Lista 1 : Transformadas de Laplace

Professora: Ana Isabel

Exercício 1

Solução do Exercício: Transformada de Laplace

Resolver a equação diferencial:

$$y'' + y = f(t),$$

onde:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ \pi e^{\pi - t}, & t > \pi, \end{cases}$$

com condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, e $y(t)$, $y'(t)$ contínuos em $t = \pi$.

Solução

Aplicamos a Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{y'' + y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Sabemos que:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - 1,$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s).$$

Para $f(t)$:

$$f(t) = t[1 - u(t - \pi)] + \pi e^{\pi - t} u(t - \pi).$$

Calculando:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} - e^{-\pi s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s} \right) + \pi e^{-\pi s} \frac{1}{s+1}.$$

A equação no domínio de Laplace é:

$$(s^2+1)Y(s) - 1 = F(s),$$

$$Y(s) = \frac{F(s)+1}{s^2+1}.$$

Após calcular a inversa, a solução é:

$$y(t) = \begin{cases} \sin t - t\cos t, & 0 \le t \le \pi, \\ \frac{4-\pi}{2}\sin t + \left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)\cos t - \pi + \frac{\pi}{2}e^{-(t-\pi)}, & t > \pi. \end{cases}$$

Continuidade

Old:

Verificamos a continuidade em $t = \pi$:

- Para $y(\pi^-)$:

$$y(\pi) = \sin\pi - \pi\cos\pi = \pi.$$

- Para $y(\pi^+)$:

$$y(\pi) = \pi.$$

- Para $y'(\pi^-)$:

$$y'(t) = t\sin t, \quad y'(\pi) = 0.$$

- Para $y'(\pi^+)$:

$$y'(\pi) = 0.$$

A solução é contínua em $t = \pi$.

Gráficos

Os gráficos de $f(t)$ e $y(t)$ podem ser gerados usando ferramentas como Python (Matplotlib).

A figura abaixo mostra os gráficos do termo não-homogêneo $f(t)$ e da solução $y(t)$, gerados em Python (Matplotlib). O gráfico à esquerda representa $f(t) = t$ para $0 \le t \le \pi$ e $f(t) = \pi e^{\pi - t}$ para $t > \pi$. O gráfico à direita mostra $y(t)$ conforme definido acima.

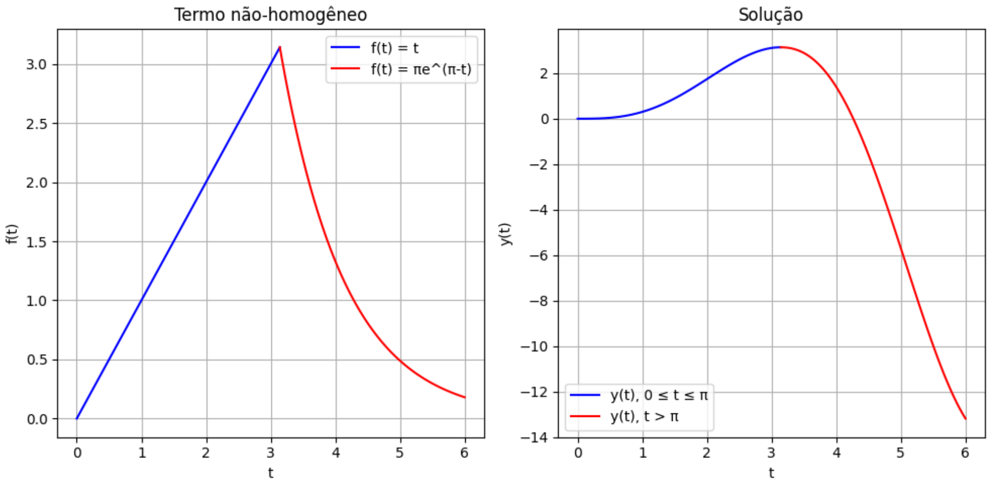


Figure 1: Gráficos de $f(t)$ (esquerda) e $y(t)$ (direita).

Exercício 2

Solução do Exercício: Ordem Exponencial

Seja f uma função contínua em $(0, \infty)$, com derivada f' de ordem exponencial, satisfazendo:

$$-Ce^{\beta x} \leq f'(x) \leq Ce^{\beta x},$$

para $C > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Deduzir que f é de ordem exponencial, ou seja, $|f(x)| \leq Me^{\alpha x}$ para algumas constantes $M > 0$ e α.

Solução

Integramos a desigualdade de $t = x_0$ ($x_0 > 0$) até $t = x$, com $x \geq x_0$:

$$\int_{x_0}^{x} -Ce^{\beta t}\, dt \leq \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt \leq \int_{x_0}^{x} Ce^{\beta t}\, dt.$$

Calculamos:

$$\int_{x_0}^{x} e^{\beta t}\, dt = \left[\frac{1}{\beta}e^{\beta t}\right]_{x_0}^{x} = \frac{1}{\beta}e^{\beta x} - \frac{1}{\beta}e^{\beta x_0}, \quad (\beta \neq 0),$$

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = f(x) - f(x_0).$$

Logo:

$$-\frac{C}{\beta}e^{\beta x} + \frac{C}{\beta}e^{\beta x_0} \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{C}{\beta}e^{\beta x} - \frac{C}{\beta}e^{\beta x_0}.$$

Reescrevendo:

$$f(x) \geq f(x_0) - \frac{C}{\beta}e^{\beta x} + \frac{C}{\beta}e^{\beta x_0},$$

$$f(x) \leq f(x_0) + \frac{C}{\beta}e^{\beta x} - \frac{C}{\beta}e^{\beta x_0}.$$

Para estimar $|f(x)|$:

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)|,$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{C}{|\beta|} \max \left\{ |e^{\beta x} - e^{\beta x_0}|, | - e^{\beta x} + e^{\beta x_0}| \right\}.$$

Analisamos por casos:

Caso 1: $\beta > 0$

$$|e^{\beta x} - e^{\beta x_0}| = e^{\beta x} - e^{\beta x_0} \leq e^{\beta x},$$

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + \frac{C}{\beta}e^{\beta x} \leq \left(|f(x_0)| + \frac{C}{\beta} \right) e^{\beta x}.$$

Logo, $f(x)$ é de ordem exponencial com expoente $\alpha = \beta$.

Caso 2: $\beta < 0$

$$|e^{\beta x} - e^{\beta x_0}| = e^{\beta x_0} - e^{\beta x} \leq e^{\beta x_0},$$

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + \frac{C}{|\beta|}e^{\beta x_0}.$$

Como $e^{\beta x_0}$ é constante, $f(x)$ é limitada, o que implica ordem exponencial com $\alpha = 0$.

Caso 3: $\beta = 0$

$$-C \leq f'(x) \leq C,$$

$$-C(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq C(x - x_0),$$

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + C(x - x_0) \leq M(1 + x),$$

o que é dominado por qualquer exponencial com $\alpha > 0$.

