Sistemas de Equações Lineares

Prof. Ana Isabel Castillo

May 15, 2025

Introdução aos Sistemas de Equações Lineares

- Sistemas de equações lineares aparecem em diversas aplicações como economia, engenharia e finanças.
- Eles representam conjuntos de equações simultâneas que devem ser resolvidas de forma conjunta.
- Métodos numéricos são essenciais para sistemas grandes e complexos onde soluções analíticas não são práticas.

Métodos Iterativos

- Aproximam soluções de forma sucessiva até atingir a convergência desejada.
- Úteis para sistemas grandes e esparsos.
- Incluem métodos como Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel.

Estudo da Convergência dos Métodos Iterativos

- Convergência depende da forma da matriz dos coeficientes.
- Critério das Linhas (Diagonal Dominante) e Espectral.
- Exemplo: Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ é diagonal dominante.

Método de Gauss-Jacobi

- Baseado na decomposição da matriz em componentes diagonais, inferiores e superiores.
- Fórmula de iteração:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- Exemplo: Resolva o sistema $Ax = b$ com $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Método de Gauss-Seidel

- Similar ao método de Gauss-Jacobi, mas usa a solução atualizada imediatamente em cada iteração.
- Fórmula de iteração:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- Exemplo: Resolva o sistema $Ax = b$ com $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Métodos Diretos

- Encontram soluções exatas em um número finito de passos.
- Incluem métodos como Eliminação de Gauss e Inversão de Matrizes.
- Exemplo: Resolva o sistema $Ax = b$ usando Eliminação de Gauss.

Inversão de Matrizes

- Uma matriz quadrada A é invertível se existir uma matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$.
- Método direto que pode ser computacionalmente intensivo.
- Exemplo: Calcule A^{-1} para $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.