

Problemas de Valor de Contorno: Exemplos e Aplicações

Prof. Ana Isabel Castillo

May 17, 2025

Universidade das EDPs

1. Introdução aos Problemas de Valor de Contorno
2. Exemplo Prático 1: BVP 1D
3. Exemplo Prático 2: BVP 2D
4. Visualização
5. Aplicação Financeira
6. Exercício Resolvido
7. Conclusão

Introdução aos Problemas de Valor de Contorno

O que são Problemas de Valor de Contorno?

Definição

Problemas de Valor de Contorno (BVPs) envolvem equações diferenciais com condições especificadas nas fronteiras do domínio:

$$a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{du}{dx} + cu = f(x), \quad u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b,$$

ou, em 2D, $\nabla^2 u = f(x, y)$ com condições de contorno.

Contexto

Usados em física (deflexão de vigas, calor estacionário) e finanças (otimização com restrições).

Exemplo Prático 1: BVP 1D

Exemplo: Deflexão de uma Viga

Uma viga de comprimento $L = 1$ m, engastada nas extremidades ($u(0) = u(1) = 0$), está sujeita a uma carga uniforme $f(x) = -1$.

Resolva:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -1.$$

Solução

Integração direta:

$$\frac{du}{dx} = -x + C_1, \quad u(x) = -\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Condições: $u(0) = 0 \implies C_2 = 0$,

$u(1) = 0 \implies -\frac{1}{2} + C_1 = 0 \implies C_1 = \frac{1}{2}$. Solução:

$$u(x) = \frac{x(1-x)}{2}.$$

Exemplo Prático 2: BVP 2D

Exemplo: Temperatura em uma Placa

Uma placa quadrada $0 \leq x, y \leq 1$ tem $u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0$, $u(x, 1) = \sin(\pi x)$. Resolva:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Solução

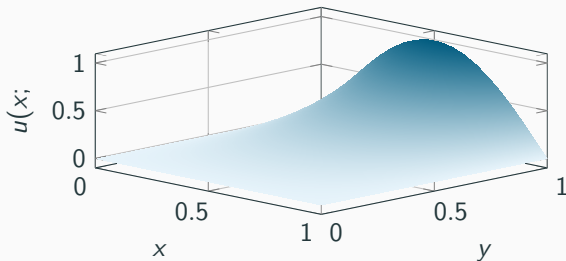
Separação de variáveis: $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Equações:

$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$. Com condições de contorno, $X(x) = \sin(n\pi x)$, $Y(y) = \sinh(n\pi y)$. Para $u(x, 1) = \sin(\pi x)$:

$$u(x, y) = \frac{\sin(\pi x) \sinh(\pi y)}{\sinh(\pi)}.$$

Visualização

Visualização: Temperatura na Placa



Interpretação

A temperatura aumenta suavemente em direção à borda superior ($y = 1$), com máximo em $u(x, 1) = \sin(\pi x)$.

Aplicação Financeira

Problemas de valor de contorno aparecem na precificação de derivativos com restrições fixas:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r \frac{\partial V}{\partial S} - kV = 0,$$

onde $V(S)$ é o valor do derivativo, S é o preço do ativo.

Exemplo

Precificação de uma opção com barreiras: $V(S_0) = 0$, $V(S_1) = K$.

Solução analítica ajustada por condições de contorno.

Exercício Resolvido

Exercício

Resolva o BVP para uma viga com $\frac{d^2u}{dx^2} = -x$, $u(0) = u(1) = 0$.

Solução

Integração:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x^2}{2} + C_1, \quad u(x) = -\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2.$$

Condições: $u(0) = 0 \implies C_2 = 0$,

$u(1) = 0 \implies -\frac{1}{6} + C_1 = 0 \implies C_1 = \frac{1}{6}$. Solução:

$$u(x) = \frac{x(1-x^2)}{6}.$$

Conclusão

- BVPs modelam fenômenos com condições de contorno fixas.
- Aplicações em física (vigas, calor) e finanças (derivativos).
- Soluções analíticas e visualizações são ferramentas poderosas.

Próximos Passos

Explorar métodos numéricos (ex.: diferenças finitas, elementos finitos) para BVPs complexos.