Equação do Calor: Problemas e Aplicações

Prof. Ana Isabel Castillo

May 17, 2025

Universidade das EDPs

Sumário

Introdução à Equação do Calor

O que é a Equação do Calor?

Definição

A equação do calor modela a distribuição de temperatura em um meio ao longo do tempo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde $u(x, t)$ é a temperatura, α é a difusividade térmica.

Contexto

Usada em física (condução de calor) e finanças (modelagem de opções, ex.: Black-Scholes).

Exemplo Prático

Exemplo: Resfriamento de uma Barra

Uma barra de metal de comprimento $L = 1$ m tem temperatura inicial $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ e extremidades mantidas a $0°$C. Como a temperatura evolui?

Solução

Usamos separação de variáveis:

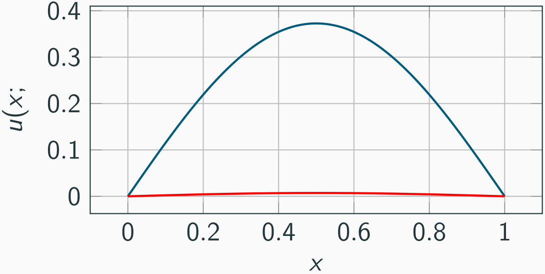
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2\alpha t}.$$

Para $u(x, 0) = \sin(\pi x)$, temos $B_1 = 1$, $B_n = 0$ para $n \neq 1$, logo:

$$u(x, t) = \sin(\pi x) e^{-\pi^2\alpha t}.$$

Visualização

Visualização



Interpretação
A temperatura diminui com o tempo, concentrando-se no centro da barra.

Aplicação Financeira

Equação do Calor em Finanças

A equação do calor é análoga à equação de Black-Scholes para precificação de opções:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Exemplo

Modelagem de opções exóticas com condições de contorno específicas.

Exercício Resolvido

Exercício

Resolva a equação do calor para uma barra com $u(x,0) = x(1-x)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

Solução

Série de Fourier: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2\alpha t}$. Coeficientes: $B_n = 2\int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi x)\,dx$. Após integração: $B_n = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}$.
Solução final:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3} \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2\alpha t}.$$

Conclusão

Resumo

- A equação do calor é essencial para modelar difusão.
- Aplicações em física e finanças (ex.: Black-Scholes).
- Soluções analíticas e numéricas são poderosas para problemas reais.

Próximos Passos
Explorar métodos numéricos (ex.: diferenças finitas) e problemas 2D.