina $x_n := \bar{x} + te_n$. Uma vez que $\|x_n - \bar{x}\| = t$, segue que $(x_n) \subset B_r(\bar{x}) \cap \mathcal{D}(F)$ e (x_n) não converge a \bar{x} . Por outro lado, como (e_n) é uma base ortonormal, essa converge fracamente a zero e $x_n \rightharpoonup \bar{x}$, que em vista de (A.12) implica $F(x_n) \longrightarrow F(\bar{x})$. Logo (F, X, Y) é localmente mal posto em \bar{x} (veja (A.10)). \square

Para definir um método de regularização para problemas lineares, c.f. Definição A.2.1, utilizamos o conceito de solução de norma mínima. A seguir, definimos o análogo para problemas não lineares.

Definição A.3.6. Sejam X e Y espaços normados, $\hat{x} \in X$ e $F: \mathcal{D}(F) \subset X \longrightarrow Y$ um operador contínuo. Fixe $y \in \mathcal{R}(F)$ e considere a pré-imagem de y , $\mathcal{S}(y) := \{x \in \mathcal{D}(F) : F(x) = y\} \neq \emptyset$. Um vetor $x^\dagger \in \mathcal{S}(y)$ é chamado de \hat{x} -solução de norma mínima em relação a y se

$$\|x^\dagger - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\|, \text{ para todo } x \in \mathcal{S}(y).$$

Se F é um operador linear e contínuo e X e Y são espaços de Hilbert, então uma única \hat{x} -solução de norma mínima existe para cada $\hat{x} \in X$, veja Exercício A.3. Como em geral F é não linear, o conjunto $\mathcal{S}(y)$ pode não ser convexo e não é possível garantir que uma \hat{x} -solução de norma mínima existirá. Porém, assumindo a condição do cone tangencial (A.11), é possível mostrar que o conjunto $\mathcal{S}(y) \cap B_\rho(x_0)$ é convexo (veja Exercício A.7), e a existência dessa solução será garantida sob algumas restrições adicionais, veja e.g. Rieder (2003, Lema 7.3.12).

A definição seguinte generaliza o conceito de método de regularização, dado pelo Definição A.2.1:

Definição A.3.7. Sejam X e Y espaços de Banach e $F: \mathcal{D}(F) \subset X \longrightarrow Y$ um operador contínuo. Um *Método de Regularização* para F consiste em um par $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}, \alpha)$, onde $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}$ é uma família de operadores contínuos $\mathcal{R}_\alpha: X \times Y \longrightarrow X$ e $\alpha: (0, \infty) \times Y \longrightarrow (0, \infty)$ é uma função satisfazendo (A.4), tais que para cada $y \in \mathcal{R}(F)$

$$\sup\{\|x^\dagger - \mathcal{R}_{\alpha(\delta, y^\delta)}(\hat{x}, y^\delta)\| : y^\delta \in Y, \|y - y^\delta\| \leq \delta\} \longrightarrow 0, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0.$$

Aqui x^\dagger é uma \hat{x} -solução de norma mínima, em relação a y .

A.4 Exercícios

Nessa seção de exercícios, a menos que o contrário seja explicitamente afirmado, assumiremos que X e Y são espaços de Hilbert reais e $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Exerc. A.1. Fixe $y \in Y$ e mostre que $x \in X$ satisfaz a equação normal $\mathcal{A}^* \mathcal{A}x = \mathcal{A}^* y$ se, e somente se, o resíduo do sistema $\mathcal{A}x = y$ é "normal" ao núcleo de \mathcal{A} , isto é, $(\mathcal{A}x - y) \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$.

Exerc. A.2. Fixe $y \in Y$ e mostre que o conjunto das soluções de mínimos quadrados

$$\mathcal{S}(y) := \{x \in X : \mathcal{A}^* \mathcal{A}x = \mathcal{A}^* y\} \tag{A.13}$$

é convexo e fechado.

Exerc. A.3. Sejam $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{A})^\perp$ e $\hat{x} \in X$. Mostre que existe um único vetor $x^\dagger \in \mathcal{S}(y)$ (c.f. (A.13)) tal que

$$\|\hat{x} - x^\dagger\| \leq \|\hat{x} - x\|, \text{ para todo } x \in \mathcal{S}(y).$$

Exerc. A.4. Sejam $M = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$ e $W = \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$. Mostre que \mathcal{A}^\dagger é caracterizada como sendo o único operador que satisfaz as quatro *equações de Moore–Penrose*:

- $\mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger = \text{proj}_M \Big|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)}$
- $\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} = \text{proj}_W$

- $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} = \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}^\dagger$

Exerc. A.5. Sejam X e Y espaços normados e $\mathcal{A}: X \longrightarrow Y$ linear. Mostre que se $\dim X < \infty$ ou $\dim Y < \infty$, então $\dim \mathcal{R}(\mathcal{A}) < \infty$. Conclua que nesse caso $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{A})}$.

Exerc. A.6. Sejam $X = \mathcal{C}[0, 1]$ o espaço das funções reais e contínuas definidas no intervalo $[0, 1]$ e $Y = \mathcal{C}_*^1[0, 1] := \{f \in \mathcal{C}[0, 1] : f' \in \mathcal{C}[0, 1] \text{ e } f(0) = 0\}$. Considere o operador integral $\mathcal{A}: X \longrightarrow Y$ definido por

$$(\mathcal{A}f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

- Mostre que \mathcal{A} está bem definido, é linear e bijetivo. (Dica: para mostrar que \mathcal{A} é injetiva, prove que $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{0\}$, usando o Teorema Fundamental do Cálculo.)
- Prove que a sequência $f_n(x) = n \sin(x/n^2)$, $0 \leq x \leq 1$, satisfaz $\|\mathcal{A}f_n\| \longrightarrow 0$, ao mesmo tempo que $\|f_n\| \longrightarrow \infty$.

Exerc. A.7. Assuma a condição do cone tangencial (A.11) e mostre que:

- Existem constantes positivas K_1 , K_2 e K_3 , dependentes de η , tais que

$$\|F(x) - F(w)\| \leq K_1 \|F'(x)(w - x)\| \leq K_2 \|F(x) - F(w)\|$$

e

$$\|F(x) - F(w)\| \leq K_3 \|F(x) - F(w) - F'(w)(x - w)\|,$$

para todo $x, w \in B_\rho(x_0)$.

- Para cada $y \in Y$, o conjunto $\mathcal{S}(y) = \{x \in B_\rho(x_0) : F(x) = y\}$ é convexo. (Dica: use os resultados do item a.)

Exerc. A.8. Seja $F: \mathcal{D}(F) \subset X \longrightarrow Y$ um operador totalmente contínuo e fracamente sequencialmente fechado (c.f. Definições A.3.3 e A.3.4). Prove que se $(x_n) \subset \mathcal{D}(F)$ e $x \in \mathcal{D}(F)$, então

$$x_n \rightharpoonup x \implies F(x_n) \longrightarrow y.$$

B Métodos de Regularização para Problemas Inversos

B.1 Métodos de Regularização para Problemas Lineares

A presente seção é dedicada à apresentação de exemplos concretos de métodos de regularização. Vamos iniciar nossa análise considerando apenas problemas lineares, sendo o caso não linear estudado posteriormente na Apêndice B.2. Dessa forma, vamos considerar que X e Y são espaços de Hilbert reais e $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$. Mais uma vez, gostaríamos de aproximar a solução generalizada $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$ do problema inverso ((A.2)), sendo $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\dagger)$ um vetor fixado e $y^\delta \in Y$ satisfazendo ((A.3)). Tendo em vista o Teorema A.2.3, vamos supor que o *nível de ruídos* $\delta > 0$ é conhecido.

Iniciemos a nossa análise definindo diferentes tipos de derivadas:

Definição B.1.1. Sejam X e Y espaços normados e $F: \mathcal{D}(F) \subset X \longrightarrow Y$ uma função (possivelmente não linear). Sejam $x \in \text{int}(\mathcal{D}(F))$ e $v \in X$. A *derivada direcional* de F , no ponto x e na direção de v , é definida por

$$DF(x, v) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + tv) - F(x)}{t},$$

caso esse limite exista.

Se a derivada direcional de F no ponto x existir em qualquer direção e, além disso, existir

um operador linear e limitado $\mathcal{T}: X \longrightarrow Y$ tal que

$$DF(x, w) = \mathcal{T}w, \quad \text{para todo } w \in X, \quad (\text{B.1})$$

diremos que F é *Gâteaux-diferenciável* em x e escrevemos $F'(x) = \mathcal{T}$. No caso particular $Y = \mathbb{R}$, chamaremos a derivada de F de *gradiente* de F e denotaremos $F'(x) = \nabla F(x)$.

Por fim, se existe um operador linear e contínuo $\mathcal{S}: X \longrightarrow Y$ tal que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - Sh\|}{\|h\|} = 0,$$

então diremos que F é *Fréchet-diferenciável* em x e denotamos $F'(x) = \mathcal{S}$.

