

Interpolação Polinomial

Prof. Ana Isabel Castillo

May 15, 2025

Introdução à Interpolação Polinomial

- ▶ A interpolação polinomial é uma técnica fundamental para encontrar funções que passam por um conjunto de pontos dados.
- ▶ Utilizada para aproximar funções complexas e preencher dados ausentes.
- ▶ Aplicações incluem engenharia, ciências naturais e finanças.

Existência e Unicidade do Polinômio Interpolador

- ▶ Para um conjunto de $n + 1$ pontos distintos, existe exatamente um polinômio de grau n que passa por todos esses pontos.
- ▶ Fórmula geral:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

- ▶ Esse polinômio é único para os dados fornecidos.
- ▶ Exemplo: Aproximação de preços históricos de ativos financeiros.

Polinômio de Lagrange

- Uma forma popular de calcular o polinômio interpolador é usando a fórmula de Lagrange:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x)$$

- Onde os termos $\ell_i(x)$ são definidos como:

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- Cada termo $\ell_i(x)$ é construído para ser 1 no ponto x_i e 0 nos outros pontos.
- Exemplo: Interpolação de taxas de câmbio para projeções financeiras.

Fórmula de Newton com Diferenças Divididas

- ▶ Outra forma de calcular o polinômio interpolador é a fórmula de Newton:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1) \cdots ($$

- ▶ Os coeficientes a_i são calculados usando diferenças divididas.
- ▶ Essa forma é eficiente para calcular novos pontos sem recomputar tudo.
- ▶ Exemplo: Previsão de demanda com dados históricos.

Estudo do Erro da Interpolação Polinomial

- ▶ O erro de interpolação é dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

- ▶ O termo ξ é algum ponto entre os extremos do intervalo considerado.
- ▶ A magnitude do erro depende do comportamento da função original e da distribuição dos pontos.
- ▶ Exemplo: Avaliação do risco em portfólios financeiros.

Interpolação Inversa

- ▶ Em alguns casos, precisamos encontrar o valor de x dado um y específico.
- ▶ Esse processo é conhecido como interpolação inversa.
- ▶ Requer técnicas iterativas ou ajustes para encontrar o ponto desejado.
- ▶ Exemplo: Determinar a taxa de juros para um valor futuro específico.