Dança do Black-Scholes com o Loki

Prof. Ana Isabel Castillo

Abril 2024

Abstract

O Loki está no mercado financeiro, precificando opções com a equação de Black-Scholes e um toque de estilo felino! Aqui, explicamos a equação diferencial parcial (EDP) que determina o preço de uma derivada, com uma solução passo a passo clara o suficiente para qualquer trader (até os mais novatos!) entender. Derivamos a fórmula para uma call europeia, apresentamos um exemplo numérico e conectamos a matemática com aplicações financeiras reais. Perfeito para quem quer aprender cálculo com contexto e um ronronar maroto! Confira mais em CalculusComedy-Gold.

1 Introdução: Por que o Loki Ama Black-Scholes?

No mercado financeiro, o preço de uma opção (tipo uma call ou put) depende de variáveis como o preço do ativo (S), tempo até o vencimento ($T - t$), volatilidade (σ), e taxa de juros livre de risco (r). A equação de Black-Scholes é tipo a pata *slim* do Loki: ela modela o preço da opção (V) com precisão felina! Vamos resolver a EDP:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \\ V(T, s) = K(s) \quad \forall s \end{cases}$$

Onde:

- $V(t, S)$: Preço da opção no tempo t e preço do ativo S.
- σ: Volatilidade do ativo.
- r: Taxa de juros livre de risco.
- $K(s)$: Payoff no vencimento ($t = T$), ex.: $K(s) = \max(S - K, 0)$ pra uma call.

2 A Equação de Black-Scholes: Intuição

A PDE diz que o preço da opção (V) deve balancear:

- **Variação no tempo** ($\frac{\partial V}{\partial t}$): Como o preço muda com o tempo.
- **Volatilidade do ativo** ($\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$): O impacto da incerteza no preço do ativo.

- **Crescimento do ativo** ($rS\frac{\partial V}{\partial S}$): O efeito do preço do ativo crescendo a uma taxa r.
- **Desconto** ($-rV$): O custo de manter a opção.

Se tudo isso soma zero, o preço V é justo, sem chance de arbitragem. O Loki diria: "É como dançar com R$100k sem perder um centavo!"

3 Passo a Passo: Resolvendo a PDE

Vamos resolver a PDE pra uma **call europeia**, onde o payoff é $V(T,S) = \max(S-K,0)$, com K sendo o preço de exercício (strike).

3.1 Passo 1: Transformação de Variáveis

A PDE é complicada, então simplificamos com uma mudança de variáveis pra torná-la mais amigável (tipo o Loki simplificando um trade!). Definimos:

$$\tau = T - t \quad \text{(tempo restante até o vencimento)},$$

$$S = Ke^x, \quad V(t,S) = Kv(\tau,x).$$

Isso transforma a PDE em uma equação de difusão mais simples. Substituímos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -K\frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{K}{S}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{K}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

A PDE vira:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial v}{\partial x} - rv.$$

Condição final: $v(0,x) = \max(e^x - 1, 0)$.

3.2 Passo 2: Equação de Difusão

Essa nova EDP parece a equação de calor! Usamos outra transformação pra simplificar mais:

$$v(\tau,x) = e^{\alpha x + \beta \tau}u(\tau,x),$$

onde α e β são escolhidos pra eliminar os termos de primeira ordem. Após cálculos (o Loki faz isso ronronando!), chegamos a:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

com $\alpha = -\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}$, $\beta = -\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\right)^2\sigma^2 - r$.

3.3 Passo 3: Solução da Equação de Calor

A equação de calor tem solução conhecida usando a função de Green (ou kernel de difusão):

$$u(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}} \max(e^y - 1, 0)\, dy.$$

Após integrar e voltar às variáveis originais, a solução pra $V(t, S)$ é:

$$V(t, S) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

e Φ é a função de distribuição acumulada da normal padrão.