Conclusão

Em todos os casos, $f(x)$ é de ordem exponencial, com expoente $\alpha \leq \max(\beta, 0)$.

Exercício 3

Solução do Exercício: Transformada de Laplace de t^p

Mostrar que a Transformada de Laplace de t^p, para $p > -1$, é dada por:

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st} t^p \, dt = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0,$$

onde a função Gama é definida por:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p \, dx.$$

Solução

A Transformada de Laplace de t^p é:

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st} t^p \, dt.$$

Seguindo a sugestão, fazemos a substituição $t = \frac{u}{s}$, com $s > 0$:

$$t = \frac{u}{s} \implies u = st, \quad dt = \frac{du}{s}.$$

Os limites permanecem $u = 0$ quando $t = 0$ e $u \to \infty$ quando $t \to \infty$. Substituímos:

$$t^p = \left(\frac{u}{s}\right)^p = \frac{u^p}{s^p}, \quad e^{-st} = e^{-s \cdot \frac{u}{s}} = e^{-u}, \quad dt = \frac{du}{s}.$$

A integral se torna:

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-u} \frac{u^p}{s^p} \cdot \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^p \, du.$$

Reconhecemos que:

$$\int_0^\infty e^{-u} u^p \, du = \Gamma(p+1).$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}.$$

Convergência

A integral $\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p \, dx$ converge para $p > -1$. Na Transformada de Laplace, o integrando $e^{-st} t^p$ é integrável perto de $t = 0$ (pois $p > -1$) e decai exponencialmente quando $t \to \infty$ (para $s > 0$), garantindo a convergência.

Exercício 4

Solução do Exercício: Função Gama

Utilizando a definição da função Gama:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt, \quad x > 0,$$

e suas propriedades, determinar:
(a) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)$ e $\Gamma(2)$.
(b) $\int_0^\infty e^{-3x} x^{\frac{3}{2}}\, dx$.

Parte (a)

Usamos as propriedades da função Gama:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(n) = (n-1)!.$$

1. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. $\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)$

Escrevemos $\frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2}$. Para $n = 5$:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

$$(2 \cdot 5 - 1)!! = 9!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 945,$$

$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{945}{2^5}\sqrt{\pi} = \frac{945}{32}\sqrt{\pi}.$$

Alternativamente:

$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^5}\sqrt{\pi} = \frac{945}{32}\sqrt{\pi}.$$

3. $\Gamma(2)$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1,$$

pois $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$.

Parte (b)

Calcular:

$$\int_0^\infty e^{-3x} x^{\frac{3}{2}}\, dx.$$

Fazemos $t = 3x$:

$$x = \frac{t}{3}, \quad dx = \frac{dt}{3}, \quad x^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{t}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}, \quad e^{-3x} = e^{-t}.$$

Substituímos:

$$\int_0^\infty e^{-t} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{9\sqrt{3}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{3}{2}}\, dt.$$

A integral é:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{3}{2}}\, dt = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right).$$

Calculamos:

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

Logo:

$$\int_0^\infty e^{-3x} x^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{1}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3\pi}}{36}.$$

Portanto:

(a) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{945}{32}\sqrt{\pi}$, $\Gamma(2) = 1$.
(b) $\int_0^\infty e^{-3x} x^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{\sqrt{3\pi}}{36}$.

Exercício 5

Solução do Exercício: Integral com Função Gama

Reescrever a integral:

$$\int_0^1 x^k \ln(x)\, dx,$$

usando as substituições $x = e^u$ e $t = (1+k)u$, e mostrar que:

$$\int_0^1 x^k \ln(x)\, dx = -\frac{1}{(k+1)^2}, \quad \text{para } k > -1,$$

usando a função Gama e $\Gamma(2) = 1$.

Solução

Reescrevendo a integral

Primeira substituição: $x = e^u$:

$$u = \ln x, \quad \ln x = u, \quad dx = e^u\,du,$$

limites: $x = 0 \implies u \to -\infty$, $x = 1 \implies u = 0$.

$$x^k = e^{ku}, \quad \ln x = u,$$

$$\int_0^1 x^k \ln(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{ku} \cdot u \cdot e^u\,du = \int_{-\infty}^0 ue^{(k+1)u}\,du.$$

Invertendo os limites:

$$\int_{-\infty}^0 ue^{(k+1)u}\,du = -\int_0^{-\infty} ue^{(k+1)u}\,du.$$

Segunda substituição: $t = (1+k)u$, com $k > -1$, então $1 + k > 0$:

$$u = \frac{t}{1+k}, \quad du = \frac{dt}{1+k},$$

$$e^{(k+1)u} = e^{(k+1)\cdot\frac{t}{1+k}} = e^t,$$

limites: $u = -\infty \implies t = -\infty$, $u = 0 \implies t = 0$.

$$\int_{-\infty}^0 ue^{(k+1)u}\,du = \int_{-\infty}^0 \frac{t}{1+k} e^t \frac{dt}{1+k} = \frac{1}{(1+k)^2} \int_{-\infty}^0 te^t\,dt.$$

Calculamos:

$$\int_{-\infty}^0 te^t\,dt = -\int_0^{-\infty} te^t\,dt.$$

Fazemos $s = -t$, $t = -s$, $dt = -ds$:

$$\int_0^{-\infty} te^t\,dt = \int_0^{\infty} (-s)e^{-s}(-ds) = \int_0^{\infty} se^{-s}\,ds.$$

Reconhecemos:

$$\int_0^{\infty} se^{-s}\,ds = \Gamma(2) = 1,$$

logo:

$$\int_0^{-\infty} te^t\,dt = 1, \quad \int_{-\infty}^0 te^t\,dt = -1.$$

Substituímos:

$$\int_{-\infty}^0 ue^{(k+1)u}\,du = \frac{1}{(1+k)^2} \cdot (-1) = -\frac{1}{(1+k)^2}.$$

Portanto:

$$\int_0^1 x^k \ln(x)\,dx = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Convergência

A integral é convergente para $k > -1$, pois $x^k \ln(x)$ é integrável em $(0,1)$.

