Formulação Matemática do Controle Ótimo

Prof. Ana Isabel Castillo

May 17, 2025

Universidade do Controle Ótimo

Sumário

Formulação de Problemas de Controle Ótimo

Estrutura do Problema

Definição
Um problema de controle ótimo é definido por:

$$\min_{u(t)} J = \int_0^T L(x(t), u(t), t)\, dt + \Phi(x(T)),$$

sujeito a:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in U,$$

onde $x(t)$ é o estado, $u(t)$ é o controle, L é o custo instantâneo, Φ é o custo final, e U é o conjunto de controles admissíveis.

Objetivo
Encontrar $u^*(t)$ que minimiza J respeitando as restrições.

Exemplo Prático 1: Fundo de Investimento

Controle de um Fundo de Investimento

Um fundo de investimento tem dinâmica:

$$\dot{x} = rx + u, \quad x(0) = 1,$$

onde $x(t)$ é o valor do fundo, $r = 0.05$ é a taxa de juros, $u(t)$ é a injeção de capital. Minimize:

$$J = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u^2 - x \right) dt.$$

Formulação

- Estado: $x(t)$. - Controle: $u(t)$. - Restrição: $\dot{x} = 0.05x + u$. - Custo: J penaliza u^2 (esforço) e maximiza x.

Exemplo Prático 2: Alocação de Recursos

Otimização de Recursos Financeiros

Uma empresa aloca recursos entre dois projetos:

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = 1 - u, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

onde x_1, x_2 são os lucros dos projetos, $u(t) \in [0, 1]$ é a fração alocada ao projeto 1. Maximize:

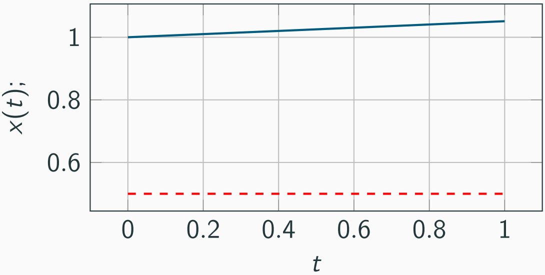
$$J = x_1(1) + x_2(1).$$

Formulação

- Estados: $x_1(t), x_2(t)$. - Controle: $u(t) \in [0, 1]$. - Restrição: soma dos lucros é fixa. - Custo: maximizar o lucro total.

Visualização

Visualização: Trajetória de Controle



Interpretação

A curva azul mostra o crescimento do fundo $x(t) = e^{0.05t}$ (sem controle).

A linha vermelha é um controle constante $u(t) = 0.5$.

Aplicação Financeira

Portfólio com Restrições de Risco

Um portfólio é modelado por:

$$\dot{x} = (r + \sigma u)x, \quad x(0) = 1,$$

com função custo:

$$J = -\mathbb{E}[x(T)] + \frac{1}{2}\int_0^T u^2 \, dt,$$

onde $r = 0.03$, $\sigma = 0.2$, $u(t)$ é a fração investida em ativos arriscados.

Formulação

- Estado: $x(t)$ (valor do portfólio). - Controle: $u(t)$ (alocação de risco). - Restrição: dinâmica estocástica. - Custo: balancear retorno esperado e esforço de controle.

Exercício Resolvido

Exercício

Formule o problema de controle ótimo:

$$\dot{x} = -x + u, \quad x(0) = 1,$$

com:

$$J = \int_0^1 \left(x^2 + u^2\right)\, dt, \quad u(t) \in [-1, 1].$$

Solução

- **Estado:** $x(t)$. - **Controle:** $u(t) \in [-1, 1]$. - **Dinâmica:** $\dot{x} = -x + u$. - **Custo:** $J = \int_0^1 (x^2 + u^2)\, dt$. - **Restrições:** Controle limitado $u(t) \in [-1, 1]$, condição inicial $x(0) = 1$. O problema está bem formulado para solução via hamiltoniano ou programação dinâmica.

Conclusão

Resumo

- A formulação matemática define estados, controles, custos e restrições.
- Exemplos financeiros mostram a aplicação prática em investimentos.
- Restrições moldam a complexidade do problema.

Próximos Passos
Explorar programação dinâmica e o princípio de Bellman no Capítulo 3.