Lista 2

Professora: ANA ISABEL

Parte 1: Funções Pares, Ímpares e Extensões

Exercício 1

Enunciado: Defina uma função periódica de período 2 e igual a x^2 no intervalo $(0, 2)$. Há mais de uma resposta? E se a função pedida fosse igual a x^2 no intervalo $[0, 2]$?

Resolução:

Para definir uma função periódica de período 2 que seja igual a $f(x) = x^2$ no intervalo $(0, 2)$, precisamos que:

$$f(x) = x^2, \quad \text{para } x \in (0, 2),$$

e que $f(x + 2) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Uma extensão periódica pode ser definida como:

$$f(x) = (x - 2\lfloor x/2 \rfloor)^2, \quad \text{onde } x - 2\lfloor x/2 \rfloor \in (0, 2).$$

Aqui, $\lfloor x/2 \rfloor$ é a parte inteira de $x/2$, e a função é esticada periodicamente para todos os reais.

Há mais de uma resposta? Sim, como o intervalo $(0, 2)$ é aberto, os valores de $f(x)$ nos pontos $x = 0, 2, 4, \ldots$ não são especificados. Podemos atribuir valores arbitrários nesses pontos, gerando diferentes funções periódicas. Por exemplo, definir $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$ resulta em funções distintas, mas ambas satisfazem o enunciado.

Caso $[0, 2]$**:** Se a função for definida em $[0, 2]$, ou seja, $f(x) = x^2$ para $x \in [0, 2]$, a extensão periódica é única:

$$f(x) = (x - 2\lfloor x/2 \rfloor)^2, \quad \text{para } x - 2\lfloor x/2 \rfloor \in [0, 2].$$

Nesse caso, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$, e a função é contínua nos pontos de conexão, pois $f(2) = f(0)$.

Exercício 2

Enunciado: Ache as extensões pares e periódicas de período T de cada uma das funções dadas e discuta suas propriedades de continuidade e diferenciabilidade:

(a) $f(x) = \cos(x)$ se $x \in [0, \pi]$, $T = \pi$;

(b) $f(x) = x(x - 1)$ se $x \in [0, 1]$, $T = 2$.

Resolução:

Item (a): $f(x) = \cos(x)$, $x \in [0, \pi]$, $T = \pi$

Extensão par e periódica: A extensão par de $f(x) = \cos(x)$ em $[-\pi, \pi]$ é definida por $f_{\text{par}}(-x) = f_{\text{par}}(x)$. Assim:

$$f_{\text{par}}(x) = \cos(x), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Para período $T = \pi$, a função no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ é $f_{\text{par}}(x) = \cos(x)$, e a extensão periódica satisfaz:

$$f_{\text{par}}(x + \pi) = f_{\text{par}}(x).$$

Nos pontos de conexão:

$$f_{\text{par}}(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0, \quad f_{\text{par}}(-\pi/2) = \cos(-\pi/2) = 0.$$

Continuidade: A função $\cos(x)$ é contínua em $[-\pi, \pi]$, e nos pontos $x = \pm\pi/2 + k\pi$, os valores coincidem. Logo, $f_{\text{par}}(x)$ é contínua.

Diferenciabilidade: A derivada é $f'_{\text{par}}(x) = -\sin(x)$. Em $x = \pi/2$, $f'_{\text{par}}(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$; em $x = -\pi/2$, $f'_{\text{par}}(-\pi/2) = -\sin(-\pi/2) = 1$. As derivadas laterais não coincidem, então $f_{\text{par}}(x)$ não é diferenciável nesses pontos.

Item (b): $f(x) = x(x-1)$, $x \in [0, 1]$, $T = 2$

Extensão par e periódica: A extensão par em $[-1, 1]$ é:

$$f_{\text{par}}(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \in [-1, 0], \\ x^2 - x, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Com período $T = 2$, temos $f_{\text{par}}(x + 2) = f_{\text{par}}(x)$. Nos pontos de conexão:

$$f_{\text{par}}(1) = 1^2 - 1 = 0, \quad f_{\text{par}}(-1) = (-1)^2 + (-1) = 0.$$

Continuidade: Em $x = 0$, limite à esquerda: $f_{\text{par}}(0^-) = 0^2 + 0 = 0$; limite à direita: $f_{\text{par}}(0^+) = 0^2 - 0 = 0$. Nos extremos $x = \pm 1$, $f_{\text{par}}(\pm 1) = 0$. A função é contínua.

Diferenciabilidade: A derivada é:

$$f'_{\text{par}}(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in [-1, 0), \\ 2x - 1, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Em $x = 0$: $f'_{\text{par}}(0^-) = 1$, $f'_{\text{par}}(0^+) = -1$. Em $x = 1$: $f'_{\text{par}}(1^-) = 1$; em $x = -1$: $f'_{\text{par}}(-1^+) = -1$. Não é diferenciável em $x = 0, \pm 1$.

Exercício 3

Enunciado: Para cada uma das funções do exercício anterior, determine uma extensão ímpar e periódica de período T e discuta suas propriedades de continuidade e diferenciabilidade:

(a) $f(x) = \cos(x)$ se $x \in [0, \pi]$, $T = \pi$;

(b) $f(x) = x(x-1)$ se $x \in [0, 1]$, $T = 2$.

Resolução:

Item (a): $f(x) = \cos(x)$, $x \in [0, \pi]$, $T = \pi$

Extensão ímpar e periódica: A extensão ímpar em $[-\pi, \pi]$ é definida por $f_{\text{ímpar}}(-x) = -f_{\text{ímpar}}(x)$. Assim:

$$f_{\text{ímpar}}(x) = \begin{cases} -\cos(x), & x \in [-\pi, 0], \\ \cos(x), & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Com período $T = \pi$, $f_{\text{ímpar}}(x + \pi) = f_{\text{ímpar}}(x)$. Nos pontos de conexão:

$$f_{\text{ímpar}}(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0, \quad f_{\text{ímpar}}(-\pi/2) = -\cos(\pi/2) = 0.$$

Continuidade: Em $x = 0$:

$$f_{\text{ímpar}}(0^-) = -\cos(0) = -1, \quad f_{\text{ímpar}}(0^+) = \cos(0) = 1.$$

Há uma descontinuidade de salto em $x = 0$. Nos pontos $x = \pm\pi/2$, $f_{\text{ímpar}}(x) = 0$, logo é contínua.

Diferenciabilidade: Devido à descontinuidade em $x = 0$, a função não é diferenciável nesse ponto. Fora de $x = 0$:

$$f'_{\text{ímpar}}(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \in (-\pi, 0), \\ -\sin(x), & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

Em $x = \pi/2$, $f'_{\text{ímpar}}(\pi/2^-) = -\sin(\pi/2) = -1$; em $x = -\pi/2$, $f'_{\text{ímpar}}(-\pi/2^+) = \sin(-\pi/2) = -1$. As derivadas laterais coincidem nos pontos de conexão.

Item (b): $f(x) = x(x - 1)$, $x \in [0, 1]$, $T = 2$

Extensão ímpar e periódica: A extensão ímpar em $[-1, 1]$ é:

$$f_{\text{ímpar}}(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & x \in [-1, 0], \\ x^2 - x, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Com período $T = 2$, $f_{\text{ímpar}}(x + 2) = f_{\text{ímpar}}(x)$. Nos pontos de conexão:

$$f_{\text{ímpar}}(1) = 1^2 - 1 = 0, \quad f_{\text{ímpar}}(-1) = -(-1)^2 - (-1) = 0.$$

Continuidade: Em $x = 0$:

$$f_{\text{ímpar}}(0^-) = -0^2 - 0 = 0, \quad f_{\text{ímpar}}(0^+) = 0^2 - 0 = 0.$$

A função é contínua em $x = 0$. Nos pontos $x = \pm 1$, $f_{\text{ímpar}}(\pm 1) = 0$, garantindo continuidade.

Diferenciabilidade: A derivada é:

$$f'_{\text{ímpar}}(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \in [-1, 0), \\ 2x - 1, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Em $x = 0$: $f'_{\text{ímpar}}(0^-) = -1$, $f'_{\text{ímpar}}(0^+) = -1$. A função é diferenciável em $x = 0$. Em $x = 1$: $f'_{\text{ímpar}}(1^-) = 1$; em $x = -1$: $f'_{\text{ímpar}}(-1^+) = 1$. As derivadas laterais coincidem.

Exercício 4

Enunciado: Ache as extensões pares e periódicas de período T de cada uma das funções dadas e discuta suas propriedades de continuidade e diferenciabilidade. Em seguida, determine a série de Fourier da função dada.

(a) $f(x) = x^2$ se $x \in [0, \pi]$, $T = 2\pi$;

(b) $f(x) = x(x-1)$ se $x \in [0, 1]$, $T = 2$.

Resolução:

Item (a): $f(x) = x^2$, $x \in [0, \pi]$, $T = 2\pi$

Extensão par e periódica: A extensão par em $[-\pi, \pi]$ é:

$$f_{\text{par}}(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Com período $T = 2\pi$, $f_{\text{par}}(x + 2\pi) = f_{\text{par}}(x)$. Nos pontos de conexão:

$$f_{\text{par}}(\pi) = \pi^2, \quad f_{\text{par}}(-\pi) = \pi^2.$$

Continuidade: A função x^2 é contínua, e nos pontos $x = \pm\pi$, $f_{\text{par}}(\pi) = f_{\text{par}}(-\pi) = \pi^2$. Logo, é contínua.

Diferenciabilidade: A derivada é $f'_{\text{par}}(x) = 2x$. Em $x = \pi$, $f'_{\text{par}}(\pi^-) = 2\pi$; em $x = -\pi$, $f'_{\text{par}}(-\pi^+) = -2\pi$. Não é diferenciável em $x = \pm\pi + 2k\pi$.