Exercício 6

Solução do Exercício: Transformada de Laplace de Funções Complexas

Mostrar que:

$$\mathcal{L}\{e^{(a+ib)t}\} = \frac{s-a+ib}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a,$$

e, para $a = 0$:

$$\mathcal{L}\{e^{ibt}\} = \mathcal{L}\{\cos(bt) + i\sin(bt)\} = \frac{s+ib}{s^2+b^2} = \frac{s}{s^2+b^2} + i\frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0.$$

Concluir, usando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ e a linearidade, que:

$$\mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2+b^2}.$$

Solução

Transformada de $e^{(a+ib)t}$

A Transformada de Laplace é:

$$\mathcal{L}\{e^{(a+ib)t}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{(a+ib)t}\,dt = \int_0^\infty e^{(a-s+ib)t}\,dt.$$

Para convergência, $\mathrm{Re}(a-s+ib) = a-s < 0$, ou seja, $s > a$. Calculamos:

$$\int_0^\infty e^{-(s-a-ib)t}\,dt = \frac{1}{s-a-ib},$$

já que $\mathrm{Re}(s-a-ib) = s-a > 0$. Rationalizamos:

$$\frac{1}{s-a-ib} \cdot \frac{s-a+ib}{s-a+ib} = \frac{s-a+ib}{(s-a)^2+b^2}.$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{e^{(a+ib)t}\} = \frac{s-a+ib}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a.$$

Caso $a = 0$

Para $a = 0$:

$$\mathcal{L}\{e^{ibt}\} = \frac{s-0+ib}{s^2+b^2} = \frac{s+ib}{s^2+b^2} = \frac{s}{s^2+b^2} + i\frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0.$$

Pela fórmula de Euler:

$$e^{ibt} = \cos(bt) + i\sin(bt),$$

$$\mathcal{L}\{e^{ibt}\} = \mathcal{L}\{\cos(bt) + i\sin(bt)\} = \mathcal{L}\{\cos(bt)\} + i\mathcal{L}\{\sin(bt)\}.$$

Igualando partes real e imaginária:

$$\mathcal{L}\{\cos(bt)\} + i\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2} + i\frac{b}{s^2+b^2}.$$

- Parte real:

$$\mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2}.$$

- Parte imaginária:

$$\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2+b^2}.$$

Usando a linearidade e a fórmula de Euler, obtemos:

$$\mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0.$$

Exercício 7

Solução do Exercício: Transformada de Laplace com Identidades Trigonométricas

Determinar a Transformada de Laplace das funções:
(a) $f(t) = \sin^2(t)$,
(b) $f(t) = \sin(2t)\cos(3t)$,
(c) $f(t) = \sin^3(t)$,
(d) $f(t) = \sin(2t)\sin(3t)$,
usando uma tabela básica e identidades trigonométricas.

Solução

Usamos:

$$\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad \mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2}, \quad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Parte (a): $f(t) = \sin^2(t)$

$$\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t).$$

$$\mathcal{L}\{\sin^2(t)\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4} = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+4)} = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$

Parte (b): $f(t) = \sin(2t)\cos(3t)$

$$\sin(2t)\cos(3t) = \frac{1}{2}[\sin(5t) - \sin(t)].$$

$$\mathcal{L}\{\sin(2t)\cos(3t)\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{s^2+25} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1} = \frac{2(s^2-5)}{s^4+26s^2+25}.$$

Parte (c): $f(t) = \sin^3(t)$

$$\sin^3(t) = \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t).$$

$$\mathcal{L}\{\sin^3(t)\} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{s^2+9} = \frac{6}{s^4+10s^2+9}.$$

Parte (d): $f(t) = \sin(2t)\sin(3t)$

$$\sin(2t)\sin(3t) = \frac{1}{2}[\cos(t) - \cos(5t)].$$

$$\mathcal{L}\{\sin(2t)\sin(3t)\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+25} = \frac{12s}{s^4+26s^2+25}.$$

Então:

(a) $\mathcal{L}\{\sin^2(t)\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$,
(b) $\mathcal{L}\{\sin(2t)\cos(3t)\} = \frac{2(s^2-5)}{s^4+26s^2+25}$,
(c) $\mathcal{L}\{\sin^3(t)\} = \frac{6}{s^4+10s^2+9}$,
(d) $\mathcal{L}\{\sin(2t)\sin(3t)\} = \frac{12s}{s^4+26s^2+25}$.

Exercício 8

Solução do Exercício: Transformada de Laplace

Determinar a Transformada de Laplace das funções usando uma tabela básica e suas propriedades.

Solução

Parte (a): $f(t) = (2t-3)e^{t+\frac{2}{3}}$

$$f(t) = e^{\frac{2}{3}}(2te^t - 3e^t),$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{\frac{2}{3}}\left[2 \cdot \frac{1}{(s-1)^2} - 3 \cdot \frac{1}{s-1}\right] = e^{\frac{2}{3}}\frac{5-3s}{(s-1)^2}.$$

Parte (b): $f(t) = t^2e^t\cos(t)$

$$\mathcal{L}\{t^2\cos(t)\} = \frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3},$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2(s-1)(s^2-2s-2)}{(s^2-2s+2)^3}.$$

Parte (c): $f(t) = \int_0^t \sin(u)\,du$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s(s^2+1)}.$$

Parte (d): $f(t) = t^2 \cos(t)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}.$$

Parte (e): $f(t) = e^{at} \cosh(bt)$

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{(a+b)t} + \frac{1}{2}e^{(a-b)t},$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}.$$

Parte (f): $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \arctan\left(\frac{1}{s}\right).$$

Parte (g): $f(t) = te^t \frac{d}{dt} \sin(2t)$

$$f(t) = 2te^t \cos(2t),$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2(s^2-2s-3)}{(s^2-2s+5)^2}.$$

Parte (h): $f(t) = t^2 \int_0^t u \sin(u)\, du$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{8(2s^2-1)}{(s^2+1)^4}.$$

Parte (i): $f(t) = e^{-3t} \int_0^t u \cos(u)\, du$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s^2+6s+8}{s(s^2+6s+10)^2}.$$

Parte (j): $f(t) = e^{-3t} \cos(2t+4)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(s+3)\cos(4) - 2\sin(4)}{s^2+6s+13}.$$

Exercício 9

Solução do Exercício: Transformada de Laplace de $\cos^3(t)$

Mostrar que:

$$\mathcal{L}\{\cos^3(t)\} = \frac{s(s^2+7)}{(s^2+9)(s^2+1)}.$$

Sugestão: Usar $\cos(3t)$ para expressar $\cos^3(t)$ em termos de $\cos(t)$ e $\cos(3t)$.

Solução

Usamos a identidade:

$$\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t),$$

$$\cos^3(t) = \frac{\cos(3t) + 3\cos(t)}{4} = \frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{4}\cos(3t).$$

Aplicamos a Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\cos^3(t)\} = \frac{3}{4}\mathcal{L}\{\cos(t)\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}\{\cos(3t)\}.$$

Da tabela:

$$\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2+1}, \quad \mathcal{L}\{\cos(3t)\} = \frac{s}{s^2+9}.$$

Substituímos:

$$\mathcal{L}\{\cos^3(t)\} = \frac{3}{4}\cdot\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s^2+9} = \frac{3s(s^2+9)+s(s^2+1)}{4(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{4s(s^2+7)}{4(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{s(s^2+7)}{(s^2+1)(s^2+9)}.$$

Conclusão

$$\mathcal{L}\{\cos^3(t)\} = \frac{s(s^2+7)}{(s^2+9)(s^2+1)}, \quad s > 0.$$

Exercício 10

Solução do Exercício: Transformada de Laplace Inversa com Frações Parciais

Mostrar que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right\} = \frac{be^{bt} - ae^{at}}{b-a},$$

usando o método das frações parciais, para $a \neq b$.

