Transformada de Fourier e Aplicações

Tópicos fundamentais para resolução da Lista 3

Prof. Ana Isabel Castillo Pereda

April 17, 2025

Objetivos da Aula

- Revisar os conceitos de transformada de Fourier
- Compreender propriedades fundamentais
- Aplicar técnicas de transformada para resolver EDPs
- Interpretar soluções integrais e físicas

1. Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\, dx$$

- Domínio: $f \in L^1(\mathbb{R})$
- Inversão: $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\, d\xi$

2. Propriedades Fundamentais

- Escala: $\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\xi/a)$
- Translação: $\mathcal{F}(f(x - x_0)) = e^{-i\xi x_0}\hat{f}(\xi)$
- Modulação: $\mathcal{F}(f(x)\cos(wx)) = \frac{1}{2}[\hat{f}(\xi - w) + \hat{f}(\xi + w)]$

3. Transformadas de Senos e Cossenos

- Cossenos: $\mathcal{F}_c(f)(\xi) = \int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)\, dx$
- Senos: $\mathcal{F}_s(f)(\xi) = \int_0^\infty f(x)\sin(\xi x)\, dx$
- Úteis para domínios semi-infinitos com condições de Dirichlet ou Neumann

4. Aplicações em EDPs

- Equação da onda: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$
- Equação do calor: $u_t = K u_{xx}$
- Equação de Laplace: $\Delta u = 0$
- Soluções via separação de variáveis + transformadas

5. Problemas com Condições de Contorno

- Transformar condições não homogêneas em homogêneas
- Expandir função inicial como série de senos/cossenos
- Aplicar transformada para obter ODEs
- Solução por inversão da transformada

6. Fórmulas Clássicas de Solução

D'Alembert para a equação da onda

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(u)\,du$$

Integral de Fourier para o calor

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4Kt}}\,ds$$

Resumo Final

- As transformadas de Fourier facilitam a resolução de EDPs em domínios infinitos ou semi-infinitos
- Saber aplicar as propriedades é chave para simplificar expressões
- As soluções obtidas têm interpretações físicas: propagação, difusão, equilíbrio

Obrigada!

Dúvidas? Comentários? Vamos resolver juntos!

"A matemática é a música da razão." – James Joseph Sylvester