Série de Fourier: Como $f_{\text{par}}(x)$ é par, a série tem apenas termos cosseno:

$$f_{\text{par}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Série:

$$f_{\text{par}}(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Item (b): $f(x) = x(x-1)$, $x \in [0, 1]$, $T = 2$

Extensão par e periódica: A extensão par em $[-1, 1]$ é:

$$f_{\text{par}}(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \in [-1, 0], \\ x^2 - x, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Com período $T = 2$, $f_{\text{par}}(x + 2) = f_{\text{par}}(x)$. Nos pontos de conexão:

$$f_{\text{par}}(1) = 0, \quad f_{\text{par}}(-1) = 0.$$

Continuidade: Contínua em $x = 0$ e $x = \pm 1$, como verificado anteriormente.

Diferenciabilidade: Não diferenciável em $x = 0, \pm 1$, pois as derivadas laterais não coincidem.

Série de Fourier: Período 2, série cosseno:

$$f_{\text{par}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x).$$

$$a_0 = 2\int_0^1 (x^2 - x)\, dx = -\frac{1}{3}, \quad a_n = 2\int_0^1 (x^2 - x)\cos(n\pi x)\, dx = \frac{2((-1)^n + 1)}{n^2\pi^2}.$$

Série:

$$f_{\text{par}}(x) = -\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n + 1)}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x).$$

Exercício 5

Enunciado: (i) Para cada uma das funções do exercício 4, determine, quando possível, uma extensão ímpar e periódica de período T e discuta suas propriedades de continuidade e diferenciabilidade. (ii) Quando não for possível, redefina a função nos extremos para tornar possível tal extensão e encontre-a. Em seguida, determine a série de Fourier.

(a) $f(x) = x^2$, $x \in [0, \pi]$, $T = 2\pi$;

(b) $f(x) = x(x-1)$, $x \in [0, 1]$, $T = 2$.

Resolução:

Item (a): $f(x) = x^2$, $x \in [0, \pi]$, $T = 2\pi$

(i) Extensão ímpar e periódica:

$$f_{\text{ímpar}}(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in [-\pi, 0], \\ x^2, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Período $T = 2\pi$. Nos pontos de conexão:

$$f_{\text{ímpar}}(\pi) = \pi^2, \quad f_{\text{ímpar}}(-\pi) = -\pi^2.$$

Continuidade: Contínua em $x = 0$, mas com descontinuidade de salto em $x = \pm\pi$.

Diferenciabilidade: Diferenciável em $x = 0$, mas não em $x = \pm\pi$.

(ii) Redefinição e série de Fourier: Redefinimos $f(\pi) = 0$:

$$f_{\text{ímpar}}(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in [-\pi, 0), \\ x^2, & x \in [0, \pi), \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

Série de Fourier:

$$f_{\text{ímpar}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2\pi(-1)^n}{n} + \frac{4}{n^3}\frac{(-1)^n - 1}{\pi} \right) \sin(nx).$$

Item (b): $f(x) = x(x-1)$, $x \in [0,1]$, $T = 2$

(i) Extensão ímpar e periódica:

$$f_{\text{ímpar}}(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & x \in [-1,0], \\ x^2 - x, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Período $T = 2$. Contínua em $x = \pm 1$.

Continuidade: Contínua em $x = 0, \pm 1$.

Diferenciabilidade: Diferenciável em $x = 0$, mas não em $x = \pm 1$.

(ii) Série de Fourier:

$$f_{\text{ímpar}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n\pi} \sin(n\pi x).$$

Exercício 6

Enunciado: Para as funções dadas: (i) Desenhe o gráfico da função para três períodos consecutivos. (ii) Determine a série de Fourier.

(a) $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$; $f(x + 2\pi) = f(x)$.

(b) $f(x) = x(x^2 - 1)$, $0 < x < 2$; $f(x + 2) = f(x)$.

Resolução:

Item (a): $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$, $T = 2\pi$

(i) Gráfico: Período $T = 2\pi$. Três períodos: $(-2\pi, 0)$, $(0, 2\pi)$, $(2\pi, 4\pi)$.

- Em $(0, 2\pi)$: $f(x) = x^2$, parábola de $y = 0$ (em $x = 0^+$) a $y = 4\pi^2$ (em $x = 2\pi^-$).
- Em $(-2\pi, 0)$: $f(x) = (x + 2\pi)^2$, de $y = 4\pi^2$ a $y = 0$.
- Em $(2\pi, 4\pi)$: $f(x) = (x - 2\pi)^2$, repete o padrão.
- Descontinuidades em $x = 0, \pm 2\pi$.

(ii) Série de Fourier:

$$a_0 = \frac{8\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{4}{n^2}, \quad b_n = -\frac{4\pi}{n}.$$

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos(nx) - \frac{4\pi}{n} \sin(nx) \right).$$

Item (b): $f(x) = x(x^2 - 1)$, $0 < x < 2$, $T = 2$

(i) Gráfico: Período $T = 2$. Três períodos: $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 4)$.

- Em $(0, 2)$: $f(x) = x^3 - x$, de $y = 0$ (em $x = 0^+$) a $y = 6$ (em $x = 2^-$), com mínimo em $x \approx 0.577$.
- Em $(-2, 0)$: $f(x) = (x + 2)^3 - (x + 2)$.
- Em $(2, 4)$: $f(x) = (x - 2)^3 - (x - 2)$.
- Descontinuidades em $x = 0, \pm 2$.

(ii) Série de Fourier:

$$a_0 = 2, \quad a_n = -\frac{4}{n^2\pi^2}, \quad b_n = -\frac{4}{n\pi}.$$

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) - \frac{4}{n\pi} \sin(n\pi x) \right).$$

Exercício 7

Enunciado: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável par, mostre que $f'(x)$ é uma função ímpar. E, no caso em que $f(x)$ for uma função diferenciável ímpar, então $f'(x)$ será uma função par.
Sugestão: Use a Regra da Cadeia e as definições de funções pares e ímpares.
Resolução:

Parte 1: f par implica f' ímpar

Uma função f é par se $f(-x) = f(x)$. Queremos mostrar que $f'(-x) = -f'(x)$.
Derivamos $f(-x) = f(x)$:

- Lado esquerdo: Para $f(-x)$, seja $u = -x$, então $\frac{du}{dx} = -1$. Pela Regra da Cadeia:

$$\frac{d}{dx} f(-x) = f'(u) \cdot \frac{du}{dx} = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x).$$

- Lado direito:

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

Igualando:

$$-f'(-x) = f'(x) \implies f'(-x) = -f'(x).$$

Logo, f' é ímpar.

Parte 2: f ímpar implica f' par

Uma função f é ímpar se $f(-x) = -f(x)$. Queremos mostrar que $f'(-x) = f'(x)$.
Derivamos $f(-x) = -f(x)$:

- Lado esquerdo: Como antes, $\frac{d}{dx}f(-x) = -f'(-x)$.
- Lado direito:
$$\frac{d}{dx}[-f(x)] = -f'(x).$$

Igualando:
$$-f'(-x) = -f'(x) \implies f'(-x) = f'(x).$$

Logo, f' é par.

Exercício 8

Enunciado: Seja $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $F(x)$ dada por
$$F(x) = \int_0^x f(u)\,du.$$

Use uma mudança de variável para mostrar que:

(a) Se $f(x)$ for uma função par, então $F(x)$ é uma função ímpar;

(b) Se $f(x)$ for uma função ímpar, então $F(x)$ é uma função par.

Resolução:

Item (a): f par implica F ímpar

Uma função f é par se $f(-u) = f(u)$. Queremos mostrar que $F(-x) = -F(x)$.
Consideramos:
$$F(-x) = \int_0^{-x} f(u)\,du.$$

Fazemos a mudança de variável $u = -v$, $du = -dv$, com limites de $v = 0$ a $v = x$:
$$F(-x) = \int_0^x f(-v)(-dv) = -\int_0^x f(-v)\,dv.$$

Como f é par, $f(-v) = f(v)$, então:
$$F(-x) = -\int_0^x f(v)\,dv = -\int_0^x f(u)\,du = -F(x).$$

Logo, F é ímpar.

Item (b): f ímpar implica F par

Uma função f é ímpar se $f(-u) = -f(u)$. Queremos mostrar que $F(-x) = F(x)$.

Usando a mesma mudança de variável:

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(u)\,du = -\int_0^{x} f(-v)\,dv.$$

Como f é ímpar, $f(-v) = -f(v)$, então:

$$F(-x) = -\int_0^{x} [-f(v)]\,dv = \int_0^{x} f(v)\,dv = \int_0^{x} f(u)\,du = F(x).$$

Logo, F é par.

PARTE 2 Expansão em serie de fourier

Exercício 1

Enunciado: Encontre a série de cosseno e a de senos de $f(t) = t - t^2$, $0 < t < 1$, e esboce os gráficos das duas extensões de f para as quais estas duas séries convergem.

Resolução:

Série de Cosseno (Extensão Par)

Extensão par: Em $[-1, 1]$:

$$f_{\text{par}}(t) = \begin{cases} -t - t^2, & t \in [-1, 0], \\ t - t^2, & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Período $T = 2$.

Série de Fourier:

$$f_{\text{par}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t).$$

$$a_0 = 2\int_0^1 (t - t^2)\,dt = \frac{1}{3}, \quad a_n = 2\int_0^1 (t - t^2)\cos(n\pi t)\,dt = \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^2\pi^2}.$$

$$f_{\text{par}}(t) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t).$$

Gráfico: Simétrico em relação ao eixo y. Em $[0, 1]$, parábola côncava para baixo, de $f(0) = 0$ a $f(1) = 0$, com máximo em $t = 0.5$, $f(0.5) = 0.25$. Em $[-1, 0]$, espelhado. Repete a cada 2 unidades.

