Exercício Resolvido: Funções de Lucro

Prof. Ana Isabel

June 16, 2025

Exercício Resolvido: Funções de Lucro

Problema

Uma empresa tem custo fixo mensal de R\$30.000, preço unitário de venda de R\$8,00 e custo variável de R\$6,00 por unidade.

a) Obtenha a função de lucro mensal.

b) Obtenha a função de lucro líquido mensal, com imposto de renda de 30%.

Exercício Resolvido: Funções de Lucro

Problema

Uma empresa tem custo fixo mensal de R$30.000, preço unitário de venda de R$8,00 e custo variável de R$6,00 por unidade.
a) Obtenha a função de lucro mensal.
b) Obtenha a função de lucro líquido mensal, com imposto de renda de 30%.

Solução: Parte a) Função de Lucro

- Custo: $C(x) = 30.000 + 6x$
- Receita: $R(x) = 8x$
- Lucro:
  $L(x) = R(x) - C(x) = 8x - (30.000 + 6x) = 2x - 30.000$

$$\boxed{L(x) = 2x - 30.000}$$

Exercício Resolvido: Funções de Lucro

Problema

Uma empresa tem custo fixo mensal de R\$30.000, preço unitário de venda de R\$8,00 e custo variável de R\$6,00 por unidade.
a) Obtenha a função de lucro mensal.
b) Obtenha a função de lucro líquido mensal, com imposto de renda de 30%.

Solução: Parte a) Função de Lucro

- Custo: $C(x) = 30.000 + 6x$
- Receita: $R(x) = 8x$
- Lucro:
  $L(x) = R(x) - C(x) = 8x - (30.000 + 6x) = 2x - 30.000$

$$\boxed{L(x) = 2x - 30.000}$$

Solução: Parte b) Lucro Líquido

Gráfico: Custo, Receita e Lucro

Visualização

Gráfico das funções $C(x) = 30.000 + 6x$, $R(x) = 8x$ e $L(x) = 2x - 30.000$.

Ponto de equilíbrio:

$L(x) = 0 \implies 2x - 30.000 = 0 \implies x = 15.000.$

Gráfico: Custo, Receita e Lucro

Visualização

Gráfico das funções $C(x) = 30.000 + 6x$, $R(x) = 8x$ e $L(x) = 2x - 30.000$.

Ponto de equilíbrio:

$L(x) = 0 \implies 2x - 30.000 = 0 \implies x = 15.000.$

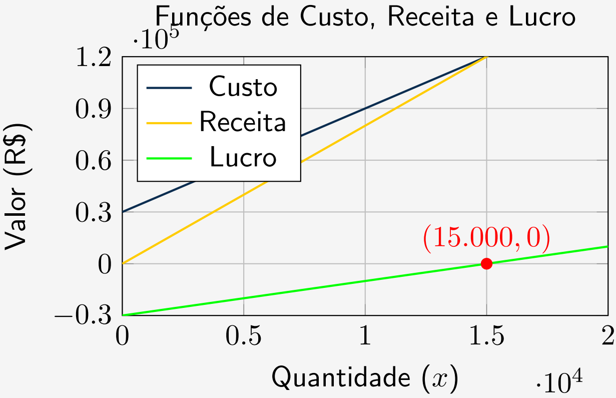


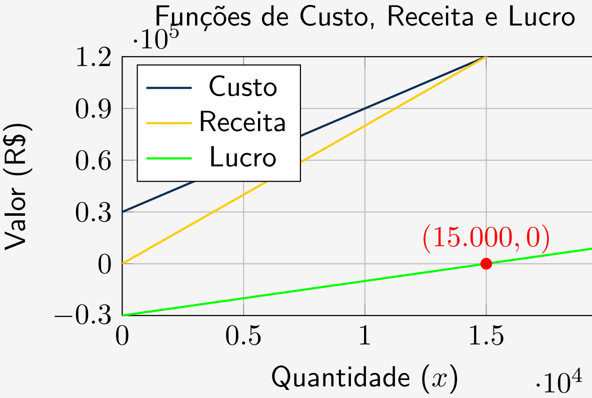
Gráfico: Custo, Receita e Lucro

Visualização

Gráfico das funções $C(x) = 30.000 + 6x$, $R(x) = 8x$ e $L(x) = 2x - 30.000$.

Ponto de equilíbrio:

$L(x) = 0 \implies 2x - 30.000 = 0 \implies x = 15.000.$



Exercício Resolvido: Funções de Lucro

Prof. Ana Isabel

June 16, 2025

Exercício 38 - Lucro líquido e imposto

Dados:

- Custo fixo mensal: $CF = 5000$
- Custo variável unitário: $CV = 30$
- Preço de venda: $PV = 40$
- Lucro líquido desejado: $LL = 2000$
- Imposto de 35% sobre o lucro: $IR = 0.35$

Passo 1: Lucro bruto necessário:

$$LL = LB \cdot (1 - IR) \Rightarrow 2000 = LB \cdot (0.65) \Rightarrow LB = \frac{2000}{0.65} \approx 3076.92$$

Passo 2: Lucro bruto é:

$$LB = R - C = x \cdot (PV - CV) - CF$$

$$3076.92 = x \cdot (40 - 30) - 5000 \Rightarrow 3076.92 = 10x - 5000 \Rightarrow 10x = 8076.92 =$$

