

Aplicações da Transformada de Fourier

Prof. Ana Isabel Castillo

May 17, 2025

Universidade das EDPs

1. Introdução à Transformada de Fourier
2. Exemplo Prático 1: Análise de Onda Quadrada
3. Exemplo Prático 2: Filtragem de Ruído
4. Exemplo Prático 3: Precificação de Opções
5. Exemplo Prático 4: Compressão de Dados
6. Exemplo Prático 5: Solução de EDPs
7. Visualização
8. Exercício Resolvido

Introdução à Transformada de Fourier

O que é a Transformada de Fourier?

Definição

A Transformada de Fourier converte uma função do domínio do tempo para o domínio da frequência:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt,$$

onde $f(t)$ é o sinal, $\hat{f}(\omega)$ é o espectro de frequências.

Contexto

Usada em física (análise de ondas), finanças (precificação de opções), processamento de sinais e compressão de dados.

Exemplo Prático 1: Análise de Onda Quadrada

Análise de uma Onda Quadrada

Considere uma onda quadrada periódica:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ -1, & 1 \leq t < 2, \end{cases}$$

com período 2.

Solução

A Transformada de Fourier (série) é:

$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin(n\pi t).$$

Isso mostra as frequências ímpares dominando o espectro.

Exemplo Prático 2: Filtragem de Ruído

Filtragem de Ruído em Sinais

Um sinal $f(t) = \sin(2\pi t) + 0.5 \sin(20\pi t)$ contém ruído de alta frequência.

Solução

A Transformada de Fourier revela picos em $\omega = 2\pi$ (sinal principal) e $\omega = 20\pi$ (ruído). Aplicando um filtro passa-baixa (removendo $\omega > 10$):

$$\hat{f}_{\text{filtrado}}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \text{rect}(\omega/20),$$

recupera $f(t) \approx \sin(2\pi t)$.

Exemplo Prático 3: Precificação de Opções

Transformada de Fourier em Finanças

A Transformada de Fourier é usada para calcular preços de opções no modelo Black-Scholes:

$$V(S, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \ln S} \hat{V}(\omega, t) d\omega.$$

Exemplo

Para uma opção europeia, a função característica $\hat{V}(\omega, t)$ é derivada da densidade de probabilidade do ativo, acelerando o cálculo do preço.

Exemplo Prático 4: Compressão de Dados

Compressão de Imagens (JPEG)

A Transformada de Fourier (ou sua variante discreta, DCT) é usada na compressão JPEG.

Solução

Uma imagem é dividida em blocos 8x8. A DCT transforma cada bloco no domínio da frequência:

$$F(u, v) = \sum_{x,y=0}^7 f(x, y) \cos\left(\frac{\pi u(2x+1)}{16}\right) \cos\left(\frac{\pi v(2y+1)}{16}\right).$$

Frequências altas (menos visíveis) são descartadas, reduzindo o tamanho do arquivo.

Exemplo Prático 5: Solução de EDPs

Equação do Calor

Resolva a equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ com $u(x, 0) = e^{-x^2}$.

Solução

Aplicando a Transformada de Fourier em x :

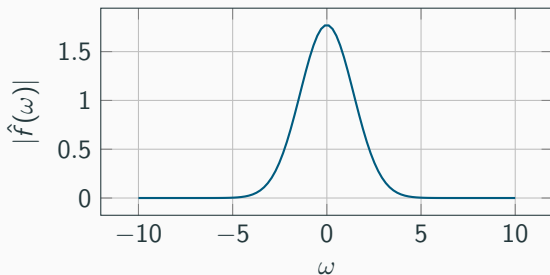
$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\alpha \omega^2 \hat{u}.$$

Solução no domínio da frequência: $\hat{u}(\omega, t) = e^{-\omega^2 \alpha t} \hat{u}(\omega, 0)$. Com $\hat{u}(\omega, 0) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$, a solução é:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}.$$

Visualização

Visualização: Espectro de Frequências



Interpretação

O espectro de $f(t) = e^{-t^2}$ mostra uma distribuição gaussiana de frequências, centrada em $\omega = 0$.

Exercício Resolvido

Exercício

Calcule a Transformada de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$.

Solução

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt.$$

Calculando:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega} + \frac{1}{1 - i\omega} = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

Conclusão

- A Transformada de Fourier analisa sinais no domínio da frequência.
- Aplicações em física, finanças, sinais, compressão e EDPs.
- Ferramenta essencial para problemas práticos e teóricos.

Próximos Passos

Explorar a Transformada Rápida de Fourier (FFT) e aplicações numéricas.