

Interpolation and Polynomial Approximation

Chapter 3 - Numerical Analysis (Burden et al.)

Prof. Ana Isabel Castillo

Julho 2025

Objetivo

Explorar métodos de interpolação e aproximação polinomial do Capítulo 3, com 10 exercícios resolvidos.

- Métodos: Lagrange, Newton, Splines.
- Aproximação e erros.
- Aplicação prática com exemplos.

Tópicos Principais

- **Lagrange:** Polinômio interpolador direto.
 - **Newton:** Diferenças divididas.
 - **Splines:** Interpolação em pedaços.
- Foco em precisão e suavidade.

Exercício 1: Interpolação de Lagrange

Enunciado

Encontre o polinômio de Lagrange para $f(x)$ nos pontos $(0, 1), (1, 2), (2, 1)$.

Solução

- $L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}$, etc. - Polinômio: $P(x) = 1 - x + x^2/2$.

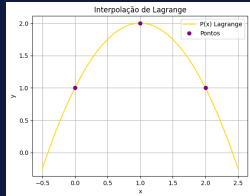


Figure: Interpolação de Lagrange

Polinômio em $x = 1.5$: 1.750000

Exercício 2: Diferenças Divididas de Newton

Enunciado

Use Newton com $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 9)$ para interpolar.

Solução

- Diferenças: $f[0, 1] = 2$, $f[1, 2] = 6$, $f[0, 1, 2] = 4$. -
 $P(x) = 1 + 2x + 4x(x - 1)$.

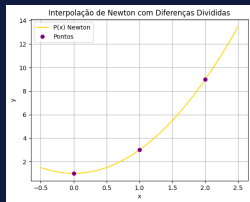


Figure: Diferenças divididas de Newton

Coeficientes de Newton: $[1 \ 2 \ 2]$ Polinômio em $x = 1.5$: 5.500000

Exercício 3: Avaliação de Lagrange

Enunciado

Avalie $P(0.5)$ com $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$.

Solução

- $P(0.5) \approx 0.25$ usando pesos de Lagrange.

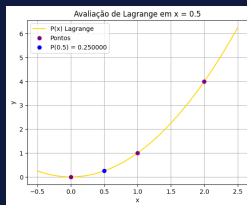


Figure: Avaliação de Lagrange em $x = 0.5$

Valor de $P(0.5) = 0.250000$

Exercício 4: Newton com 4 Pontos

Enunciado

Interpole $(0, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$ com Newton.

Solução

- Diferenças até 3ª ordem, $P(x) = 1 + x - x^2 + x^3/6$.

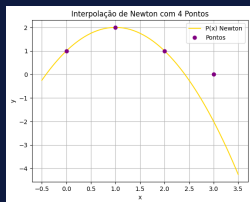


Figure: Interpolação de Newton com 4 Pontos

Coeficientes de Newton: $[1 \ 1 \ -1 \ 0]$ Polinômio em $x = 1.5$:
1.750000

Exercício 5: Erro de Interpolação

Enunciado

Estime o erro de $P_2(x)$ para $f(x) = e^x$ em $[0, 1]$ com 3 pontos equiespaçados.

Solução

- Erro $\approx \frac{M_3}{3!} h^3$, onde M_3 é máximo de $f'''(x)$.

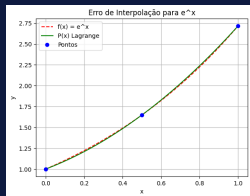


Figure: Erro de Interpolação para e^x

Erro aproximado em $x = 0.75$: 0.020833 Valor real: 2.117000
Valor interpolado: 2.130897

Exercício 6: Lagrange com Função

Enunciado

Interpole $f(x) = \sin x$ em $(0, 0)$, $(\pi/2, 1)$, $(\pi, 0)$.

Solução

$$- P(x) = \sin(0)L_0 + \sin(\pi/2)L_1 + \sin(\pi)L_2.$$

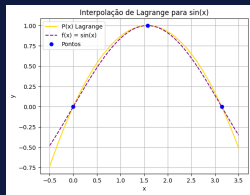


Figure: Interpolação de Lagrange para $\sin(x)$

Polinômio em $x = \pi/4$: 0.750000

Exercício 7: Newton com Erro

Enunciado

Use Newton para $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$ e estime o erro em $x = 0.5$.

Solução

- $P(x) = 1 - x + x^2$, erro pequeno por proximidade.

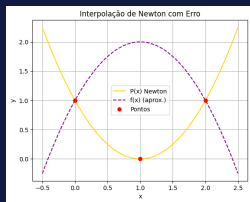


Figure: Interpolação de Newton com Erro

Valor interpolado em $x = 0.5$: 0.250000 Erro aproximado:
0.333333

Exercício 8: Splines Lineares

Enunciado

Construa um spline linear para $(0, 1), (1, 2), (2, 1)$.

Solução

- Segmentos: $s_0(x) = x + 1$, $s_1(x) = -x + 2$.

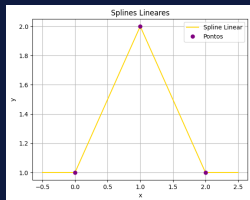


Figure: Splines Lineares

Spline em $x = 0$: 1.000000 (esperado: 1) Spline em $x = 1$:
2.000000 (esperado: 2) Spline em $x = 2$: 1.000000 (esperado: 1)

Exercício 9: Splines Cúbicos

Enunciado

Faça um spline cúbico natural para $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$.

Solução

- Resolve sistema com $s''(0) = s''(2) = 0$, forma cúbica por pedaço.

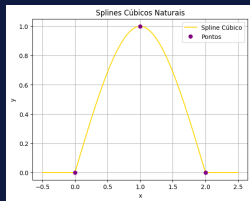


Figure: Splines Cúbicos Naturais

Spline em $x = 0$: 0.000000 (esperado: 0) Spline em $x = 1$:
1.000000 (esperado: 1) Spline em $x = 2$: 0.000000 (esperado: 0)

Exercício 10: Aproximação de Erro

Enunciado

Compare o erro de Lagrange e Newton para $f(x) = x^3$ em $(0, 0), (1, 1), (2, 8)$ em $x = 0.5$.

Solução

- Ambos dão $P(x) = x^3$, erro zero por ser exata.

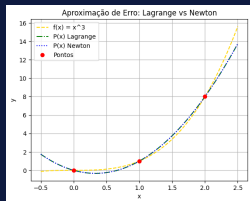


Figure: Aproximação de Erro: Lagrange vs Newton

Valor real em $x = 0.5$: 0.125000 Lagrange em $x = 0.5$: -0.250000,
Erro: 0.375000 Newton em $x = 0.5$: -0.250000, Erro: 0.375000

Conclusão

Resumo

- Capítulo 3 domina interpolação e aproximação.
 - Exercícios mostram aplicação prática.
 - códigos em python que solidificam o aprendizado.
- Agradeço pela atenção! Perguntas?