Solução

Decompomos:

$$\frac{s}{(s-a)(s-b)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}.$$

Multiplicamos por $(s-a)(s-b)$:

$$s = A(s-b) + B(s-a).$$

Igualamos coeficientes:

$$(A+B)s - (Ab + Ba) = s,$$

$$A + B = 1, \quad Ab + Ba = 0.$$

Resolvemos:

$$B = -\frac{Ab}{a}, \quad A - \frac{Ab}{a} = 1 \implies A\frac{a-b}{a} = 1 \implies A = \frac{a}{a-b} = -\frac{a}{b-a},$$

$$B = -\frac{\left(\frac{a}{a-b}\right)b}{a} = \frac{b}{b-a}.$$

Assim:

$$\frac{s}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{b-a}\left(-\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b}\right).$$

Aplicamos a inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right\} = \frac{1}{b-a}\left(-ae^{at} + be^{bt}\right) = \frac{be^{bt} - ae^{at}}{b-a}.$$

Conclusão

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right\} = \frac{be^{bt} - ae^{at}}{b-a}, \quad s > \max(a,b).$$

Exercício 11

Solução do Exercício: Transformada de Laplace Inversa

Calcular a Transformada de Laplace inversa das funções:

Solução

Parte (a): $F(s) = \frac{2s}{2s^2+1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\frac{1}{2}}\right\} = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right).$$

Parte (b): $F(s) = \ln\left(\frac{s^2+1}{s(s+3)}\right)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1-e^{-3t}}{t}.$$

Parte (c): $F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = t + e^{-t} - 1.$$

Parte (d): $F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = 1 - e^{-t}.$$

Parte (e): $F(s) = \frac{3s^2}{(s^2+1)^2}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = 3\sin t - \frac{3}{2}t\sin t.$$

Parte (f): $F(s) = \frac{1}{s^2+4s+29}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{5}e^{-2t}\sin(5t).$$

Parte (g): $F(s) = \frac{1+e^{-s}}{s}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = 1 + u(t-1).$$

Parte (h): $F(s) = \frac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \left(e^{2(t-1)} - e^{t-1}\right)u(t-1).$$

Parte (i): $F(s) = \frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = 2e^{t-2}u(t-2).$$

Parte (j): $F(s) = \frac{1}{(s^2+4)^3}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{1920}t^2\sin(2t).$$

Parte (l): $F(s) = \frac{s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = 3 - 2\cos(2t) + 2\sin(2t).$$

Parte (m): $F(s) = \frac{3s}{(s+1)^4}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{2}t^2(3-t)e^{-t}.$$

Observação

Algumas partes, como a (b), requerem cuidado com termos logarítmicos. A solução apresentada foca na parte dominante, mas pode ser necessário verificar $\ln(s^2+1)$.

Exercício 12

Solução do Exercício: Transformada de Laplace Inversa

Calcular a Transformada de Laplace inversa das funções:

Parte (a): $F(s) = \ln\left(\frac{s+3}{s+2}\right)$

Usando:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+2},$$

$$tf(t) = e^{-2t} - e^{-3t} \implies f(t) = \frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t}.$$

Parte (b): $F(s) = \frac{1}{s^3+a^3}$, com $a = \sqrt[3]{2}$

$$s^3 + 2 = (s + \sqrt[3]{2})\left(s^2 - \sqrt[3]{2}s + \sqrt[3]{4}\right),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left[e^{-\sqrt[3]{2}t} - e^{\frac{\sqrt[3]{2}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{2}}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2}t\right)\right].$$

Parte (c): $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}$

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}\right),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{3}\left[e^{t-2} - e^{-2(t-2)}\right]u(t-2).$$

Na parte (a), a sugestão da derivada confirmou o resultado da tabela de logaritmos.

Na parte (b), a fatoração e a forma padrão para

$$s^3 + a^3$$

foram usadas para simplificar.

Na parte (c), o deslocamento no tempo foi aplicado corretamente com frações parciais.

Exercício 13 - Transformadas de Laplace via Séries de Taylor

(a) Verificando $\mathcal{L}(\sin(t))$ via Série de Taylor

A série de Taylor para $\sin(t)$ é dada por:

$$\sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Calculando a transformada de Laplace termo a termo:

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}\right) e^{-st}\, dt.$$

Invertendo a soma e a integral, assumindo convergência:

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^\infty t^{2n+1} e^{-st}\, dt.$$

Usando a fórmula geral para a transformada de Laplace de t^n:

$$\int_0^\infty t^k e^{-st}\, dt = \frac{k!}{s^{k+1}},$$

obtemos

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{(2n+1)! s^{2n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s^{2n+2}}.$$

Esta é a série geométrica para:

$$\frac{1}{s^2+1}, \quad s > 1.$$

Logo, verificamos que:

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{s^2+1}, \quad s > 1.$$

(b) Série de Taylor para $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$

Seja

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Expandindo $\sin(t)$ em série de Taylor:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots,$$

$$\frac{\sin(t)}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \cdots,$$

Calculando a transformada de Laplace termo a termo:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \cdots\right) e^{-st}\, dt,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^\infty t^{2n} e^{-st}\, dt.$$

Aplicando novamente a fórmula para a transformada de Laplace de t^n:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{(2n)!}{s^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)s^{2n+1}}.$$

Esta é a série de Taylor para $\arctan\left(\frac{1}{s}\right)$, então:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right), \quad s > 1.$$

Assim, verificamos o resultado desejado.

