# Métodos Numéricos em Controle Ótimo

Prof. Ana Isabel Castillo

May 17, 2025

Universidade do Controle Ótimo

# Sumário

# Introdução aos Métodos Numéricos

# Por que Métodos Numéricos?

**Definição**
Métodos numéricos resolvem problemas de controle ótimo quando soluções analíticas são inviáveis:

$$\min_{u(t)} J = \int_0^T L(x(t), u(t), t)\, dt + \Phi(x(T)), \quad \dot{x} = f(x, u, t).$$

Técnicas incluem discretização, diferenças finitas, e solvers iterativos.

**Contexto**
Essenciais em finanças para portfólios complexos e derivativos.

# Exemplo Prático 1: Discretização de Portfólio

# Otimização de Portfólio

Um portfólio tem dinâmica:

$$\dot{x} = (r + \sigma u)x, \quad x(0) = 1,$$

com $r = 0.03$, $\sigma = 0.2$, $u(t) \in [0, 1]$, e custo:

$$J = -\frac{1}{2}x(1)^2 + \int_0^1 u^2 \, dt.$$

**Solução Numérica**

Discretize $t \in [0, 1]$ com $N = 100$:

$$x_{k+1} = x_k + (r + \sigma u_k)x_k \Delta t, \quad J \approx -\frac{1}{2}x_N^2 + \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 \Delta t.$$

Minimize $J$ usando um solver (ex.: gradiente descendente).

# Exemplo Prático 2: Fluxo de Caixa Iterativo

# Gestão de Fluxo de Caixa

Uma empresa gerencia caixa:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in [-1, 1],$$

minimizando:

$$J = \int_0^1 \left( x^2 + \frac{1}{2} u^2 \right) dt.$$

**Solução Numérica**

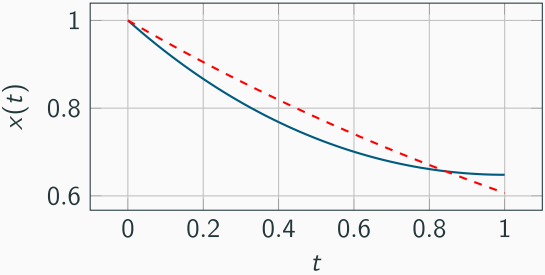
Discretize e aplique diferenças finitas ao hamiltoniano:

$$H = x^2 + \frac{1}{2} u^2 + \lambda u.$$

Itere $u_k$ e $\lambda_k$ até convergência, usando solvers como CVXPY.

# Visualização

# Visualização: Solução Numérica




**Interpretação**
A curva azul é a solução analítica $x^*(t)$ do fluxo de caixa. A vermelha é uma aproximação numérica simples.

# Aplicação Financeira

# Otimização de Derivativos

Métodos numéricos otimizam derivativos complexos:

$$\dot{x} = u - kx, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in [0, 1],$$

com:

$$J = -\frac{1}{2}x(1)^2 + \int_0^1 \frac{1}{2}u^2\, dt,$$

onde $k = 0.05$.

**Exemplo**

Solvers numéricos (ex.: IPOPT) discretizam o problema e encontram $u^*(t)$, respeitando barreiras.

# Código Python

# Código: Solver Simples

**Exemplo em Python**

[language=Python, firstline=1, lastline=8]control$_n$*umerical.py*

**Descrição**

Este código discretiza o problema de fluxo de caixa e usa CVXPY para encontrar $u^*(t)$.

# Exercício Resolvido

## Exercício

Discretize e resolva numericamente:

$$\dot{x} = -x + u, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in [-1, 1],$$

com:

$$J = \int_0^1 \left(x^2 + u^2\right)\, dt.$$

**Solução**

Discretize com $N = 50$, $\Delta t = 0.02$:

$$x_{k+1} = x_k + (-x_k + u_k)\Delta t, \quad J \approx \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^2 + u_k^2)\Delta t.$$

Use um solver (ex.: CVXPY) pra minimizar $J$. A solução aproxima $x^*(t) = \frac{\cosh(1-t)}{\cosh(1)}$.

# Conclusão

# Resumo

- Métodos numéricos resolvem problemas complexos de controle ótimo.
- Aplicações em finanças incluem derivativos e portfólios.
- Discretização e solvers são ferramentas práticas.

**Próximos Passos**
Explorar aplicações práticas em finanças e engenharia no Capítulo 6.