Para que a derivada de Gâteaux esteja bem definida, é preciso mostrar que existe no máximo um operador linear e contínuo $\mathcal{T}: X \longrightarrow Y$, satisfazendo (B.1), veja Exercício B.1. É claro que se F é Fréchet-diferenciável em x , então F é também Gâteaux-diferenciável nesse ponto e as duas derivadas coincidem.

Exemplo 2. Sejam X um espaço de Hilbert real e $F: X \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional definido por $F(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$. Então F é Gâteaux-diferenciável em qualquer ponto $x \in X$ e $\nabla F(x) \simeq x$, isto é, o gradiente de F no ponto x pode ser identificado com o próprio x no seguinte sentido: Sejam $x, v \in X$. Como $\|x + tv\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, tv \rangle + \|tv\|^2$, temos que

$$DF(x, v) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t\langle x, v \rangle + t^2\|v\|^2}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\langle x, v \rangle + \frac{t}{2}\|v\|^2 \right) = \langle x, v \rangle.$$

Portanto, definindo o operador linear e contínuo $\mathcal{T}: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto \langle x, v \rangle$ obtemos $\nabla F(x) = \mathcal{T}$, ou seja, $\nabla F(x)v = \langle x, v \rangle$, para todo $v \in X$.

Se X é um espaço de Hilbert, então segue do Teorema de Riesz, veja Kreyszig (1991), que podemos identificar qualquer elemento f , do dual de X , com um único elemento v , do próprio espaço X , de modo que $f(x) = \langle v, x \rangle$, para todo $x \in X$. Dessa forma, no exemplo acima, podemos escrever apenas $\nabla F(x) = x$ em vez de $\nabla F(x) \simeq x$.

Se no exemplo acima tivermos

$$F(x) = \frac{1}{2}\|\mathcal{A}x - y^\delta\|^2, \quad (\text{B.2})$$

então $\nabla F(x) = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x - y^\delta)$, veja Exercício B.3.

Diversos métodos de regularização consistem em aproximar (de maneira estável), um minimizador do funcional definido em (B.2). Talvez o mais conhecido de todos seja o *método de Tikhonov*.

B.1.1 Método de Tikhonov

Na versão mais clássica desse método, o minimizador do funcional

$$T_\alpha(x) = \frac{1}{2} \|Ax - y^\delta\|^2 + \alpha \frac{1}{2} \|x\|^2, \quad \alpha > 0, \quad (\text{B.3})$$

é utilizado como aproximação para a solução do problema inverso (A.2). Aqui, o número real α desempenha o papel do parâmetro de regularização.

Perceba que, como \mathcal{A} é linear e a norma é um funcional estritamente convexo em espaços de Hilbert, o funcional de Tikhonov T_α é também estritamente convexo. Além disso, T_α é Gâteaux-diferenciável em qualquer ponto de x com $\nabla T_\alpha(x) = \mathcal{A}^*(Ax - y^\delta) + \alpha x$ (veja Exercício B.5). Sendo assim, o vetor

$$x_\alpha^\delta := \arg \min \{T_\alpha(x) : x \in X\} \quad (\text{B.4})$$

está bem definido, sendo o único minimizador de T_α , que satisfaz $\nabla T_\alpha(x_\alpha^\delta) = 0$. Com isso, obtemos que $x_\alpha^\delta = \mathcal{R}_\alpha y^\delta$, sendo

$$\mathcal{R}_\alpha = (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha \mathcal{I})^{-1} \mathcal{A}^*. \quad (\text{B.5})$$

Com uma escolha *a priori* apropriada, temos um método de regularização.

Teorema B.1.2. *Considere x_α^δ como definido em (B.4). Sejam $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ e $y^\delta \in Y$ satisfazendo (A.3). Se $\alpha = \alpha(\delta)$ é tal que*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad e \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} = 0, \quad (\text{B.6})$$

então

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} x_{\alpha(\delta)}^\delta = \mathcal{A}^\dagger y.$$

Ou seja, o par $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}, \alpha)$, com $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}$ definido em (B.5) e α em (B.6), é um método de regularização, c.f. Definição A.2.1.

Prova:

Sejam $\delta_n \rightarrow 0$, $\alpha_n := \alpha(\delta_n)$, $y_n := y^{\delta_n}$, $x_n := x_{\alpha_n}^{\delta_n}$ e

$$T_n(x) := \frac{1}{2} \|Ax - y_n\|^2 + \alpha_n \frac{1}{2} \|x\|^2. \quad (\text{B.7})$$

Como x_n é o único minimizador de T_n e $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$ é uma solução do problema inverso (já que $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$), obtemos

$$\frac{1}{2} \alpha_n \|x_n\|^2 \leq T_n(x_n) \leq T_n(x^\dagger) = \frac{1}{2} \|\mathcal{A}x^\dagger - y_n\|^2 + \alpha_n \frac{1}{2} \|x^\dagger\|^2 \leq \frac{1}{2} \delta_n^2 + \alpha_n \frac{1}{2} \|x^\dagger\|^2,$$

o que implica

$$\|x_n\|^2 \leq \frac{\delta_n^2}{\alpha_n} + \|x^\dagger\|^2. \quad (\text{B.8})$$

Juntando essa desigualdade com (B.6), obtemos que a sequência (x_n) é limitada e, como X é um espaço reflexivo, essa sequência admite uma subsequência fracamente convergente, digamos $x_{n_k} \rightharpoonup z \in X$. Agora, como \mathcal{A} é um operador linear e contínuo, $\mathcal{A}x_{n_k} \rightharpoonup \mathcal{A}z$. Usando que x_{n_k} é o único minimizador de T_{n_k} , obtemos

$$\frac{1}{2} \|\mathcal{A}x_{n_k} - y_{n_k}\|^2 \leq T_{n_k}(x_{n_k}) \leq T_{n_k}(x^\dagger) \leq \frac{1}{2} \delta_{n_k}^2 + \alpha_{n_k} \frac{1}{2} \|x^\dagger\|^2 \longrightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$. Como $y_{n_k} \rightarrow y$, temos que $\mathcal{A}x_{n_k} \rightarrow y$ e, como $\mathcal{A}x_{n_k} \rightharpoonup \mathcal{A}z$, concluímos que $\mathcal{A}z = y$.

Observe que o minimizador de T_n pertence a $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$, pois uma componente não nula em $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ aumentaria o segundo termo em (B.7), deixando o primeiro inalterado. Então $(x_n) \subset \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$, o que implica em $z \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$, mas x^\dagger é a única solução do problema inverso nesse subespaço (veja Teorema A.1.5) e, portanto, $z = x^\dagger$. Logo $x_{n_k} \rightharpoonup x^\dagger$. Aplicando o mesmo argumento a cada subsequência de (x_n) , obtemos que cada subsequência de (x_n) admite ela própria uma subsequência que converge fracamente a x^\dagger e, portanto,

$$x_n \rightharpoonup x^\dagger. \quad (\text{B.9})$$

Vamos provar agora que $\lim \|x_n\| = \|x^\dagger\|$ que, em conjunto com (B.9), provará que $x_n \rightarrow x^\dagger$. De fato, de (B.6) e (B.8), segue que $\limsup \|x_n\| \leq \|x^\dagger\|$ e, de (B.9), segue que $\|x^\dagger\| \leq \liminf \|x_n\|$, o que prova o resultado desejado. \square

O Método Clássico de Tikhonov é considerado um método de passo único, pois um parâmetro de regularização $\alpha(\delta)$ é escolhido e, em seguida, o vetor x_α^δ é computado. Nesse caso, não existe um processo iterativo para determinar a aproximação de x^\dagger . No entanto, muitas variações desse método utilizam processos iterativos, sendo úteis para determinar o parâmetro α *a posteriori*, para melhorar a aproximação x_α^δ em cada passo ou ambos.

No método conhecido como *Tikhonov-Phillips*, o funcional em (B.3) é novamente considerado. Porém agora o parâmetro de regularização α é determinado *a posteriori*, utilizando a seguinte regra: Escolha uma sequência $(\alpha_k) \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0 \quad \text{e} \quad \gamma < \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} < 1,$$

sendo $0 < \gamma < 1$ uma constante. Seja $x_k := \arg \min T_{\alpha_k}$ e defina

$$k_\delta := \inf \{k \in \mathbb{N} : \|\mathcal{A}x_k - y^\delta\| \leq \tau\delta\}, \quad (\text{B.10})$$

sendo $\tau > 1$ uma constante pré-fixada. O vetor x_{k_δ} é, então, utilizado como aproximação para x^\dagger . Procedendo dessa maneira, percebe-se que o parâmetro de regularização é escolhido como sendo o primeiro elemento na sequência (α_k) tal que $\|\mathcal{A}x_k - y^\delta\| \leq \tau\delta$. A regra (B.10) é chamada de *Princípio da Discrepância*.