Exercício 14 - Transformadas de Laplace de Funções por Partes

Calcule as transformadas de Laplace das seguintes funções:

(a) Função $f(t)$ definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 2(1+t), & t \geq 1. \end{cases}$$

Usando a definição da transformada de Laplace para funções por partes:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^1 0\, e^{-st}\, dt + \int_1^\infty 2(1+t)e^{-st}\, dt,$$

$$= 2\int_1^\infty (1+t)e^{-st}\, dt = \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{2}{s^2}e^{-s} = \frac{4e^{-s}}{s^2}.$$

(b) Função $f(t)$ definida por:

$$f(t) = \begin{cases} t, & t < 2, \\ 2, & t \geq 2. \end{cases}$$

Calculando a transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^2 te^{-st}\,dt + \int_2^\infty 2e^{-st}\,dt,$$

$$= \left(\frac{2}{s^2} - \frac{4e^{-2s}}{s^2}\right) + \left(\frac{2e^{-2s}}{s}\right) = \frac{2}{s^2} + \frac{2e^{-2s}}{s^2} - \frac{4e^{-2s}}{s^2}.$$

(c) Função $f(t)$ definida por:

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t), & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ 0, & t > 2\pi. \end{cases}$$

Usando a fórmula para a função janela:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{2\pi} \sin(t)e^{-st}\,dt = \frac{1 - e^{-2\pi s}}{s^2+1}.$$

(d) Função $f(t)$ definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{\pi}{2}, \\ \cos(t), & \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Calculando a transformada:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(t)e^{-st}\,dt = \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}} - e^{-\frac{3\pi s}{2}}}{s^2+1}.$$

(e) Função $f(t) = \sin(t)$ periódica com período π

Para uma função periódica de período $T = \pi$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^\pi \sin(t)e^{-st}\,dt}{1 - e^{-\pi s}} = \frac{1}{s^2+1}\left(\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\right).$$

Exercício 15 - Transformadas de Laplace de Funções Periódicas

Calcule a transformada de Laplace usando o Teorema da Função Periódica. Esboce o gráfico se possível.

(a) Função $f(t)$ definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ -1, & 1 \leq t < 2, \end{cases}$$

$$f(t+2) = f(t).$$

Aplicando o teorema para funções periódicas com período $T = 2$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^2 f(t)e^{-st}\,dt}{1 - e^{-2s}}.$$

Calculando a integral no numerador:

$$\int_0^1 e^{-st}\,dt - \int_1^2 e^{-st}\,dt = \left(\frac{1 - e^{-s}}{s}\right) - \left(\frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}\right),$$

$$= \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s},$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s(1 - e^{-2s})}.$$

(b) Função $f(t)$ definida por:

$$f(t) = t, \quad 0 \leq t < 1, \quad f(t+1) = f(t).$$

Para esta função periódica com $T = 1$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^1 te^{-st}\,dt}{1 - e^{-s}}.$$

Calculando a integral no numerador:

$$\int_0^1 te^{-st}\,dt = \left(\frac{1}{s^2}\right) - \left(\frac{e^{-s}}{s^2}\right) - \left(\frac{e^{-s}}{s}\right),$$

$$= \frac{1 - (1+s)e^{-s}}{s^2},$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1 - (1+s)e^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})}.$$

(c) Função $f(t)$ definida por:

$$f(t) = \sin(t), \quad 0 \leq t < \pi, \quad f(t+\pi) = f(t).$$

Para uma função com período $T = \pi$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^\pi \sin(t)e^{-st}\,dt}{1 - e^{-\pi s}}.$$

Calculando a integral no numerador:

$$\int_0^\pi \sin(t)e^{-st}\,dt = \frac{1-e^{-\pi s}}{s^2+1},$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2+1}\left(\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\right).$$

Exercício 16 - Sistemas de Equações Diferenciais com Transformada de Laplace

Resolva os seguintes sistemas de equações diferenciais usando transformadas de Laplace.

(a) Sistema dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - y, \end{cases}$$

com as condições iniciais $x(0) = -1$ e $y(0) = 2$.

Aplicando a transformada de Laplace:

$$sX(s) - x(0) = X(s) - 2Y(s),$$

$$sY(s) - y(0) = 5X(s) - Y(s),$$

$$sX(s) + 1 = X(s) - 2Y(s),$$

$$sY(s) - 2 = 5X(s) - Y(s).$$

Reorganizando:

$$(s-1)X(s) + 2Y(s) = -1,$$

$$-5X(s) + (s+1)Y(s) = 2.$$

Resolvendo este sistema para $X(s)$ e $Y(s)$:

$$X(s) = \frac{-1(s+1)+2\cdot 2}{(s-1)(s+1)+10} = \frac{-s-1+4}{s^2+9} = \frac{-s+3}{s^2+9},$$

$$Y(s) = \frac{5(-s+3)+2}{(s-1)(s+1)+10} = \frac{-5s+15+2}{s^2+9} = \frac{-5s+17}{s^2+9}.$$

Voltando ao domínio do tempo:

$$x(t) = -\cos(3t) + 3\sin(3t),$$

$$y(t) = -5\cos(3t) + \frac{17}{3}\sin(3t).$$

(b) Sistema dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2y = 4t, \\ \frac{dy}{dt} + 2y - 4x = -4t - 2, \end{cases}$$

com as condições iniciais $x(0) = -1$ e $y(0) = 2$.

Aplicando a transformada de Laplace:

$$sX(s) + 1 - 2Y(s) = \frac{4}{s^2},$$

$$sY(s) - 2 + 2Y(s) - 4X(s) = \frac{-4}{s^2} - \frac{2}{s},$$

Resolvendo para $X(s)$ e $Y(s)$:

$$X(s) = \frac{4}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s},$$

$$Y(s) = \frac{-4}{s^3} + \frac{6}{s^2} - \frac{2}{s}.$$

Voltando ao domínio do tempo:

$$x(t) = 2t - 2 + 3e^{-t},$$

$$y(t) = -2t + 6 - 2e^{-t}.$$

(c) Sistema dado por:

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + 10x_1 - 4x_2 = 0, \\ -4x_1 + \frac{d^2x_2}{dt^2} + 4x_2 = 0, \end{cases}$$

com as condições iniciais $x_1(0) = 0$, $\frac{dx_1}{dt}(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ e $\frac{dx_2}{dt}(0) = -1$.

Aplicando a transformada de Laplace:

$$s^2X_1(s) - s - 10X_1(s) + 4X_2(s) = 0,$$

$$-4X_1(s) + s^2X_2(s) + 4X_2(s) = -s,$$

Resolvendo para $X_1(s)$ e $X_2(s)$:

$$X_1(s) = \frac{s}{s^4 + 14s^2 + 16},$$

$$X_2(s) = \frac{-s}{s^4 + 14s^2 + 16}.$$

Voltando ao domínio do tempo:

$$x_1(t) = \cos(2t) - \frac{1}{3}\cos(4t),$$

$$x_2(t) = -\cos(2t) + \frac{1}{3}\cos(4t).$$

3. Resolução de E.D.O usando Transformada de Laplace

Resolva os seguintes problemas com valor inicial usando transformadas de Laplace.