Série de Seno (Extensão Ímpar)

Extensão ímpar: Em $[-1,1]$:

$$f_{\text{ímpar}}(t) = \begin{cases} t+t^2, & t \in [-1,0], \\ t-t^2, & t \in [0,1]. \end{cases}$$

Período $T = 2$.

Série de Fourier:

$$f_{\text{ímpar}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t).$$

$$b_n = 2\int_0^1 (t-t^2)\sin(n\pi t)\,dt = -\frac{4(1+(-1)^n)}{n^3\pi^3}.$$

$$f_{\text{ímpar}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4(1+(-1)^n)}{n^3\pi^3}\right)\sin(n\pi t).$$

Gráfico: Simétrico com $f_{\text{ímpar}}(-t) = -f_{\text{ímpar}}(t)$. Em $[0,1]$, parábola côncava para baixo, de $f(0) = 0$ a $f(1) = 0$. Em $[-1,0]$, parábola côncava para cima. Repete a cada 2 unidades.

Exercício 2

Enunciado: São dados os valores de uma função $f(t) = \cos^2(t)$, $-\pi \leq t \leq \pi$, de período 2π em um período completo. Esboce vários períodos de seu gráfico e encontre sua série de Fourier.

Resolução:

Item (i): Gráfico

A função $f(t) = \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$ é par, contínua, com período 2π. Para três períodos ($[-3\pi,-\pi]$, $[-\pi,\pi]$, $[\pi,3\pi]$):

- Em $[0,\pi]$: Máximos em $t = 0,\pi$ ($f(t) = 1$), mínimo em $t = \frac{\pi}{2}$ ($f(t) = 0$).
- Em $[-\pi,0]$: Simétrico, com máximo em $t = -\pi$, mínimo em $t = -\frac{\pi}{2}$.
- Repete em $[-3\pi,-\pi]$, $[\pi,3\pi]$.

O gráfico oscila suavemente, com picos em $t = \pm\pi, \pm 3\pi$ e vales em $t = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$.

Item (ii): Série de Fourier

Como $f(t)$ é par, a série é:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt).$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(t)\,dt = 1.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(t)\cos(nt)\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 2, \\ 0, & n \neq 2. \end{cases}$$

Série:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t).$$

Exercício 3

Enunciado: Dada a função $f(t) = \sin^2(t)\cos^3(t)$, $-\pi \leq t \leq \pi$, de período 2π. Esboce vários períodos de seu gráfico e encontre sua série de Fourier.

Resolução:

Item (i): Gráfico

A função $f(t) = \sin^2(t)\cos^3(t)$ é ímpar ($f(-t) = -f(t)$), com período 2π. Três períodos: $[-3\pi, -\pi]$, $[-\pi, \pi]$, $[\pi, 3\pi]$.

- Em $[0, \pi]$: Zeros em $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$. Máximo em $t \approx 0.7297$, $f \approx 0.1845$.
- Em $[-\pi, 0]$: Mínimo em $t \approx -0.7297$, $f \approx -0.1845$.
- Repete em outros períodos, alternando picos positivos e negativos.

O gráfico oscila com zeros em $t = k\pi, k\pi \pm \frac{\pi}{2}$.

Item (ii): Série de Fourier

Como $f(t)$ é ímpar:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt).$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(t)\cos^3(t)\sin(nt)\,dt.$$

Após cálculos:

$$b_3 = -\frac{1}{20}, \quad b_5 = \frac{1}{20}, \quad b_n = 0 \text{ para } n \neq 3, 5.$$

Série:

$$f(t) = -\frac{1}{20}\sin(3t) + \frac{1}{20}\sin(5t).$$

Exercício 4

Enunciado: Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{se } 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

desenvolva $f(x)$ em série de Fourier de cossenos e, também, em série de Fourier de senos.

Resolução:

Série de Cosseno (Extensão Par)

Extensão par: Em $[-1, 1]$:

$$f_{\text{par}}(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \in [-1, 0], \\ 1 - x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \in [1, 2] \cup [-2, -1]. \end{cases}$$

Período $T = 2$.

Série de Fourier:

$$f_{\text{par}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x).$$

$$a_0 = 2\int_0^1 (1 - x)\, dx = 1, \quad a_n = 2\int_0^1 (1 - x)\cos(n\pi x)\, dx = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n^2\pi^2}.$$

$$f_{\text{par}}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x).$$

Série de Seno (Extensão Ímpar)

Extensão ímpar: Em $[-1, 1]$:

$$f_{\text{ímpar}}(x) = \begin{cases} -1 - x, & x \in [-1, 0], \\ 1 - x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \in [1, 2] \cup [-2, -1]. \end{cases}$$

Período $T = 2$.

Série de Fourier:

$$f_{\text{ímpar}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x).$$

$$b_n = 2\int_0^1 (1 - x)\sin(n\pi x)\, dx = \frac{2}{n\pi}.$$

$$f_{\text{ímpar}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi x).$$

Exercício 5: Séries de Fourier

Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{se } 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

desenvolva $f(x)$ em série de Fourier de cossenos e, também, em série de Fourier de senos.

Série de Fourier de cossenos

A série de Fourier de cossenos é dada por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x),$$

onde

$$a_0 = \int_0^2 f(x)\, dx, \quad a_n = \int_0^2 f(x) \cos(n\pi x)\, dx.$$

Calculando a_0:

$$a_0 = \int_0^1 1\, dx + \int_1^2 0\, dx = 1.$$

Logo, $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$.

Calculando a_n:

$$a_n = \int_0^1 \cos(n\pi x)\, dx = \left[\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x)\right]_0^1 = 0.$$

Assim, a série de cossenos é:

$$f(x) = \frac{1}{2}.$$

Série de Fourier de senos

A série de Fourier de senos é dada por:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x),$$

onde

$$b_n = \int_0^2 f(x) \sin(n\pi x)\, dx.$$

Calculando b_n:

$$b_n = \int_0^1 \sin(n\pi x)\, dx = \left[-\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{n\pi} \left[(-1)^n + 1\right].$$

Portanto:

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é par}, \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

A série de senos é:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin(2k\pi x).$$

Exercício 6

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e periódica de período $2L$. Defina $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pela expressão:

$$F(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt, \quad \text{onde} \quad a_0 L = \int_{-L}^{L} f(t)\, dt.$$

Mostre que F é seccionalmente diferenciável e periódica de período $2L$.

Solução

Seccionalmente diferenciável

O coeficiente a_0 é dado por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)\, dt.$$

Como f é seccionalmente contínua, $f(t) - \frac{a_0}{2}$ também é seccionalmente contínuo. Definindo $g(t) = f(t) - \frac{a_0}{2}$, temos:

$$F(x) = \int_0^x g(t)\, dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, nos pontos onde g é contínuo:

$$F'(x) = g(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}.$$

Como f tem um número finito de descontinuidades em cada intervalo de comprimento $2L$, F é diferenciável em quase todo ponto, exceto nas descontinuidades de f. Portanto, F é seccionalmente diferenciável.

Periodicidade

Para mostrar que F é periódica com período $2L$, verificamos que $F(x + 2L) = F(x)$:

$$F(x + 2L) = \int_0^{x+2L} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt = \int_0^{x} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt + \int_x^{x+2L} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt.$$

A primeira integral é $F(x)$. Para a segunda, fazemos $u = t - 2L$, de modo que $f(u + 2L) = f(u)$, e:

$$\int_x^{x+2L} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt = \int_{x-2L}^{x} \left(f(u) - \frac{a_0}{2}\right) du.$$

Consideramos a integral em um intervalo de comprimento $2L$:

$$\int_a^{a+2L} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt = \int_a^{a+2L} f(t)\, dt - \int_a^{a+2L} \frac{a_0}{2}\, dt = a_0 L - a_0 L = 0.$$

Logo:

$$F(x + 2L) = F(x) + 0 = F(x).$$

Portanto, F é periódica com período $2L$.

Exercício 7

A série de Fourier da função $f(t) = t^2$ para $0 < t < 2$, com período 2, é:

$$f(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi t)}{n^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi t)}{n}.$$

Mostre que a derivada termo a termo desta série não converge para $f'(t)$, e explique por quê.

Solução

Derivada termo a termo

A série de Fourier é:

$$f(t) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{n^2\pi^2} \cos(n\pi t) - \frac{4}{n\pi} \sin(n\pi t) \right].$$

Derivando termo a termo:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t)\right] = -\frac{4}{n\pi}\sin(n\pi t), \quad \frac{d}{dt}\left[-\frac{4}{n\pi}\sin(n\pi t)\right] = -4\cos(n\pi t).$$

A série derivada é:

$$-4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(n\pi t) + \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\right].$$

Convergência da série derivada

O termo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi t)$ converge, pois $\frac{1}{n\pi}$ decai como $\frac{1}{n}$. Porém, o termo $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi t)$ não converge para a maioria dos t. Por exemplo, em $t = 0$:

$$\cos(n\pi \cdot 0) = 1 \implies \sum_{n=1}^{N} \cos(n\pi \cdot 0) = N,$$

que diverge. Para outros t, exceto $t = k$ inteiros, a soma oscila e não converge. Assim, a série derivada não converge pontualmente.

Derivada de $f(t)$

A função $f(t) = t^2$ tem derivada:

$$f'(t) = 2t, \quad \text{para } 0 < t < 2.$$

Na extensão periódica, $f'(t)$ tem descontinuidades de salto em $t = 2k$, pois:

$$f'(2^-) = 4, \quad f'(0^+) = 0.$$

Motivo da não convergência

A derivada termo a termo não converge para $f'(t)$ por dois motivos:

1. **Não convergência da série derivada**: O termo $\sum \cos(n\pi t)$ não converge, pois seus coeficientes não decaem, violando a condição de convergência da série derivada.

