Introdução ao Controle Ótimo

Prof. Ana Isabel Castillo

May 17, 2025

Universidade do Controle Ótimo

Sumário

O que é Controle Ótimo?

Definição de Controle Ótimo

Definição
Controle ótimo busca a estratégia $u(t)$ que minimiza uma função custo J:

$$J = \int_0^T L(x(t), u(t), t)\, dt + \Phi(x(T)),$$

onde $x(t)$ é o estado, $u(t)$ é o controle, L é o custo instantâneo, e Φ é o custo final.

Contexto
Usado em finanças (otimização de portfólios), robótica, energia, e mais.

Exemplo Prático

Exemplo: Otimização de Portfólio

Um investidor quer maximizar o retorno $x(T)$ de um portfólio com risco controlado:

$$\dot{x} = ux, \quad J = -\frac{1}{2}x(T)^2 + \frac{1}{2}\int_0^T u^2\,dt,$$

onde $u(t)$ é a taxa de investimento, $x(t)$ é o valor do portfólio.

Solução

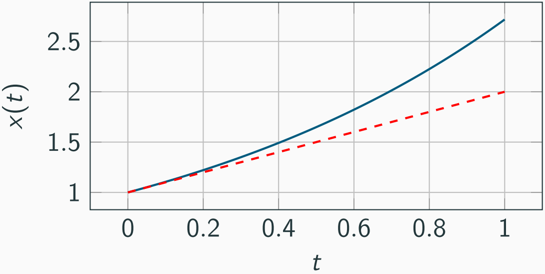
Usando o princípio do máximo, o controle ótimo é:

$$u^*(t) = x(T)e^{T-t}.$$

A trajetória ótima maximiza o retorno com risco mínimo.

Visualização

Visualização: Trajetória Ótima



Interpretação
A curva azul mostra a trajetória ótima $x(t) = e^t$, comparada a uma estratégia linear (vermelha).

Aplicação Financeira

Controle Ótimo em Gestão de Risco

Controle ótimo é usado para balancear retorno e risco em portfólios:

$$J = \mathbb{E}\left[-\frac{1}{2}x(T)^2 + \int_0^T \left(\frac{1}{2}u^2 + \sigma^2 x^2\right)\, dt\right],$$

onde σ é a volatilidade.

Exemplo

Ajustar alocações dinâmicas para minimizar perdas em mercados voláteis.

Exercício Resolvido

Exercício

Resolva o problema de controle ótimo:

$$\dot{x} = u, \quad J = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u^2 + x^2 \right) dt, \quad x(0) = 1, \quad x(1) \text{ livre.}$$

Solução

Hamiltoniano: $H = \frac{1}{2} u^2 + x^2 + \lambda u$. Condições:
$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0 \implies u = -\lambda$, $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2x$. Resolvendo:
$u^*(t) = \frac{2 \sinh(1-t)}{\cosh(1)}$, $x^*(t) = \frac{\cosh(1-t)}{\cosh(1)}$.

Conclusão

Resumo

- Controle ótimo minimiza custos em sistemas dinâmicos.
- Aplicações em finanças, como gestão de portfólios e risco.
- Métodos analíticos e numéricos são fundamentais.

Próximos Passos
Explorar formulação matemática e programação dinâmica no Capítulo 2.