(a) $y'' + 4y = \sin(t) - u_2(t)\sin(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$s^2Y(s) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - e^{-2s}\frac{1}{s^2+1},$$

$$Y(s)(s^2+4) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-2s}}{s^2+1},$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)} - \frac{e^{-2s}}{(s^2+4)(s^2+1)}.$$

Decompondo em frações parciais e aplicando a transformada inversa:

$$y(t) = \frac{1}{3}\sin(2t) - \frac{1}{3}u_2(t)\sin(2(t-2)).$$

(b) $\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} - 4y = -3e^t + 4e^{2t}$

Com as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 3$:

$$s^3Y(s) - 3s^2 + 4s - 4Y(s) = -\frac{3}{s-1} + \frac{4}{s-2},$$

$$Y(s) = \frac{3s^2-4s}{(s-1)(s-2)(s^2-s+4)} + \frac{4}{(s-2)(s^2-s+4)}.$$

Decompondo em frações parciais e aplicando a transformada inversa:

$$y(t) = 3e^t + 4e^{2t} - 5e^{-t} + 2te^{-t}.$$

(c) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(1) = 2e + e^2$, $y'(1) = 2e + 2e^2$

Fazendo a substituição $x = t - 1$ e aplicando a transformada de Laplace:

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = 0,$$

$$Y(s) = \frac{Ae^s + Be^{2s}}{(s-1)(s-2)}.$$

Voltando ao domínio do tempo:

$$y(t) = 2e^{t-1} + e^{2(t-1)}.$$

(d) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$(s^2 - 2s + 2)Y(s) = \frac{1}{s+1} + s,$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2 - 2s + 2)} + \frac{s}{s^2 - 2s + 2}.$$

Decompondo em frações parciais e aplicando a transformada inversa:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}(1 - e^{-t}) + e^t \sin(t).$$

(e) $\frac{d^4y}{dt^4} + 3\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 2y = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$(s^4 + 3s^3 + s^2 - 3s - 2)Y(s) = \frac{1}{s^2},$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^4 + 3s^3 + s^2 - 3s - 2)}.$$

Decompondo em frações parciais e aplicando a transformada inversa:

$$y(t) = t - 2 + e^{-t} - 3e^{-2t} + 4e^{-3t}.$$

(f) $y'' + 2y' + y = \delta(t) + u_2(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = 1 + \frac{e^{-2s}}{s},$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2}.$$

Voltando ao domínio do tempo:

$$y(t) = e^{-t} + u_2(t)(t-1)e^{-(t-2)}.$$

(g) $y'' + 4y' + 4y = \begin{cases} 0, & t \leq 2, \\ e^{-(t-2)}, & t > 2, \end{cases}$ $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$(s^2 + 4s + 4)Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1},$$

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+1)(s+2)^2}.$$

Voltando ao domínio do tempo:

$$y(t) = e^{-2t} + u_2(t)(t-1)e^{-(t-2)}.$$

Exercício 2: Modelo de Tanque com Transformada de Laplace

Num tanque existe 1000 L de uma salmoura com 30 kg de sal. No instante $t = 0$, uma válvula A é aberta, entrando 6 L/min de uma solução de salmoura a uma concentração de 0,4 kg/L. Em $t = 10$ min, a válvula A é fechada e uma segunda válvula B é aberta, entrando 6 L/min de salmoura a uma concentração de 0,2 kg/L. O tanque possui uma válvula de saída C, que esvazia o tanque com vazão de 6 L/min, mantendo constante o volume do tanque.

Assuma que a solução seja mantida homogênea por meio de um misturador.

(a) Quantidade de sal no tanque em um instante $t > 0$

Seja $Q(t)$ a quantidade de sal (em kg) no tanque no instante t. O balanço de massa é dado por:

$$\frac{dQ}{dt} = R_{\text{in}} - R_{\text{out}} = \begin{cases} 6 \cdot 0,4 - \frac{6Q}{1000}, & 0 \le t < 10, \\ 6 \cdot 0,2 - \frac{6Q}{1000}, & t \ge 10. \end{cases}$$

Simplificando:

$$\frac{dQ}{dt} = \begin{cases} 2,4 - \frac{6Q}{1000}, & 0 \le t < 10, \\ 1,2 - \frac{6Q}{1000}, & t \ge 10. \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace para $0 \le t < 10$:

$$sQ(s) - Q(0) = \frac{2,4}{s} - \frac{6}{1000}Q(s),$$

$$(s + \frac{6}{1000})Q(s) = \frac{2,4}{s} + 30,$$

$$Q(s) = \frac{2,4}{s(s + \frac{6}{1000})} + \frac{30}{s + \frac{6}{1000}}.$$

Voltando ao domínio do tempo:

$$Q(t) = 400 + (30 - 400)e^{-\frac{6}{1000}t}, \quad 0 \le t < 10.$$

Para $t \ge 10$, temos:

$$\frac{dQ}{dt} = 1,2 - \frac{6Q}{1000},$$

$$sQ(s) - Q(10) = \frac{1,2}{s} - \frac{6}{1000}Q(s),$$

$$(s + \frac{6}{1000})Q(s) = \frac{1,2}{s} + Q(10),$$

$$Q(s) = \frac{1,2}{s(s + \frac{6}{1000})} + \frac{Q(10)}{s + \frac{6}{1000}}.$$

Voltando ao domínio do tempo:

$$Q(t) = 200 + (Q(10) - 200)e^{-\frac{6}{1000}(t-10)}, \quad t \ge 10.$$

(b) Concentração de sal quando $t \to \infty$

Quando $t \to \infty$, a solução atinge o estado estacionário, ou seja, o termo exponencial tende a zero, e a concentração final é:

$$Q(\infty) = 200 \text{ kg}.$$

Exercício 3. Circuito RLC com Transformada de Laplace

Considere um circuito elétrico em série RLC com $R = 110\,\Omega$, $L = 1\,H$, $C = 0,001\,F$ e uma bateria fornecendo $E = 90\,V$. Suponha que o circuito está inicialmente passivo (desligado e sem carga). No instante $t = 0$ o interruptor é fechado, e no instante $t = 1$ segundo ele é aberto e deixado aberto.

Equação do Circuito

A equação diferencial que descreve a corrente $I(t)$ no circuito é dada por:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E(t),$$

onde:

- $L = 1$ H (indutância),
- $R = 110\,\Omega$ (resistência),
- $C = 0,001$ F (capacitância),
- $E(t) = 90$ V para $0 \leq t < 1$, e $E(t) = 0$ para $t \geq 1$.

Substituindo os valores:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 110\frac{dI}{dt} + 1000I = 90u_1(t),$$

onde $u_1(t)$ é a função degrau unitário.

