Aplicações Práticas do Controle Ótimo

Prof. Ana Isabel Castillo

May 17, 2025

Universidade do Controle Ótimo

Sumário

Introdução às Aplicações Práticas

Por que Aplicações Práticas?

Contexto
Controle ótimo resolve problemas reais em finanças, robótica, energia e mais, otimizando sistemas dinâmicos complexos:

$$\min_{u(t)} J = \int_0^T L(x(t), u(t), t)\, dt + \Phi(x(T)), \quad \dot{x} = f(x, u, t).$$

Objetivo
Aplicar conceitos dos capítulos anteriores a cenários do mundo real.

Exemplo Prático 1: Portfólio Dinâmico

Otimização de Portfólio

Um portfólio tem dinâmica:

$$\dot{x} = (r + \sigma u)x, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in [0, 1],$$

com $r = 0.03$, $\sigma = 0.2$, e custo:

$$J = -\mathbb{E}[x(1)] + \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 \, dt.$$

Solução

Hamiltoniano: $H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda(r + \sigma u)x$. Controle ótimo: $u^*(t)$ é derivado via Princípio do Máximo, balanceando retorno e risco.

Exemplo Prático 2: Trajetória de Robô

Controle de Robô

Um robô segue uma trajetória:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 0,$$

minimizando:

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 \, dt.$$

Solução

Hamiltoniano: $H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$. Condições: $u^*(t) = -6t(t-1)$, $x_1^*(t) = t^2(3-2t)$.

Exemplo Prático 3: Gestão Energética

Otimização de Recursos Energéticos

Uma usina gerencia energia:

$$\dot{x} = u - kx, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in [0, 1],$$

com $k = 0.1$, e custo:

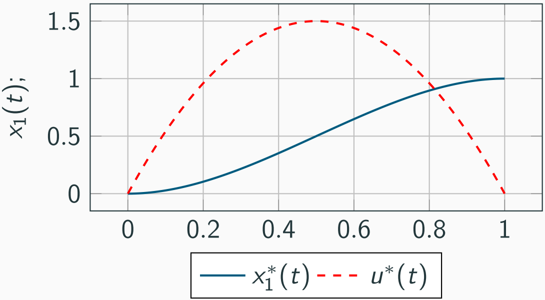
$$J = \int_0^1 \left(x^2 + u^2\right) \, dt.$$

Solução

Usa métodos numéricos (ex.: CVXPY) ou Princípio do Máximo para encontrar $u^*(t)$, minimizando custos operacionais.

Visualização

Visualização: Trajetória do Robô



Interpretação

A curva azul representa a trajetória ótima $x_1^*(t) = t^2(3 - 2t)$ do robô, enquanto a curva vermelha tracejada mostra o controle ótimo $u^*(t) = -6t(t-1)$.

Aplicação Financeira

Precificação de Opções

Controle ótimo é usado para precificar opções:

$$\dot{x} = rx + u, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in [-1, 1],$$

com:

$$J = -\frac{1}{2}x(1)^2 + \int_0^1 \frac{1}{2}u^2\, dt.$$

Exemplo

O hamiltoniano otimiza $u(t)$ para maximizar o payoff da opção, usando métodos numéricos ou analíticos.

Exercício Resolvido

Exercício

Resolva para um sistema linear:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1,$$

com:

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 \, dt.$$

Solução

Hamiltoniano: $H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda u$. Condições:
$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0 \implies u^* = -\lambda$. Resolvendo: $u^*(t) = 1$, $x^*(t) = t$.

Projeto Final

Projeto: Otimização de Portfólio

Enunciado

Otimize um portfólio com:

$$\dot{x} = (r + \sigma u)x, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in [0, 1],$$

e:

$$J = -\mathbb{E}[x(1)] + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u^2 + \sigma^2 x^2 \right) dt.$$

Use métodos numéricos (ex.: CVXPY) ou analíticos (HJB, Pontryagin).

Dica

Discretize e implemente em Python, ou derive $u^*(t)$ via hamiltoniano.

Código Python

Código: Projeto Final

Exemplo em Python

[language=Python, firstline=1, lastline=8]portfolio$_opt.py$

Descrição

Este código discretiza o problema de portfólio e usa CVXPY para otimizar $u(t)$.

Conclusão

Resumo

- Controle ótimo tem aplicações em finanças, robótica e energia.
- Métodos analíticos e numéricos resolvem problemas reais.
- Projetos práticos consolidam o aprendizado.

Próximos Passos
Explorar controle estocástico, aprendizado por reforço, ou aplicações avançadas.