Exercício 39 - Margem e funções

a) Função receita: $R(x) = 10x$
b) Função custo total diário: $C(x) = 150 + 7x$
(Como $10 - 3 = 7$, o custo variável é R$7 por unidade$)

c) Ponto de nivelamento:

$$R(x) = C(x) \Rightarrow 10x = 150 + 7x \Rightarrow 3x = 150 \Rightarrow x = 50$$

d) Função lucro diário:

$$L(x) = R(x) - C(x) = 10x - (150 + 7x) = 3x - 150$$

e) Quantidade para lucro diário de R$ 180,00:

$$3x - 150 = 180 \Rightarrow 3x = 330 \Rightarrow x = 110 \text{ unidades}$$

Exercício 40 - Análise de custos e lucro

Dados:

- Preço de venda: $PV = 25$
- Custo variável unitário: $CV = 6 + 8 = 14$
- Custo fixo mensal: $CF = 2500$

a) Ponto de nivelamento:

$$x = \frac{CF}{PV - CV} = \frac{2500}{25 - 14} = \frac{2500}{11} \approx 227{,}27 \Rightarrow 228 \text{ unidades}$$

b) Margem de contribuição unitária:

$$MC = PV - CV = 25 - 14 = 11$$

c) Lucro para 1000 unidades:

$$L = MC \cdot 1000 - CF = 11 \cdot 1000 - 2500 = 11000 - 2500 = 8500$$

d) Lucro para 1500 unidades:

$$L = 11 \cdot 1500 - 2500 = 16500 - 2500 = 14000 \Rightarrow \text{Acréscimo} = 14000 - 850$$

Aumento percentual:

$$\frac{5500}{\ } \cdot 100\% \approx 64{,}71\%$$

Exercício 41 - Lucro e ponto crítico

Dados:

- Produção: 100 unidades
- Custo médio: $CM = 4{,}00$
- Custo fixo diário: $CF = 150$
- Preço de venda: $PV = 6$

a) Lucro para 100 unidades:

$$\text{Receita: } R = 6 \cdot 100 = 600$$

Custo total: $CT = 4 \cdot 100 = 400 \Rightarrow L = R - CT = 600 - 400 = 200$

b) Ponto de nivelamento:

$$\text{CM} = \frac{CT}{x} = 4 = \frac{CF + CV \cdot x}{x} \Rightarrow \text{Lucro zero quando: } R = CT$$

$$6x = 4x + 150 \Rightarrow 2x = 150 \Rightarrow x = 75 \text{ unidades}$$

Exercício 42 - Preço mínimo sem prejuízo

Dados:

- Quantidade estimada: $q = 20000$
- Custo fixo anual: $CF = 150000$
- Custo variável unitário: $CV = 20$

Cálculo do preço mínimo para não ter prejuízo:

$$\text{Preço mínimo} = \frac{CF + CV \cdot q}{q} = \frac{150000 + 20 \cdot 20000}{20000} = \frac{150000 + 4000}{20000}$$

Resposta: O preço mínimo por livro deve ser de **R$ 27,50**.

Exercício 43 - Manutenção do lucro com desconto

Dados iniciais:

- Custo fixo: $CF = 1200$
- Custo variável unitário: $CV = 2$
- Preço de venda original: $PV = 5$
- Quantidade inicial: $q_1 = 1000$

Lucro atual:

$$L = (PV - CV) \cdot q_1 - CF = (5 - 2) \cdot 1000 - 1200 = 1800$$

Novo preço com 20% de desconto:

$$PV' = 5 \cdot 0{,}8 = 4$$

Nova equação do lucro para manter R$1800:

$$L = (4 - 2) \cdot q_2 - 1200 = 1800 \Rightarrow 2q_2 = 3000 \Rightarrow q_2 = 1500$$

Aumento necessário:

$$1500 - 1000 = 500 \text{ unidades} \Rightarrow \textbf{aumento de 50\%}$$

Exercício 44 - Avaliação de proposta

Dados:

- Custo fixo mensal: $CF = 20000$
- Custo variável unitário: $CV = 60$
- Preço unitário atual: $PV = 100$
- Vendas atuais: $q = 2000$

Situação atual:

$$L = (PV - CV) \cdot q - CF = (100 - 60) \cdot 2000 - 20000 = 80000 - 20000 = 600$$

Nova proposta:

- Redução de 10% no preço: $PV' = 100 \cdot 0{,}9 = 90$
- Aumento de 20% nas vendas: $q' = 2000 \cdot 1{,}2 = 2400$

$$L' = (90 - 60) \cdot 2400 - 20000 = 30 \cdot 2400 - 20000 = 72000 - 20000 = 52000$$

Conclusão: O lucro cairia de R$60.000 para R$52.000. **Não é vantajosa a alteração.**

Exercício 45 - Preferência entre serviços

Encanador A: $C_A = 100 + 50x$ **Encanador B:** $C_B = 80 + 60x$ **Igualando os custos:**

$$100 + 50x = 80 + 60x \Rightarrow 20 = 10x \Rightarrow x = 2$$

Conclusão: Se o serviço for até 2 horas, B é mais barato. Se for mais de 2 horas, **A é preferível**.

Exercício 46 - Comparação de frete

Transportadora X: $C_X = 3000 + 20x$ **Transportadora Y:** $C_Y = 2000 + 30x$
Igualando os custos:

$$3000 + 20x = 2000 + 30x \Rightarrow 1000 = 10x \Rightarrow x = 100$$

Conclusão: Para distâncias menores que 100 km, Y é melhor. Para distâncias maiores, **X é preferível**.

