Transformadas de Fourier e Laplace

Entendendo diferenças e aplicações

Prof. Ana Isabel Castillo Pereda

April 23, 2025

Objetivo da Aula

- Entender o que é a transformada de Fourier
- Compreender a transformada de Laplace
- Comparar suas diferenças principais
- Mostrar aplicações práticas

Transformada de Fourier

Definição:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\, dx$$

Usos principais:

- Análise de frequências de sinais
- Soluções de EDPs em domínios infinitos
- Física, engenharia, processamento de sinais

Transformada de Laplace

Definição:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Usos principais:

- Solução de EDOs com condições iniciais
- Sistemas de controle e engenharia
- Análise de estabilidade

Comparação: Fourier vs Laplace

Característica	**Fourier**	**Laplace**
Domínio	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
Kernel	$e^{-i\xi x}$	e^{-st}
Resultado	$\hat{f}(\xi)$ (real)	$F(s)$ (complexo)
Aplicações	EDPs, sinais	EDOs, sistemas
Conexão	—	$\mathcal{L}(f)(i\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)$

Intuições e Complementos

- Fourier analisa a função como soma de senos/cossenos
- Laplace analisa sistemas com entrada e resposta
- Laplace é mais geral: abrange Fourier com $s = i\xi$

"A Fourier transforma em música o que a Laplace resolve em engenharia."

Resumo Final

- Ambas transformadas são ferramentas poderosas na matemática aplicada
- Fourier: melhor para análise harmônica e frequência
- Laplace: melhor para resolução de sistemas dinâmicos com C.I.

Dúvidas?

Vamos praticar agora na Lista 3

Exercício 1 – Lista 3: Representação com Transformada de Cossenos

Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que sua extensão par $\tilde{f}$ seja admissível.

Deseja-se provar que:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty Fc(\xi) \cos(\xi x) \, d\xi$$

onde

$$Fc(\xi) = \int_0^\infty f(u) \cos(\xi u) \, du$$

Passos da Prova – Parte 1

1. Definimos a extensão par de f:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

2. A transformada de Fourier de $\tilde{f}$ é:

$$\hat{\tilde{f}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(u) e^{-i\xi u} \, du$$

Como $\tilde{f}$ é par:

$$\hat{\tilde{f}}(\xi) = 2\int_{0}^{\infty} f(u) \cos(\xi u) \, du = 2Fc(\xi)$$

Passos da Prova – Parte 2

3. Pela fórmula da inversa de Fourier:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\hat{f}}(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi$$

Como $\hat{\hat{f}}$ é par:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \hat{\hat{f}}(\xi) \cos(\xi x) \, d\xi$$

Substituindo $\hat{\hat{f}}(\xi) = 2Fc(\xi)$, temos:

$$f(x) = \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} Fc(\xi) \cos(\xi x) \, d\xi$$

Valor em pontos de descontinuidade

4. Em pontos onde f não é contínua, a fórmula de inversão da transformada de Fourier fornece:

$$f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Portanto, a igualdade está demonstrada. ■

Exercício 2 – Transformada de Senos

Considere a função $f(x) = e^{-kx}$, com $x > 0$, $k > 0$.

Deseja-se mostrar que:

$$\mathcal{F}_s\{f\}(\xi) = \int_0^\infty e^{-kx} \sin(\xi x)\, dx = \frac{\xi}{\xi^2 + k^2}$$

E, como consequência:

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi \sin(\xi x)}{\xi^2 + k^2}\, d\xi$$

Cálculo da Transformada de Senos

Sabemos da fórmula padrão:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx)\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \text{para } a, b > 0$$

Aplicando com $a = k$, $b = \xi$, temos:

$$\mathcal{F}_s\{f\}(\xi) = \frac{\xi}{\xi^2 + k^2}$$

Esta é a transformada de senos da função e^{-kx}

Fórmula de Inversão e Representação de e^{-kx}

Pela fórmula de inversão da transformada de senos:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathcal{F}_s(\xi) \sin(\xi x)\, d\xi$$

Substituindo $\mathcal{F}_s(\xi) = \frac{\xi}{\xi^2 + k^2}$, temos:

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi \sin(\xi x)}{\xi^2 + k^2}\, d\xi$$

Representação integral demonstrada. ■

Exercício 3 – Equação Integral com Sinc

Seja a função definida por:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(\xi a)}{\xi} e^{i\xi x} \, d\xi$$

Deseja-se determinar explicitamente a função $f(x)$.

Identificação do Integrando

Note que:

$$\frac{2\sin(\xi a)}{\xi} = 2a \cdot \mathrm{sinc}(\xi a)$$

A função $2a \cdot \mathrm{sinc}(\xi a)$ é exatamente a **transformada de Fourier da função característica** do intervalo $[-a, a]$, denotada por $\chi_{[-a,a]}(x)$, ou seja:

$$\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ \frac{1}{2}, & |x| = a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Conclusão

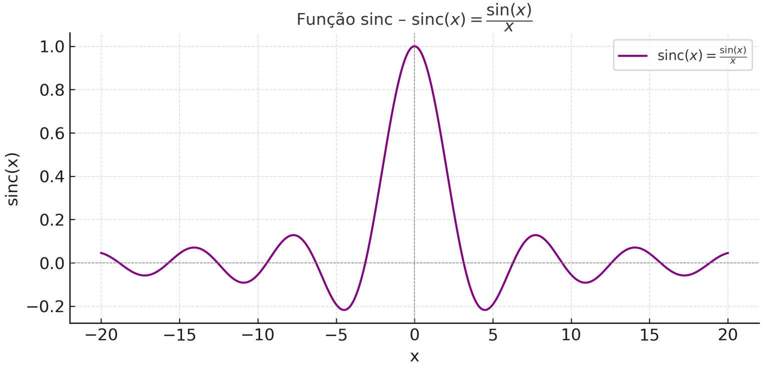
Portanto, a função definida pela equação integral é:

$$f(x) = \chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ \frac{1}{2}, & |x| = a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Interpretação: a integral representa a reconstrução da função janela $\chi_{[-a,a]}$ a partir de sua transformada de Fourier (função sinc).

