

Sistemas Dinâmicos: Sistemas Não Lineares

Prof. Ana Isabel C.

June 23, 2025

Introdução aos Sistemas Não Lineares

Introdução aos Sistemas Não Lineares

Mapa Logístico

Introdução aos Sistemas Não Lineares

Mapa Logístico

Sistema de Lorenz

Introdução aos Sistemas Não Lineares

Mapa Logístico

Sistema de Lorenz

Exemplo Financeiro

Introdução aos Sistemas Não Lineares

Mapa Logístico

Sistema de Lorenz

Exemplo Financeiro

Visualização do Atrator de Lorenz

Introdução aos Sistemas Não Lineares

Mapa Logístico

Sistema de Lorenz

Exemplo Financeiro

Visualização do Atrator de Lorenz

Conclusão

Introdução aos Sistemas Não Lineares

Mapa Logístico

Sistema de Lorenz

Exemplo Financeiro

Visualização do Atrator de Lorenz

Conclusão

O que são Sistemas Não Lineares?

Definição

Sistemas não lineares são descritos por equações onde as variáveis aparecem de forma não linear (ex.: $\dot{x} = x^2$, $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$).

O que são Sistemas Não Lineares?

Definição

Sistemas não lineares são descritos por equações onde as variáveis aparecem de forma não linear (ex.: $\dot{x} = x^2$, $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$).

Características

- **Sensibilidade às condições iniciais:** Pequenas mudanças geram trajetórias muito diferentes.
- **Bifurcações:** Mudanças qualitativas no comportamento com variação de parâmetros.
- **Caos:** Comportamento aparentemente aleatório, mas determinístico.

O que são Sistemas Não Lineares?

Definição

Sistemas não lineares são descritos por equações onde as variáveis aparecem de forma não linear (ex.: $\dot{x} = x^2$, $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$).

Características

- **Sensibilidade às condições iniciais:** Pequenas mudanças geram trajetórias muito diferentes.
- **Bifurcações:** Mudanças qualitativas no comportamento com variação de parâmetros.
- **Caos:** Comportamento aparentemente aleatório, mas determinístico.

Aplicação em Finanças

Modelam volatilidade de mercados, crises financeiras e comportamentos imprevisíveis de preços.

Introdução aos Sistemas Não Lineares

Mapa Logístico

Sistema de Lorenz

Exemplo Financeiro

Visualização do Atrator de Lorenz

Conclusão

Mapa Logístico: Sistema Discreto

Definição

O mapa logístico é um sistema discreto definido por:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad x_n \in [0, 1], \quad r > 0$$

O parâmetro r controla o comportamento: equilíbrio, ciclos ou caos.

Mapa Logístico: Sistema Discreto

Definição

O mapa logístico é um sistema discreto definido por:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad x_n \in [0, 1], \quad r > 0$$

O parâmetro r controla o comportamento: equilíbrio, ciclos ou caos.

Comportamento

- $r < 3$: Convergência para equilíbrio.
- $3 < r < 3.57$: Ciclos periódicos.
- $r > 3.57$: Caos (ex.: $r = 4$).

Mapa Logístico: Sistema Discreto

Definição

O mapa logístico é um sistema discreto definido por:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad x_n \in [0, 1], \quad r > 0$$

O parâmetro r controla o comportamento: equilíbrio, ciclos ou caos.

Comportamento

- $r < 3$: Convergência para equilíbrio.
- $3 < r < 3.57$: Ciclos periódicos.
- $r > 3.57$: Caos (ex.: $r = 4$).

Aplicação

Em finanças, modela retornos de ativos com comportamento oscilatório ou caótico.

Diagrama de Bifurcação

Diagrama de Bifurcação: Mapa Logístico

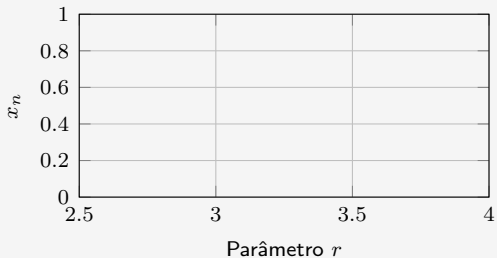
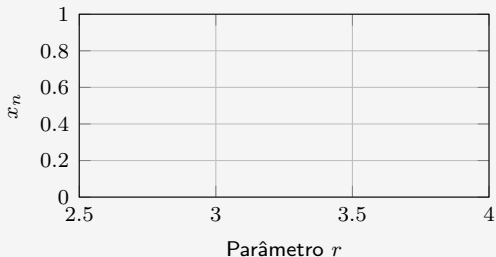


Diagrama de Bifurcação

Diagrama de Bifurcação: Mapa Logístico



Interpretação

Para $r = 4$, o sistema exibe caos, com x_n variando erraticamente.

Introdução aos Sistemas Não Lineares

Mapa Logístico

Sistema de Lorenz

Exemplo Financeiro

Visualização do Atrator de Lorenz

Conclusão

Definição

O sistema de Lorenz é um sistema de EDOs não lineares:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

Para $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$, exibe caos.

Definição

O sistema de Lorenz é um sistema de EDOs não lineares:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

Para $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$, exibe caos.