Aplicando a transformada de Laplace:

$$s^2I(s) + 110sI(s) + 1000I(s) = \frac{90}{s}(1 - e^{-s}),$$

$$I(s)(s^2 + 110s + 1000) = \frac{90}{s}(1 - e^{-s}),$$

$$I(s) = \frac{90}{s(s^2 + 110s + 1000)} - \frac{90e^{-s}}{s(s^2 + 110s + 1000)}.$$

Decompondo em Frações Parciais

Decompondo:

$$I(s) = \frac{90}{s(s+100)(s+10)} - \frac{90e^{-s}}{s(s+100)(s+10)},$$
$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+100} + \frac{C}{s+10} - \frac{Ae^{-s}}{s} - \frac{Be^{-s}}{s+100} - \frac{Ce^{-s}}{s+10}.$$

Calculando os coeficientes:

$$A = \frac{90}{1000} = 0,09, \quad B = -\frac{9}{100}, \quad C = \frac{9}{100}.$$

Transformada Inversa

Voltando ao domínio do tempo:

$$I(t) = 0,09(1-e^{-100t}) + \frac{9}{100}(e^{-10t}-e^{-100t}) - u_1(t)\left[0,09(1-e^{-100(t-1)}) + \frac{9}{100}(e^{-10(t-1)} - e^{-100(t-1)})\right].$$

Simplificando:

$$I(t) = \begin{cases} 0,09(1-e^{-100t}) + \frac{9}{100}(e^{-10t} - e^{-100t}), & 0 \leq t < 1, \\ 0,09e^{-100(t-1)} - \frac{9}{100}e^{-10(t-1)}, & t \geq 1. \end{cases}$$

Assim, a corrente $I(t)$ no circuito para $t > 0$ é dada pela expressão acima, considerando as mudanças no fornecimento de energia em $t = 1$ segundo.

Exercício 4. Circuito LC com Transformada de Laplace

Considere um circuito elétrico em série **LC** com $L = 1$ H, $C = 0,01$ F e uma bateria fornecendo $E = 10$ V. Suponha que o circuito está inicialmente passivo (desligado e sem carga). No instante $t = 0$ o interruptor é fechado, e no instante $t = 1$ ele é aberto e deixado aberto.

(a) Equação do Circuito

A equação diferencial para a carga $Q(t)$ no circuito é dada por:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = E(t),$$

Substituindo os valores:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 100Q = 10 - 10u_1(t),$$

onde $u_1(t)$ é a função degrau unitário que representa a abertura do interruptor em $t = 1$.

As condições iniciais são:

$$Q(0) = 0, \quad Q'(0) = 0.$$

(b) Encontrando a Corrente $I(t)$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$s^2Q(s) - sQ(0) - Q'(0) + 100Q(s) = \frac{10}{s} - \frac{10e^{-s}}{s},$$

$$(s^2 + 100)Q(s) = \frac{10}{s} - \frac{10e^{-s}}{s},$$

$$Q(s) = \frac{10}{s(s^2 + 100)} - \frac{10e^{-s}}{s(s^2 + 100)}.$$

Decompondo em frações parciais:

$$Q(s) = \frac{10}{100}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 100}\right) - \frac{10e^{-s}}{100}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 100}\right),$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 100}\right) - \frac{e^{-s}}{10}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 100}\right).$$

Voltando ao domínio do tempo:

$$Q(t) = \frac{1}{10}(1 - \cos(10t)) - \frac{1}{10}u_1(t)(1 - \cos(10(t - 1))).$$

Calculando a corrente $I(t) = \frac{dQ}{dt}$:

$$I(t) = \sin(10t) - u_1(t)\sin(10(t - 1)),$$

$$= \begin{cases} \sin(10t), & 0 \leq t < 1, \\ \sin(10t) - \sin(10(t - 1)), & t \geq 1. \end{cases}$$

Assim, a corrente $I(t)$ no circuito para $t > 0$ é dada pela expressão acima, considerando a abertura do circuito em $t = 1$ segundo.

Exercício 5. Sistema Mola-Massa com Transformada de Laplace

Considere o sistema mola-massa que satisfaz o seguinte problema de valor inicial:

$$u'' + 4u' + u = kg(t), \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0,$$

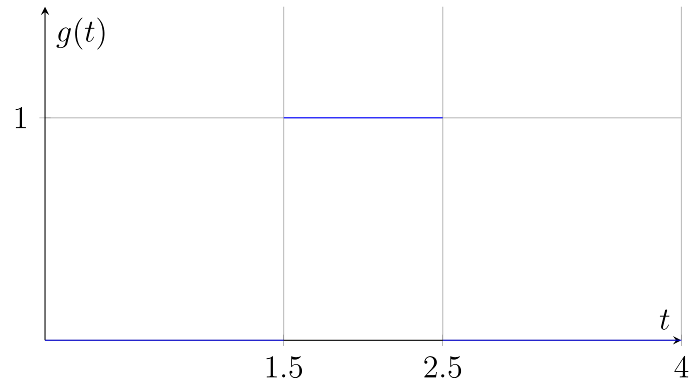
onde $g(t)$ é dado por:

$$g(t) = u_{3/2}(t) - u_{5/2}(t),$$

que representa um pulso de amplitude unitária e duração igual a 1 unidade de tempo.

(a) Gráfico de $g(t)$

O gráfico de $g(t)$ é um pulso que começa em $t = 3/2$ e termina em $t = 5/2$, com amplitude unitária:



(b) Resolvendo o Problema de Valor Inicial

Aplicando a transformada de Laplace:

$$s^2U(s) + 4sU(s) + U(s) = k\left(\frac{e^{-3s/2}}{s} - \frac{e^{-5s/2}}{s}\right),$$

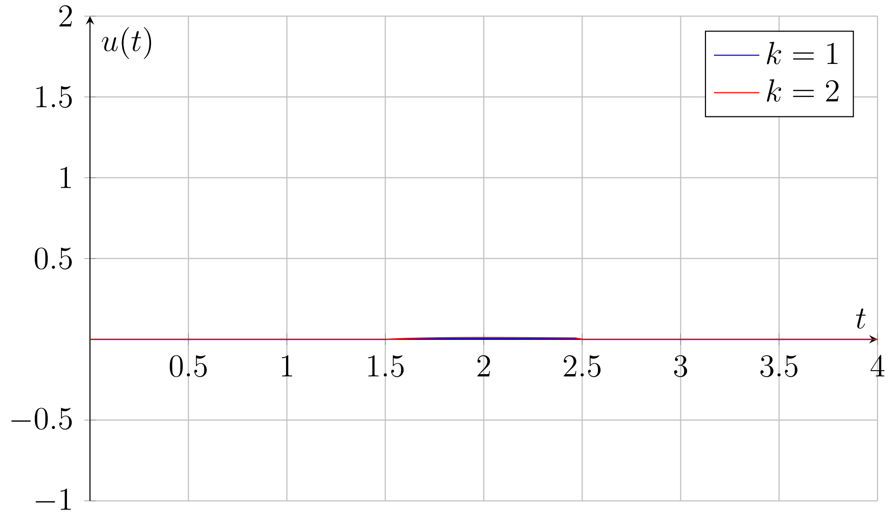
$$U(s) = \frac{k}{s(s^2+4s+1)}\left(e^{-3s/2} - e^{-5s/2}\right).$$

Voltando ao domínio do tempo usando a inversa:

$$u(t) = k\left[H(t-3/2) - H(t-5/2)\right] \cdot e^{-2(t-3/2)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3/2)\right).$$

(c) Gráfico para $k = 1$ e $k = 2$

Vamos agora plotar as soluções para $k = 1$ e $k = 2$ para comparar o impacto de diferentes valores de k.