Resposta final: demonstrado. ■

Visualização da função sinc



$$\textbf{Função sinc: } \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Aparece como transformada de Fourier da função janela $\chi_{[-a,a]}$

Exercício 4 – Transformada de Cossenos

Considere a função $f(x) = e^{-bx}$, com $x > 0$ e $b > 0$.

Deseja-se mostrar que:

$$\mathcal{F}_c\{f\}(\xi) = \int_0^\infty e^{-bx} \cos(\xi x)\, dx = \frac{b}{\xi^2 + b^2}$$

E, como consequência:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\xi x)}{\xi^2 + b^2}\, d\xi = \frac{\pi}{2b} e^{-bx}, \quad x > 0$$

Transformada de Cossenos – Cálculo Direto

Utilizamos a fórmula padrão:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad a > 0$$

Aplicando com $a = b$, $b = \xi$, obtemos:

$$\mathcal{F}_c(\xi) = \frac{b}{\xi^2 + b^2}$$

Esta é a transformada de cossenos da função e^{-bx}.

Representação Integral de e^{-bx}

Pela fórmula da inversa da transformada de cossenos:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathcal{F}_c(\xi) \cos(\xi x)\, d\xi$$

Substituindo $\mathcal{F}_c(\xi) = \frac{b}{\xi^2 + b^2}$:

$$e^{-bx} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{b \cos(\xi x)}{\xi^2 + b^2}\, d\xi$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{\pi}{2b}$, obtemos:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\xi x)}{\xi^2 + b^2}\, d\xi = \frac{\pi}{2b} e^{-bx}$$

Integral clássica demonstrada. ■

Fórmulas Elementares – Espelhamento

Considere $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ com transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$.
Deseja-se mostrar que:

$$\mathcal{F}\{f(-x)\}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$$

Essa propriedade é chamada de: *inversão na variável x* ou **espelhamento**.

Prova – Espelhamento

Pela definição da transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{f(-x)\}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-i\xi x}\, dx$$

Fazendo a substituição $u = -x \Rightarrow dx = -du$, temos:

$$\mathcal{F}\{f(-x)\}(\xi) = \int_{\infty}^{-\infty} f(u)e^{i\xi u}(-du) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\xi u}\, du$$

Logo:

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(-x)\}(\xi) = \hat{f}(-\xi)} \quad \blacksquare$$

Fórmulas Elementares – Deslocamento no Eixo ξ

Se $f(x)$ tem transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$, então, para todo $a \in \mathbb{R}$, temos:

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{e^{ax} f(x)\right\}(\xi) = \hat{f}(\xi + ia)}$$

Nome: Deslocamento no eixo da frequência ξ (ou mudança de variável complexa).

Prova – Deslocamento na frequência

Pela definição da transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\left\{e^{ax}f(x)\right\}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}f(x)e^{-i\xi x}\,dx$$

Agrupando os termos exponenciais:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-(i\xi - a)x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\xi + ia)x}\,dx$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{e^{ax}f(x)\}(\xi) = \hat{f}(\xi + ia) \quad \blacksquare$$

Fórmulas Elementares – Derivada e Deslocamento

Deseja-se calcular:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-ax^2}\right) = -2axe^{-ax^2}$$

e, em seguida, determinar:

$$\mathcal{F}\left\{xe^{bx-ax^2}\right\}$$

Usaremos:

- $\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\xi \cdot \hat{f}(\xi)$
- $\mathcal{F}\left\{e^{bx} f(x)\right\} = \hat{f}(\xi + ib)$

Transformada da derivada da Gaussiana

Seja $g(x) = e^{-ax^2}$, sabemos que:

$$\hat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

Então:

$$f(x) = \frac{d}{dx} g(x) = -2axe^{-ax^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{f(x)\} = i\xi \cdot \hat{g}(\xi) = i\xi \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

Transformada de xe^{bx-ax^2}

Note que:

$$xe^{bx-ax^2} = e^{bx} \cdot xe^{-ax^2}$$

Pelo deslocamento na frequência:

$$\mathcal{F}\left\{xe^{bx-ax^2}\right\} = \mathcal{F}\left\{xe^{-ax^2}\right\}(\xi + ib)$$

