Princípio do Máximo de Pontryagin

Prof. Ana Isabel Castillo

May 17, 2025

Universidade do Controle Ótimo

Sumário

Introdução ao Princípio do Máximo

O que é o Princípio do Máximo?

Definição
O Princípio do Máximo de Pontryagin fornece condições necessárias para a optimalidade:

$$\min_{u(t)\in U} J = \int_0^T L(x(t), u(t), t)\, dt + \Phi(x(T)),$$

sujeito a $\dot{x} = f(x, u, t)$. Define-se o hamiltoniano:

$$H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t),$$

onde $\lambda(t)$ são as variáveis adjuntas. Condições:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x^*, u^*, \lambda^*, t) = \min_{u\in U} H(x^*, u, \lambda^*, t).$$

Contexto
Usado em finanças (gestão de fluxos) e engenharia (controle de sistemas).

Exemplo Prático 1: Fluxo de Caixa

Gestão de Fluxo de Caixa

Uma empresa gerencia seu caixa:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in [-1, 1],$$

minimizando:

$$J = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2} u^2 \right) dt.$$

Solução

Hamiltoniano: $H = x^2 + \frac{1}{2} u^2 + \lambda u$. Condições:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{\lambda} = -2x, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0 \implies u^* = -\lambda.$$

Resolvendo: $u^*(t) = -\frac{2 \sinh(1-t)}{\cosh(1)}$, $x^*(t) = \frac{\cosh(1-t)}{\cosh(1)}$.

Exemplo Prático 2: Alocação de Portfólio

Otimização de Portfólio

Um portfólio tem dinâmica:

$$\dot{x} = (r + \sigma u)x, \quad x(0) = 1,$$

com $r = 0.03$, $\sigma = 0.2$, $u(t) \in [0, 1]$, e custo:

$$J = -\frac{1}{2}x(1)^2 + \int_0^1 u^2 \, dt.$$

Solução

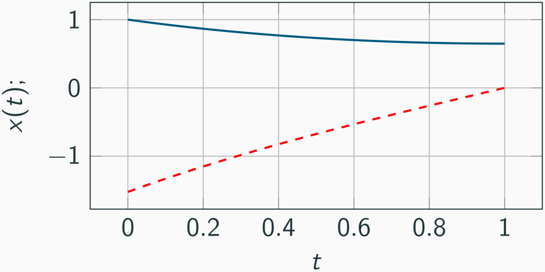
Hamiltoniano: $H = u^2 + \lambda(r + \sigma u)x$. Condições:

$$\dot{x} = (r + \sigma u)x, \quad \dot{\lambda} = -\lambda(r + \sigma u), \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda\sigma x = 0.$$

O controle ótimo u^* é bang-bang ou contínuo, dependendo de λ.

Visualização

Visualização: Trajetória Ótima



Interpretação

A curva azul mostra a trajetória de estado $x^*(t)$, e a vermelha o controle ótimo $u^*(t)$, para o exemplo de fluxo de caixa.

Aplicação Financeira

Controle Ótimo em Derivativos

O princípio do máximo é usado para precificar derivativos com barreiras:

$$\dot{x} = u - kx, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in [0, 1],$$

com custo:

$$J = -\frac{1}{2}x(1)^2 + \int_0^1 \frac{1}{2}u^2 \, dt,$$

onde $k = 0.05$ é a taxa de decaimento.

Exemplo

O hamiltoniano otimiza $u(t)$ para maximizar o valor final, respeitando barreiras.

Exercício Resolvido

Exercício

Resolva usando o Princípio do Máximo:

$$\dot{x} = -x + u, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in [-1, 1],$$

com:

$$J = \int_0^1 \left(x^2 + u^2\right)\, dt.$$

Solução

Hamiltoniano: $H = x^2 + u^2 + \lambda(-x + u)$. Condições:

$$\dot{x} = -x + u, \quad \dot{\lambda} = -2x + \lambda, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0 \implies u^* = -\frac{\lambda}{2}.$$

Resolvendo o sistema: $u^*(t) = -\frac{\sinh(1-t)}{\cosh(1)}$, $x^*(t) = \frac{\cosh(1-t)}{\cosh(1)}$.

Conclusão

Resumo

- O Princípio do Máximo usa o hamiltoniano para condições de optimalidade.
- Aplicações em finanças incluem fluxos de caixa e derivativos.
- Soluções analíticas são eficazes para problemas bem definidos.

Próximos Passos
Explorar métodos numéricos para controle ótimo no Capítulo 5.