Exercício 47 - Função custo

Sabemos:

- $f(0) = 2000$
- $f(250) = 8000$

Como a função é de 1º grau: $f(x) = ax + b$
Montando o sistema:

$$\begin{cases} f(0) = b = 2000 \\ f(250) = 250a + 2000 = 8000 \Rightarrow 250a = 6000 \Rightarrow a = 24 \end{cases}$$

Função: $f(x) = 24x + 2000$
b) Custo para 300 unidades:

$$f(300) = 24 \cdot 300 + 2000 = 9200$$

Exercício 48 - Função custo de 1º grau

Sabemos:

- $f(10) = 6600$
- $f(20) = 7200$

Função do tipo: $f(x) = ax + b$

Montando o sistema:

$$\begin{cases} 10a + b = 6600 \\ 20a + b = 7200 \end{cases} \Rightarrow (20a+b)-(10a+b) = 7200-6600 \Rightarrow 10a = 600 =$$

$$10a + b = 6600 \Rightarrow 600 + b = 6600 \Rightarrow b = 6000$$

Função custo: $f(x) = 60x + 6000$

Exercício 49 - Margem de contribuição unitária

Dados:

- Custo fixo diário: $CF = 500$
- Quantidade: $q = 20$

No ponto de nivelamento:

$$\text{Lucro} = 0 \Rightarrow \text{Margem total} = CF \Rightarrow MC \cdot 20 = 500 \Rightarrow MC = \frac{500}{20} = 25$$

Margem de contribuição unitária: R$ 25,00

Exercício 50 - Margem de contribuição como porcentagem

a) Expressão do preço de venda:

Sabemos que $m = \dfrac{p-c}{p} = 0{,}20 \Rightarrow \dfrac{p-c}{p} = 0{,}20 \Rightarrow p - c = 0{,}20p \Rightarrow c =$

b) Margem como porcentagem de c:

$$p = \frac{c}{0{,}80} \Rightarrow p - c = \frac{c}{0{,}80} - c = \frac{c - 0{,}80c}{0{,}80} = \frac{0{,}20c}{0{,}80} = 0{,}25c$$

Ou seja: a margem representa 25% do custo variável unitário.

Exercício 55 - Função de demanda (1º grau)

Sabemos:

- Quando $p = 20$, $q = 50$
- Quando $p = 15$, $q = 75$

Função do tipo: $q(p) = ap + b$

Montando o sistema:

$$\begin{cases} 20a + b = 50 \\ 15a + b = 75 \end{cases} \Rightarrow (20a+b)-(15a+b) = -25 \Rightarrow 5a = -25 \Rightarrow a = -5$$

$$20a + b = 50 \Rightarrow -100 + b = 50 \Rightarrow b = 150$$

Função de demanda: $q(p) = -5p + 150$

Exercício 56 - Demanda com redução de preço

Sabemos:

- Com $p = 5$, $q = 200$
- Com $p = 4$, $q = 300$ (20% de redução e 50% de aumento)

Função: $q(p) = ap + b$

$$\begin{cases} 5a + b = 200 \\ 4a + b = 300 \end{cases} \Rightarrow a = -100, \quad b = 700 \Rightarrow q(p) = -100p + 700$$

Exercício 57 - Preço constante

Situação: O preço do pão francês é fixo: $p = 0{,}20$, independente da demanda.
Função: $p(x) = 0{,}20$
Gráfico: Reta horizontal no plano (x, p) passando por $p = 0{,}20$.

Exercício 58 - Oferta como função de 1º grau

Sabemos:

- Quando $p = 10$, $q = 5000$
- Quando $p = 12$, $q = 5500$

Função do tipo: $q(p) = ap + b$

$$\begin{cases} 10a + b = 5000 \\ 12a + b = 5500 \end{cases} \Rightarrow 2a = 500 \Rightarrow a = 250 \Rightarrow 10a{+}b = 5000 \Rightarrow 2500{+}$$

Função oferta: $q(p) = 250p + 2500$

Exercício 59 - Oferta de fogões

Sabemos:

- Quando $p = 500$, $q = 400$
- Quando $p = 450$, $q = 300$

Função do tipo: $q(p) = ap + b$

$$\begin{cases} 500a + b = 400 \\ 450a + b = 300 \end{cases} \Rightarrow 50a = 100 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 500a{+}b = 400 \Rightarrow 1000{+}b$$

Função oferta: $q(p) = 2p - 600$

Exercício 60 - Classificação de funções

Análise das expressões:

a) $p = 60 - 2x \rightarrow$ **Demanda** (preço cai com quantidade)

b) $p = 10 + x \rightarrow$ **Oferta** (preço cresce com quantidade)

c) $p - 3x + 10 = 0 \Rightarrow p = 3x - 10 \rightarrow$ **Oferta**

d) $3x + 4p - 1000 = 0 \Rightarrow p = \frac{1000-3x}{4} \rightarrow$ **Demanda**

e) $2x - 4p - 90 = 0 \Rightarrow p = \frac{2x-90}{4} \rightarrow$ **Oferta**

Exercício 61 - Preço de equilíbrio

a) Oferta: $p = 10 + x$ **Demanda:** $p = 20 - x$

$$10 + x = 20 - x \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow p = 10 + 5 = 15$$

Preço de equilíbrio: R$15, **Quantidade: 5 unidades**

b) Oferta: $p = 3x + 20$ **Demanda:** $p = 50 - x$

$$3x + 20 = 50 - x \Rightarrow 4x = 30 \Rightarrow x = 7{,}5 \Rightarrow p = 3 \cdot 7{,}5 + 20 = 42{,}5$$

Preço de equilíbrio: R$42,50, **Quantidade: 7,5 unidades**

Exercício 62 - Oferta agrícola

Função de oferta: $p = 0{,}01x - 3$ (com p em R$ e x em toneladas)

a) Para $x = 500$**:**

$$p = 0{,}01 \cdot 500 - 3 = 5 - 3 = 2$$

b) Para $p = 3$**:**

$$3 = 0{,}01x - 3 \Rightarrow 0{,}01x = 6 \Rightarrow x = 600$$

c) Demanda: $p = 10 - 0{,}01x$ **Igualando com a oferta:**

$$0{,}01x - 3 = 10 - 0{,}01x \Rightarrow 0{,}02x = 13 \Rightarrow x = 650 \Rightarrow p = 0{,}01 \cdot 650 - 3 = 6,$$