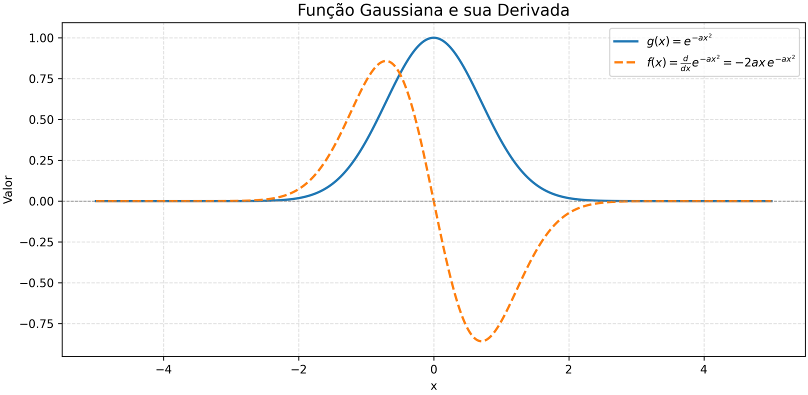
Sabemos que:

$$\mathcal{F}\left\{xe^{-ax^2}\right\}(\xi) = -\frac{i}{2a} \cdot \frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\right)$$

Logo:

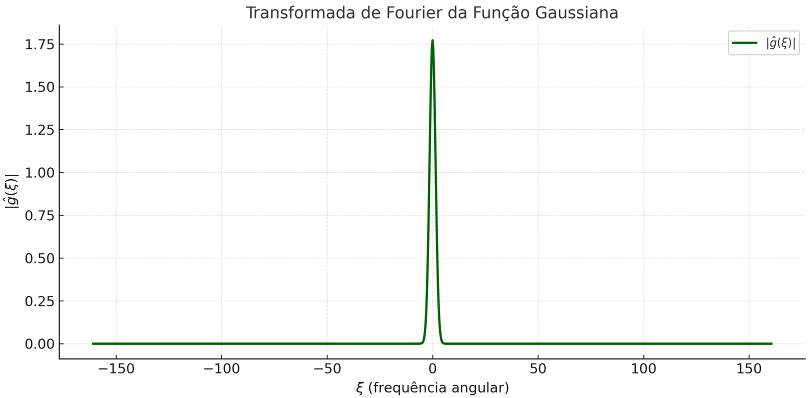
$$\mathcal{F}\left\{xe^{bx-ax^2}\right\} = -\frac{i}{2a} \cdot \frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{(\xi+ib)^2}{4a}}\right) \quad \blacksquare$$

Visualização: Gaussiana e sua Derivada



A derivada da Gaussiana é proporcional a $x \cdot e^{-ax^2}$, gerando uma função ímpar com ponto de inflexão em $x = 0$.

Transformada de Fourier da Gaussiana



A transformada de Fourier de e^{-ax^2} é da forma:

$$\hat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

Ela mantém a forma de Gaussiana no domínio da frequência!

Exercício 4 – Convolução com transformadas

Deseja-se resolver, para $y(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(u)}{(x-u)^2 + a^2}\, du = \frac{1}{x^2 + b^2} \quad \text{com } 0 < a < b$$

Forma de convolução:

$$(y * K)(x) = g(x), \quad \text{onde } K(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + b^2}$$

Transformadas de Fourier

Aplicando a transformada de Fourier na convolução:

$$\hat{y}(\xi) \cdot \hat{K}(\xi) = \hat{g}(\xi) \Rightarrow \hat{y}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{\hat{K}(\xi)}$$

Usando a tabela de transformadas:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{x^2 + c^2}\right\} = \pi e^{-c|\xi|}$$

$$\Rightarrow \hat{K}(\xi) = \pi e^{-a|\xi|}, \quad \hat{g}(\xi) = \pi e^{-b|\xi|}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(\xi) = \frac{\pi e^{-b|\xi|}}{\pi e^{-a|\xi|}} = e^{-(b-a)|\xi|}$$

Transformada Inversa e Solução Final

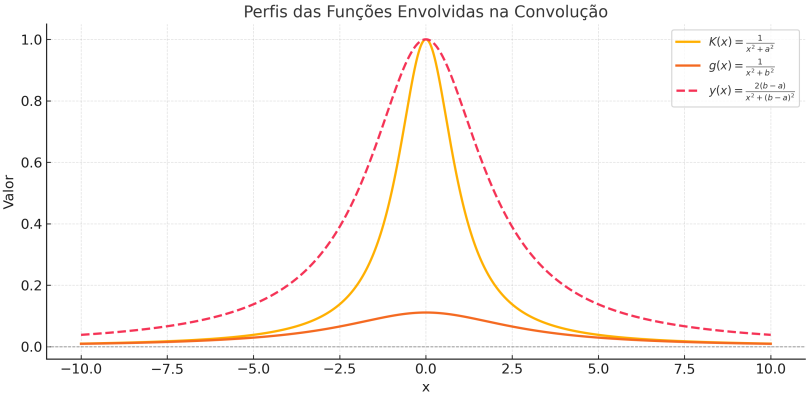
Agora, aplicamos a inversa:

$$y(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-c|\xi|}\right)(x) = \frac{2c}{x^2 + c^2}, \quad \text{com } c = b - a$$

$$\boxed{y(x) = \frac{2(b-a)}{x^2 + (b-a)^2}} \quad \blacksquare$$

Conclusão: A equação integral foi resolvida via convolução com transformadas de Fourier!

Visualização: Perfis de $K(x), g(x), y(x)$



Observação: A função solução $y(x)$ surge da razão das transformadas de $g(x)$ e $K(x)$, e é mais estreita, com pico maior.

