Lorenz com Lyapunov: Chaotic Dynamics

Prof. Ana Isabel C.

Math-Dynamics Lab

June 3, 2025

Introdução

- O sistema de Lorenz é um modelo dinâmico contínuo que exibe comportamento caótico.
- Introduzido por Edward Lorenz (1963) para modelar convecção atmosférica.
- Objetivo: Analisar caos via expoente de Lyapunov e entropia de Kolmogorov-Sinai.

Modelo Matemático

- Equações:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

- Parâmetros: $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$.
- Condições iniciais: $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 20.0)$.

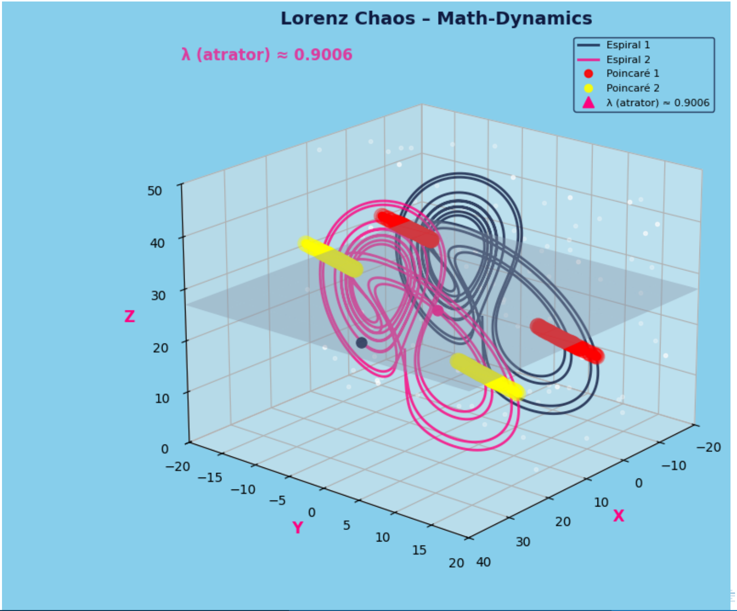
Expoente de Lyapunov e Entropia

- **Expoente de Lyapunov**: $\lambda \approx 0.9056 > 0$ indica caos.
  - Calculado numericamente com perturbação $\delta = 10^{-8}$.
  - Trajetórias próximas divergem exponencialmente: $d(t) \approx d_0 e^{\lambda t}$.
- **Entropia de Kolmogorov-Sinai**: $h_\mu \approx \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \approx 0.9056$.
  - Mede a taxa de produção de incerteza (imprevisibilidade).

Seção de Poincaré

- Definida no plano $z = \rho - 1 = 27$, capturando interseções ascendentes.
- Representa a estrutura do atrator caótico em uma projeção bidimensional.
- Visualiza a sensibilidade às condições iniciais e a fractalidade do atrator.

Visualização



Conclusão

- O sistema de Lorenz exibe caos com $\lambda \approx 0.9056$ e $h_\mu \approx 0.9056$.
- Aplicações: Meteorologia, física de fluidos, modelagem de sistemas não lineares.
- Mais em: Math-Dynamics.