Controle Linear: Capítulo 2 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Prof. Ana Isabel Castillo

May 16, 2025

Objetivos do Capítulo 2

- Aprender a representar sistemas dinâmicos via equações diferenciais.
- Derivar funções de transferência para sistemas lineares.
- Entender a linearização de sistemas não lineares.
- Introduzir a modelagem no espaço de estados.
- Aplicar modelagem em contexto financeiro (ex.: portfólios).

Equações Diferenciais e Funções de Transferência

- Sistemas dinâmicos são modelados por equações diferenciais:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_0 u$$

- Função de transferência ($G(s)$): Relação entre saída $Y(s)$ e entrada $U(s)$ no domínio de Laplace:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0}$$

- Exemplo financeiro: Modelar o valor de um portfólio com aportes como entrada.

Modelagem de Sistemas

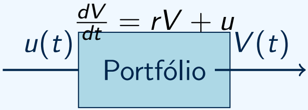
- Exemplo: Crescimento de um portfólio com juros compostos e aportes:

$$\frac{dV}{dt} = rV + u(t)$$

onde $V(t)$ é o valor do portfólio, r é a taxa de retorno, $u(t)$ é o aporte.

- Função de transferência:

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{s - r}$$



Linearização de Sistemas Não Lineares

- Sistemas não lineares (ex.: $\dot{x} = x^2 + u$) são aproximados por sistemas lineares em um ponto de equilíbrio.
- Método: Expansão em série de Taylor:

$$\dot{x} \approx f(x_0, u_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial u}(u - u_0)$$

- Exemplo financeiro: Linearizar um modelo de preços com volatilidade não linear.
- Resultado: $\dot{x} \approx Ax + Bu$, onde A e B são constantes.

Modelagem no Espaço de Estados

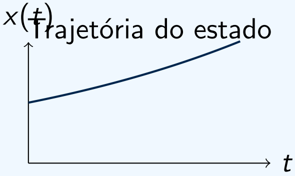
- Representação matricial de sistemas dinâmicos:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- Exemplo: Portfólio com duas variáveis (valor e risco):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

- Vantagem: Útil para sistemas complexos e controle avançado.



Resumo

- Sistemas dinâmicos são modelados por equações diferenciais ou espaço de estados.
- Funções de transferência relacionam entrada e saída no domínio de Laplace.
- Linearização aproxima sistemas não lineares para análise.
- Espaço de estados é poderoso para sistemas complexos.
- Aplicação financeira: Modelagem de portfólios ou preços de ativos.

Exercício

Derive a função de transferência para o sistema $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = u(t)$. Interprete como um modelo financeiro.