Existem ainda, métodos de Tikhonov que utilizam uma iteração para melhorar a aproximação de x^\dagger em cada passo. Esse tipo de variação é chamado de método de *Tikhonov-iterado*, que a partir de uma aproximação inicial $x_0 \in X$, atualiza no k -ésimo passo, a aproximação x_k pela iteração

$$x_{k+1} := \arg \min \{T_k(x) : x \in X\}, \quad (\text{B.11})$$

sendo

$$T_k(x) = \frac{1}{2} \|Ax - y^\delta\|^2 + \alpha_k \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2,$$

onde a sequência $(\alpha_k) \subset \mathbb{R}^+$ pode ser escolhida de diversas formas. Se ela for constante, temos o chamado método de Tikhonov-iterado *estacionário*. Caso contrário, temos o método *não estacionário*. Para o método não estacionário, temos ainda a possibilidade de utilizar uma escolha *a priori* ou *a posteriori*. Por fim, a escolha *a posteriori* pode ser determinada de maneira explícita (como, por exemplo, $\alpha_k = \|Ax_k - y^\delta\|$), ou de maneira implícita (por exemplo, de modo que o minimizador de T_k satisfaça uma equação do tipo $\|Ax_{k+1} - y^\delta\| = 0.7\|Ax_k - y^\delta\|$).

Perceba que, de (B.11) segue que $\nabla T_k(x_{k+1}) = 0$ e daí

$$(\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha_k \mathcal{I})x_{k+1} = \mathcal{A}^* y^\delta + \alpha_k x_k.$$

Provamos, usando indução, que se $x_0 = 0$, então $x_k = \mathcal{R}_k y^\delta$, sendo

$$\mathcal{R}_k = \sum_{j=1}^k \alpha_k^{j-1} (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha_k \mathcal{I})^{-j} \mathcal{A}^*,$$

veja Exercício B.5. Além disso, usando $T_k(x_{k+1}) \leq T_k(x_k)$, obtemos a monotonia do resíduo:

$$\|Ax_{k+1} - y^\delta\| \leq \|Ax_k - y^\delta\|. \quad (\text{B.12})$$

Nesse método ou em qualquer outro tipo de método iterativo, o número de iterações é interpretado como sendo o parâmetro de regularização. Usualmente o Princípio da Discrepância (B.10) é utilizado como regra de parada para o método de Tikhonov-iterado. Com ele, em conjunto com uma escolha apropriada da sequência (α_k) , é possível mostrar que esse método rende um método de regularização, ou seja, $x_{k_\delta} \rightarrow x^\dagger$ quando $\delta \rightarrow 0$, veja Engl, Hanke e Neubauer (2000).

B.1.2 Método do Gradiente

Como é bem sabido, num espaço de Hilbert X , o oposto do gradiente de um funcional Gâteaux-diferenciável $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, no ponto $x \in X$, é a direção em que F decresce mais rapidamente a partir desse ponto. Esse fato motiva a definição do *Método do Gradiente*, que se aplica esse resultado a uma iteração apropriada, visando aproximar um minimizador de (B.2).

Mais precisamente, o método do gradiente inicia com uma aproximação inicial $x_0 \in X$ e, no passo k , segue na direção oposta ao gradiente do funcional F em x_k (veja (B.2)), ou seja,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \lambda_k \nabla F(x_k) \\ &= x_k - \lambda_k \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y^\delta), \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

sendo $\lambda_k > 0$ um escalar.

Cada escolha da sequência (λ_k) rende uma variação do método do gradiente. Vejamos algumas delas a seguir. Por um momento, vamos imaginar que não há ruídos nos dados, isto é, $\delta = 0$. Então, utilizando a identidade

$$\|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 - \|x_k - x^\dagger\|^2 = \|x_{k+1} - x_k\|^2 + 2\langle x_{k+1} - x_k, x_k - x^\dagger \rangle,$$

percebemos que o *erro de iteração* $e_k = \|x_k - x^\dagger\|^2$ será monotonamente decrescente, caso o lado direito da equação acima seja negativo. Em vista de (B.13), obtemos primeiro

$$\begin{aligned} e_{k+1} - e_k &= \|\lambda_k \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 - 2\lambda_k \langle (\mathcal{A}x_k - y), \mathcal{A}(x_k - x^\dagger) \rangle \\ &= \lambda_k^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 - 2\lambda_k \|\mathcal{A}x_k - y\|^2, \end{aligned}$$

e, em seguida, impondo a condição de que o termo após a última igualdade seja negativo, conseguimos a monotonia do erro de iteração:

$$\|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 \leq \|x_k - x^\dagger\|^2 \quad (\text{B.14})$$

sempre que $\lambda_k \leq \lambda_k^{\max}$, sendo

$$\lambda_k^{\max} := 2 \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}.$$

Mais ainda, se λ_k^{\max} for substituído por

$$\hat{\lambda}_k^{\max} := (1 - c_0)\lambda_k^{\max} = 2(1 - c_0) \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2},$$

com $0 < c_0 < 1$ constante, obtemos o *ganho*

$$\|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 - \|x_k - x^\dagger\|^2 \leq -2c_0\lambda_k \|\mathcal{A}x_k - y\|^2, \quad (\text{B.15})$$

sempre que $\lambda_k \leq \hat{\lambda}_k^{\max}$.

Observe agora que se $c_0 \leq 1/2$, então

$$\hat{\lambda}_k^{\max} \geq \frac{2(1 - c_0)}{\|\mathcal{A}^*\|^2} = \frac{2(1 - c_0)}{\|\mathcal{A}\|^2} \geq \frac{1}{\|\mathcal{A}\|^2} =: \lambda_{LW}.$$

O método do gradiente que utiliza o passo constante $\lambda_k = \lambda_{LW}$ é chamado de *Método de Landweber*, que, de acordo com o raciocínio acima, satisfaz (B.15) com $c_0 \leq 1/2$.¹

Outra variação do método do gradiente é chamada de *Método da Máxima Descida* (Steepest Descent), definida pelo seguinte procedimento: defina

$$x_\lambda = x_k - \lambda \nabla F(x_k)$$

e o funcional $G_k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$G_k(\lambda) = \|\mathcal{A}x_\lambda - y\|^2.$$

Agora escolha $\lambda = \lambda_{SD}$ de modo que G_k seja minimizado. Note que, nesse caso, o ponto $x_{k+1} = x_{\lambda_{SD}}$ irá minimizar o resíduo ao longo da direção oposta ao gradiente de F em x_k . Em particular, valerá a desigualdade: $\|\mathcal{A}x_{k+1} - y\|^2 = G_k(\lambda_{SD}) \leq G_k(0) = \|\mathcal{A}x_k - y\|^2$. É fácil comprovar que G_k é convexo, e impondo a condição $G'_k(\lambda_{SD}) = 0$, obtemos o minimizador (veja Exercício B.8):

$$\lambda_{SD} = \frac{\|\nabla F(x_k)\|^2}{\|\mathcal{A}\nabla F(x_k)\|^2} = \frac{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}{\|\mathcal{A}\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}.$$

Uma terceira variação do método do gradiente é o chamado *Método do Erro Mínimo* (Minimal Error), que utiliza como passo o minimizador, λ_{ME} , do funcional $H_k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$H_k(\lambda) = \|x_\lambda - x^\dagger\|^2.$$

Dessa forma, o iterado $x_{k+1} = x_{\lambda_{ME}}$ será aquele que minimiza o erro de iteração na direção oposta ao gradiente de F em x_k .

Perceba que, a princípio, a determinação do passo λ_{ME} depende da solução x^\dagger , que é desconhecida. No entanto, supondo que $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$, vemos que $\mathcal{A}x^\dagger = y$ e, portanto,

$$\begin{aligned} H_k(\lambda) &= \|(x_k - x^\dagger) - \lambda \nabla F(x_k)\|^2 \\ &= \|(x_k - x^\dagger)\|^2 - 2\lambda \langle x_k - x^\dagger, \nabla F(x_k) \rangle + \|\lambda \nabla F(x_k)\|^2 \\ &= \|(x_k - x^\dagger)\|^2 - 2\lambda \langle \mathcal{A}(x_k - x^\dagger), \mathcal{A}x_k - y \rangle + \|\lambda \nabla F(x_k)\|^2 \\ &= \|(x_k - x^\dagger)\|^2 - 2\lambda \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 + \lambda^2 \|\nabla F(x_k)\|^2. \end{aligned}$$

Impondo a condição $H'_k(\lambda_{ME}) = 0$, obtemos

$$\lambda_{ME} = \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\nabla F(x_k)\|^2} = \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}.$$

¹Muitos autores consideram o passo do método de Landweber como sendo uma constante satisfazendo $0 < \lambda_{LW} < 2/\|\mathcal{A}\|^2$ ou simplesmente uma constante positiva pequena o suficiente. Nesse texto, consideraremos, por simplicidade, que $\lambda_{LW} = 1/\|\mathcal{A}\|^2$, no entanto, em experimentos numéricos, é frequentemente mais apropriado ter maior flexibilidade para a escolha desse passo.

Como se vê claramente, $\lambda_{ME} \leq \hat{\lambda}_k^{\max}$ caso $c_0 \leq 1/2$. De fato, temos

$$0 < \lambda_{LW} \leq \lambda_{SD} \leq \lambda_{ME} \leq \hat{\lambda}_k^{\max}, \quad (\text{B.16})$$

onde a última desigualdade vale para $c_0 \leq 1/2$ (veja Exercício B.9).