Equilíbrio: Preço = R$3,50, **Quantidade = 650 toneladas**

Exercício 63 - Função de oferta e demanda

Oferta diária: $p = 10 + 0{,}2x$ **Demanda diária:** $p = 30 - 1{,}8x$

a) Para $x = 20$:

$$p = 10 + 0{,}2 \cdot 20 = 14$$

b) Para $p = 15$:

$$15 = 10 + 0{,}2x \Rightarrow 0{,}2x = 5 \Rightarrow x = 25$$

c) Equilíbrio:

$$10+0{,}2x = 30-1{,}8x \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow p = 10+0{,}2\cdot 10 = 12$$

Preço de equilíbrio: R\$12, **Quantidade: 10 bolos**

Exercício 93 - Receita e Lucro

Funções:

$$p = 40 - x \quad \text{e} \quad C = 20 + 31x$$

Receita: $R = x \cdot p = x(40 - x) = 40x - x^2$

a) Máximo da receita:

$$x_r = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2(-1)} = 20$$

b) Função lucro:

$$L(x) = R(x) - C(x) = (40x - x^2) - (20 + 31x) = -x^2 + 9x - 20$$

$$x_l = \frac{-9}{2(-1)} = 4{,}5$$

Quantidade que maximiza a receita: 20 unidades
Quantidade que maximiza o lucro: 4,5 unidades

Exercício 94 - Função de demanda e preço ótimo

Sabemos:

$$(p_1 = 30, q_1 = 500) \quad (p_2 = 28, q_2 = 600)$$

Função de demanda (1º grau): $p(q) = aq + b$

$$\begin{cases} 30 = 500a + b \\ 28 = 600a + b \end{cases} \Rightarrow a = -0{,}02, \quad b = 40 \Rightarrow p(q) = -0{,}02q + 40$$

Receita: $R(q) = p \cdot q = (-0{,}02q + 40)q = -0{,}02q^2 + 40q$
Máximo: $q = \frac{-40}{2(-0{,}02)} = 1000$

$$p = -0{,}02 \cdot 1000 + 40 = 20$$

Preço ótimo para lucro máximo: R$20,00

Exercício 95 - Função de demanda do barbeiro

Pontos: $(p = 15, q = 50)$ e $(p = 20, q = 100)$
Função demanda: $q(p) = ap + b$

$$\begin{cases} 15a + b = 50 \\ 20a + b = 100 \end{cases} \Rightarrow 5a = 50 \Rightarrow a = 10, \quad b = -100 \Rightarrow q(p) = 10p{-}10$$

Receita: $R(p) = p \cdot q(p) = p(10p - 100) = 10p^2 - 100p$

$$p_{\text{máx}} = \frac{-(-100)}{2 \cdot 10} = 5$$

Preço para receita máxima: R$5,00

Exercício 96 - Função de demanda e lucro com vodca

Pontos: $(p = 10, q = 200)$ e $(p = 7, q = 400)$
Função demanda: $q(p) = ap + b$

$$\begin{cases} 10a + b = 200 \\ 7a + b = 400 \end{cases} \Rightarrow 3a = -200 \Rightarrow a = -\frac{200}{3}, \quad b = \frac{2300}{3} \Rightarrow q(p) = -$$

Receita: $R(p) = p \cdot q(p) = p\left(-\frac{200}{3}p + \frac{2300}{3}\right) = -\frac{200}{3}p^2 + \frac{2300}{3}p$

$$p_{\text{máx}} = \frac{-\frac{2300}{3}}{2 \cdot -\frac{200}{3}} = \frac{2300}{400} = 5{,}75$$

Lucro unitário: R\$4,00 **Preço ótimo para lucro máximo: R\$5,75**

Exercício 100 - Lucro de monopolista

Funções:

$$C = 200+2x, \quad p = 100-2x \Rightarrow R = p{\cdot}x = (100-2x)x = 100x-2x^2$$

Lucro:

$$L(x) = R - C = 100x - 2x^2 - (200 + 2x) = -2x^2 + 98x - 200$$

$$x_{\text{máx}} = \frac{-98}{2(-2)} = 24{,}5 \Rightarrow p = 100 - 2 \cdot 24{,}5 = 51$$

a) Preço para máximo lucro: R$51,00

b) Com preço máximo tabelado em R$60,00:

$$x = \frac{100-60}{2} = 20 \Rightarrow L(20) = 100{\cdot}20-2{\cdot}400-200-40 = 2000-800-24$$

c) Com imposto de R$4,00 por unidade:

$$C = 200+2x+4x = 200+6x \Rightarrow L = 100x-2x^2-(200+6x) = -2x^2+94x$$

Novo preço ótimo: R$53,00

Exercício 101 - Receita semanal

Função de demanda: $x = 1000 - 100p$

a) Função receita:

$$R(p) = p \cdot x = p(1000 - 100p) = 1000p - 100p^2$$

b) Preço que maximiza a receita:

$$p_{\text{máx}} = \frac{-1000}{2 \cdot (-100)} = 5$$

Resposta: Função receita: $R(p) = -100p^2 + 1000p$ Preço ótimo: **R$5,00**

Exercício 102 - DVD e função de demanda

Sabemos:

$(p_1 = 4, q_1 = 200)$, queda de 50 DVDs a cada R$1,00 de acréscimo

Função de demanda: $q(p) = ap + b$

$$a = -50, \quad b = 200 + 50 \cdot 4 = 400 \Rightarrow q(p) = -50p + 400$$

a) Receita: $R(p) = p(-50p + 400) = -50p^2 + 400p$
b) Preço ótimo:

$$p = \frac{-400}{2 \cdot (-50)} = 4$$

Resposta: Preço ideal: **R$4,00**

Exercício 103 - Preço ótimo com e sem imposto

Funções:

$$p = 100-2x, \quad C = 500+3x \Rightarrow R = x(100-2x) = 100x-2x^2 \Rightarrow L = R$$

a) Preço que maximiza o lucro:

$$x = \frac{-97}{2\cdot(-2)} = 24{,}25 \Rightarrow p = 100 - 2\cdot 24{,}25 = 51{,}5$$

b) Com imposto de R$2,00 por unidade:

$$C' = 500+3x+2x = 500+5x \Rightarrow L' = -2x^2+95x-500 \Rightarrow x = \frac{-95}{2\cdot(-2)} =$$

Preços ótimos: Sem imposto: **R$51,50** Com imposto: **R$52,50**

Exercício 104 - Imposto e receita tributária

Função de demanda: $p = 30 - x \Rightarrow x = 30 - p$
a) Com imposto de R$3,00 por unidade:

Lucro: $L(p) = (p-5-3)(30-p) = (p-8)(30-p) \Rightarrow L(p) = -p^2+38p-24$

b) Receita tributária: $RT = i \cdot (30 - p)$
Maximizar: $RT(i) = i \cdot (30 - (5 + i)) = i(25 - i) = -i^2 + 25i$

$$i_{\text{máx}} = \frac{-25}{2 \cdot (-1)} = 12{,}5$$

Imposto ótimo para máxima arrecadação: R$12,50

Exercício 105 - Receita tributária com imposto

Função de demanda: $x = 300 - 10p$
Receita tributária: $RT(p) = i \cdot x = i(300 - 10p)$
a) Para $i = 2$:

$$RT(p) = 2(300 - 10p) = 600 - 20p$$

b) Para maximizar a receita tributária:

$RT(p) = i(300-10p)$, mas $p = c+i = 5+i \Rightarrow RT(i) = i(300-10(5+i)$

$$i_{\text{máx}} = \frac{-250}{2(-10)} = 12{,}5$$

Imposto ótimo: R$12,50

Exercício 106 - Função lucro com demanda linear

Funções:

$$p = 40 - x \Rightarrow R = x(40 - x) = 40x - x^2$$

$$C = 10+20x \Rightarrow L = R-C = 40x-x^2-(10+20x) = -x^2+20x-10$$

$$x_{\text{máx}} = \frac{-20}{2(-1)} = 10 \Rightarrow p = 40 - 10 = 30$$

Preço que maximiza o lucro: R$30,00

Exercício 107 - Receita com função quadrática

Função de demanda: $x = -50p^2 + 700p$
Receita: $R(p) = p \cdot x = p(-50p^2 + 700p) = -50p^3 + 700p^2$
Máximo: derivada:

$R'(p) = -150p^2+1400p \Rightarrow R'(p) = 0 \Rightarrow p(-150p+1400) = 0 \Rightarrow p = 0$ o

Preço ótimo: R$9,33

Exercício 108 - Receita tributária com imposto unitário

Demanda: $x = 200 - 4p$, custo de produção: $c = 8$
Preço final: $p = c + i = 8 + i$

$$x = 200 - 4(8 + i) = 200 - 32 - 4i = 168 - 4i$$

$$RT(i) = i \cdot x = i(168 - 4i) = -4i^2 + 168i \Rightarrow i_{\text{máx}} = \frac{-168}{2(-4)} = 21$$

Imposto ótimo: R$21,00

Função do preço médio: $p(x) = 120 - 0{,}4x$
Receita: $R(x) = x \cdot p(x) = x(120 - 0{,}4x) = 120x - 0{,}4x^2$

$$x_{\text{máx}} = \frac{-120}{2(-0{,}4)} = 150 \Rightarrow p = 120 - 0{,}4 \cdot 150 = 60$$

Quantidade ótima: 150 unidades Preço correspondente: R$60,00

Exercício 1 - Regra de Cramer

a) Sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solução: $x = \frac{9}{7},\ y = \frac{13}{7}$

Exercício 1 - Regra de Cramer (continuação)

b) Sistema:

$$\begin{cases} 4x - 7y = 11 \\ 2x + 8y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solução: $x = \frac{44}{23},\ y = \frac{-11}{23}$

c) Sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: $x = 5,\ y = 5,\ z = -4$

d) Sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 10 \\ x + 4y + 9z = 8 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Solução: $x = -3,\ y = 14,\ z = -5$

Exercício 2 - Sistema Determinado

Sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 4y + z = 3 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 4 - 2m$$

Condição de sistema determinado:

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow 4 - 2m \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$$

Resposta: O sistema é determinado para $\boxed{m \neq 2}$.