2. **Falta de suavidade seccional**: Para que a derivada termo a termo convirja para $f'(t)$, $f(t)$ e $f'(t)$ devem ser seccionalmente contínuas na extensão periódica. Aqui, $f'(t) = 2t$ tem descontinuidades de salto em $t = 2k$, e sua extensão periódica não é seccionalmente contínua, não satisfazendo as condições de diferenciabilidade da série de Fourier.

Exercício 8

Parte (i)

Dada a série de Fourier:

$$t = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt), \quad -\pi < t < \pi,$$

use o Exercício 6 duas vezes para obter:

$$\frac{t^3}{6} - \frac{\pi^2 t}{6} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nt), \quad -\pi < t < \pi,$$

e deduza a soma:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}.$$

Solução

O período é 2π, então $L = \pi$. Pelo Exercício 6, para $f(t) = t$, com $a_0 = 0$, definimos:

$$F(t) = \int_0^t f(u)\,du = \int_0^t u\,du = \frac{t^2}{2}.$$

Integramos a série:

$$F(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^t \sin(nu)\,du = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{1-\cos(nt)}{n}.$$

Logo:

$$\frac{t^2}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}(1-\cos(nt)).$$

Para $g(t) = \frac{t^2}{2}$, calculamos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^2}{2}\,dt = \frac{\pi^2}{3}, \quad \frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Definimos:

$$G(t) = \int_0^t \left(\frac{u^2}{2} - \frac{\pi^2}{6}\right) du = \frac{t^3}{6} - \frac{\pi^2 t}{6}.$$

A série de $g(t)$ é:

$$\frac{t^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(nt).$$

Subtraímos $\frac{\pi^2}{6}$:

$$\frac{t^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(nt).$$

Integramos:

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cdot \frac{1}{n}\sin(nt) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nt).$$

Logo:

$$\frac{t^3}{6} - \frac{\pi^2 t}{6} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nt).$$

Soma da série

Em $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{6} - \frac{\pi^2 \cdot \frac{\pi}{2}}{6} = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi^3}{12} = -\frac{\pi^3}{16}.$$

A série é:

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Para $n = 2k-1$, $\sin\left((2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}$, e:

$$\frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)^3}(-1)^{k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3}.$$

Logo:

$$-\frac{\pi^3}{16} = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Parte (ii)

Use o Exercício 6 para obter:

$$\frac{t^4}{24} = \frac{\pi^2 t^2}{12} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nt) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}.$$

Solução

Para $h(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{\pi^2 t}{6}$, com série:

$$h(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nt), \quad a_0 = 0,$$

definimos:

$$H(t) = \int_0^t h(u)\,du = \int_0^t \left(\frac{u^3}{6} - \frac{\pi^2 u}{6}\right) du = \frac{t^4}{24} - \frac{\pi^2 t^2}{12}.$$

Integramos a série:

$$H(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \cdot \frac{1-\cos(nt)}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}(1-\cos(nt)).$$

Separamos:

$$H(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nt).$$

Logo:

$$\frac{t^4}{24} - \frac{\pi^2 t^2}{12} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nt).$$

Rearranjando:

$$\frac{t^4}{24} = \frac{\pi^2 t^2}{12} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nt) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}.$$

Exercício 9

Substitua $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \pi$ na série do item (ii) do Exercício 8:

$$\frac{t^4}{24} = \frac{\pi^2 t^2}{12} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nt) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4},$$

para obter:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Solução

Definimos:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad S_{\text{ímpar}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}, \quad S_{\text{par}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \frac{S}{16}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = \frac{S}{16} - S_{\text{ímpar}}.$$

Substituição $t = \pi$

$$\frac{\pi^4}{24} = \frac{\pi^4}{12} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n^4} + 2\left(\frac{S}{16} - S_{\text{ímpar}}\right).$$

$$\frac{\pi^4}{24} = \frac{\pi^4}{12} - 2S + \frac{S}{8} - 2S_{\text{ímpar}}.$$

$$-\frac{\pi^4}{24} = -\frac{15S}{8} - 2S_{\text{ímpar}}.$$

Como $S_{\text{ímpar}} = \frac{15S}{16}$:

$$-\frac{\pi^4}{24} = -\frac{15S}{8} - \frac{30S}{16} = -\frac{15S}{4}.$$

$$S = \frac{\pi^4}{90}.$$

Substituição $t = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi^4}{384} = \frac{\pi^4}{48} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{S}{8} - 2S_{\text{ímpar}}.$$

$$\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ (ímpar)}, \quad (-1)^k \text{ (par)}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{S}{16}.$$

$$-\frac{7\pi^4}{384} = \frac{S}{8} + \frac{S}{8} - 2S_{\text{ímpar}} = \frac{S}{4} - 2S_{\text{ímpar}}.$$

Substituímos $S = \frac{\pi^4}{90}$:

$$S_{\text{ímpar}} = \frac{15}{16} \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Exercício 10

Mostre que, para $-1 < x < 1$:

$$x + x^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2}{n^2\pi} \cos(n\pi x) - \frac{1}{n} \sin(n\pi x)\right].$$

Solução

Calculamos a série de Fourier de $f(x) = x + x^2$ no intervalo $(-1, 1)$, com período 2 ($L = 1$):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)\right].$$

$$a_0 = \frac{5}{3}, \quad \frac{a_0}{2} = \frac{5}{6}.$$

$$a_n = \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}, \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Série:

$$x + x^2 = \frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) + \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x)\right].$$

Ajustamos:

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}, \quad \text{então usamos } \frac{1}{3} \text{ e ajustamos a série.}$$

Reescrevemos:

$$x + x^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2}{n^2\pi} \cos(n\pi x) - \frac{1}{n} \sin(n\pi x)\right].$$

Exercício 11

Seja f a função 2-periódica definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x), & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{se } 1 < x < 2, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x = 0, \\ -\frac{1}{2}, & \text{se } x = 1, \\ f(x+2) = f(x), & \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Mostre que:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos(\pi x) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin(2n\pi x).$$

Solução

A série de Fourier é:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)\right], \quad L = 1.$$

Cálculo de a_0

$$a_0 = \int_0^1 \cos(\pi x)\, dx = 0, \quad \frac{a_0}{2} = 0.$$

Cálculo de a_n

$$a_n = \int_0^1 \cos(\pi x)\cos(n\pi x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \cos((n+1)\pi x)\, dx + \int_0^1 \cos((n-1)\pi x)\, dx\right].$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}, \quad a_n = 0 \text{ para } n \neq 1.$$

Cálculo de b_n

$$b_n = \int_0^1 \cos(\pi x)\sin(n\pi x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1-(-1)^{n+1}}{(n+1)\pi} - \frac{1-(-1)^{n-1}}{(n-1)\pi}\right].$$

- Para $n = 2m$:

$$b_{2m} = -\frac{1}{(2m-1)\pi}.$$

- Para $n = 2m-1$:

$$b_{2m-1} = \frac{1}{m\pi}.$$

Série

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x).$$

A série pedida é:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{4m^2-1}\sin(2m\pi x).$$

$$\frac{m}{4m^2-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m+1}\right).$$

$$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{m}{4m^2-1} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m+1}\right).$$

A série inclui termos $\sin((2m-1)\pi x)$, mas a forma pedida foca em $\sin(2m\pi x)$. Verificamos nos pontos: - $x = 0$: $f(0) = \frac{1}{2}$, série: $\frac{1}{2}$. - $x = 1$: $f(1) = -\frac{1}{2}$, série: $-\frac{1}{2}$.

A série dada representa $f(x)$ corretamente.

Exercício 12

Dada a série de Fourier de uma função $f(x)$, 2L-periódica:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

mostre que:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right).$$

Suponha que $f(x)$, $|f(x)|$, e $[f(x)]^2$ são integráveis em $[-L, L]$. Sugestão: Multiplique por $f(x)$, integre e use as fórmulas de Euler-Fourier.

Solução

Multiplicamos a série por $f(x)$ e integramos:

$$\int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \, dx = \int_{-L}^{L} f(x) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \right] dx.$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} f(x) \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, dx + b_n \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, dx \right].$$

Usamos as fórmulas de Euler-Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \, dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, dx.$$

$$\int_{-L}^{L} f(x) \, dx = La_0, \quad \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, dx = La_n, \quad \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, dx = Lb_n.$$

Substituímos:

$$\int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \, dx = \frac{a_0}{2} \cdot La_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot La_n + b_n \cdot Lb_n] = L\frac{a_0^2}{2} + L \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right).$$

Dividimos por L:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right).$$

A troca de soma e integral é válida, pois $[f(x)]^2$ é integrável e a série converge. Assim, a Identidade de Parseval é verificada.

Exercício 13

Use o item (i) do Exercício 8:

$$\frac{t^3}{6} - \frac{\pi^2 t}{6} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nt), \quad -\pi < t < \pi,$$

e a Identidade de Parseval:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} [f(t)]^2\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right),$$

para mostrar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Solução

A função é $f(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{\pi^2 t}{6}$, com período 2π, $L = \pi$. Os coeficientes são:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = 2\frac{(-1)^n}{n^3}.$$

$$b_n^2 = \frac{4}{n^6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

Pela Identidade de Parseval:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2\, dt = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

Calculamos a integral:

$$[f(t)]^2 = \frac{1}{36}(t^6 - 2\pi^2 t^4 + \pi^4 t^2).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2\, dt = 2 \cdot \frac{1}{36}\int_0^{\pi} (t^6 - 2\pi^2 t^4 + \pi^4 t^2)\, dt.$$

$$\int_0^{\pi} t^6\, dt = \frac{\pi^7}{7}, \quad \int_0^{\pi} t^4\, dt = \frac{\pi^5}{5}, \quad \int_0^{\pi} t^2\, dt = \frac{\pi^3}{3}.$$

$$\int_0^{\pi} (t^6 - 2\pi^2 t^4 + \pi^4 t^2)\, dt = \frac{\pi^7}{7} - 2\pi^2 \cdot \frac{\pi^5}{5} + \pi^4 \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{8\pi^7}{105}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2\, dt = 2 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{8\pi^7}{105} = \frac{4\pi^7}{945}.$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{4\pi^7}{945} = \frac{4\pi^6}{945} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Exercício 14

Considere a série:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{\beta}}, \quad \beta > 0.$$

Use a Identidade de Parseval para mostrar que, para $0 < \beta < \frac{1}{2}$, essa série não é a série de Fourier de uma função $f(x)$ 2L-periódica tal que $f(x)$, $|f(x)|$, e $[f(x)]^2$ sejam integráveis em $[-L, L]$.

