Análise da Questão sobre a Transformada de Fourier em Senos

Prof. Ana Isabel

02/05/2025

Questão:01 Seja a função $f(x) = xe^{-2x}$ definida para $x \in (0, +\infty)$. É fornecida sua transformada de Fourier em senos:

$$\mathcal{F}_s(\xi) = \frac{4\xi}{(4+\xi^2)^2}$$

É apresentada a seguinte representação integral para $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{4\xi \cos(\xi x)}{(4+\xi^2)^2} \, d\xi$$

Objetivo: Verificar se a afirmação é **verdadeira** ou **falsa**.

Análise

A transformada de Fourier em senos de uma função $f(x)$, definida em $(0, \infty)$, é dada por:

$$\mathcal{F}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(\xi x) \, dx$$

A fórmula de reconstrução de $f(x)$ a partir de $\mathcal{F}_s(\xi)$ é:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathcal{F}_s(\xi) \sin(\xi x) \, d\xi$$

No entanto, a integral apresentada na questão utiliza a função **cosseno** no integrando, o que corresponde à transformada de Fourier em **cossenos**, e não em senos. Assim, a representação fornecida para $f(x)$ não está de acordo com a definição correta da transformada de Fourier em senos.

Conclusão

Portanto, a afirmação apresentada é:

$$\boxed{\textbf{Falsa}}$$

Questão:02 Seja $f(x) = e^{-\alpha|x|}$. Afirmam que:

$$\mathcal{F}(f'(x)) = -\frac{2}{\alpha^2 + \xi^2}$$

Objetivo: Verificar se a afirmação é **verdadeira** ou **falsa**.

Análise

Sabemos que a transformada de Fourier de $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ é:

$$\mathcal{F}(f(x)) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}$$

E que, pela propriedade da transformada de Fourier da derivada:

$$\mathcal{F}(f'(x)) = i\xi \cdot \mathcal{F}(f(x)) = \frac{2i\alpha\xi}{\alpha^2 + \xi^2}$$

A expressão apresentada na questão:

$$\mathcal{F}(f'(x)) = -\frac{2}{\alpha^2 + \xi^2}$$

não condiz com o resultado correto. Ela não possui o fator ξ, nem o número imaginário i que aparece naturalmente ao aplicar a derivada na transformada de Fourier.

Conclusão

Portanto, a afirmativa apresentada é:

$$\boxed{\textbf{Falsa}}$$