Exercício 25a - Máximo e mínimo

Função: $f(x, y) = 3x + y$
Domínio:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 6\}$$

Região triangular com vértices:

$$A(0,0), \quad B(6,0), \quad C(0,6)$$

Calculando $f(x, y)$ nos vértices:

$$f(0,0) = 0, \quad f(6,0) = 18, \quad f(0,6) = 6$$

Máximo: $\boxed{f = 18 \text{ em } (6,0)}$ **Mínimo:** $\boxed{f = 0 \text{ em } (0,0)}$

Exercício 25b - Máximo e mínimo

Função: $f(x, y) = 3x + 3y$
Mesmo domínio:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 6\}$$

Nos vértices:

$$f(0,0) = 0, \quad f(6,0) = 18, \quad f(0,6) = 18$$

Máximo: $\boxed{f = 18 \text{ em } (6,0) \text{ e } (0,6)}$ **Mínimo:** $\boxed{f = 0 \text{ em } (0,0)}$

Exercício 25c - Máximo e mínimo

Função: $f(x, y) = x - y$
Domínio:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + 2y \leq 6\}$$

Vértices:

$$A(0, 0), \quad B(6, 0), \quad C(0, 3)$$

Nos vértices:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(6, 0) = 6, \quad f(0, 3) = -3$$

Máximo: $\boxed{f = 6 \text{ em } (6, 0)}$ **Mínimo:** $\boxed{f = -3 \text{ em } (0, 3)}$

Exercício 25d - Máximo e mínimo

Função: $f(x, y) = x + y$
Domínio:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2 \leq x + y \leq 6\}$$

Vértices do polígono:

$$A(0, 2), \quad B(2, 0), \quad C(6, 0), \quad D(0, 6)$$

Calculando $f(x, y)$**:**

$$f(0, 2) = 2, \quad f(2, 0) = 2, \quad f(6, 0) = 6, \quad f(0, 6) = 6$$

Mínimo: $\boxed{f = 2 \text{ em } (0, 2) \text{ e } (2, 0)}$ **Máximo:**
$\boxed{f = 6 \text{ em } (6, 0) \text{ e } (0, 6)}$

Exercício 25e - Máximo e mínimo

Função: $f(x, y) = x + 10y$
Domínio:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 5,\ 3 \leq y \leq 8\}$$

Vértices do retângulo:

$$A(0, 3), \quad B(0, 8), \quad C(5, 3), \quad D(5, 8)$$

Valores da função:

$$f(0, 3) = 30, \quad f(0, 8) = 80, \quad f(5, 3) = 35, \quad f(5, 8) = 85$$

Mínimo: $\boxed{f = 30 \text{ em } (0, 3)}$ **Máximo:** $\boxed{f = 85 \text{ em } (5, 8)}$

Exercício 25f - Máximo e mínimo

Função: $f(x, y) = x + 2y$
Domínio:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4,\ 2 \leq y \leq 5\}$$

Vértices do retângulo:

$$A(1, 2), \quad B(1, 5), \quad C(4, 2), \quad D(4, 5)$$

Valores da função:

$$f(1, 2) = 5, \quad f(1, 5) = 11, \quad f(4, 2) = 8, \quad f(4, 5) = 14$$

Mínimo: $\boxed{f = 5 \text{ em } (1, 2)}$ **Máximo:** $\boxed{f = 14 \text{ em } (4, 5)}$

Exercício 25g - Máximo e mínimo

Função: $f(x, y) = 2x - y$
Domínio:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2\}$$

Vértices:

$$A(0,0), \quad B(0,2), \quad C(3,0), \quad D(3,2)$$

Valores da função:

$$f(0,0) = 0, \quad f(0,2) = -2, \quad f(3,0) = 6, \quad f(3,2) = 4$$

Mínimo: $\boxed{f = -2 \text{ em } (0,2)}$ **Máximo:** $\boxed{f = 6 \text{ em } (3,0)}$

Exercício 25h - Máximo e mínimo

Função: $f(x, y) = 5x + y$
Domínio:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$$

Vértices:

$$A(0,0), \quad B(0,1), \quad C(1,0), \quad D(1,1)$$

Valores da função:

$$f(0,0) = 0, \quad f(0,1) = 1, \quad f(1,0) = 5, \quad f(1,1) = 6$$

Mínimo: $\boxed{f = 0 \text{ em } (0,0)}$ **Máximo:** $\boxed{f = 6 \text{ em } (1,1)}$

Exercício 25i - Máximo e mínimo

Função: $f(x, y) = 3x - 2y$
Domínio:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3\}$$

Vértices do retângulo:

$$A(0, 1), \quad B(0, 3), \quad C(2, 1), \quad D(2, 3)$$

Valores da função:

$$f(0, 1) = -2, \quad f(0, 3) = -6, \quad f(2, 1) = 4, \quad f(2, 3) = 0$$

Mínimo: $\boxed{f = -6 \text{ em } (0, 3)}$ **Máximo:** $\boxed{f = 4 \text{ em } (2, 1)}$

Exercício 26a - Máximo e mínimo

Função: $f(x, y) = 3x + y$

Restrições:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 4$$

Vértices da região:

$$(0, 0),\ (4, 0),\ (0, 4)$$

Valores:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(4, 0) = 12, \quad f(0, 4) = 4$$

Mínimo: $\boxed{0 \text{ em } (0, 0)}$ **Máximo:** $\boxed{12 \text{ em } (4, 0)}$

Exercício 26b - Máximo e mínimo

Função: $f(x, y) = x + y$
Restrições:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 5, \quad x + 2y \geq 4$$

Vértices da região viável:

$$A(0, 2), \quad B(1, 3), \quad C(5, 0)$$

Valores da função:

$$f(0, 2) = 2, \quad f(1, 3) = 4, \quad f(5, 0) = 5$$

Mínimo: $\boxed{2 \text{ em } (0, 2)}$ **Máximo:** $\boxed{5 \text{ em } (5, 0)}$

Exercício 26c - Máximo e mínimo

Função: $f(x,y) = x - 2y$
Restrições:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 6, \quad x + 2y \geq 4$$