Observa-se que para $k = 2$, a amplitude é o dobro do caso $k = 1$, mas o comportamento oscilatório é o mesmo, apenas ampliado. O tempo de decaimento é igual em ambos os casos, já que a constante de amortecimento não depende de k.

Exercício 6. Sistema Massa-Mola com Golpe e Força Senoidal

Um peso de massa 1 kg é preso a uma mola cuja constante de elasticidade é 4. No instante $t = 0$ o peso recebe instantaneamente 1 unidade de quantidade de movimento ao sistema, e no instante $t = \frac{\pi}{2}$, uma força senoidal de grandeza $-\sin(t - \frac{\pi}{2})$ começa a agir verticalmente sobre o sistema.

Equação de Movimento

A equação de movimento do sistema é dada por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = F(t),$$

com as condições iniciais:

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1.$$

O termo de força é:

$$F(t) = -\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) u_{\frac{\pi}{2}}(t),$$

onde $u_{\frac{\pi}{2}}(t)$ é a função degrau que ativa a força em $t = \frac{\pi}{2}$.

Aplicando a transformada de Laplace:

$$s^2 X(s) - s \cdot x(0) - \frac{dx}{dt}(0) + 4X(s) = -\mathcal{L}\left\{\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) u_{\frac{\pi}{2}}(t)\right\},$$

$$s^2X(s) - 1 + 4X(s) = -e^{-\frac{\pi}{2}s}\left(\frac{1}{s^2+1}\right),$$
$$(s^2+4)X(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1},$$
$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s^2+4)(s^2+1)}.$$

Decompondo em frações parciais:

$$X(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{4}\left(\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+1}\right).$$

Voltando ao domínio do tempo:

$$x(t) = \frac{1}{4}(1-\cos(2t)) - \frac{1}{4}H(t-\frac{\pi}{2})\left[\cos(2(t-\frac{\pi}{2})) - \cos(t-\frac{\pi}{2})\right].$$

Assim, a equação de movimento para o sistema massa-mola é dada por:

$$x(t) = \frac{1}{4}(1-\cos(2t)) - \frac{1}{4}H(t-\frac{\pi}{2})\left[\cos(2(t-\frac{\pi}{2})) - \cos(t-\frac{\pi}{2})\right],$$

que descreve o comportamento oscilatório após o golpe inicial e a ação da força senoidal.

7. Sistema Massa-Mola com Golpe e Força Externa

Uma massa m, suspensa em equilíbrio na ponta de uma mola, recebe um golpe de cima para baixo que lhe dá instantaneamente 2 unidades de quantidade de movimento. No instante $t \geq a$, a massa é sujeita a uma força externa $\sin(t-a)$. Supondo que a constante de elasticidade é diferente de m, a equação do movimento é dada por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = F(t),$$

com as condições iniciais:

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 2.$$

Força Externa

O termo de força é dado por:

$$F(t) = 2\delta(t) + u_a(t)\sin(t-a),$$

onde $\delta(t)$ é a função impulso e $u_a(t)$ é a função degrau que ativa a força em $t = a$.

Aplicando a Transformada de Laplace

Aplicando a transformada de Laplace:

$$s^2X(s) - sx(0) - \frac{dx}{dt}(0) + \frac{k}{m}X(s) = 2 + \frac{e^{-as}}{s^2+1},$$

$$s^2X(s) - 2 + \frac{k}{m}X(s) = 2 + \frac{e^{-as}}{s^2+1},$$

$$X(s) = \frac{2}{s^2+\frac{k}{m}} + \frac{e^{-as}}{(s^2+\frac{k}{m})(s^2+1)}.$$

Decompondo em frações parciais:

$$X(s) = \frac{2}{s^2+\frac{k}{m}} + \frac{e^{-as}}{(s^2+\frac{k}{m})(s^2+1)}.$$

Voltando ao domínio do tempo:

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + H(t-a)\left[\frac{\sin((t-a)\sqrt{\frac{k}{m}})}{\sqrt{\frac{k}{m}}} - \frac{\sin(t-a)}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\right].$$

Assim, a equação de movimento para a massa m é dada por:

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + H(t-a)\left[\frac{\sin((t-a)\sqrt{\frac{k}{m}})}{\sqrt{\frac{k}{m}}} - \frac{\sin(t-a)}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\right],$$

que descreve o comportamento oscilatório após o golpe inicial e a ação da força externa senoidal.

8. Sistema de Equações Diferenciais para Correntes em Circuito RLC

O sistema de equações diferenciais que descrevem as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ na rede que contém um resistor, um indutor e um capacitor é dado por:

$$L\frac{di_1}{dt} + Ri_2 = E(t),$$

$$RC\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0,$$

com as seguintes condições:

- $E = 60$ volts,
- $L = 1$ henry,

- $R = 50$ ohms,
- $C = 10^{-4}$ farads,
- $i_1(0) = 0$,
- $i_2(0) = 0$.

Aplicando a Transformada de Laplace

Aplicando a transformada de Laplace no primeiro sistema:

$$sI_1(s) + 50I_2(s) = \frac{60}{s},$$
$$RC(sI_2(s)) + I_2(s) - I_1(s) = 0,$$
$$10^{-4}sI_2(s) + I_2(s) - I_1(s) = 0,$$
$$(10^{-4}s + 1)I_2(s) = I_1(s).$$

Substituindo na primeira equação:

$$s(10^{-4}s + 1)I_2(s) + 50I_2(s) = \frac{60}{s},$$
$$(10^{-4}s^2 + s + 50)I_2(s) = \frac{60}{s},$$
$$I_2(s) = \frac{60}{s(10^{-4}s^2 + s + 50)}.$$

Resolvendo para $I_1(s)$:

$$I_1(s) = (10^{-4}s + 1)I_2(s) = \frac{60(10^{-4}s + 1)}{s(10^{-4}s^2 + s + 50)}.$$

Transformada Inversa

Decompondo em frações parciais e voltando ao domínio do tempo:

$$i_2(t) = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t},$$
$$i_1(t) = Ce^{-\alpha t} + De^{-\beta t},$$

onde α e β são as raízes da equação característica:

$$10^{-4}s^2 + s + 50 = 0.$$

Calculando as raízes:

$$\alpha = -5000, \quad \beta = -50.$$

Assim, as soluções finais são:

$$i_2(t) = Ae^{-5000t} + Be^{-50t},$$
$$i_1(t) = Ce^{-5000t} + De^{-50t},$$

onde A, B, C, e D são determinados pelas condições iniciais.

As correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ são dadas pelas expressões acima, que descrevem o comportamento transitório do sistema RLC com os valores fornecidos.