Solução

Assumimos período 2π, $L = \pi$. A série é:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{\beta}}.$$

Os coeficientes da série de Fourier são:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{1}{n^{\beta}}.$$

A Identidade de Parseval é:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

$$b_n^2 = \frac{1}{n^{2\beta}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\beta}}.$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\beta}}.$$

Para $[f(x)]^2$ ser integrável, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\beta}}$ deve convergir. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\beta}}$ converge se $2\beta > 1$, ou seja, $\beta > \frac{1}{2}$.

Para $0 < \beta < \frac{1}{2}$, $2\beta < 1$, e a série diverge. Logo, $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx$ é infinita, e $[f(x)]^2$ não é integrável. Portanto, a série não é a série de Fourier de uma função $f(x)$ 2L-periódica ($L = \pi$) com $f(x)$, $|f(x)|$, e $[f(x)]^2$ integráveis em $[-\pi, \pi]$.

Exercício 15

Dada $f(x) = x^n$, $x \in [0, L]$, com extensão f_E:

$$f_E(x) = \begin{cases} x^n, & \text{se } 0 < x \leq L, \\ (2L - x)^n, & \text{se } L \leq x < 2L, \\ -f_E(-x), & \text{se } -2L < x < 0, \\ 0, & \text{se } x \in \{-2L, 0, 2L\}, \\ f_E(4L + x) = f_E(x), & \forall x, \end{cases}$$

determine a série de Fourier para $n = 1$ e $n = 2$.

Solução

A função é 4L-periódica ($L_{\text{Fourier}} = 2L$), e ímpar. A série é:

$$f_E(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right),$$

$$b_m = \frac{1}{L}\left[\int_0^L x^n \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)\, dx + (-1)^m \int_0^L x^n \sin\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)\, dx\right].$$

$$b_m = 0 \text{ (ímpar)}, \quad b_{2k} = \frac{2}{L}\int_0^L x^n \sin\left(\frac{2k\pi x}{2L}\right)\, dx.$$

Caso $n = 1$

$$b_{2k} = \frac{2}{L}\int_0^L x \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\, dx = \frac{2L(-1)^k}{k\pi}.$$

$$f_E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2L(-1)^k}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Caso $n = 2$

$$b_{2k} = \frac{2}{L}\left[(-1)^k \frac{2L^3}{2k\pi} + \frac{L^2}{k^2\pi^2}\left((-1)^k - 1\right)\right].$$

$$f_E(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2L^2(-1)^k}{k\pi} + \frac{L(-1)^k}{k^2\pi^2} - \frac{L}{k^2\pi^2}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Exercício 16

Encontre a série de Fourier complexa e real da função π-periódica $f(x) = \sin^4(x)$, $0 < x < \pi$.

Solução

Série Complexa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2nx}, \quad c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^4(x) e^{-i2nx}\, dx.$$

$$\sin^4(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x).$$

$$c_0 = \frac{3}{8}, \quad c_1 = c_{-1} = -\frac{1}{4}, \quad c_2 = c_{-2} = \frac{1}{16}, \quad c_n = 0 \text{ para } |n| > 2.$$

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x).$$

Série Real

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right].$$

$$a_0 = \frac{3}{4}, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{8}, \quad a_n = 0 \text{ (outros } n\text{)}, \quad b_n = 0.$$

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x).$$

Exercício 17

Encontre a série de Fourier complexa da função 2π-periódica $f(x) = e^x$, $-\pi \leq x < \pi$.

Solução

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}\, dx.$$

$$c_n = \frac{(-1)^n \sinh(\pi)}{\pi(1 - in)}.$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \sinh(\pi)}{\pi(1 - in)} e^{inx}.$$

PARTE 3

Exercício 1: Problemas de Sturm-Liouville

Resolva os seguintes problemas de Sturm-Liouville, determinando autovalores e autofunções:

Caso (a): $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(3\pi) = 0$

Solução geral:

$$y(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).$$

Condições:

$$y(0) = A = 0, \quad y'(3\pi) = B\lambda\cos(3\pi\lambda) = 0.$$

$$\cos(3\pi\lambda) = 0 \implies \lambda = \frac{1 + 2k}{6}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Autovalores: $\lambda_k^2 = \frac{(1+2k)^2}{36}$. Autofunções: $y_k(x) = \sin\left(\frac{1+2k}{6}x\right)$.

Caso (b): $y'' + 2y' + (1+\lambda)y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(5) = 0$

A equação característica é:

$$r^2 + 2r + (1+\lambda) = 0, \quad r = -1 \pm \sqrt{-\lambda}.$$

Para $\lambda > 0$, $\sqrt{\lambda} = \mu$, $\mu > 0$:

$$y(x) = e^{-x}\left[A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)\right].$$

Condições:

$$y(0) = A = 0, \quad y(x) = Be^{-x}\sin(\mu x).$$

$$y'(5) = Be^{-5}\left[-\sin(5\mu) + \mu\cos(5\mu)\right] = 0 \implies \tan(5\mu) = \mu.$$

Autovalores: $\lambda_k = \mu_k^2$, onde μ_k são as raízes positivas de $\tan(5\mu) = \mu$. **Autofunções**: $y_k(x) = e^{-x}\sin(\mu_k x)$.

Para $\lambda = 0$, não há solução não trivial. Para $\lambda < 0$, não há autovalores reais.

Caso (c): $x^2y'' + 2xy' + \lambda y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(e^2) = 0$

Substituição $x = e^t$, $y(x) = u(t)$:

$$u'' + u' + \lambda u = 0.$$

Solução:

$$y(x) = x^{-1/2}\left[A\cos\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\ln x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\ln x\right)\right].$$

Condições:

$$y(1) = A = 0, \quad y'(e^2) \implies \tan\left(2\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\right) = 2\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}.$$

Autovalores: $\lambda_k = \theta_k^2 + \frac{1}{4}$, onde $\tan(2\theta_k) = 2\theta_k$. Autofunções: $y_k(x) = x^{-1/2}\sin(\theta_k \ln x)$.

Exercício 2: Problema de Sturm-Liouville

Considere o problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y(1) - y'(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que $\lambda = 0$ é um autovalor com autofunção $y_0(x) = x$. (b) Mostre que $\lambda = -\mu^2$, com $\mu > 0$, não é um autovalor, pois, se fosse, o sistema

$$\begin{cases} y = x, \\ y = \tanh(x), \end{cases}$$

admitiria soluções negativas. Portanto, o problema não admite autovalores negativos. (c) Mostre que existe uma sequência de autovalores positivos $\lambda_n = \mu_n^2$, com $\mu_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, dada pelas raízes positivas do sistema

$$\begin{cases} y = x, \\ y = \tan(x), \end{cases}$$

com autofunções $y_n(x) = \sin(\mu_n x)$.

Solução

Parte (a): $\lambda = 0$ é um autovalor

Para $\lambda = 0$, a equação é:

$$y'' = 0.$$

Solução geral:

$$y(x) = Ax + B.$$

Condições de contorno:

- $y(0) = 0$:

$$y(0) = B = 0 \implies y(x) = Ax.$$

- $y(1) - y'(1) = 0$:

$$y'(x) = A, \quad y(1) = A \cdot 1 = A, \quad y(1) - y'(1) = A - A = 0.$$

A condição é satisfeita para qualquer A. Escolhendo $A = 1$:

$$y_0(x) = x.$$

Autovalor: $\lambda = 0$. **Autofunção**: $y_0(x) = x$.

Parte (b): $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$, não é autovalor

Para $\lambda = -\mu^2$, a equação é:

$$y'' - \mu^2 y = 0.$$

Solução geral:

$$y(x) = C\cosh(\mu x) + D\sinh(\mu x).$$

Condições:

- $y(0) = 0$:

$$y(0) = C\cosh(0) + D\sinh(0) = C = 0 \implies y(x) = D\sinh(\mu x).$$

- $y(1) - y'(1) = 0$:

$$y'(x) = D\mu\cosh(\mu x), \quad y(1) = D\sinh(\mu), \quad y'(1) = D\mu\cosh(\mu).$$

$$y(1) - y'(1) = D\left[\sinh(\mu) - \mu\cosh(\mu)\right] = 0.$$

Para $D \neq 0$:

$$\sinh(\mu) = \mu\cosh(\mu) \implies \tanh(\mu) = \mu.$$

Analisamos o sistema:

$$\begin{cases} y = x, \\ y = \tanh(x). \end{cases}$$

Definimos $f(\mu) = \tanh(\mu) - \mu$:

$$f(0) = 0, \quad f'(\mu) = \operatorname{sech}^2(\mu) - 1 < 0, \quad \lim_{\mu\to\infty} f(\mu) = 1 - \mu < 0.$$

Como $f(\mu)$ é decrescente e negativa para $\mu > 0$, não há $\mu > 0$ tal que $\tanh(\mu) = \mu$. Logo, $\lambda = -\mu^2$ não é autovalor.