Fórmulas Elementares – Teorema da Modulação

Se $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ tem transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$, então para todo $w \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(x)\cos(wx)\}(\xi) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(\xi - w) + \hat{f}(\xi + w)\right]}$$

Nome: Teorema da Modulação
Multiplicar no tempo por cosseno $\rightarrow$ *Transladar na frequência.*

Prova – Teorema da Modulação

Sabemos que:

$$\cos(wx) = \frac{1}{2}\left(e^{iwx} + e^{-iwx}\right)$$

Multiplicando:

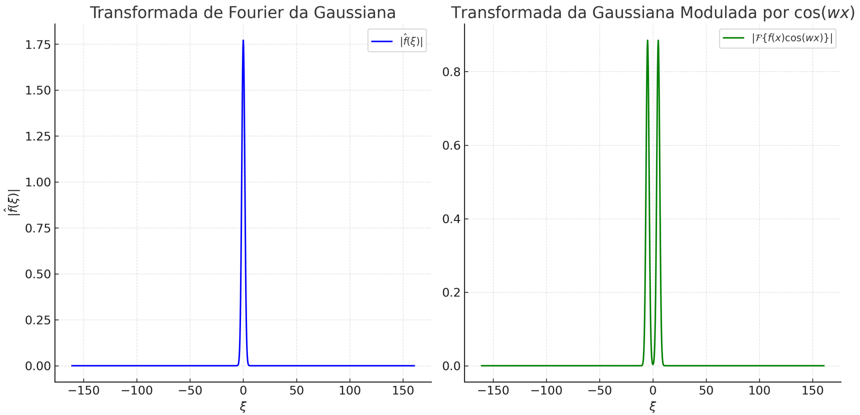
$$f(x)\cos(wx) = \frac{1}{2}\left(f(x)e^{iwx} + f(x)e^{-iwx}\right)$$

Pela linearidade da transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{f(x)\cos(wx)\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}\{f(x)e^{iwx}\} + \mathcal{F}\{f(x)e^{-iwx}\}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\xi - w) + \hat{f}(\xi + w)\right) \quad \blacksquare$$

Visualização: Teorema da Modulação



Modular no tempo com $\cos(wx) \rightarrow$ Duplicar e transladar o espectro para $\xi = \pm w$.

Exercício 6(a) – Produto com Exponenciais

Note que:

$$g(x) = xe^{-ax^2} e^{-bx}$$

Sabemos que:

$$\mathcal{F}(xe^{-ax^2})(\xi) = i\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \frac{\xi}{2a}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

Usando deslocamento (Ex. 2):

$$\mathcal{F}(g)(\xi) = \mathcal{F}(xe^{-ax^2})(\xi + ib) = i\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \frac{\xi + ib}{2a}\, e^{-\frac{(\xi+ib)^2}{4a}}$$

Exercício 6(b) – Convolução com mudança de variável

Fazendo $v = u - x$, temos:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v\, e^{-v^2} \cdot e^{-a|v+x|}\, dv \Rightarrow h(x) = (f * g)(x)$$

Com:

$$f(v) = ve^{-v^2}, \quad g(v) = e^{-a|v|}$$

Pela convolução:

$$\mathcal{F}(h)(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$$

Sabemos:

$$\hat{f}(\xi) = i\sqrt{\pi}\xi e^{-\xi^2/4}, \quad \hat{g}(\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}$$

Logo:

$$\mathcal{F}(h)(\xi) = i\sqrt{\pi}\xi e^{-\xi^2/4} \cdot \frac{2a}{a^2 + \xi^2}$$

Exercício 6(c) – Transformada de Produto com x^2

Sabemos:

$$\mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\xi^2}{4}}, \quad \mathcal{F}(x^2 f(x)) = -\frac{d^2}{d\xi^2}\hat{f}(\xi)$$

Calculando derivadas:

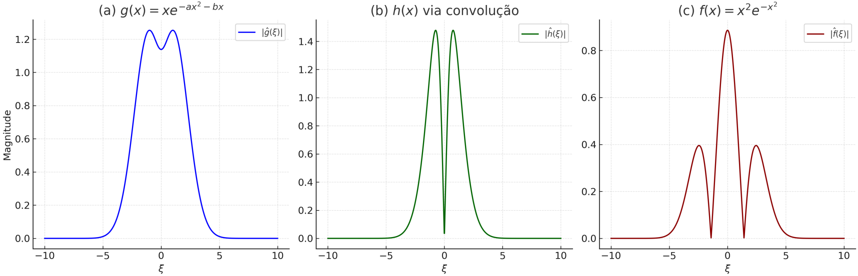
$$\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\xi^2/4}\right) = -\frac{\xi}{2}e^{-\xi^2/4}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(e^{-\xi^2/4}\right) = \left(\frac{\xi^2}{4} - \frac{1}{2}\right)e^{-\xi^2/4}$$

Logo:

$$\mathcal{F}(x^2 e^{-x^2})(\xi) = -\sqrt{\pi}\left(\frac{\xi^2}{4} - \frac{1}{2}\right)e^{-\xi^2/4} \quad \blacksquare$$

Visualização – Transformadas de Fourier (Exercício 6)



Observação: Polinômios e exponenciais afetam a simetria e largura do espectro, cada um à sua maneira.

