Equação de Laplace: Problemas e Aplicações

Prof. Ana Isabel Castillo

May 17, 2025

Universidade das EDPs

Sumário

Introdução à Equação de Laplace

O que é a Equação de Laplace?

Definição
A equação de Laplace descreve estados estacionários em um meio:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

onde $u(x, y)$ é o potencial (ex.: temperatura, potencial elétrico).

Contexto
Usada em física (eletrostática, fluxo de calor estacionário) e finanças (precificação de derivativos em equilíbrio).

Exemplo Prático

Exemplo: Temperatura em uma Placa

Uma placa retangular $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ tem temperatura $u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0$, $u(x, 1) = \sin(\pi x)$. Encontre $u(x, y)$.

Solução

Usamos separação de variáveis: $u(x, y) = X(x)Y(y)$. A equação $\nabla^2 u = 0$ leva a:

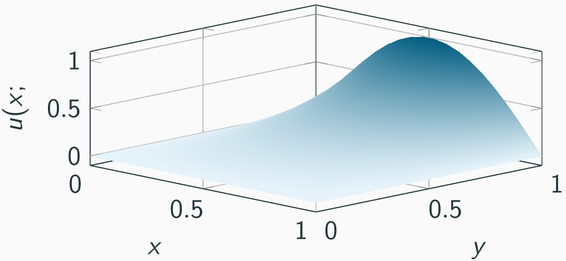
$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda.$$

Com condições de contorno, $X(x) = \sin(n\pi x)$, $Y(y) = \sinh(n\pi y)$. Para $u(x, 1) = \sin(\pi x)$, a solução é:

$$u(x, y) = \frac{\sin(\pi x) \sinh(\pi y)}{\sinh(\pi)}.$$

Visualização

Visualização



Interpretação
A temperatura varia suavemente, com máximo na borda superior ($y = 1$).

Aplicação Financeira

Equação de Laplace em Finanças

A equação de Laplace aparece em modelos de precificação de derivativos em estados estacionários:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0,$$

onde $V(S, t)$ é o valor do derivativo, S é o preço do ativo.

Exemplo

Modelagem de opções perpétuas com condições de contorno fixas.

Exercício Resolvido

Exercício

Resolva a equação de Laplace em uma placa com
$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0$, $u(x, 1) = x(1 - x)$.

Solução

Série de Fourier: $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y)$. Condição: $u(x, 1) = x(1 - x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(n\pi) \sin(n\pi x)$. Coeficientes: $B_n \sinh(n\pi) = 2 \int_0^1 x(1 - x) \sin(n\pi x)\, dx = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}$. Solução:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^3\pi^3 \sinh(n\pi)} \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y).$$

Conclusão

Resumo

- A equação de Laplace modela estados estacionários.
- Aplicações em física (eletrostática, calor) e finanças (derivativos).
- Soluções com séries de Fourier são eficazes para problemas 2D.

Próximos Passos
Explorar métodos numéricos (ex.: elementos finitos) e problemas em domínios complexos.