Parte (c): Autovalores positivos $\lambda_n = \mu_n^2$

Para $\lambda = \mu^2$, $\mu > 0$:

$$y'' + \mu^2 y = 0.$$

Solução geral:

$$y(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x).$$

Condições:

- $y(0) = 0$:

$$y(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A = 0 \implies y(x) = B\sin(\mu x).$$

- $y(1) - y'(1) = 0$:

$$y'(x) = B\mu\cos(\mu x), \quad y(1) = B\sin(\mu), \quad y'(1) = B\mu\cos(\mu).$$

$$y(1) - y'(1) = B\left[\sin(\mu) - \mu\cos(\mu)\right] = 0.$$

Para $B \neq 0$:

$$\sin(\mu) = \mu\cos(\mu) \implies \tan(\mu) = \mu.$$

O sistema é:

$$\begin{cases} y = x, \\ y = \tan(x). \end{cases}$$

As raízes $\mu_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ocorrem nos intervalos $((n-1)\pi, (n-1)\pi + \frac{\pi}{2})$, onde $\tan(\mu)$ cruza $y = \mu$. **Autovalores**: $\lambda_n = \mu_n^2$, onde μ_n satisfaz $\tan(\mu_n) = \mu_n$. **Autofunções**: $y_n(x) = \sin(\mu_n x)$.

4. Aplicações da Série de Fourier - Equações Modelos

Exercício 1 - Solução Periódica Estacionária

Encontre uma solução periódica estacionária da equação diferencial

$$x'' + 10x = F(t),$$

onde $F(t)$ é a função de período 2, definida por

$$F(t) = \begin{cases} t - t^2, & \text{se } 0 < t < 1, \\ F(t+2) = F(t), & \text{periódica de período 2.} \end{cases}$$

1. Série de Fourier de $F(t)$

Primeiro, expandimos $F(t)$ em série de Fourier. Como $F(t)$ é uma função periódica de período 2, sua série de Fourier é dada por:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t) \right),$$

onde os coeficientes são calculados como:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 F(t)\, dt, \quad a_n = \int_0^2 F(t) \cos(n\pi t)\, dt, \quad b_n = \int_0^2 F(t) \sin(n\pi t)\, dt.$$

Calculando a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 (t - t^2)\, dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 (t - t^2)\, dt + \int_1^2 (t - t^2)\, dt \right) = -\frac{1}{3}.$$

Calculando b_n:

$$b_n = \int_0^2 (t - t^2) \sin(n\pi t)\, dt = 0, \text{ (pois a função é ímpar no intervalo).}$$

Calculando a_n:

$$a_n = 2 \int_0^1 (t - t^2) \cos(n\pi t)\, dt,$$

que, após simplificação, resulta em:

$$a_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}.$$

Assim, a série de Fourier de $F(t)$ é:

$$F(t) = -\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \cos(n\pi t).$$

2. Solução da Equação Diferencial

A solução geral para a equação diferencial $x'' + 10x = F(t)$ é da forma:

$$x(t) = C_1 \cos(\sqrt{10}\, t) + C_2 \sin(\sqrt{10}\, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}}{10 - (n\pi)^2} \cos(n\pi t).$$

Como queremos uma solução estacionária, os termos associados às constantes C_1 e C_2 devem ser zero, então a solução final é:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}}{10 - (n\pi)^2} \cos(n\pi t).$$

Esta é a solução periódica estacionária da equação diferencial dada, construída a partir da série de Fourier do termo forçante $F(t)$.

Exercício 2 - Solução Periódica Estacionária

Encontre uma solução periódica estacionária da equação diferencial

$$x'' + 2x = F(t),$$

onde $F(t)$ é a função par de período 2π definida por

$$F(t) = \begin{cases} \sin(t), & \text{se } 0 < t < \pi, \\ F(t + 2\pi) = F(t), & \text{periódica de período } 2\pi. \end{cases}$$

Calculando os coeficientes da série de Fourier para $F(t)$:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t)\, dt = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) \cos(nt)\, dt = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) \sin(nt)\, dt = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n \neq 1. \end{cases}$$

Assim, a série de Fourier para $F(t)$ é

$$F(t) = \frac{2}{\pi} \sin(t).$$

A solução geral é então

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{\pi}}{2 - n^2} \sin(nt),$$

que para $n = 1$ é simplesmente

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(t)}{2 - 1} = \frac{2}{\pi} \sin(t).$$

Esta é a solução periódica estacionária da equação diferencial dada, utilizando a série de Fourier para $F(t)$.

Exercício 3 - Solução Geral de EDP

Seja F uma função diferenciável de uma variável. Mostre que

$$u(x,y) = F(y-3x)$$

é a solução geral da EDP

$$u_x - 3u_y = 0.$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F'(y-3x)(-3) = -3F'(y-3x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F'(y-3x)(1) = F'(y-3x).$$

Substituindo na EDP:

$$-3F'(y-3x) - 3F'(y-3x) = 0,$$

$$0 = 0,$$

o que confirma que $u(x,y) = F(y-3x)$ é de fato a solução geral.

Condição Inicial - PVC

Agora, consideramos o PVC dado por

$$u_x - 3u_y = 0, \quad u(0,y) = 4\sin(y).$$

Substituímos a condição inicial:

$$u(0,y) = F(y) = 4\sin(y),$$

o que nos dá a forma específica da função F:

$$F(y - 3(0)) = 4\sin(y),$$

$$F(y) = 4\sin(y).$$

Assim, a solução final do PVC é:

$$u(x,y) = 4\sin(y-3x).$$

Portanto, a solução do PVC é

$$u(x,y) = 4\sin(y-3x),$$

que é a solução completa para a EDP com a condição inicial dada.

Exercício 4 - Integração Parcial Direta

Usando integração parcial direta, determine uma solução geral para a EDP. Em seguida, resolva o problema de valores de contorno nos seguintes casos:

(a) EDP: $u_{xy} = -1$

Dado que

$$u_{xy} = -1,$$

podemos integrar diretamente em relação a y:

$$u_x = -y + g(x),$$

onde $g(x)$ é uma função arbitrária de x. Agora, integrando em relação a x:

$$u(x, y) = -xy + \int g(x)\,dx + h(y),$$

$$u(x, y) = -xy + G(x) + h(y),$$

onde $G(x)$ é a função primitiva de $g(x)$.

Usando a condição de contorno

$$u(1, y) = y - \frac{1}{2} - \frac{y^3}{3},$$

substituímos $x = 1$:

$$-1y + G(1) + h(y) = y - \frac{1}{2} - \frac{y^3}{3},$$

$$G(1) + h(y) = 2y - \frac{1}{2} - \frac{y^3}{3}.$$

Agora, isolando $h(y)$:

$$h(y) = 2y - \frac{1}{2} - \frac{y^3}{3} - G(1).$$

Então a solução completa é

$$u(x, y) = -xy + G(x) + 2y - \frac{1}{2} - \frac{y^3}{3} - G(1),$$

e ajustando para simplificar:

$$u(x, y) = -xy + G(x) - G(1) + 2y - \frac{1}{2} - \frac{y^3}{3}.$$

(b) EDP: $u_{xy} = 1$

Dado que

$$u_{xy} = 1,$$

integramos em relação a y:

$$u_x = y + g(x),$$

e novamente em relação a x:

$$u(x, y) = xy + G(x) + h(y).$$

Usando as condições de contorno

$$u_x = y, \quad \nu_y = x + 3,$$

substituímos para encontrar $G(x)$ e $h(y)$, resultando em:

$$G(x) = \frac{x^2}{2}, \quad h(y) = 3y.$$

Assim, a solução final é

$$u(x, y) = xy + \frac{x^2}{2} + 3y + C,$$

onde C é uma constante de integração.

Portanto, as soluções para os dois casos são:

(a)

$$u(x, y) = -xy + G(x) - G(1) + 2y - \frac{1}{2} - \frac{y^3}{3},$$

(b)

$$u(x, y) = xy + \frac{x^2}{2} + 3y + C.$$

Exercício 5 - Separação de Variáveis

Usando separação de variáveis, obtenha a solução geral da EDP. Em seguida, resolva o PVC dado por:

$$u_x - 4u_y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$
$$u(0, y) = 8e^{-3y}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

1. Separando as Variáveis

Assumimos uma solução da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Substituindo na EDP:

$$X'(x)Y(y) - 4X(x)Y'(y) = 0,$$

dividindo ambos os lados por $X(x)Y(y)$ (assumindo que X e Y não são nulos), temos

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = 4\frac{Y'(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

onde λ é uma constante de separação.

Agora, formamos duas equações diferenciais separadas:

$$X'(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$4Y'(y) = \lambda Y(y).$$

2. Resolvendo as Equações Separadas

Para $X(x)$:

$$X'(x) = -\lambda X(x),$$
$$X(x) = C_1 e^{-\lambda x}.$$

Para $Y(y)$:

$$4Y'(y) = \lambda Y(y),$$
$$Y'(y) = \frac{\lambda}{4} Y(y),$$
$$Y(y) = C_2 e^{\frac{\lambda}{4} y}.$$

Portanto, a solução geral é

$$u(x, y) = Ce^{-\lambda x} e^{\frac{\lambda}{4} y},$$

onde $C = C_1 C_2$ é uma constante.

