Programação Dinâmica em Controle Ótimo

Prof. Ana Isabel Castillo

May 17, 2025

Universidade do Controle Ótimo

Sumário

Introdução à Programação Dinâmica

Princípio de Optimalidade

Definição
Programação dinâmica resolve problemas de controle ótimo dividindo-os em subproblemas. O princípio de Bellman diz que a solução ótima a partir de qualquer estado é independente das decisões anteriores.

$$V(t,x) = \min_{u \in U} \left\{ L(x,u,t)\Delta t + V(t+\Delta t, x+\Delta x) \right\},$$

levando à equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u \in U} \left\{ L(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,u,t) \right\} = 0.$$

Contexto
Essencial para finanças (alocação dinâmica) e sistemas dinâmicos.

Exemplo Prático 1: Alocação Dinâmica

Otimização de Ativos

Um investidor aloca capital em um ativo com retorno $r = 0.05$:

$$\dot{x} = rxu, \quad x(0) = 1,$$

minimizando:

$$J = \int_0^1 \left(x^2 + u^2\right)\, dt,$$

onde $x(t)$ é o valor do portfólio, $u(t) \in [0,1]$ é a fração investida.

Solução

Equação HJB:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_{u \in [0,1]} \left\{ x^2 + u^2 + \frac{\partial V}{\partial x} rxu \right\} = 0.$$

O controle ótimo u^* depende de $\frac{\partial V}{\partial x}$, resolvido numericamente ou analiticamente para casos simples.

Exemplo Prático 2: Custos de Transação

Portfólio com Custos de Transação

Um portfólio tem dinâmica:

$$\dot{x} = rx + u - k|u|, \quad x(0) = 1,$$

com função custo:

$$J = -\frac{1}{2}x(1)^2 + \int_0^1 u^2 \, dt,$$

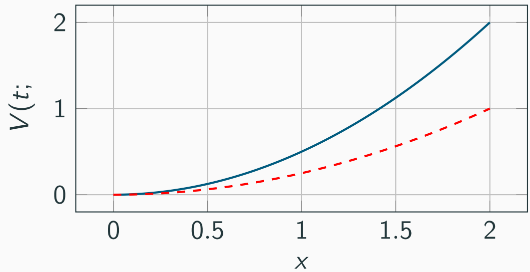
onde $r = 0.03$, $k = 0.01$ (custo de transação), $u(t)$ é a taxa de ajuste.

Solução

A equação HJB incorpora o termo $k|u|$, levando a controles bang-bang ou contínuos, dependendo de k. Resolve-se iterativamente.

Visualização

Visualização: Função Valor



Interpretação

A curva azul mostra a função valor $V(t, x) \approx \frac{1}{2}x^2$ para $t = 0$, comparada a uma aproximação (vermelha) em $t = 0.5$.

Aplicação Financeira

Programação dinâmica é usada para gerenciar risco em portfólios:

$$\dot{x} = (r + \sigma u)x, \quad J = \mathbb{E}\left[-\frac{1}{2}x(T)^2 + \int_0^T u^2\,dt\right],$$

onde $r = 0.03$, $\sigma = 0.2$.

Exemplo

A equação HJB otimiza $u(t)$ para balancear retorno e volatilidade, ajustando alocações dinamicamente.

Exercício Resolvido

Exercício

Resolva usando programação dinâmica:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad J = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u^2 + x^2 \right) dt.$$

Solução

Equação HJB:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left\{ \frac{1}{2} u^2 + x^2 + \frac{\partial V}{\partial x} u \right\} = 0.$$

Minimização: $u^* = -\frac{\partial V}{\partial x}$. Supondo $V(t, x) = a(t)x^2 + b(t)$, resolvemos:

$$u^*(t) = -\frac{2 \sinh(1 - t)}{\cosh(1)}, \quad x^*(t) = \frac{\cosh(1 - t)}{\cosh(1)}.$$

Conclusão

Resumo

- Programação dinâmica usa o princípio de Bellman e a equação HJB.
- Aplicações em finanças incluem alocação dinâmica e gestão de risco.
- Soluções analíticas e numéricas são complementares.

Próximos Passos
Explorar o Princípio do Máximo de Pontryagin no Capítulo 4.