Exercício 7(a) – Equação Diferencial

Seja $f(x) = e^{-ix^2}$. Derivando:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{-ix^2} = -2ixe^{-ix^2} = 2ixf(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) - 2ixf(x) = 0 \quad \blacksquare$$

Exercício 7(b) – Transformada da EDO

Aplicando a transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(f') - 2i\mathcal{F}(xf(x)) = 0 \Rightarrow i\xi\hat{f}(\xi) - 2i \cdot i\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{f}'(\xi) - \frac{\xi}{2i}\hat{f}(\xi) = 0 \quad \blacksquare$$

Exercício 7(c) – Solução da EDO

Separação de variáveis:

$$\frac{d\hat{f}}{\hat{f}} = \frac{\xi}{2i} d\xi \Rightarrow \ln \hat{f}(\xi) = \frac{\xi^2}{4i} + C \Rightarrow \hat{f}(\xi) = Ce^{-i\xi^2/4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(\xi) = \hat{f}(0)e^{-i\xi^2/4}}$$

Exercício 7(d) – Valor em $\xi = 0$

Sabemos:

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^2} dx = \sqrt{\pi}\, e^{i\pi/4}$$

Logo:

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4} \cdot e^{-i\xi^2/4}$$

$$= \sqrt{\pi} \left[\cos\left(\frac{\xi^2}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin\left(\frac{\xi^2}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

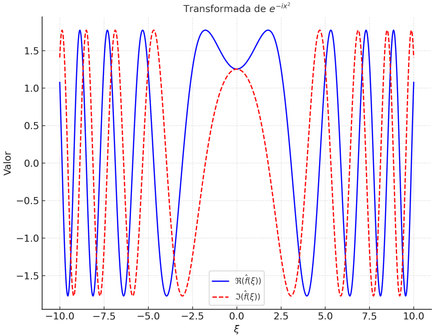
Exercício 7(e) – Partes reais e imaginárias

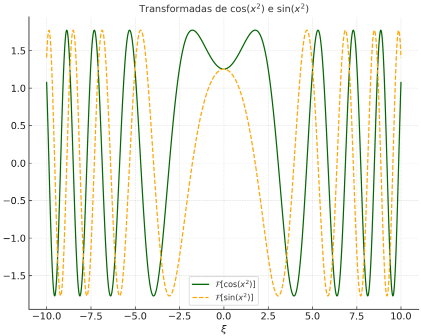
De $f(x) = \cos(x^2) - i\sin(x^2)$, obtemos:

$$\mathcal{F}(\cos(x^2)) = \Re(\hat{f}(\xi)) = \sqrt{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi^2}{4}\right)$$

$$\mathcal{F}(\sin(x^2)) = \Im(\hat{f}(\xi)) = \sqrt{\pi}\cos\left(\frac{\xi^2}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \blacksquare$$

Visualização: Transformadas de e^{-ix^2}, $\cos(x^2)$ e $\sin(x^2)$





Conclusão: A transformada de Fourier preserva a natureza oscilatória e revela simetrias sutis entre as partes reais e imaginárias.

Exercício 8(a) – Usando a fórmula de Euler

Sabemos:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \Rightarrow e^{-x}\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x(1-i)} + e^{-x(1+i)}\right)$$

Aplicando a transformada seno:

$$\mathcal{F}_s(e^{-x}\cos(x)) = \frac{1}{2}\left[\frac{\xi}{(1-i)^2+\xi^2} + \frac{\xi}{(1+i)^2+\xi^2}\right]$$

$$(1 \pm i)^2 = \pm 2i \Rightarrow \text{Soma:} \quad \boxed{\mathcal{F}_s = \frac{\xi(\xi^2)}{\xi^4+4}}$$

Exercício 8(b) – Identidade trigonométrica

Utilizando:

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)] \Rightarrow \mathcal{F}_s(e^{-x}\cos(x)) = \frac{1}{2}\left[\frac{\xi+1}{1+(\xi+1\right.$$

$$\boxed{\mathcal{F}_s = \frac{1}{2}\left[\frac{\xi+1}{1+(\xi+1)^2} + \frac{\xi-1}{1+(\xi-1)^2}\right]}$$

Exercício 8(c) – Extensão ímpar e simetria

Função ímpar:

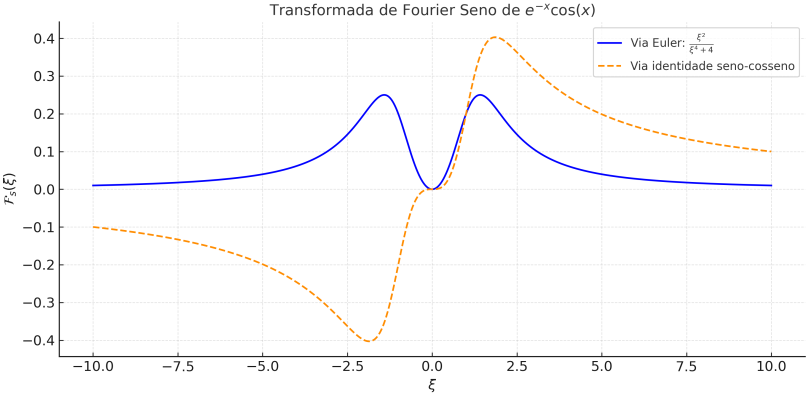
$$f_{\text{ímpar}}(x) = \begin{cases} e^{-x}\cos(x), & x > 0 \\ -e^{x}\cos(x), & x < 0 \end{cases}$$