O método do gradiente normalmente utiliza o princípio da discrepância (B.10) como critério de parada. No entanto, para o caso sem ruídos ($\delta = 0$), não é possível provar que o algoritmo termina após um número finito de passos, isto é, que $k_\delta < \infty$ em (B.10). Observe, porém que, para o caso $\delta = 0$ e $k_\delta = \infty$, segue da desigualdade (B.15) com $c_0 = 1/2$ que, para qualquer $\lambda_k \in [\lambda_{LW}, \hat{\lambda}_k^{\max}]$, vale

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{LW}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 - \|x_k - x^\dagger\|^2) \\ &= \|\mathcal{A}\| \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_0 - x^\dagger\|^2 - \|x_n - x^\dagger\|^2) \leq \|\mathcal{A}\| \|x_0 - x^\dagger\|^2 < \infty, \end{aligned}$$

o que mostra que $\mathcal{A}x_k \rightarrow y$ quando $k \rightarrow \infty$.

A desigualdade (B.15) também pode ser usada para mostrar que a sequência (x_k) é de Cauchy (Exercício B.12) e, portanto, convergente. O limite dessa sequência será uma solução de $\mathcal{A}x = y$, já que $\mathcal{A}x_k \rightarrow y$. Mais do que isso, se $x_0 = 0$, então $x_k \rightarrow x^\dagger$, pois, nesse caso, x_k e x^\dagger pertencem ao subespaço $\mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ (veja Exercício B.4).

A estabilidade do método do gradiente consiste, a grosso modo, em provar que, para cada k fixo, $x_k^\delta \rightarrow x_k$ quando $\delta \rightarrow 0$ (veja Exercício B.11). A propriedade da regularização decorre, então, da monotonia do erro de iteração (B.14), juntamente com a convergência sem ruídos e a estabilidade. Vamos provar essa afirmação para o caso $k_\delta \rightarrow \infty$ quando $\delta \rightarrow 0$.

Prova da propriedade de regularização: Seja $\delta_j \rightarrow 0$ e fixe $\epsilon > 0$. Pela convergência sem ruídos, temos que $x_k \rightarrow x^\dagger$, quando $k \rightarrow \infty$. Então, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{m_1} - x^\dagger\| < \epsilon/2$. Por outro lado, da estabilidade, segue que existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{m_1}^{\delta_j} - x_{m_1}\| < \epsilon/2$ sempre que $j > m_2$. Por fim, como $k_{\delta_j} \rightarrow \infty$, quando $j \rightarrow \infty$, existe $m_3 \in \mathbb{N}$ tal que $k_{\delta_j} > m_1$ para todo $j > m_3$. Usando a monotonia do erro de iteração (B.14), obtemos para $j > \max\{m_2, m_3\}$ que

$$\|x_{k_{\delta_j}}^{\delta_j} - x^\dagger\| \leq \|x_{m_1}^{\delta_j} - x^\dagger\| \leq \|x_{m_1}^{\delta_j} - x_{m_1}\| + \|x_{m_1} - x^\dagger\| < \epsilon.$$

Logo $x_{k_\delta}^\delta \rightarrow x^\dagger$ quando $\delta \rightarrow 0$.

B.2 Métodos de Regularização para Problemas Não Lineares

Sejam X e Y espaços de Hilbert e $F: \mathcal{D}(F) \subset X \rightarrow Y$ um operador (possivelmente não linear) contínuo. Nesta seção, vamos analisar métodos de regularização para aproximar a

solução do problema inverso

$$F(x) = y, \quad (\text{B.17})$$

supondo que y pertença a imagem de F e sendo conhecidos apenas um vetor com ruídos $y^\delta \in Y$, satisfazendo $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ e o nível de ruídos $\delta > 0$.

B.2.1 Métodos de Tikhonov e do Gradiente

Os métodos de Tikhonov e do gradiente, apresentados para problemas lineares nas Apêndices B.1.1 e B.1.2 respectivamente, possuem versões para problemas não lineares.

O método clássico de Tikhonov para problemas não lineares é definido por $x_\alpha^\delta \in \arg \min\{T_\alpha(x) : x \in \mathcal{D}(F)\}$, sendo

$$T_\alpha(x) = \frac{1}{2} \|F(x) - y^\delta\|^2 + \alpha \frac{1}{2} \|x\|^2, \quad \alpha > 0.$$

Como F é não linear, o funcional T_α é em geral não convexo. Sendo assim, T_α pode admitir diversos minimizadores, podendo inclusive ter minimizadores locais. Se F é Fréchet-diferenciável em seu domínio, então, usando a regra da cadeia, obtemos que

$$\nabla T_\alpha(x) = F'(x)^*(F(x) - y^\delta) + \alpha x.$$

No entanto, mesmo que um vetor $\hat{x} \in \text{int}(\mathcal{D}(F))$ satisfaça a equação não linear $\nabla T_\alpha(\hat{x}) = 0$, não é possível garantir que esse seja um minimizador global de T_α .

De um modo geral, o problema de determinar um minimizador de T_α pode ser bastante complicado na prática e usualmente exige a aplicação de técnicas sofisticadas de otimização, além do requerimento de hipóteses restritivas sobre a função F .

Nesse contexto, o método de Tikhonov–Phillips é definido pela iteração:

$$x_n^\delta \in \arg \min\{T_n(x) : x \in \mathcal{D}(F)\}, \quad (\text{B.18})$$

sendo

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \|F(x) - y^\delta\|^2 + \alpha_n \frac{1}{2} \|x\|^2,$$

onde $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}^+$ é uma sequência apropriada de parâmetros. O critério de parada usual é novamente o princípio da discrepância, que, nesse caso, é dado por

$$n_\delta := \inf\{n \in \mathbb{N} : \|F(x_n) - y^\delta\| \leq \tau \delta\}, \quad (\text{B.19})$$

sendo $\tau > 1$ uma constante pré-definida, e desse modo espera-se que se tenha $x_{n_\delta} \longrightarrow x^\dagger$ quando $\delta \longrightarrow 0$, c.f. Definição A.3.6 com $\hat{x} = 0$.

O método de Tikhonov-iterado, por sua vez, é definido para problemas não lineares pela iteração definida em (B.18), porém com

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \|F(x) - y^\delta\|^2 + \alpha_{n-1} \frac{1}{2} \|x - x_{n-1}\|^2,$$

a partir de uma aproximação inicial $x_0 \in \mathcal{D}(F)$. Aqui, $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}^+$ é uma sequência apropriada.

Com relação aos métodos do gradiente, esses são definidos pela iteração:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \lambda_n \nabla H(x_n) \\ &= x_n - \lambda_n F'(x_n)^*(F(x_n) - y^\delta), \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

a partir de uma aproximação inicial $x_0 \in \mathcal{D}(F)$. Aqui $H: \mathcal{D}(F) \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $H(x) = \frac{1}{2} \|F(x) - y^\delta\|^2$ e F' é a derivada de Fréchet de F . Mais uma vez, cada regra específica para a sequência de passos (λ_n) define uma variação específica do método do gradiente. Usando a condição do cone tangencial (A.11), obtemos variações dos métodos de Landweber, máxima descida e erro mínimo, veja Margotti (2018). Em particular, o *Método de Landweber não linear* é dado por:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda F'(x_n)^*(F(x_n) - y^\delta), \quad (\text{B.21})$$

sendo $\lambda > 0$ uma constante pequena o suficiente.

B.2.2 Métodos de Newton Inexato

Como o próprio nome sugere, esses métodos são baseados no método de Newton. Lembre que o n -ésimo passo do método de Newton lineariza a equação não linear $F(x) = y^\delta$ em torno do ponto corrente x_n . Então encontra uma solução para o sistema linearizado $\mathcal{A}_n s_n = b_n^\delta$, sendo $\mathcal{A}_n = F'(x_n)$ e $b_n^\delta = y^\delta - F(x_n)$. A solução desse sistema é, então, usada para atualizar do vetor corrente: $x_{n+1} = x_n + s_n$.

Métodos de Newton inexato aplicam um procedimento similar, porém o sistema linear $\mathcal{A}_n s = b_n^\delta$ deve ser resolvido de maneira inexata. De fato, se o problema inverso associado a (B.17) é localmente mal posto em x_n , então sob condições razoáveis, o sistema linearizado será localmente mal posto (veja a Proposição A.3 e o Teorema A.3.2). Desse modo, é preciso aplicar um método de regularização para aproximar uma solução do sistema linear $\mathcal{A}_n s = b_n^\delta$ de maneira apropriada.

Se a regularização de Tikhonov é usada para aproximar a solução do sistema linear em questão, o método resultante é chamado de *Método de Levenberg–Marquardt* (LM). Assim esse método inicia com um vetor $x_0 \in \mathcal{D}(F)$ e segue com a iteração $x_{n+1} = x_n + s_n$, sendo

$$s_n = \arg \min T_n(s), \quad \text{com} \quad T_n(s) = \frac{1}{2} \|\mathcal{A}_n s - b_n^\delta\|^2 + \alpha_n \frac{1}{2} \|s\|^2, \quad (\text{B.22})$$

onde $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}^+$ é uma sequência que pode ser definida tanto *a priori* quanto *a posteriori*.

