Equação da Onda: Problemas e Aplicações

Prof. Ana Isabel Castillo

May 17, 2025

Universidade das EDPs

Sumário

Introdução à Equação da Onda

O que é a Equação da Onda?

Definição

A equação da onda modela a propagação de ondas em um meio:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde $u(x, t)$ é o deslocamento, c é a velocidade da onda.

Contexto

Usada em física (cordas vibrantes, ondas sonoras) e finanças (modelagem de volatilidade oscilatória).

Exemplo Prático

Exemplo: Corda Vibrante

Uma corda de comprimento $L = 1$ m, fixada nas extremidades ($u(0,t) = u(1,t) = 0$), tem deslocamento inicial $u(x,0) = \sin(\pi x)$ e velocidade inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$. Como o deslocamento evolui?

Solução

Usamos separação de variáveis:

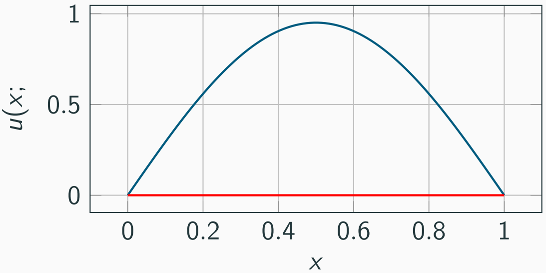
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(n\pi ct) + B_n \sin(n\pi ct)\right) \sin(n\pi x).$$

Para $u(x,0) = \sin(\pi x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$: - $A_1 = 1$, $A_n = 0$ para $n \neq 1$. - $B_n = 0$ (devido à velocidade inicial nula). Solução:

$$u(x,t) = \sin(\pi x) \cos(\pi ct).$$

Visualização

Visualização



Interpretação

A onda oscila com amplitude constante, mantendo a forma senoidal ao longo do tempo.

Aplicação Financeira

Equ Equação da Onda em Finanças

A equação da onda pode modelar comportamentos oscilatórios em preços de ativos ou volatilidade:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial S}{\partial t},$$

onde $S(x, t)$ é o preço do ativo, k regula a difusão, γ é o amortecimento.

Exemplo

Modelagem de preços de opções com volatilidade periódica.

Exercício Resolvido

Exercício

Resolva a equação da onda para uma corda com $u(x,0) = x(1-x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

Solução

Série de Fourier: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi ct)\sin(n\pi x)$. Coeficientes: $A_n = 2\int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi x)\,dx$. Após integração: $A_n = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}$.
Solução final:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3} \cos(n\pi ct)\sin(n\pi x).$$

Conclusão

Resumo

- A equação da onda modela vibrações e oscilações.
- Aplicações em física (cordas, ondas) e finanças (volatilidade).
- Soluções analíticas com séries de Fourier são eficazes.

Próximos Passos
Explorar métodos numéricos (ex.: diferenças finitas) e problemas em 2D.