Transformada de Fourier de função ímpar é puramente imaginária:

$$\mathcal{F}(f_{\text{ímpar}}) = -2i \cdot \mathcal{F}_s(f) \Rightarrow \mathcal{F}_s(f) = \frac{i}{2} \cdot \mathcal{F}(f_{\text{ímpar}})$$

Resultado final: $\boxed{\mathcal{F}_s(e^{-x}\cos(x)) = \frac{1}{2}\left[\frac{\xi+1}{1+(\xi+1)^2} + \frac{\xi-1}{1+(\xi-1)^2}\right]}$

Gráfico – $\mathcal{F}_s(e^{-x}\cos(x))$



Comparação: Transformada obtida via **fórmula de Euler** e **identidade seno-cosseno**. O espectro é suave e simétrico, refletindo a natureza oscilatória da função original.

Exercício 9 – Correção na Identidade

Seja:

$$\mathcal{F}_c(f)(\xi) := \int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)\,dx, \quad \mathcal{F}_s(f)(\xi) := \int_0^\infty f(x)\sin(\xi x)\,dx$$

Queremos calcular:

$$\mathcal{F}_c(f(x)\sin(wx)) = \int_0^\infty f(x)\sin(wx)\cos(\xi x)\,dx$$

Utilizamos a identidade trigonométrica:

$$\sin(wx)\cos(\xi x) = \frac{1}{2}\left[\sin((\xi + w)x) + \sin((\xi - w)x)\right]$$

Substituindo:

$$\mathcal{F}_c(f(x)\sin(wx)) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_s(f)(\xi + w) + \mathcal{F}_s(f)(\xi - w)\right]$$

$$\boxed{\mathcal{F}_c(f(x)\sin(wx)) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_s(f)(\xi + w) + \mathcal{F}_s(f)(\xi - w)\right]} \quad \blacksquare$$

Exercício 10(a) – $\mathcal{F}_s(f(x)\cos(wx))$

Utilizamos a identidade trigonométrica:

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

Então:

$$f(x)\cos(wx)\sin(\xi x) = \frac{1}{2}f(x)\left[\sin((\xi+w)x) + \sin((\xi-w)x)\right]$$

Integrando:

$$\mathcal{F}_s(f(x)\cos(wx)) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_s(f)(\xi+w) + \mathcal{F}_s(f)(\xi-w)\right]$$

$$\boxed{\mathcal{F}_s(f(x)\cos(wx)) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_s(f)(\xi+w) + \mathcal{F}_s(f)(\xi-w)\right]} \quad \blacksquare$$

Exercício 10(b) – $\mathcal{F}_s(f(x)\sin(wx))$

Usamos a identidade:

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

Logo:

$$f(x)\sin(wx)\sin(\xi x) = \frac{1}{2}f(x)\left[\cos((\xi - w)x) - \cos((\xi + w)x)\right]$$

Integrando:

$$\mathcal{F}_s(f(x)\sin(wx)) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_c(f)(\xi - w) - \mathcal{F}_c(f)(\xi + w)\right] = -\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_c(f)(\xi + w) -\right.$$

$$\boxed{\mathcal{F}_s(f(x)\sin(wx)) = -\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_c(f)(\xi + w) - \mathcal{F}_c(f)(\xi - w)\right]} \quad \blacksquare$$

PVC – Equação do Calor na Haste Semi-Infinita

Problema:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases} & \end{cases}$$

Solução: Usamos a transformada de Fourier em senos:

$$u(x,t) = \int_0^\infty A(\xi)\sin(\xi x)e^{-\xi^2 t}d\xi$$

com

$$A(\xi) = \int_0^\infty f(x)\sin(\xi x)dx$$

Cálculo dos Coeficientes $A(\xi)$

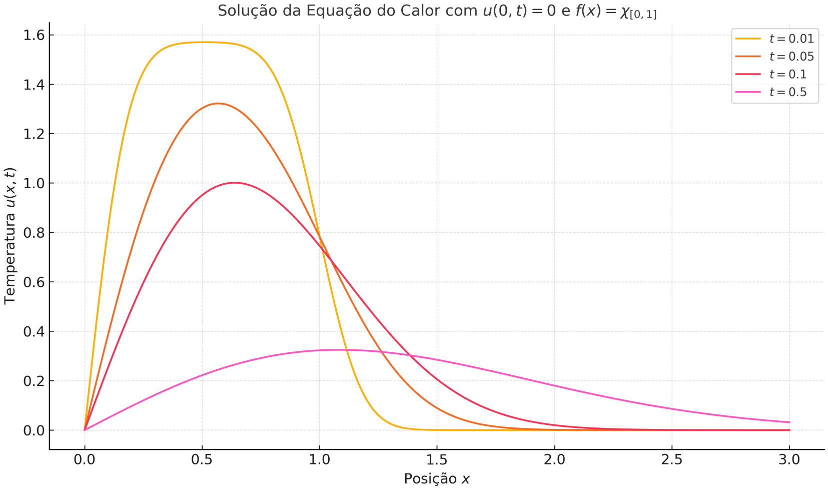
Para

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow A(\xi) = \int_0^1 \sin(\xi x) dx$$

$$A(\xi) = \left[-\frac{\cos(\xi x)}{\xi} \right]_0^1 = \frac{1 - \cos(\xi)}{\xi}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(\xi)}{\xi} \cdot \sin(\xi x) \cdot e^{-\xi^2 t} \, d\xi$$

Gráfico da Solução – Equação do Calor



Descrição: Evolução da temperatura $u(x,t)$ ao longo de uma haste semi-infinita para diferentes valores de tempo t.

