Mathematical Preliminaries and Error Analysis

Chapter 1 - Numerical Analysis (Burden et al.)

Prof. Ana Isabel Castillo

Julho 2025

Introdução

Objetivo

Explorar os fundamentos matemáticos e a análise de erros do Capítulo 1 do livro **Numerical Analysis** de Burden, Faires e Burden, com 10 exercícios resolvidos e links para respostas em vídeo.

- Revisão de cálculo.
- Erros de arredondamento e aritmética computacional.
- Algoritmos e convergência.
- Aplicação prática com exemplos.

Conceitos-Chave

Tópicos Principais

- **Revisão de Cálculo**: Derivadas, integrais e séries de Taylor.
- **Erros de Arredondamento**: Precisão em cálculos computacionais.
- **Análise de Erro**: Erro absoluto e relativo.
- **Convergência**: Comportamento de algoritmos numéricos.

- Importante para entender limitações e precisão em métodos numéricos.

Exercício 1: Taylor Polinômio (Problema 12ES)

Enunciado

Encontre o segundo polinômio de Taylor $P_2(x)$ para $f(x) = \cos x$ em $x_0 = 0$.

- Solução: $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$.

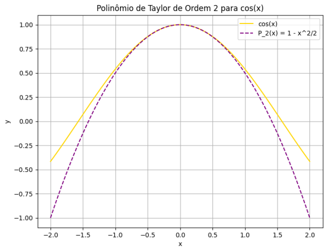

Figure: Polinômio de Taylor de Ordem 2 para cos(x)

Exercício 2: Estimação de Erro (Problema 16ES)

Enunciado

Estime o erro ao usar $\sin x \approx x$ para $x = 0.1$.

- Solução: Erro aproximado é pequeno, ordem de $O(x^3)$.

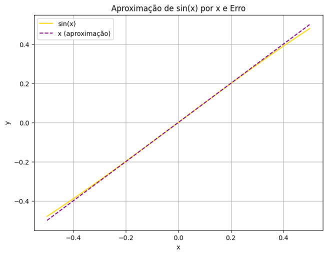

Figure: Aproximação de sin(x) por x e Erro

Valor exato de sin(0.1): 0.099833 Aproximação: 0.100000 Erro absoluto: 0.000167 Erro teórico ($O(x^3)$) : 0.000167

Exercício 3: Aproximação (Problema 17ES)

Enunciado

Aproxime $\cos 42^\circ$ usando um polinômio de Taylor em $\pi/4$ com erro $< 10^{-6}$.

- Solução: Usa P_3 ou superior.

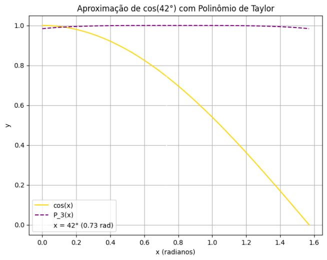

Figure: Aproximação de cos(42°) com Polinômio de Taylor

Valor exato de cos(42°): 0.743145 Aproximação $P_3 : 1.000000 Erroabsoluto : 0.256855$

Exercício 4: Polinômio n-ésimo (Problema 18ES)

Enunciado

Encontre $P_n(x)$ para $f(x) = (1 - x)^{-1}$ em $x_0 = 0$.

- Solução: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+n-1}{n-1} x^k$.

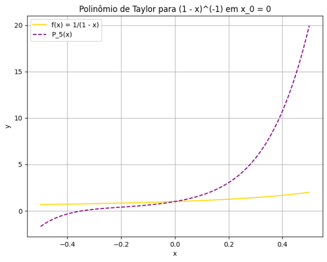

Figure: Polinômio de Taylor para (1 - x)$^($ $- 1) em x_0 = 0$

Valor exato em x $= 0.1$: 1.111111 Aproximação P$_5 em x = 0.1 : 1.693260 Erro absoluto : 0.582149$

Exercício 5: Polinômio Exponencial (Problema 19ES)

Enunciado

Encontre $P_n(x)$ para $f(x) = e^x$ em $x_0 = 0$.

