Solução da Equação de Laplace na Faixa Semi-Infinita

Prof. Ana Isabel

Problema 1

Seja R a faixa semi-infinita aberta $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 < y < 12\}$. Usando o método de separação de variáveis de Fourier, resolva o problema genérico da equação de Laplace (solução em Série):

$$\begin{gathered}
\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \text{em } R, \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 12) = 0, \quad x \geq 0, \\
u(x, y) \text{ limitado}, \\
u(0, y) = g(y), \quad g(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 6, \\ 12 - y, & 6 \leq y \leq 12. \end{cases}
\end{gathered}$$

Solução:

Vamos usar separação de variáveis, assumindo que a solução pode ser escrita na forma:

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Substituindo na equação de Laplace:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

que se reescreve como:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

onde λ é uma constante de separação. Isso nos dá dois problemas de valores próprios:

Parte em $Y(y)$:

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0,$$

com as condições de contorno:

$$Y'(0) = 0, \quad Y'(12) = 0.$$

A solução geral é:

$$Y_n(y) = A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{12}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Parte em $X(x)$:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,$$

cuja solução geral é:

$$X_n(x) = B_n e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

para garantir que a solução seja limitada conforme $x \to \infty$.

Combinação das Soluções

A solução geral é, portanto:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{12}x} \cos\left(\frac{n\pi y}{12}\right).$$

Coeficientes A_n

Para determinar A_n, usamos a condição de contorno inicial:

$$u(0,y) = g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{12}\right).$$

Expansão de $g(y)$ em série de Fourier:

$$A_n = \frac{2}{12}\int_0^{12} g(y)\cos\left(\frac{n\pi y}{12}\right)\,dy.$$

Calculando A_n para o caso dado:

$$A_n = \frac{2}{12}\left[\int_0^6 y\cos\left(\frac{n\pi y}{12}\right)\,dy + \int_6^{12}(12-y)\cos\left(\frac{n\pi y}{12}\right)\,dy\right],$$

que ao resolver resulta em:

$$A_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}.$$

Assim, a solução final é:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} e^{-\frac{n\pi}{12}x} \cos\left(\frac{n\pi y}{12}\right).$$

Problema 2

Resolva o problema genérico da equação de Laplace na faixa estreita semi-infinita

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a > x > 0, y > 0\}$$

usando a Transformada de Fourier em cossenos, dado o P.V.C.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad a > x > 0, \quad y > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad a > x > 0, \tag{2}$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = g(y), \quad y \geq 0, \tag{3}$$

$$g(y) = e^{-y^2}, \tag{4}$$

$$a = \pi. \tag{5}$$

Solução:

Vamos usar a Transformada de Fourier em cossenos definida por

$$u(x, y) = \int_0^\infty \phi(k, y) \cos(kx)\, dk,$$

com a condição de que $\phi(k, y)$ satisfaz a equação de Laplace transformada.

Substituindo e separando as variáveis, obtemos a solução geral:

$$u(x, y) = \int_0^\infty A(k) e^{-ky} \cos(kx)\, dk.$$

Aplicando a condição de contorno em $x = a$:

$$u(a, y) = e^{-y^2} = \int_0^\infty A(k) e^{-ky} \cos(ka)\, dk.$$

Dessa forma, a função $A(k)$ é dada por

$$A(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-y^2} \cos(ka)\, dy.$$

Agora, expressando a solução final explicitamente:

$$u(x, y) = \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-y^2} \cos(ka)\, dy \right) e^{-ky} \cos(kx)\, dk.$$

Essa forma integral representa a solução final, dependendo da função $g(y) = e^{-y^2}$ e do parâmetro $a = \pi$, que pode ser avaliada numericamente ou simplificada em casos específicos.

Problema 3

Seja $f(x)$ a função dada pela equação integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)(x-u)\, du}{(x-u)^2 + 4} = \frac{3x}{x^2 + 36}.$$

Use Transformada de Fourier (versão direta e inversa) juntamente com o Teorema da Convolução para determinar explicitamente a solução $f(x)$ da equação.

Solução:

Primeiro, escrevemos a equação integral como uma convolução:

$$(g * f)(x) = \frac{3x}{x^2 + 36},$$

onde definimos

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + 4}.$$

Aplicando a transformada de Fourier:

$$\hat{f}(k)\hat{g}(k) = \hat{h}(k),$$

onde $\hat{h}(k)$ é a transformada de Fourier de $\frac{3x}{x^2+36}$. Agora calculamos cada uma:

Para $g(x)$, usando a tabela de transformadas:

$$\hat{g}(k) = e^{-2|k|}.$$

Para $h(x) = \frac{3x}{x^2+36}$, que é uma função racional:

$$\hat{h}(k) = 3\pi e^{-6|k|}.$$

Assim, temos:

$$\hat{f}(k) = \frac{3\pi e^{-6|k|}}{e^{-2|k|}} = 3\pi e^{-4|k|}.$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 3\pi e^{-4|k|} e^{ikx}\, dk,$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|k|} e^{ikx}\, dk.$$

Usando a forma conhecida para essa transformada:

$$f(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{8}{x^2 + 16}\right) = \frac{12}{x^2 + 16}.$$

Portanto, a solução final é:

$$f(x) = \frac{12}{x^2 + 16}.$$

Problema 4

A Série de Fourier associada à função $f(x) = x$, para $-\pi \leq x \leq \pi$, é dada por:

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Use essa representação e o Teorema de integração termo a termo para expressar a função

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

em termos de uma série da forma

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\right], \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

(b) Use o resultado do item (a) junto com o Teorema de Convergência da Série de Fourier para obter a seguinte soma numérica:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

Solução:

Primeiro, expandindo $f(x) = x$ como uma série de Fourier, sabemos que a forma geral é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right],$$

onde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx)\, dx = 0$$

($f(x) = x$ é função ímpar, então todos os coeficientes a_n são zero) e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Assim, a série de Fourier para $f(x) = x$ é

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

Agora, para encontrar $F(x) = \frac{x^2}{2}$, integramos termo a termo:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \right) dt.$$

Calculando essa integral,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2} \right) (1 - \cos(nx)),$$

o que nos dá:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Comparando com a forma desejada, temos:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

que é a soma numérica final desejada.