O método de LM termina com o Princípio da Discrepância (B.19). Caso a sequência (α_n) seja escolhida apropriadamente, temos que $\lim_{\delta \rightarrow 0} x_{n_\delta} = x^\dagger$. Escolhas comuns de sequências (α_n) definidas *a priori* incluem a sequência constante $\alpha_n = \alpha > 0$ e a *sequência geométrica*: $\alpha_n = \alpha_0 r^n$ com $\alpha_0 > 0$ e $0 < r < 1$.

Outros métodos de regularização podem ser aplicados ao sistema linear $\mathcal{A}_n s = b_n^\delta$, cada um deles gerando um método diferente. Rieder (1999) unifica a ideia de métodos de Newton inexato e introduz o chamado REGINN (REGularization based on INexact Newton method), uma classe de algoritmos que funciona com duas iterações, uma interna e uma externa. Similarmente ao método de Newton, a *iteração externa* é dada por $x_{n+1} = x_n + s_n$, sendo s_n uma aproximação para a solução do sistema linear $\mathcal{A}_n s = b_n^\delta$. A *iteração interna*, por sua vez, aplica um método de regularização iterativo ao sistema linear e gera uma sequência em k , $(s_{n,k})_k$, a partir de $s_{n,0} = 0$. A iteração interna termina quando o índice

$$k_n := \inf\{k \in \mathbb{N} : \|\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n^\delta\| < \mu_n \|b_n^\delta\|\} \quad (\text{B.23})$$

é alcançado e, então, definimos $s_n = s_{n,k_n}$. Aqui $(\mu_n) \subset (0, 1)$ é uma sequência apropriada de tolerâncias.

A convergência do algoritmo REGINN já foi provada utilizando diferentes iterações internas tais como: métodos do tipo Tikhonov, do tipo gradiente, métodos mistos, método do gradiente conjugado, etc. veja Margotti (2015) e Rieder (1999, 2006). Além disso, taxas de convergência foram provadas em Rieder (2001) e diversas modificações e aperfeiçoamentos foram propostos em espaços de Banach e com penalizações convexas em Margotti (2018) e Margotti (2015).

Utilizando a condição do cone tangencial (A.11), a análise de convergência do algoritmo REGINN utiliza técnicas similares àquelas usadas na análise dos métodos lineares, apresentadas na seção anterior. Por exemplo, vamos imaginar que não há ruídos ($\delta = 0$) e que o método do gradiente é utilizado como iteração interna. Então se torna:

$$s_{n,k+1} = s_{n,k} - \lambda_{n,k} \mathcal{A}_n^* (\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n). \quad (\text{B.24})$$

Agora aplicamos a definição $e_n := x^\dagger - x_n$ para obter a identidade:

$$\|s_{n,k+1} - e_n\|^2 - \|s_{n,k} - e_n\|^2 = \|s_{n,k+1} - s_{n,k}\|^2 + 2\langle s_{n,k+1} - s_{n,k}, s_{n,k} - e_n \rangle.$$

Observe que, de (B.24), segue que

$$\begin{aligned} \langle s_{n,k+1} - s_{n,k}, s_{n,k} - e_n \rangle &= -\lambda_{n,k} \langle \mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n, \mathcal{A}_n (s_{n,k} - e_n) \rangle \\ &= -\lambda_{n,k} \left[\langle \mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n, \mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n, \mathcal{A}_n e_n - b_n \rangle \right] \\ &\leq \lambda_{n,k} \|\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n\| \left[\|\mathcal{A}_n e_n - b_n\| - \|\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n\| \right], \end{aligned}$$

onde a última estimativa segue da desigualdade de Cauchy–Schwarz. Mas, enquanto $k < k_n$, c.f. (B.23), temos que $\|b_n\| \leq \frac{1}{\mu_n} \|\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n\|$ e, usando a condição do cone tangencial (A.11), juntamente com $F(x^\dagger) = y$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_n e_n - b_n\| &= \|F'(x_n)(x_n - x^\dagger) - F(x_n) + F(x^\dagger)\| \\ &\leq \eta \|F(x_n) - F(x^\dagger)\| = \eta \|b_n\| \leq \frac{\eta}{\mu_n} \|\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n\|. \end{aligned}$$

Por fim, restringindo a tolerância μ_n ao intervalo $(\eta, 1)$, obtemos em vista de (B.24) que

$$\|s_{n,k+1} - e_n\|^2 - \|s_{n,k} - e_n\|^2 \leq \lambda_{n,k}^2 \|\mathcal{A}_n^*(\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n)\|^2 - 2\lambda_{n,k} C_n \|\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n\|^2,$$

com $C_n := 1 - \eta/\mu_n > 0$. Desse modo, para obter a monotonia do erro na iteração interna, exigimos que o lado direito da desigualdade acima seja negativo. Assim

$$\|s_{n,k+1} - e_n\|^2 \leq \|s_{n,k} - e_n\|^2, \quad k = 0, \dots, k_n - 1, \quad (\text{B.25})$$

sempre que $\lambda_{n,k} \leq \lambda_{n,k}^{\max}$, sendo

$$\lambda_{n,k}^{\max} := \frac{2C_n \|\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n\|^2}{\|\mathcal{A}_n^*(\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n)\|^2}.$$

Similarmente ao que foi feito na última seção, se $\lambda_{n,k}^{\max}$ for substituído por $\hat{\lambda}_{n,k}^{\max} := (1 - c_0)\lambda_{n,k}^{\max}$, com $0 < c_0 < 1$, então

$$\|s_{n,k+1} - e_n\|^2 - \|s_{n,k} - e_n\|^2 \leq -\lambda_{n,k} p_n \|\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n\|^2, \quad (\text{B.26})$$

para $k = 0, \dots, k_n - 1$, sempre que $\lambda_{n,k} \leq \hat{\lambda}_{n,k}^{\max}$. Aqui

$$p_n := 2c_0 C_n = 2c_0 \left(1 - \frac{\eta}{\mu_n}\right) > 0. \quad (\text{B.27})$$

Agora observe que

$$\hat{\lambda}_{n,k}^{\max} \geq \frac{2(1 - c_0)C_n}{\|\mathcal{A}_n\|^2} =: \lambda_n. \quad (\text{B.28})$$

Nesse contexto, o método de Landweber será a iteração interna do algoritmo REGINN, se o método do gradiente com o passo $\lambda_{n,k} = \lambda_n$ seja utilizado. Perceba que λ_n é constante em k e, portanto, não varia durante a iteração interna.

Perceba que, para qualquer $j < k_n$, vale a desigualdade $\mu_n \|b_n\| \leq \|\mathcal{A}_n s_{n,j} - b_n\|$, c.f. (B.23). Segue, então, de (B.26) com $c_0 = 1/2$, que para qualquer j natural menor do que k_n e para qualquer $\lambda_{n,k} \in [\lambda_n, \hat{\lambda}_{n,k}^{\max}]$, vale a desigualdade

$$\begin{aligned} j \frac{C_n^2}{\|\mathcal{A}_n\|^2} (\mu_n \|b_n\|)^2 &= j \lambda_n p_n (\mu_n \|b_n\|)^2 \leq \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_{n,k} p_n \|\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n\|^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{j-1} (\|s_{n,k} - e_n\|^2 - \|s_{n,k+1} - e_n\|^2) \\ &= \|s_{n,0} - e_n\|^2 - \|s_{n,j} - e_n\|^2 \leq \|s_{n,0} - e_n\|^2 = \|x_n - x^\dagger\|^2 < \infty, \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

o que mostra que $j < \infty$ e, portanto, $k_n < \infty$. Isso significa que a iteração interna termina após um número finito de passos.

Veja que, da monotonia do erro na iteração interna (B.25), obtemos a monotonia da iteração externa, pois

$$\|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 = \|s_{n,k_n} - e_n\|^2 \leq \dots \leq \|s_{n,0} - e_n\|^2 = \|x_n - x^\dagger\|^2.$$

B.3 Exercícios

Nesta seção de exercícios, a menos que o contrário seja explicitamente afirmado, assumiremos que X e Y são espaços de Hilbert reais e $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Exercícios referentes ao Apêndice B.1

Exerc. B.1. Sejam X e Y espaços normados, $F: \mathcal{D}(F) \subset X \longrightarrow Y$ e $x \in \text{int}(\mathcal{D}(F))$. Suponha que existam operadores lineares $\mathcal{T}, \mathcal{S}: X \longrightarrow Y$ tais que

$$DF(x, v) = \mathcal{T}v = \mathcal{S}v \quad \text{para todo } v \in X.$$

Prove que $\mathcal{T} = \mathcal{S}$. Conclua que a derivada de Gâteaux é única. Prove também que se $\mathcal{D}(F) = X$ e F é linear e limitado, então $F'(x)v = F(v)$, para todo $x, v \in X$.