- Solução: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

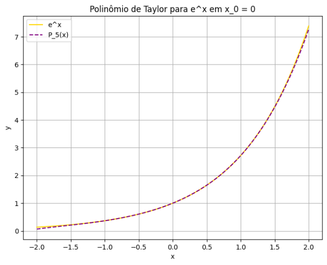

Figure: Polinômio de Taylor para e$^x emx_0 = 0$

Valor exato em x = 0.5: 1.648721 Aproximação P$_5 emx = 0.5 : 1.648698 Erroabsoluto : 0.000023$

Exercício 6: Limite de Erro (Problema 21ES)

Enunciado

Encontre um limite para o erro de $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ em $[-\pi/2, \pi/2]$ para $f(x) = \cos x$.

- Solução: Erro $\leq \frac{\pi^4}{24}$.

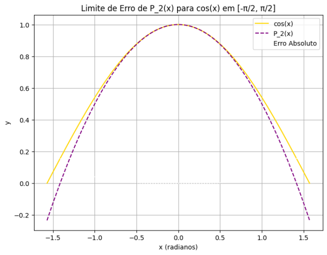

Figure: Limite de Erro de $P_2(x) paracos(x) em[-/2, /2]$

Erro teórico máximo em x = /2: 0.253670 Erro absoluto máximo (aproximado): 0.233701

Exercício 7: Teorema do Valor Intermediário (Problema 22ES)

Enunciado

Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que $f(x) = x^3 + 1$ tem raiz em $[0, 1]$.

- Solução: $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, existe c tal que $f(c) = 0$.

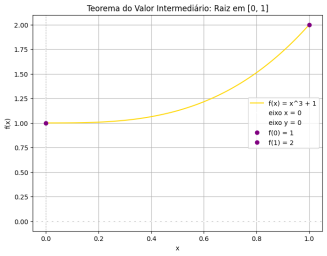

Figure: Teorema do Valor Intermediário: Raiz em [0, 1]

f(0) = 1 f(1) = 2 Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe c

Exercício 8: Condição de Lipschitz (Problema 1DQ)

Enunciado

Descreva a condição de Lipschitz em suas próprias palavras.

- Solução: Limita a taxa de variação de $f(x)$ por uma constante.

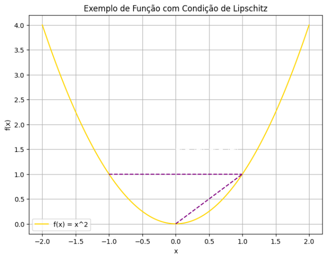

Figure: Exemplo de Função com Condição de Lipschitz

Condição de Lipschitz: —f(x) - f(y)— L —x - y—, onde L é a constante de Lipschitz. Para f(x) = x^2, $L = 4(máximode|f'(x)| = |2x|em[-2, 2])$

Exercício 9: Erro Absoluto (Exemplo V 22)

Enunciado

Calcule o erro absoluto ao aproximar $p = 0.101$ por 0.1.

- Solução: Erro absoluto $= |0.101 - 0.1| = 0.001$.

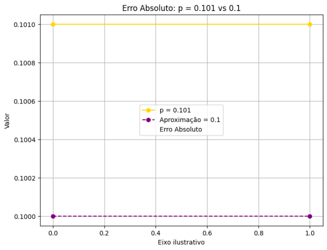

Figure: Erro Absoluto: p = 0.101 vs 0.1

Valor exato (p): 0.101 Aproximação: 0.1 Erro absoluto: 0.0010000000000000009

Exercício 10: Erro Relativo (Exemplo V 22)

Enunciado

Calcule o erro relativo ao aproximar $p = 0.101$ por 0.1.

- Solução: Erro relativo $= \frac{0.001}{0.101} \approx 0.0099$.

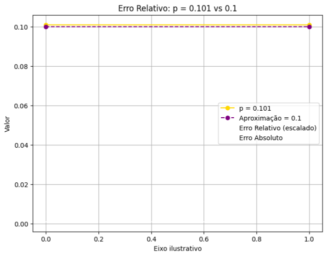

Figure: Erro Relativo: p = 0.101 vs 0.1

Valor exato (p): 0.101 Aproximação: 0.1 Erro absoluto: 0.0010000000000000009 Erro relativo: 0.0099 (ou 0.99%)

Conclusão

Resumo

- Capítulo 1 estabelece bases para análise numérica.
- Exercícios mostram aplicação prática de polinômios, erros e convergência.
- Vídeos são ótimos para reforçar o aprendizado.

- Agradeço pela atenção! Perguntas?