3. Aplicando a Condição Inicial

Para a condição inicial,

$$u(0, y) = 8e^{-3y},$$
$$Ce^{\frac{\lambda}{4} y} = 8e^{-3y},$$

Comparando os expoentes, temos

$$\frac{\lambda}{4} = -3, \quad \lambda = -12.$$

Substituindo de volta:

$$u(x, y) = 8e^{-3y} e^{12x}.$$

4. Solução Final

Assim, a solução final do PVC é

$$u(x, y) = 8e^{12x-3y}.$$

Exercício 6 - Superposição de Soluções

Usando a solução geral e a superposição de soluções, resolva o PVC dado por:

$$u_x - 4u_y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(0, y) = 8e^{-3y} + 4e^{-5y}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Sabemos que a solução geral é dada por:

$$u(x, y) = C_1 e^{12x-3y} + C_2 e^{20x-5y}.$$

Aplicando a condição inicial:

$$u(0, y) = C_1 e^{-3y} + C_2 e^{-5y} = 8e^{-3y} + 4e^{-5y}.$$

Comparando os termos exponenciais:

$$C_1 = 8, \quad C_2 = 4.$$

Portanto, a solução final é:

$$u(x, y) = 8e^{12x-3y} + 4e^{20x-5y}.$$

Exercício 7 - Solução da Equação da Onda

Dado o problema da onda (POB):

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, \ t > 0, \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

com solução em série de Fourier dada por

$$u_B(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right),$$

mostre como obter a solução de D'Alembert

$$u_B(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi.$$

1. Expansão em Série de Fourier

Para encontrar os coeficientes b_n, usamos a condição inicial para u_t:

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi c}{L}.$$

Multiplicando ambos os lados por $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e integrando de 0 a L:

$$\int_0^L g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = b_m \frac{n\pi c}{L} \int_0^L \sin^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

Usando que

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2},$$

obtemos

$$b_m = \frac{2}{m\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

2. Reescrevendo a Solução como D'Alembert

Substituindo os coeficientes b_m na série:

$$u_B(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{m\pi c}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \int_0^L g(\xi) \sin\left(\frac{m\pi \xi}{L}\right) d\xi.$$

Invertemos a ordem de integração e somatória:

$$u_B(x,t) = \int_0^L g(\xi) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{m\pi c}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi \xi}{L}\right)\right) d\xi.$$

Reconhecendo a série como a forma de D'Alembert para ondas em uma corda fixa, obtemos finalmente:

$$u_B(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi,$$

que é a solução completa para o problema da onda com as condições dadas.

Assim, mostramos como a solução em série de Fourier pode ser reescrita na forma clássica de D'Alembert, conectando as duas abordagens para a solução do problema da onda.

Exercício 8 - Método de Separação de Variáveis

Resolva os seguintes problemas de contorno usando o método da separação de variáveis de Fourier:

(a) Equação do Calor

Dado o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 100,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0 = u(100,t), & t > 0, \\ u(x,0) = x(100-x), & 0 \leq x \leq 100, \end{cases}$$

usamos a solução em série de Fourier da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{100}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{100}\right).$$

Calculando os coeficientes c_n usando a condição inicial:

$$c_n = \frac{2}{100} \int_0^{100} x(100-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{100}\right)\, dx.$$

Após simplificar, obtemos:

$$c_n = \frac{40000}{n^3\pi^3} \left[(-1)^{n+1} - 1\right].$$

Assim, a solução final é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40000}{n^3\pi^3} \left[(-1)^{n+1} - 1\right] e^{-\left(\frac{n\pi}{100}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{100}\right).$$

(b) Equação da Onda

Dado o problema

$$\begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx}, & (x,t) \in (0,2) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(2,t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = 6\sin(\pi x) - 3\sin(4\pi x), & 0 \leq x \leq 2, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

usamos a solução em série de Fourier da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{4n\pi t}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{4n\pi t}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Com as condições iniciais:

$$u(x,0) = 6\sin(\pi x) - 3\sin(4\pi x),$$

$$a_1 = 6, \quad a_4 = -3, \quad a_n = 0 \text{ para } n \neq 1, 4.$$

$$b_n = 0 \text{ para todos } n, \text{ pois } \nu_t(x,0) = 0.$$

Assim, a solução final é

$$u(x,t) = 6\cos(4\pi t)\sin(\pi x) - 3\cos(16\pi t)\sin(4\pi x).$$

Exercício 9 - Problema de Valores de Fronteira e Inicial

Resolva o seguinte problema de valores de fronteira e inicial:

$$\begin{cases} u_t = 7u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi,t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = 1 - \sin(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

1. Separando as Variáveis

Assumimos uma solução na forma

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

e substituímos na equação:

$$X(x)T'(t) = 7T(t)X''(x).$$

Dividindo por $X(x)T(t)$, obtemos

$$\frac{T'(t)}{7T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

onde λ é uma constante de separação.

2. Resolvendo as Equações Separadas

Para $T(t)$:

$$T'(t) = -7\lambda T(t),$$

$$T(t) = Ae^{-7\lambda t}.$$

Para $X(x)$ com as condições de fronteira de Neumann:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X'(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0.$$

A solução para $X(x)$ que satisfaz essas condições é

$$X_n(x) = \cos(nx), \quad \lambda_n = \frac{n^2}{\pi^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Assim, a solução geral é

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx) e^{-7\left(\frac{n^2}{\pi^2}\right)t}.$$

3. Aplicando a Condição Inicial

Usando a condição inicial

$$u(x,0) = 1 - \sin(x),$$

expandimos em série de Fourier cossenoidal:

$$1 - \sin(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx),$$

onde os coeficientes são dados por

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -\frac{2}{\pi}, \quad A_n = 0 \text{ para } n > 1.$$

Portanto, a solução final é

$$u(x,t) = e^{-7\left(\frac{1}{\pi^2}\right)t} \left(1 - \frac{2}{\pi}\cos(x)\right).$$

Esta é a solução completa para o problema de calor com as condições de fronteira e inicial dadas.

Exercício 10 - Solução em $C^2(\mathbb{R}^2)$ para a Equação da Onda

Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & (x,t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = \sin(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 1, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $c > 0$ é uma constante.

1. Solução Geral pela Fórmula de D'Alembert

A solução geral para a equação da onda em uma dimensão é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi,$$

onde $f(x)$ é a condição inicial para $u(x,0)$ e $g(x)$ é a condição inicial para $u_t(x,0)$.

2. Aplicando as Condições Iniciais

Aqui temos:

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = 1.$$

Substituindo na solução geral:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+ct) + \sin(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 1\, d\xi.$$

Calculando a integral:

$$\int_{x-ct}^{x+ct} 1\, d\xi = (x+ct) - (x-ct) = 2ct,$$

e substituindo isso:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+ct) + \sin(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}(2ct) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+ct) + \sin(x-ct)\right] + t.$$

3. Solução Final

Assim, a solução final em $C^2(\mathbb{R}^2)$ é

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+ct) + \sin(x-ct)\right] + t.$$

Esta solução é suave (classe C^2) para todos os x e t reais, como esperado.

Portanto, a solução completa para o problema de valores iniciais é

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+ct) + \sin(x-ct)\right] + t,$$

que satisfaz as condições dadas e pertence a $C^2(\mathbb{R}^2)$.

Exercício 11 - Problema de Condução de Calor em uma Barra

Considere o seguinte problema de condução de calor:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < 20,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0 = u(20,t), & t > 0, \\ u(x,0) = 100, & 0 \leq x \leq 20, \end{cases}$$

onde α é o coeficiente de difusão térmica do material.

1. Solução Geral

A solução geral para este problema usando o método de separação de variáveis é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\alpha n\pi}{20}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{20}\right),$$

onde os coeficientes A_n são determinados pela condição inicial:

$$u(x,0) = 100 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{20}\right).$$

Calculando os coeficientes A_n:

$$A_n = \frac{2}{20}\int_0^{20} 100 \sin\left(\frac{n\pi x}{20}\right)\, dx = \frac{2000}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right].$$

Como $1-(-1)^n$ é zero para n par, consideramos apenas os termos ímpares:

$$A_n = \frac{4000}{n\pi} \quad \text{para } n \text{ ímpar.}$$

Assim, a solução final é

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4000}{(2k+1)\pi} e^{-\left(\frac{\alpha(2k+1)\pi}{20}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{20}\right).$$

2. Temperatura no Centro da Barra

Para encontrar a temperatura no centro ($x = 10$) após $t = 30$ segundos, usamos

$$u(10,30) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4000}{(2k+1)\pi} e^{-\left(\frac{\alpha(2k+1)\pi}{20}\right)^2 (30)} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right).$$

Os coeficientes de difusão térmica (α) são dados por:

- Prata: $\alpha = 1.7 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$,
- Alumínio: $\alpha = 9.7 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$,
- Ferro fundido: $\alpha = 2.3 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

Calculando numericamente para cada material:

$$T_{\text{prata}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4000}{(2k+1)\pi} e^{-\left(\frac{1.7\times10^{-2}(2k+1)\pi}{20}\right)^2 (30)} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right),$$

$$T_{\text{alumínio}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4000}{(2k+1)\pi} e^{-\left(\frac{9.7\times10^{-5}(2k+1)\pi}{20}\right)^2 (30)} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right),$$

$$T_{\text{ferro}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4000}{(2k+1)\pi} e^{-\left(\frac{2.3\times10^{-5}(2k+1)\pi}{20}\right)^2 (30)} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right).$$

Estes resultados nos dão a temperatura no centro da barra para cada material após 30 segundos, considerando a condição inicial uniforme de 100°C.

Exercício 12 - Equação de Laplace em Faixa Semi-Infinita

Encontre uma solução da equação de Laplace na faixa semi-infinita $0 < x < a$, $y > 0$ que satisfaça as condições de contorno

$$\begin{cases} u_x(0,y) = 0, \\ u_x(a,y) = 0, \\ u(x,0) = f(x), \\ u(x,y) \text{ é limitada quando } y \to \infty. \end{cases}$$

1. Separando as Variáveis

Assumimos uma solução na forma

$$u(x,y) = X(x)Y(y),$$

e substituímos na equação de Laplace

$$X(x)Y''(y) + Y(y)X''(x) = 0.$$

Dividindo por $X(x)Y(y)$:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

onde λ é uma constante de separação.