3.4 Passo 4: Interpretação

A fórmula da call europeia diz:

- $S\Phi(d_1)$: Valor esperado do ativo se a opção for exercida.
- $-Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$: Valor descontado do preço de exercício, ajustado pela probabilidade.

O Loki diria: "É como prever o lucro com uma bola de cristal felina!"

4 Exemplo Numérico

Suponha:

- $S = 100$ (preço do ativo hoje).
- $K = 100$ (preço de exercício).
- $T - t = 1$ (1 ano até o vencimento).
- $r = 0.05$ (taxa de juros de 5%).
- $\sigma = 0.2$ (volatilidade de 20%).

Calculamos:

$$d_1 = \frac{\ln(100/100) + (0.05 + \frac{1}{2} \cdot 0.2^2)(1)}{0.2 \cdot \sqrt{1}} = \frac{0 + 0.07}{0.2} = 0.35,$$

$$d_2 = 0.35 - 0.2 = 0.15.$$

Usando a tabela da normal padrão:

$$\Phi(0.35) \approx 0.6368, \quad \Phi(0.15) \approx 0.5596.$$

Então:

$$V = 100 \cdot 0.6368 - 100 \cdot e^{-0.05} \cdot 0.5596 \approx 63.68 - 100 \cdot 0.9512 \cdot 0.5596 \approx 63.68 - 53.24 = 10.44.$$

O preço da call é cerca de **R$10.44**. O Loki aprova: "Lucro ronronante!"

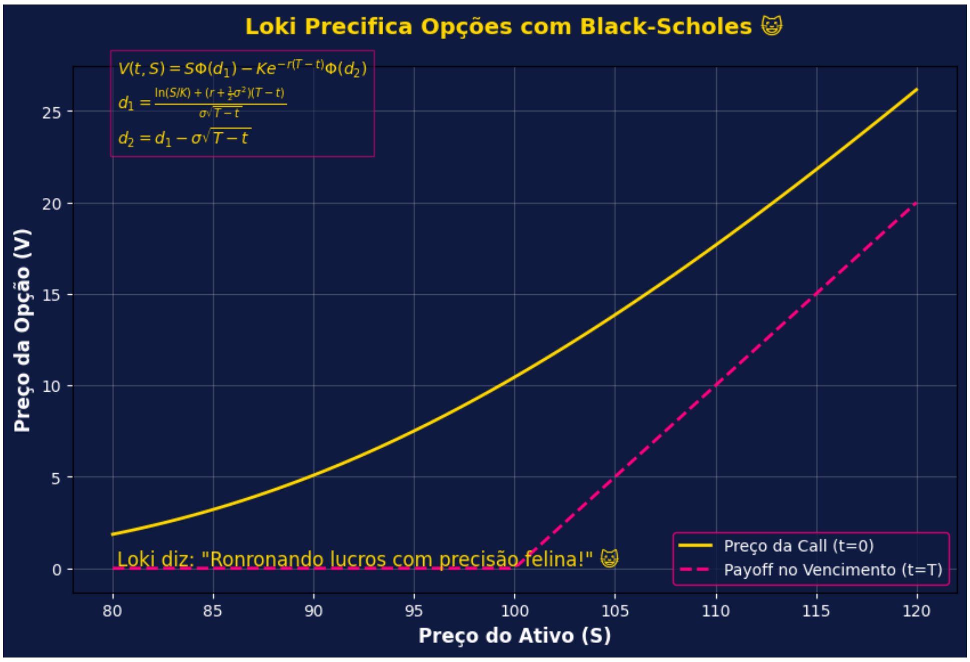

Figure 1: Loki precifica a call europeia com Black-Scholes, mostrando o preço em $t = 0$ e o payoff em $t = T$.

5 Conclusão

A equação de Black-Scholes conecta cálculo e finanças pra precificar opções com rigor. Com esta solução passo a passo, qualquer um pode entender a mágica da EDP! Perfeito pra quem quer aprender com a vibe felina do Loki. Confira mais em CalculusComedy-Gold.