Vértices da região:

$$A(0,2), \quad B(8,-2), \quad C(6,0)$$

Valores:

$$f(0,2) = -4, \quad f(8,-2) = 12, \quad f(6,0) = 6$$

Mínimo: $\boxed{-4 \text{ em } (0,2)}$ **Máximo:** $\boxed{12 \text{ em } (8,-2)}$

Exercício 26d - Máximo e mínimo

Função: $f(x,y) = x + 2y$
Restrições:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 6, \quad x + 2y \geq 4$$

Vértices da região:

$$A(0,2), \quad B(8,-2), \quad C(6,0)$$

Valores:

$$f(0,2) = 4, \quad f(8,-2) = 4, \quad f(6,0) = 6$$

Mínimo: $\boxed{f = 4 \text{ em } (0,2) \text{ e } (8,-2)}$ **Máximo:** $\boxed{f = 6 \text{ em } (6,0)}$

Exercício 26e - Máximo e mínimo

Função: $f(x, y) = 3x + y$
Restrições:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 6, \quad x + 2y \geq 4$$

Vértices da região viável:

$$A(0, 2), \quad B(8, -2), \quad C(6, 0)$$

Valores da função:

$$f(0, 2) = 2, \quad f(8, -2) = 22, \quad f(6, 0) = 18$$

Mínimo: $\boxed{f = 2 \text{ em } (0, 2)}$ **Máximo:** $\boxed{f = 22 \text{ em } (8, -2)}$

Exercício 26f - Máximo e mínimo

Função: $f(x, y) = -x + y$
Restrições:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 6, \quad x + 2y \geq 4$$

Vértices da região viável:

$$A(0, 2), \quad B(8, -2), \quad C(6, 0)$$

Valores da função:

$$f(0, 2) = 2, \quad f(8, -2) = -10, \quad f(6, 0) = -6$$

Mínimo: $\boxed{f = -10 \text{ em } (8, -2)}$ **Máximo:** $\boxed{f = 2 \text{ em } (0, 2)}$

Exercício 26g - Máximo e mínimo

Função: $f(x,y) = -3x + 2y$
Restrições:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 6, \quad x + 2y \geq 4$$

Vértices da região viável:

$$A(0,2), \quad B(8,-2), \quad C(6,0)$$

Valores da função:

$$f(0,2) = 4, \quad f(8,-2) = -28, \quad f(6,0) = -18$$

Mínimo: $\boxed{f = -28 \text{ em } (8,-2)}$ **Máximo:** $\boxed{f = 4 \text{ em } (0,2)}$

Função: $f(x, y) = x^2 + y^2$
Domínio: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$
Mínimo: No centro: $f(0, 0) = 0$
Máximo: Na borda do círculo: $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow f = 4$
Conclusão:

$$\boxed{\min = 0 \text{ em } (0, 0)}, \quad \boxed{\max = 4 \text{ na borda do disco}}$$

Exercício 27b - Máximo e mínimo

Função: $f(x,y) = x^2 - y^2$
Domínio: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$
Análise:

- Derivadas parciais:

$$f_x = 2x, \quad f_y = -2y$$

- Ponto crítico: $(0,0)$, mas está fora do domínio (porque $x > 0,\ y > 0$)
- A função é indefinida no domínio: cresce para $x \to \infty$, decresce para $y \to \infty$

Conclusão:

$$\boxed{\text{Não existem máximo nem mínimo absolutos no domínio.}}$$

Exercício 27c - Mínimo e máximo

Função: $f(x,y) = x^2 + y^2$
Domínio: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$
Análise:

- Derivadas parciais:

$$f_x = 2x, \quad f_y = 2y$$

- Ponto crítico: $(0,0)$, mas está fora do domínio.
- A função é sempre positiva e tende ao infinito quando x ou $y \to \infty$

Conclusão:

Não existe máximo, mas o mínimo é atingido quando $(x,y) \to (0^+,0^+)$

Exercício 27d - Mínimo

Função: $f(x,y) = x^2 + y^2$
Restrição: $x + y = 1, \quad x > 0,\ y > 0$
Substituição: $y = 1 - x \Rightarrow f(x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$
Derivada: $f'(x) = 4x - 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2}$
Valor mínimo:

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Conclusão:

$$\boxed{\min = \frac{1}{2} \text{ em } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

Exercício 27e - Mínimo

Função: $f(x, y) = x^2 + y^2$
Restrição: $x + y = 1, \quad x > 0,\ y > 0$
Solução: Usando $y = 1 - x \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 2x + 1$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Conclusão:

$$\boxed{\min = \frac{1}{2} \text{ em } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

Exercício 27f - Mínimo

Função: $f(x, y) = x^2 + y^2$
Restrição: $x + y = 2$
Substituição: $y = 2 - x \Rightarrow f(x) = x^2 + (2 - x)^2 = 2x^2 - 4x + 4$
Derivada: $f'(x) = 4x - 4 \Rightarrow x = 1, \ y = 1$
Valor mínimo:

$$f(1, 1) = 1^2 + 1^2 = 2$$

Conclusão:

$$\boxed{\min = 2 \text{ em } (1, 1)}$$

Função: $f(x, y) = x^2 + y^2$
Restrição: $x + y = 3$
Substituição: $y = 3 - x \Rightarrow f(x) = x^2 + (3 - x)^2 = 2x^2 - 6x + 9$
Derivada: $f'(x) = 4x - 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2},\ y = \frac{3}{2}$
Valor mínimo:

$$f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

Conclusão:

$$\boxed{\min = \frac{9}{2} \text{ em } \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)}$$