Exerc. B.2. Sejam X e Y espaços normados, $F: \mathcal{D}(F) \subset X \longrightarrow Y$ e $G: \mathcal{D}(G) \subset X \longrightarrow Y$ funções Gâteaux-diferenciáveis num ponto $x \in \text{int}(\mathcal{D}(F)) \cap \text{int}(\mathcal{D}(G))$ e λ um escalar. Mostre que $F + \lambda G$ é Gâteaux-diferenciável em x e $(F + \lambda G)'(x) = F'(x) + \lambda G'(x)$.

Exerc. B.3. Fixe $y \in Y$ e prove que o funcional $F: X \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por $F(x) = \frac{1}{2}\|\mathcal{A}x - y\|^2$, satisfaz

$$DF(x, v) = \langle \mathcal{A}x - y, \mathcal{A}v \rangle, \quad \text{para todo } x, v \in X.$$

Conclua que F é Gâteaux-diferenciável em qualquer ponto $x \in X$ e que $\nabla F(x) = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x - y)$.

Exerc. B.4. Fixe $y \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Suponha que $x_0 = 0$, $\delta = 0$ e $k_\delta = \infty$. Prove que todas as variações dos métodos de Tikhonov e do gradiente apresentadas no Apêndice B.1 satisfazem $x_k \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Mostre ainda que se (x_k) converge a uma solução $\hat{x} \in X$ de $\mathcal{A}x = y$, então $\hat{x} - x^\dagger \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp \cap \mathcal{N}(\mathcal{A})$. Conclua que, nesse caso, $x_k \longrightarrow x^\dagger$. (Dica: para mostrar que os métodos iterativos satisfazem $x_k \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$, prove antes que $x_k - x_{k-1} \in \mathcal{N}(\mathcal{A})^\perp$ e depois use uma soma telescópica.)

Exerc. B.5. Fixe vetores $x_0 \in X$ e $y^\delta \in Y$ e uma sequência $(\alpha_k) \subset \mathbb{R}^+$. Defina $x_{k+1} = \arg \min\{T_k(x) : x \in X\}$, onde $T_k: X \longrightarrow \mathbb{R}$ é o funcional definido por

$$T_k(x) = \frac{1}{2}\|\mathcal{A}x - y^\delta\|^2 + \alpha_k \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2.$$

Prove que T_k é convexo e Gâteaux-diferenciável em todos os pontos de X . Mostre ainda que o minimizador de T_k satisfaz

$$(\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha \mathcal{I})x_{k+1} = \mathcal{A}^* y^\delta + \alpha x_k.$$

Prove também que se $x_0 = 0$, então $x_k = \mathcal{R}_k y^\delta$, onde

$$\mathcal{R}_k = \sum_{j=1}^k \alpha_k^{j-1} (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha_k \mathcal{I})^{-j} \mathcal{A}^*.$$

Exerc. B.6. Considere o método de Tikhonov-iterado (c.f. (B.11)).

a. Mostre que

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{1}{\alpha_k} \mathcal{A}^* (\mathcal{A}x_{k+1} - y^\delta).$$

b. Use o resultado do item a. em conjunto com a identidade

$$\|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 - \|x_k - x^\dagger\|^2 = -\|x_{k+1} - x_k\|^2 + 2\langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x^\dagger \rangle,$$

para provar o ganho

$$\|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 - \|x_k - x^\dagger\|^2 = -\|x_{k+1} - x_k\|^2 - \frac{2}{\alpha_k} \|\mathcal{A}x_{k+1} - y\|^2 \quad (\text{B.30})$$

no caso sem ruídos ($\delta = 0$).

- c. Prove que se $\delta = 0$, $k_\delta = \infty$ e a sequência (α_k^{-1}) não é somável, então $\mathcal{A}x_k \rightarrow y$, quando $k \rightarrow \infty$.
- d. Fixe $c > 1$. Mostre que se o número positivo $\|\mathcal{A}\|^2/(c-1)$ é uma cota inferior para a sequência (α_k) , então

$$\|\mathcal{A}x_k - y^\delta\| \leq c \|\mathcal{A}x_{k+1} - y^\delta\|.$$

(Dica: use a desigualdade

$$\|\mathcal{A}x_k - y^\delta\| - \|\mathcal{A}x_{k+1} - y^\delta\| \leq \|\mathcal{A}(x_k - x_{k+1})\|$$

em conjunto com o item a.)

- e. Prove que se $\delta > 0$, $\tau > c > 1$ e $\alpha_k \geq \|\mathcal{A}\|^2/(c-1)$, então para todo $k < k_\delta$ (c.f. (B.10)) vale

$$\|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 - \|x_k - x^\dagger\|^2 \leq -\|x_{k+1} - x_k\|^2 - \frac{2}{\alpha_k} \left(1 - \frac{c}{\tau}\right) \|\mathcal{A}x_{k+1} - y^\delta\|^2. \quad (\text{B.31})$$

- f. Mostre que se $\delta > 0$, $\alpha_k \geq \|A\|^2/(c-1)$ e (α_k^{-1}) não é somável, então o método de Tikhonov-iterado termina com a discrepância (B.10) após um número finito de iterações, isto é, $k_\delta < \infty$. (Dica: assumo o contrário. Então $\tau\delta < \|Ax_{k+1} - y^\delta\|$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Aplique uma soma em (B.31) para derivar uma contradição.)

Exerc. B.7. Considere o método de Tikhonov-iterado (c.f. (B.11)) sem ruídos ($\delta = 0$). Assuma que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} = \infty$ e que $Ax_0 \neq y$.

- a. Mostre que a iteração não termina, isto é, que $k_\delta = \infty$. (Dica: assumo que $k_\delta \in \mathbb{N}$. Use (B.10) para concluir que $Ax_{k_\delta} = y$. Aplique indução, juntamente com o item a. do Exercício B.6, para concluir que $Ax_k = y$, para $k = 0, \dots, k_\delta$.)
- b. Mostre que (x_k) é uma sequência de Cauchy. (Dica: fixe números naturais $m > n$ e use a identidade

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\|^2 &= [\|x_n - x^\dagger\|^2 - \|x_m - x^\dagger\|^2] + 2\langle x_m - x_n, x_m - x^\dagger \rangle \\ &= [\|x_n - x^\dagger\|^2 - \|x_m - x^\dagger\|^2] + 2 \sum_{j=n}^{m-1} \langle x_{j+1} - x_j, x_m - x^\dagger \rangle, \end{aligned}$$

em conjunto com (B.30) e a monotonia do resíduo (B.12). Repare que o termo nos colchetes converge a zero devido a monotonia do erro de iteração.)

- c. Prove que (x_k) converge a uma solução do problema inverso $Ax = y$. (Dica: use o item c. do Exercício B.6.)
- d. Mostre que $x_k \rightarrow x^\dagger$ quando $k \rightarrow \infty$. (Dica: use o Exercício B.4.)

Exerc. B.8. Fixe vetores $x \in X$ e $y \in Y$ e defina $x_\lambda := x - \lambda A^*(Ax - y)$. Mostre que o funcional $G: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definido por

$$G(\lambda) = \|Ax_\lambda - y\|^2,$$

é a restrição de um polinômio de segundo grau, que seu único minimizador é

$$\lambda = \frac{\|A^*(Ax_k - y)\|^2}{\|AA^*(Ax_k - y)\|^2}.$$

Exerc. B.9. Fixe $w \in Y$ e prove que se $c_0 \leq 1/2$, então

$$0 < \frac{1}{\|A\|} \leq \frac{\|A^*w\|}{\|AA^*w\|} \leq \frac{\|w\|}{\|A^*w\|} \leq \frac{2(1-c_0)\|w\|}{\|A^*w\|}.$$

Em particular, se $y \in Y$, $x_k \in X$ e $w = Ax_k - y$, então (B.16) vale.

Exerc. B.10. Prove por indução que, para o método de Landweber (c.f. (B.13)) com $\lambda_k = \text{constante} = \lambda > 0$ com a aproximação inicial $x_0 = 0$, vale $x_k = \mathcal{R}_k y$, sendo

$$\mathcal{R}_k = \lambda \sum_{j=0}^{k-1} (I - \lambda A^* A)^j A^*.$$

Exerc. B.11. Fixe $y \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ e seja $(y^{\delta_j}) \subset Y$ uma sequência satisfazendo $\|y^{\delta_j} - y\| \leq \delta_j$, em que a sequência de ruídos positivos (δ_j) converge a zero. Considere o método de Landweber, definido por

$$x_{k+1}^{\delta_j} = x_k^{\delta_j} - \lambda \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^{\delta_j} - y^{\delta_j}),$$

em que $\lambda > 0$ é uma constante. No caso sem ruídos ($\delta = 0$), considere a iteração

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y).$$

Mostre por indução que se $x_0^{\delta_j} = x_0$, para todo $j \in \mathbb{N}$, então, para cada $k \in \mathbb{N}$, vale a estabilidade:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_k^{\delta_j} = x_k.$$

Exerc. B.12. Use a desigualdade (B.15), em conjunto com uma identidade apropriada, similar àquela no item b. do Exercício B.7, para mostrar que, no caso sem ruídos ($\delta = 0$ e $k_\delta = \infty$), a sequência gerada por (B.13) é de Cauchy.