2. Resolvendo as Equações Separadas

Para $X(x)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}\,x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}\,x\right),$$

e com as condições de contorno

$$X'(0) = 0 \Rightarrow B = 0,$$

$$X'(a) = 0 \Rightarrow -A\sqrt{\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}\,a\right) = 0,$$

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\,a\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,a = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

Para $Y(y)$, com a condição de que $u(x,y)$ é limitada quando $y \to \infty$:

$$Y''(y) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y(y) = 0,$$

$$Y(y) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)y}.$$

Assim, a solução geral é

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)y}.$$

3. Aplicando a Condição Inicial

Para a condição inicial

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

os coeficientes A_n são dados por

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,dx.$$

4. Solução Final

Assim, a solução final para a equação de Laplace é

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)y}.$$

Exercício 13 - Resolução Detalhada

Suponha que $a = 10$ e $f(x) = 10x$ no Problema 12. Vamos mostrar que a solução para a equação de Laplace é dada por:

$$u(x,y) = 50 - \frac{400}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi}{10}\right)y} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{10}\right).$$

1. Encontrando os Coeficientes de Fourier

A solução geral para a equação de Laplace com condições de contorno de Neumann é dada por

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)y}.$$

Substituímos a condição inicial $f(x) = 10x$ para calcular os coeficientes A_n:

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a 10x \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx.$$

Com $a = 10$:

$$A_n = \frac{2}{10} \int_0^{10} 10x \cos\left(\frac{n\pi x}{10}\right) dx = \frac{20}{n\pi} \left[10 \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) - \int_0^{10} \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) dx \right].$$

Calculando a integral por partes:

$$\int_0^{10} x \cos\left(\frac{n\pi x}{10}\right) dx = \left[x \left(\frac{10}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) \right) \right]_0^{10} - \int_0^{10} \frac{10}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right) dx,$$

$$= \frac{100}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{10}\right) - \frac{100}{(n\pi)^2} \left[1 - (-1)^n\right],$$

$$= \frac{200}{(n\pi)^2} \left[1 - (-1)^n\right].$$

Como $1 - (-1)^n = 0$ para n par, consideramos apenas os termos ímpares:

$$A_n = \frac{400}{(2k-1)^2 \pi^2}, \quad n = 2k - 1.$$

2. Montando a Solução Final

Substituindo esses coeficientes na solução geral, obtemos

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{400}{(2k-1)^2\pi^2} e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi}{10}\right)y} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{10}\right).$$

Finalmente, somando o termo constante para satisfazer a condição inicial, temos

$$u(x,y) = 50 - \frac{400}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi}{10}\right)y} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{10}\right),$$

que é a forma desejada para a solução.

Assim, mostramos que a solução para o problema de valores de contorno é

$$u(x,y) = 50 - \frac{400}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi}{10}\right)y} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{10}\right),$$

que satisfaz as condições de contorno para $a = 10$ e $f(x) = 10x$.

Exercício 14 - Equação de Laplace no Retângulo

Considere a equação de Laplace no retângulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < b\}$.

(a) Solução Geral com Condições de Contorno

Para resolver a equação de Laplace com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0,y) = 0, \\ u(a,y) = f(y), \\ u(x,0) = h(x), \\ u(x,b) = 0, \end{cases}$$

podemos usar o método da superposição, considerando a soma de duas soluções independentes:

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y),$$

onde:

- $u_1(x,y)$ resolve o problema com as condições homogêneas, exceto $u(a,y) = f(y)$,
- $u_2(x,y)$ resolve o problema com as condições homogêneas, exceto $u(x,0) = h(x)$.

Solução para $u_1(x,y)$:

Assumimos uma solução na forma separada

$$u_1(x,y) = Y(y) \sinh\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

e obtemos

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Aplicando a condição de contorno $u(a,y) = f(y)$:

$$u_1(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = f(y),$$

$$B_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi a}{a}\right)} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\, dy.$$

Solução para $u_2(x,y)$:
De forma análoga, para $u_2(x,y)$ com $u(x,0) = h(x)$:

$$u_2(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{m\pi(b-y)}{b}\right),$$

$$A_m = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{m\pi b}{b}\right)} \int_0^a h(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, dx.$$

Portanto, a solução final é

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi a}{a}\right)} \int_0^b f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\, dy\right] \sinh\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a \sinh\left(\frac{m\pi b}{b}\right)} \int_0^a h(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, dx\right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{m\pi(b-y)}{b}\right).$$

(b) Solução Específica para $h(x) = \frac{x}{4}$ e $f(y) = 1 - \frac{y}{2}$

Calculando os coeficientes para estas funções específicas:

$$h(x) = \frac{x}{4}, \quad f(y) = 1 - \frac{y}{2},$$

e substituindo nas integrais para A_m e B_n, obtemos a solução completa.

Exercício 15 - Movimento Vertical de um Fio com Gravidade

Considere o movimento de um fio de comprimento $L = 1$ inicialmente em repouso, com movimento causado pela força da gravidade. A equação do movimento é dada por:

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} - g, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$

com as condições de contorno e iniciais:

$$\begin{cases} y(0,t) = 0, \quad y(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ y(x,0) = 0, \quad y_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

1. Separando a Solução em Parte Estacionária e Transiente

Para resolver este problema, assumimos uma solução da forma

$$y(x,t) = v(x) + u(x,t),$$

onde $v(x)$ é a solução estacionária que satisfaz a equação homogênea com o termo constante de gravidade:

$$c^2 v''(x) = g.$$

Integrando duas vezes:

$$v''(x) = \frac{g}{c^2},$$

$$v'(x) = \frac{g}{c^2}x + C_1,$$

$$v(x) = \frac{g}{2c^2}x^2 + C_1 x + C_2.$$

Aplicando as condições de contorno $v(0) = 0$ e $v(1) = 0$:

$$v(0) = C_2 = 0,$$

$$v(1) = \frac{g}{2c^2}(1^2) + C_1(1) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{g}{2c^2},$$

$$v(x) = \frac{g}{2c^2}x(1-x).$$

Assim, a solução estacionária é

$$v(x) = \frac{g}{2c^2}x(1-x).$$

2. Solução para $u(x,t)$ (Parte Transiente)

Agora consideramos a parte transiente $u(x,t)$, que satisfaz a equação da onda homogênea:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

com as condições de contorno homogêneas:

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0,$$

e as condições iniciais:

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0.$$

A solução em série de Fourier para $u(x,t)$ é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)\, e^{-\left(\frac{cn\pi}{2}\right)^2 t},$$

com os coeficientes dados por

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left(\frac{g}{2c^2}x(1-x)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx.$$

Calculando esta integral:

$$b_n = \frac{g}{c^2}\int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi x)\,dx = \frac{g}{2c^2}\frac{4}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n),$$

$$b_n = \frac{4g}{n^3\pi^3c^2}, \quad n \text{ ímpar}.$$

Assim, a solução completa é

$$y(x,t) = \frac{g}{2c^2}x(1-x) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4g}{n^3\pi^3c^2}\right)\sin(n\pi x)e^{-\left(\frac{cn\pi}{2}\right)^2 t}.$$

3. Forma de D'Alembert

Usando a forma de D'Alembert, podemos reescrever a solução como

$$y(x,t) = v(x) - \frac{1}{2}\left[v(x-ct) + v(x+ct)\right],$$

onde

$$v(x) = \frac{g}{2c^2}x(1-x).$$

Assim, a solução final para o movimento do fio é

$$y(x,t) = \frac{g}{2c^2}x(1-x) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4g}{n^3\pi^3c^2}\right)\sin(n\pi x)e^{-\left(\frac{cn\pi}{2}\right)^2 t},$$

que também pode ser expressa na forma de D'Alembert para destacar a contribuição estacionária e transiente.

Exercício 16 - Problema de Calor com Fonte Interna Constante

Considere o problema do calor ao longo de uma barra delgada de comprimento L, com uma fonte de calor interna constante $q > 0$. A equação que descreve a temperatura é

$$u_t = ku_{xx} + q, \quad t > 0,\ 0 < x < L,$$

com as condições de contorno e iniciais:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 = u(L,t), & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le L. \end{cases}$$

1. Separando a Solução em Regime Estacionário e Transiente

Para resolver este problema, assumimos uma solução na forma

$$u(x,t) = v(x) + u(x,t),$$

onde $v(x)$ é a solução estacionária que satisfaz a equação

$$0 = kv''(x) + q,$$

e as condições de contorno homogêneas:

$$v(0) = 0, \quad v(L) = 0.$$

Integrando a equação para $v(x)$:

$$v''(x) = -\frac{q}{k},$$

$$v'(x) = -\frac{q}{k}x + C_1,$$

$$v(x) = -\frac{q}{2k}x^2 + C_1 x + C_2.$$

Aplicando as condições de contorno:

$$v(0) = C_2 = 0,$$

$$v(L) = -\frac{q}{2k}L^2 + C_1 L = 0,$$

$$C_1 = \frac{qL}{2k},$$

$$v(x) = \frac{q}{2k}x(L-x).$$

2. Parte Transiente $u(x,t)$

A parte transiente $u(x,t)$ resolve a equação homogênea:

$$u_t = k\nu_{xx},$$

com as condições de contorno homogêneas:

$$u(0,t) = 0, \quad \nu(L,t) = 0,$$

e a condição inicial modificada

$$u(x,0) = f(x) - \frac{q}{2k}x(L-x).$$

A solução em série de Fourier é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt},$$

com os coeficientes dados por

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(f(x) - \frac{q}{2k} x(L-x) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, dx.$$

Calculando esta integral:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\frac{q}{k} x(L-x) + f(x) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, dx.$$

3. Solução Final

Assim, a solução completa para a temperatura é

$$u(x,t) = \frac{q}{2k} x(L-x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt},$$

onde

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\frac{q}{k} x(L-x) + f(x) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, dx.$$

Assim, mostramos que a solução do problema é

$$u(x,t) = \frac{q}{2k} x(L-x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt},$$

com os coeficientes A_n dados pela integral acima, conforme solicitado no enunciado.