Exercício 27h - Mínimo

Função: $f(x, y) = x^2 + y^2$
Restrição: $x + y = 4$
Substituição:
$y = 4 - x \Rightarrow f(x) = x^2 + (4 - x)^2 = 2x^2 - 8x + 16$
Derivada: $f'(x) = 4x - 8 \Rightarrow x = 2,\ y = 2$
Valor mínimo:

$$f(2, 2) = 2^2 + 2^2 = 8$$

Conclusão:

$$\boxed{\min = 8 \text{ em } (2, 2)}$$

Exercício 28 - Marcenaria

Variáveis:

$$x = \text{nº de mesas}, \quad y = \text{nº de cadeiras}$$

Função objetivo (receita):

$$f(x,y) = 200x + 90y$$

Restrições:

$$\begin{cases} 10x + 2y \leq 200 & \text{(horas-homem)} \\ 2x + 3y \leq 120 & \text{(madeira)} \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Vértices da região viável:

$$A(0,0), \quad B(20,0), \quad C(0,40), \quad D\left(\frac{180}{13}, \frac{400}{13}\right)$$

Avaliação da função:

$$f(0,0) = 0, \quad f(20,0) = 4000, \quad f(0,40) = 3600, \quad f\left(\frac{180}{13}, \frac{400}{13}\right) = \frac{72}{}$$

Sistema:

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 0 \\ 4x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 7z = 0 \end{cases}$$

Matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Escalonando: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\boxed{x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0}$$

Questão 4b - Escalonamento

Sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \\ 4x - y + z = 3 \end{cases}$$

Matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Escalonando: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\boxed{x = 1, \quad y = 3, \quad z = 2}$$

Questão 4c - Inconsistente

Sistema:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - 4y + z = 2 \\ 7x - 10y - 3z = 6 \end{cases}$$

Matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 7 & -10 & -3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Escalonamento: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclusão:

$$\boxed{\text{Sistema sem solução (inconsistente)}}$$

Questão 4d - Infinitas Soluções

Sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

Matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Escalonamento: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução geral:

$$\boxed{\begin{cases} z = t \\ y = \frac{3}{5}t \\ x = \frac{1}{5}t + 1 \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}}$$

Questão 4e - Infinitas Soluções

Sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \\ 3x + 6y = 6 \end{cases}$$

Matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Escalonamento: } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução geral:

$$\boxed{\begin{cases} y = t \\ x = 2 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Questão 4f - Inconsistente

Sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

Matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Escalonamento: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Conclusão:

$$\boxed{\text{Sistema sem solução (inconsistente)}}$$

Exercício Resolvido: Análise de Lucro

Problema

Uma malharia tem custo fixo de R$20.000/mês, custo variável de R$60/unidade, preço de venda de R$100/unidade e vende 2.000 unidades/mês. Reduzindo o preço em 10%, as vendas aumentam 20%. A alteração é vantajosa?

Exercício Resolvido: Análise de Lucro

Problema

Uma malharia tem custo fixo de R$20.000/mês, custo variável de R$60/unidade, preço de venda de R$100/unidade e vende 2.000 unidades/mês. Reduzindo o preço em 10%, as vendas aumentam 20%. A alteração é vantajosa?

Solução: Cenário Atual

- Custo: $C(x) = 20.000 + 60x$
- Receita: $R(x) = 100x$
- Lucro: $L(x) = 100x - (20.000 + 60x) = 40x - 20.000$
- Para $x = 2.000$: $L(2.000) = 40 \cdot 2.000 - 20.000 = 60.000$

Lucro atual: R$60.000.

Exercício Resolvido: Análise de Lucro

Problema

Uma malharia tem custo fixo de R$20.000/mês, custo variável de R$60/unidade, preço de venda de R$100/unidade e vende 2.000 unidades/mês. Reduzindo o preço em 10%, as vendas aumentam 20%. A alteração é vantajosa?

Solução: Cenário Atual

- Custo: $C(x) = 20.000 + 60x$
- Receita: $R(x) = 100x$
- Lucro: $L(x) = 100x - (20.000 + 60x) = 40x - 20.000$
- Para $x = 2.000$: $L(2.000) = 40 \cdot 2.000 - 20.000 = 60.000$

Lucro atual: R$60.000.

Solução: Cenário Proposto

- Novo preço: $100 \times 0,9 = 90$
- Nova quantidade: $2.000 \times 1,2 = 2.400$

Gráfico e Análise

Comparação

- Lucro atual: R$60.000
- Lucro proposto: R$52.000
- Diferença: R$8.000 (redução)

Conclusão: A alteração não é vantajosa, pois o lucro diminui devido à menor margem por unidade.

Gráfico e Análise

Comparação

- Lucro atual: R$60.000
- Lucro proposto: R$52.000
- Diferença: R$8.000 (redução)

Conclusão: A alteração não é vantajosa, pois o lucro diminui devido à menor margem por unidade.

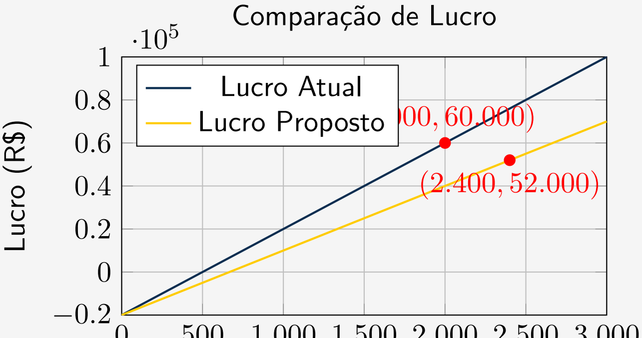


Gráfico e Análise

Comparação

- Lucro atual: R$60.000
- Lucro proposto: R$52.000
- Diferença: R$8.000 (redução)

Conclusão: A alteração não é vantajosa, pois o lucro diminui devido à menor margem por unidade.