Exercício 2 – Laplace em Faixa Semi-Infinita

Problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ \ y > 0 \\ u_y(x,0) = 0, & 0 < x < a \\ u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = g(y), & y > 0 \end{cases}$$

Solução: Utilizamos separação de variáveis com base de senos:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Substituindo na PDE:

$$A_n''(y) = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 A_n(y) \Rightarrow A_n(y) = C_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + D_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

Condições e Solução Final

Condição: $u_y(x,0) = 0 \Rightarrow A_n'(0) = 0 \Rightarrow C_n = D_n$

$$\Rightarrow A_n(y) = 2C_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \Rightarrow u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Coeficientes:

$$B_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

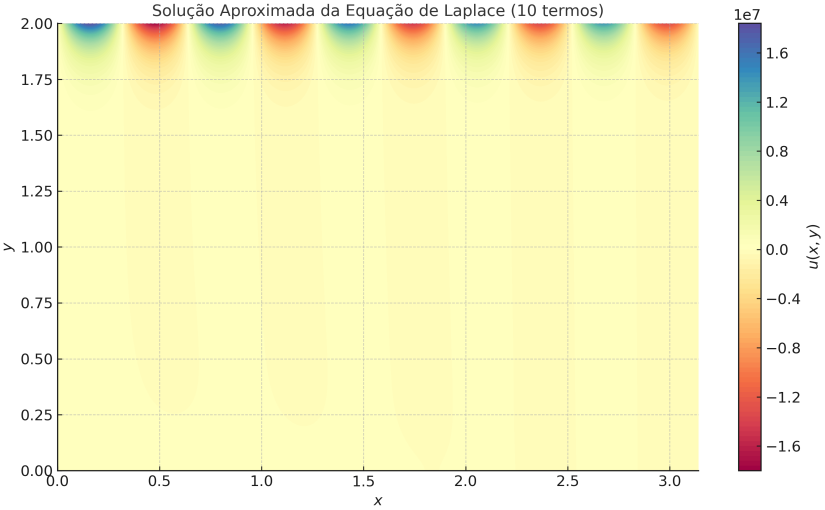
Caso particular: $a = \pi$, $g(y) = e^{-y^2} \Rightarrow$ condição imposta na borda $x = \pi$

$$\Rightarrow u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sinh(ny)\sin(nx)$$

Forma integral:

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int^{\infty} e^{-s^2} \sum^{\infty} \sin(nx)\sin(n\pi)\cosh(ny)\, ds$$

Visualização da Solução – Equação de Laplace



Solução aproximada usando os 10 primeiros termos da série de Fourier

Exercício 3 – Equação da Onda (Forma Integral)

Problema:

$$y_{tt} = c^2 y_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0$$

$$y(x,0) = f(x), \quad y_t(x,0) = 0$$

Solução via fórmula integral de Fourier:

$$y(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos(\xi c t) \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos(\xi(x-u)) du \right] d\xi$$

Identidade de convolução:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos(\xi(x-u)) du = (\cos(\xi \cdot) * f)(x)$$

$$\Rightarrow y(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\xi c t) \ (\cos(\xi \cdot) * f)(x) \ d\xi$$

Solução Clássica e com Transformada Direta

Redução à forma clássica:

$$y(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)]$$

Solução via transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}[y](\xi,t) = \hat{y}(\xi,t) \Rightarrow \hat{y}_{tt} + c^2\xi^2\hat{y} = 0$$

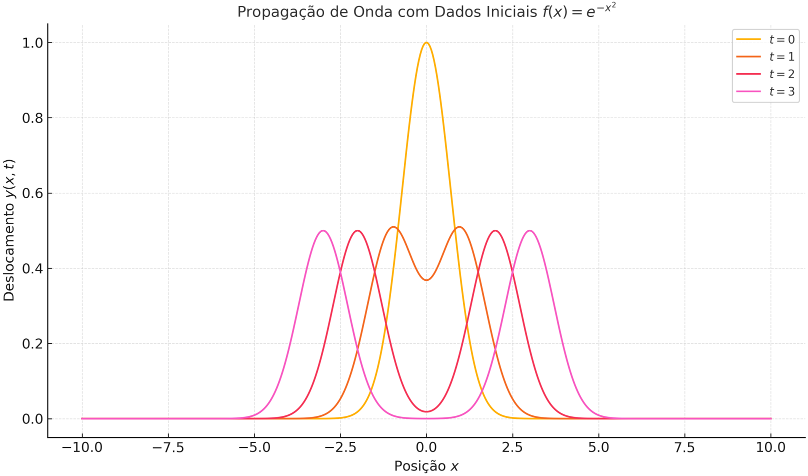
EDO:

$$\hat{y}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\cos(c\xi t)$$

Transformada inversa:

$$y(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\cos(c\xi t)e^{i\xi x}d\xi \Rightarrow \boxed{y(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)]}$$

Visualização: Solução da Equação da Onda



Função inicial: $f(x) = e^{-x^2}$

- A solução se propaga simetricamente como:

Exercício 4 – Equação da Onda com $f(x)$ e $g(x)$

Problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Fourier:

$$\hat{u}_{tt} + c^2\xi^2\hat{u} = 0 \Rightarrow \hat{u}(\xi,t) = A(\xi)\cos(c\xi t) + B(\xi)\sin(c\xi t)$$

Cond. iniciais:

$$A(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad B(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{c\xi}$$

Solução no domínio de Fourier:

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\cos(c\xi t) + \frac{\hat{g}(\xi)}{c\xi}\sin(c\xi t)$$

Solução de D'Alembert – Forma Integral

Transformada inversa:

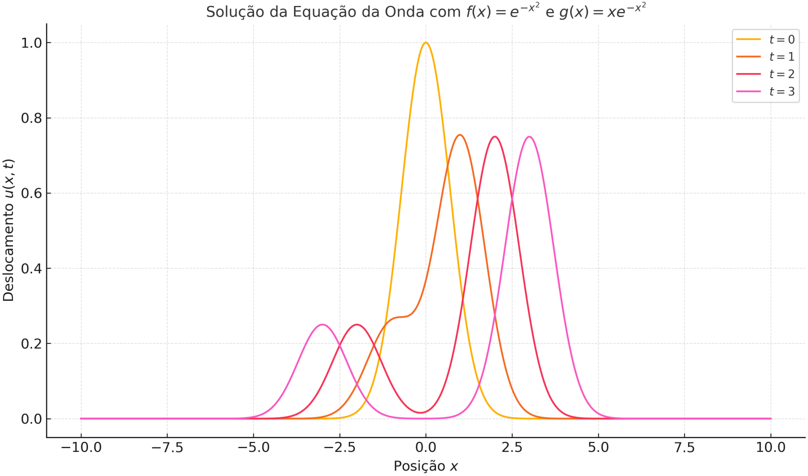
$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\hat{f}(\xi)\cos(c\xi t) + \frac{\hat{g}(\xi)}{c\xi}\sin(c\xi t)\right]e^{i\xi x}d\xi$$

Solução explícita (forma clássica):

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(u)\ du}$$

- Primeiro termo: *deslocamento médio inicial*
- Segundo termo: *acúmulo de energia cinética inicial*

Visualização: Solução da Onda com $f(x)$ e $g(x)$



Condições iniciais:

- $f(x) = e^{-x^2}$ (*forma inicial*)

Problema 5 – Condução do Calor com Fronteira Não-Homogênea

Problema:

$$\begin{cases} u_t = K u_{xx}, & x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x > 0 \\ u(0,t) = h_0 = \text{constante}, & t > 0 \\ |u(x,t)| < M & \text{(condição de regularidade)} \end{cases}$$

Substituição: $u(x,t) = v(x,t) + h_0 \Rightarrow v(0,t) = 0$

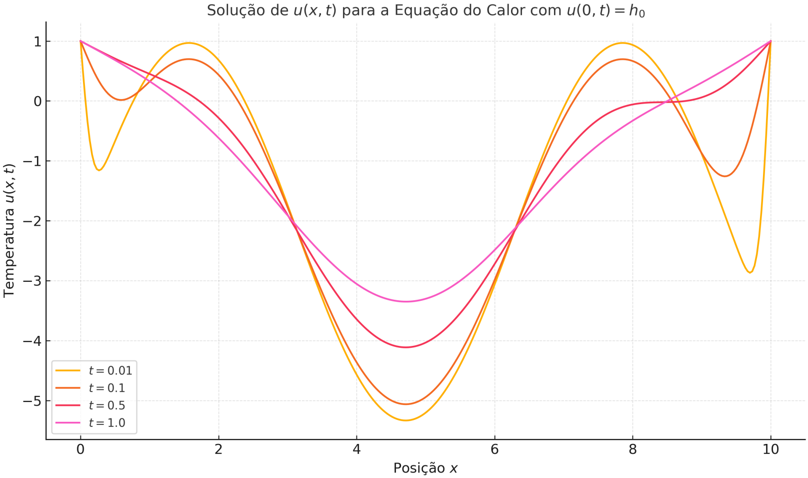
$$v_t = K v_{xx}, \quad v(x,0) = f(x) - h_0$$

Transformada de Fourier em senos:

$$\hat{v}(\xi,t) = \int_0^\infty v(x,t)\sin(\xi x)\, dx \Rightarrow \hat{v}(\xi,t) = \hat{v}(\xi,0)e^{-K\xi^2 t}$$

Solução final:

Evolução Térmica com Fronteira Não-Homogênea



Configuração:

- Equação: $u_t = Ku_{xx}$

Indicações de Leitura – EDOs e Aplicações

Além do clássico Zill, considere também:

- **Boyce DiPrima** – *Elementary Differential Equations*
  (Teoria sólida + aplicações em engenharia e física)
- **Simmons** – *Differential Equations with Applications and Historical Notes*
  (Aplicações diversas com excelente contexto histórico)
- **Blanchard, Devaney, Hall** – *Differential Equations*
  (Visual, moderno e ótimo para sistemas dinâmicos)
- **Arnold** – *Ordinary Differential Equations*
  (Mais teórico, ótimo para aprofundamento)
- **Guidorizzi (Vol. 4)** – *Um Curso de Cálculo*
  (Bom para revisão de EDOs e Laplace, em português)