Exercícios referentes ao Apêndice B.2

A menos que o contrário seja explicitamente afirmado, assumiremos nos exercícios a seguir que X e Y são espaços de Hilbert reais e $F: \mathcal{D}(F) \subset X \rightarrow Y$ é um operador contínuo.

Exerc. B.13. Neste exercício, consideramos o algoritmo REGINN sem ruídos ($\delta = 0$), com a iteração interna usando o método do gradiente (B.24). Assuma que F satisfaça a condição do cone tangencial, c.f. (A.11) e que y pertença a imagem de F .

a. Use (B.26) para mostrar que

$$\|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 - \|x_n - x^\dagger\|^2 \leq - \sum_{k=0}^{k_n-1} p_n \lambda_{n,k} \|\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n\|^2,$$

sendo k_n definido em (B.23).

b. Conclua que se $n_\delta = \infty$ (c.f. (B.19)), então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_n-1} p_n \lambda_{n,k} \|\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n\|^2 \leq \|x_0 - x^\dagger\|^2 < \infty.$$

c. Escolha $\mu_{\min} \in (\eta, 1)$ e restrinja as tolerâncias μ_n ao intervalo $(\mu_{\min}, 1)$. Prove que

$$0 < p := 2c_0 \left(1 - \frac{\eta}{\mu_{\min}} \right) < p_n.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, c.f. (B.27).

d. Assuma que $\|F'(x)\| \leq M$ para todo $x \in \mathcal{D}(F)$ e mostre que

$$\hat{\lambda}_{n,k}^{\max} \geq \frac{2(1-c_0)\left(1 - \frac{\eta}{\mu_{\min}}\right)}{M^2} =: \lambda_{\min} > 0,$$

c.f. (B.28). Conclua que se $\lambda_{n,k} \in [\lambda_{\min}, \hat{\lambda}_{n,k}^{\max}]$, então para o caso $n_\delta = \infty$ temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|b_n\|^2 < \infty,$$

e, portanto, $F(x_n) \rightarrow y$, quando $n \rightarrow \infty$.

Exerc. B.14. Neste exercício, considere o algoritmo REGINN com a iteração interna usando o método do gradiente (B.24): assuma que os dados possuem ruídos ($\delta > 0$) e suponha que F satisfaça a condição do cone tangencial, c.f. (A.11). Suponha ainda, que y pertença a imagem de F e $y^\delta \in Y$ seja um vetor, satisfazendo $\|y - y^\delta\| \leq \delta$. Defina $\mathcal{A}_n := F'(x_n)$, $b_n^\delta := y^\delta - F(x_n)$ e $e_n = x_n - x^\dagger$, c.f. Definição A.3.6.

a. Mostre que

$$\|\mathcal{A}_n e_n - b_n^\delta\| \leq (1 + \eta)\delta + \eta\|b_n^\delta\|.$$

b. Suponha que a constante τ em (B.19) satisfaça

$$\tau > \frac{1 + \eta}{1 - \eta}.$$

Prove que, para todo $n < n_\delta$ vale

$$\mu_{\min,n} := \eta + \frac{(1 + \eta)\delta}{\|b_n^\delta\|} < 1.$$

Além disso, mostre que, para $n < n_\delta$ e $k < k_n$ (c.f. (B.23)), vale

$$\|\mathcal{A}_n e_n - b_n^\delta\| \leq \frac{\mu_{\min,n}}{\mu_n} \|\mathcal{A}_n s_{n,k} - b_n^\delta\|.$$

c. Restrinja a tolerância μ_n ao intervalo $(\mu_{\min,n}, 1)$, com $\mu_{\min,n}$ definido no item anterior. Defina um tamanho de passo máximo $\hat{\lambda}_{n,k}^{\max,\delta} > 0$ de modo que uma desigualdade análoga à (B.26) seja válida para o caso com ruídos.

d. Derive uma desigualdade análoga à (B.28) para obter um tamanho de passo mínimo $\lambda_n^\delta > 0$. Mostre que se o passo $\lambda_{n,k}^\delta$ pertence ao intervalo $[\lambda_n^\delta, \hat{\lambda}_{n,k}^{\max,\delta}]$, então $k_n < \infty$, isto é, a iteração interna termina após um número finito de iterações. (Dica: assumo o contrário e aplique uma soma em k à desigualdade obtida no item anterior para derivar uma desigualdade análoga à (B.29) e, então, obter uma contradição.)

- e. Seja τ definido como no item b. acima e tome $\eta + (1 + \eta)/\tau < \mu_{\min} < 1$. Restrinja as tolerâncias μ_n ao intervalo $[\mu_{\min}, 1)$ e assuma que $\|F'(x)\| \leq M$, para todo $x \in \mathcal{D}(F)$. Mostre que, com a mesma restrição no tamanho do passo dada no item d., temos que $n_\delta < \infty$, isto é, a iteração externa termina após um número finito de iterações. (Dica: assumo o contrário. Então $\|b_n^\delta\| > \tau\delta$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplique uma soma em n para a soma utilizada no item anterior e derive uma contradição. Perceba que, nessa situação, o tamanho mínimo do passo pode ser escolhido independentemente de n , veja o item d. do Exercício B.13.)

Exerc. B.15. Se o método de Tikhonov-iterado (c.f. (B.11)) for utilizado como iteração interna do algoritmo REGINN, então teremos a iteração externa $x_{n,k+1} = x_n + s_{n,k_n}$, com a iteração interna $s_{n,0} = 0$ e $s_{n,k+1} := \arg \min\{T_{n,k}(s) : s \in X\}$, sendo

$$T_{n,k}(s) := \|\mathcal{A}_n s - b_n^\delta\|^2 + \alpha_{n,k} \|s - s_{n,k}\|^2.$$

Aqui $(\alpha_{n,k}) \subset \mathbb{R}^+$ é uma sequência apropriada.

Siga os mesmos passos dos Exercícios B.13 e B.14 para obter resultados análogos para o algoritmo REGINN, utilizando o método de Tikhonov-iterado na iteração interna. Será necessário impor uma restrição apropriada à sequência $(\alpha_{n,k})$. (Dica: observe os resultados dos Exercícios B.6 e B.7.)

Exerc. B.16. Considere o algoritmo REGINN com $k_n = 1$, ou seja, apenas uma iteração interna é executada em cada iteração externa. Mostre que se o método linear do gradiente (B.13) é utilizado na iteração interna, então o método resultante será o método do gradiente não linear (B.20). Mostre também que se o método linear de Tikhonov-iterado (B.11) é utilizado na iteração interna, então o método resultante será o método de Levenberg–Marquardt (B.22) com $\alpha_n = \text{constante} = \alpha_0$.

Bibliografia

- A. Adler e D. Holder (2021). *Electrical Impedance Tomography: Methods, History and Applications*. 2nd. Boca Raton: CRC Press.
- G. Alessandrini (1988). “Stable determination of conductivity by boundary measurements”. *Appl. Anal.* 27.1-3, pp. 153–172. MR: 922775 (89f : 35195) (ver p. 6).
- K. Astala e L. Päiväranta (2006). “Calderon’s inverse conductivity problem in the plane”. *Annals of Mathematics* 163, pp. 265–299. MR: 2195135 (ver p. 5).
- L. Borcea (out. de 2002). “Electrical impedance tomography”. *Inverse Problems* 18.6, R99. MR: 1955896.
- H. Brezis (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Vol. 2. Universitext 3. New York: Springer New York (ver p. 3).
- A. P. Calderón (1980). “On an inverse boundary value problem”. Em: *Seminar on numerical analysis and its applications to continuum physics, Rio de Janeiro, 24–28 March 1980*. Coleção Atas 12. Republicado em Calderón (2006). Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, pp. 65–73. MR: 0590275 (ver pp. iii, iv, 2, 102).
- (2006). “On an inverse boundary value problem”. *Comput. Appl. Math.* 25 (2–3). Re-publicação de Calderón (1980). MR: 590275 (ver p. 102).
- A. Chambolle e P.-L. Lions (1997). “Image recovery via total variation minimization and related problems”. *Numer. Math.* 76.2, pp. 167–188. MR: 1440119 (ver p. 67).
- H. W. Engl, M. Hanke e A. Neubauer (1996). *Regularization of inverse problems*. Vol. 375. Springer Science & Business Media. MR: 1408680.
- (2000). *Regularization of inverse problems*. Vol. 375. Kluwer Academic Publishers. MR: 1408680 (ver pp. 78, 88).
- L. C. Evans (2010). *Partial differential equations*. Second. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. xxii+749. MR: 2597943 (ver p. 2).
- J. Hadamard (1902). “Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique”. *Princeton University Bulletin* 13, pp. 49–52 (ver p. 69).

- E. Hafemann (2020). *EIT's documentation*. URL: <https://hafemanne.github.io/FEIT/index.html>. Acessado em: 21.11.2022.
- A. Hauptmann, V. Kolehmainen, N. M. Mach, T. Savolainen, A. Seppänen e S. Siltanen (2017). *Open 2D Electrical Impedance Tomography data archive*. arXiv: 1704.01178 [physics.med-ph] (ver pp. 51, 60).
- A. Kirsch (2011). *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer. MR: 3025302 (ver p. iii).
- E. Kreyszig (1991). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library. Wiley. MR: 0992618 (ver pp. 70, 85).
- A. Lechleiter e A. Rieder (out. de 2008). “Newton regularizations for impedance tomography: convergence by local injectivity”. *Inverse Problems* 24.6, p. 065009. MR: 2456956 (ver pp. 6, 7, 13–15).
- A. Logg, K.-A. Mardal, G. N. Wells et al. (2012). *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer. MR: 3075806 (ver p. iv).
- D. I. Margaret Cheney e J. C. Newell (1999). “Electrical Impedance Tomography”. *SIAM Rev.* 41, pp. 85–101. MR: 1669729 (ver p. iii).
- F. Margotti (2016). “Mixed gradient-Tikhonov methods for solving nonlinear ill-posed problems in Banach spaces”. *Inverse Problems* 32.12, pp. 125012, 25. MR: 3628896.
- (2018). “Inexact Newton regularization combined with gradient methods in Banach spaces”. *Inverse Problems* 34.7, p. 075007. MR: 3807603 (ver pp. 93, 94).
- F. Margotti e E. Hafemann (2022). “Range-relaxed strategy applied to the Levenberg-Marquardt method with uniformly convex penalization term in Banach spaces”. *Inverse Problems*. MR: 4468357 (ver pp. 64–66, 68).
- F. J. Margotti (2015). “On Inexact Newton Methods for Inverse Problems in Banach Spaces”. Inglês. Tese de dout. Karlsruher Institut für Technologie (KIT) (ver p. 94).
- M. Nashed (1987). “A new approach to classification and regularization of ill-posed operator equations”. Em: *Inverse and ill-posed problems*. Elsevier, pp. 53–75. MR: 1020308 (ver p. 74).
- J. Nocedal e S. J. Wright (2006). *Numerical Optimization*. 2e. New York, NY, USA: Springer. MR: 2244940 (ver p. 64).
- M. A. Pauleti (2021). “Método das projeções relaxadas com penalização uniformemente convexa para solução de sistemas lineares mal-postos em espaços de Banach”. Mestrado em Matemática. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina (ver p. 71).
- N. Polydorides e W. R. B. Lionheart (nov. de 2002). “A Matlab toolkit for three-dimensional electrical impedance tomography: a contribution to the Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software project”. *Measurement Science and Technology* 13.12, p. 1871 (ver pp. 25, 28, 48).
- J. Reddy (2018). *Introduction to the Finite Element Method 4E*. Reino Unido: McGraw-Hill Education (ver p. 17).
- A. Rieder (1999). “On the regularization of nonlinear ill-posed problems via inexact Newton iterations”. *Inverse Problems* 15.1, pp. 309–327. MR: 1675352 (2000a:65075) (ver p. 94).

- A. Rieder (2001). “On convergence rates of inexact Newton regularizations”. *Numer. Math.* 88.2, pp. 347–365. MR: 1826857 (2002a: 65096) (ver p. 94).
- (2003). *Keine Probleme mit inversen Problemen*. Eine Einführung in ihre stabile Lösung. [An introduction to their stable solution]. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, pp. xiv+300. MR: 2030046 (2004m: 65076) (ver pp. 71, 77–80, 82).
- (2006). “Inexact Newton Regularization Using Conjugate Gradients as Inner Iteration”. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 43.2, pp. 604–622. MR: 2177882 (ver pp. 54, 94).
- L. M. Santana (2022). “Tomografia por impedância elétrica: aspectos teóricos e implementação computacional.” TCC. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina.
- E. Somersalo, M. Cheney e D. Isaacson (1992). “Existence and Uniqueness for Electrode Models for Electric Current Computed Tomography”. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 52.4, pp. 1023–1040. MR: 1174044 (ver pp. 10–13, 15).
- P. Virtanen et al. (2020). “SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python”. *Nature Methods* 17, pp. 261–272 (ver p. 64).
- R. Winkler e A. Rieder (2015). “Model-aware Newton-type inversion scheme for electrical impedance tomography”. *Inverse Problems* 31.4, p. 045009. MR: 3333720 (ver pp. 61, 62).

Índice Remissivo

A

Adjunta da Derivada, 8, 15

C

Calderón, 2

Condição do Cone Tangencial, 80

custo computacional, 24, 28

D

dados

reais, 66, 68

sintéticos, 53, 56–59

derivada

de Gâteaux, 85

direcional, 84

do Operador Direto, 7, 14

E

equações

de Moore–Penrose, 82

erro de iteração, 89

erro relativo, 55, 57, 59

escolha de parâmetro

a posteriori, 76

a priori, 76

F

FEIT, 30

FEniCS, 30

Formulação Variacional

do CEM, 10

do Modelo Contínuo, 5

Fréchet-diferenciável, 85

com derivada localmente

Lipschitz, 79

função barraca, 19

funcional de Tikhonov, 86

G

Gap Model, 9

Gâteaux-diferenciável, 85

gradiente, 85

H

Hadamard, 69

I

impedância de contato, 10

inversa

de Moore–Penrose, 72

pseudoinversa, 72

L

Lax–Milgram, 2

M

malha

- finas, 53
- grossa, 53

matriz Jacobiana, 24, 28

método

- da Máxima Descida, 90
- de Landweber, 56, 66, 90, 93
- de Levenberg–Marquardt, 56, 93
- de Newton Inexato, 54, 93
- de Polydorides, 28, 49
- de regularização, 76
- de Tikhonov, 86, 92
- de Tikhonov Iterado, 92
- de Tikhonov–Phillips, 87, 92
- do Erro Mínimo, 90
- do Gradiente, 54, 88
- dos elementos finitos, 17
- REGINN
 - com Landweber, 56, 66
 - com Tikhonov Iterado, 56, 66

Modelo

- Completo de Eletrodos, 10
- Contínuo de Calderón, 2

Modelos de Eletrodos, 9

O

operador

- compacto, 81
- direto, 5, 13, 22, 26
- fracamente sequencialmente
 - fechado, 81
- NpD, 5, 13
- totalmente contínuo, 81

P

padrão de corrente adjacente, 52

parâmetro de regularização, 76

Problema

- Direto, 5, 13
- Inverso, 5, 13

problema

- bem posto, 69
 - no sentido de Nashed, 74
- inverso, 75
- localmente
 - bem posto, 79
 - mal posto, 79
- mal posto, 69
 - no sentido de Nashed, 74

protocolo de medição, 60

R

reconstrução da condutividade elétrica, 56, 58, 66, 68

refinamento, 53

regularização linear, 76

resíduo relativo, 55, 57, 59

S

Shunt Model, 9

solução

- de norma mínima, 72
- fraca, 2, 11
- generalizada, 72
- numérica, 33, 37

T

triangulação, 18, 33, 40, 53

V

Veto de Bakushinskii, 77

Títulos Publicados — 34º Colóquio Brasileiro de Matemática

Uma introdução à convexidade em grafos – *Júlio Araújo, Mitre Dourado, Fábio Protti e Rudini Sampaio*

Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos – *Lucas Backes, Alexandre Tavares Baraviera e Flávia Malta Branco*

Introdução aos espaços de Banach – *Aldo Bazán, Alex Farah Pereira e Cecília de Souza Fernandez*

Contando retas em superfícies no espaço projetivo – *Jacqueline Rojas, Sally Andria e Wallace Mangueira*

Paths and connectivity in temporal graphs – *Andrea Marino e Ana Silva*

Geometry of Painlevé equations – *Frank Loray*

Implementação computacional da tomografia por impedância elétrica – *Fábio Margotti, Eduardo Hafemann e Lucas Marcilio Santana*

Regularidade elíptica e problemas de fronteiras livres – *João Vitor da Silva e Gleydson Ricarte*

The ∞ -Laplacian: from AMLEs to Machine Learning – *Damião Araújo e José Miguel Urbano*

Homotopical dynamics for gradient-like flows – *Guido G. E. Ledesma, Dahisy V. S. Lima, Margarida Mello, Ketty A. de Rezende e Mariana R. da Silveira*



Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

Fábio Margotti

Fábio nasceu em Nova Veneza-SC. É graduado e mestre em Matemática pela UFSC e doutor pelo Karlsruher Institut für Technologie. É professor da UFSC e pesquisador nas áreas de Matemática Aplicada e Problemas Inversos. Coordena um projeto sobre tomografia por impedância elétrica, visando aplicações industriais.

Eduardo Hafemann

Eduardo nasceu em Jaraguá do Sul-SC. Graduiu-se em Engenharia Química pela UFSC, sendo mestrando em Matemática na mesma instituição, com foco em Geometria Diferencial e Relatividade Geral. É também pesquisador nas áreas de problemas inversos e tomografia por impedância elétrica.

Lucas Marcilio Santana

Lucas nasceu em Gravatal-SC. Graduiu-se em Matemática pela UFSC e estudou o problema da tomografia por impedância elétrica em seu trabalho de conclusão de curso, sob orientação do Fábio. Atualmente é mestrando em Matemática Aplicada e pesquisador na UFSC.

Implementação computacional da tomografia por impedância elétrica

impa



Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

ISBN 978-85-244-0535-8



9 788524 405358