Características

- Atrator caótico: Trajetórias formam o "atrator borboleta".
- Sensibilidade extrema às condições iniciais.

Sistema de Lorenz: Sistema Contínuo

Definição

O sistema de Lorenz é um sistema de EDOs não lineares:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

Para $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$, exibe caos.

Características

- Atrator caótico: Trajetórias formam o "atrator borboleta".
- Sensibilidade extrema às condições iniciais.

Aplicação

Modela dinâmicas complexas, como flutuações em mercados financeiros.

Introdução aos Sistemas Não Lineares

Mapa Logístico

Sistema de Lorenz

Exemplo Financeiro

Visualização do Atrator de Lorenz

Conclusão

Volatilidade Caótica em Mercados

Contexto

A volatilidade de preços de ativos (ex.: ações como GOLL4.SA) pode exibir comportamento caótico devido a feedback não linear entre oferta, demanda e especulação.

Volatilidade Caótica em Mercados

Contexto

A volatilidade de preços de ativos (ex.: ações como GOLL4.SA) pode exibir comportamento caótico devido a feedback não linear entre oferta, demanda e especulação.

Modelo Simplificado

Considere um modelo discreto para retornos r_n :

$$r_{n+1} = 3.9r_n(1 - r_n), \quad r_n \in [0, 1]$$

Para $r = 3.9$, os retornos oscilam caoticamente, simulando volatilidade extrema.

Volatilidade Caótica em Mercados

Contexto

A volatilidade de preços de ativos (ex.: ações como GOLL4.SA) pode exibir comportamento caótico devido a feedback não linear entre oferta, demanda e especulação.

Modelo Simplificado

Considere um modelo discreto para retornos r_n :

$$r_{n+1} = 3.9r_n(1 - r_n), \quad r_n \in [0, 1]$$

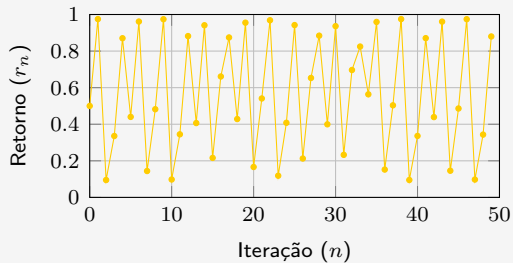
Para $r = 3.9$, os retornos oscilam caoticamente, simulando volatilidade extrema.

Exemplo Real

Em 2020, GOLL4.SA sofreu variações bruscas devido à crise da aviação. Um mapa logístico pode capturar essa imprevisibilidade.

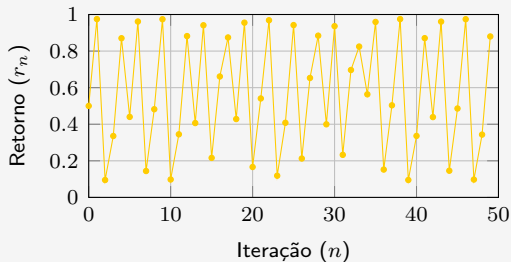
Visualização da Volatilidade

Volatilidade Caótica: $r_{n+1} = 3.9r_n(1 - r_n)$



Visualização da Volatilidade

Volatilidade Caótica: $r_{n+1} = 3.9r_n(1 - r_n)$



Interpretação

Os retornos oscilam erraticamente, refletindo a imprevisibilidade de mercados em crise.

Introdução aos Sistemas Não Lineares

Mapa Logístico

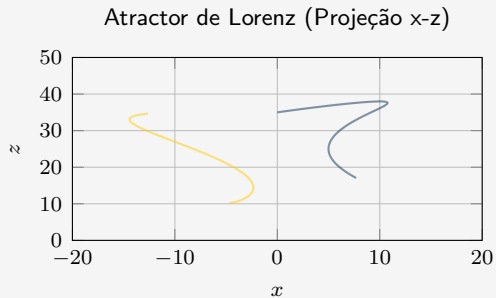
Sistema de Lorenz

Exemplo Financeiro

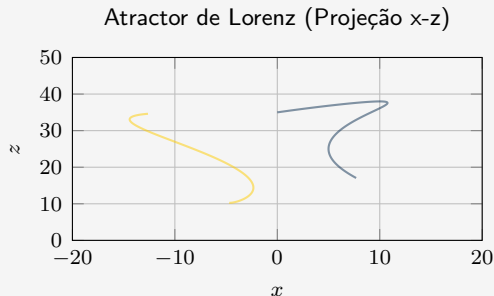
Visualização do Atrator de Lorenz

Conclusão

Atrator de Lorenz



Atrator de Lorenz



Interpretação

O atrator borboleta mostra trajetórias caóticas, sensíveis às condições iniciais, semelhante à volatilidade em finanças.

Introdução aos Sistemas Não Lineares

Mapa Logístico

Sistema de Lorenz

Exemplo Financeiro

Visualização do Atrator de Lorenz

Conclusão

Resumo

- Sistemas não lineares exibem bifurcações e caos.
- Mapa logístico: Caos em sistemas discretos.
- Sistema de Lorenz: Caos em sistemas contínuos.
- Aplicação financeira: Volatilidade caótica em preços de ativos.

Resumo

- Sistemas não lineares exibem bifurcações e caos.
- Mapa logístico: Caos em sistemas discretos.
- Sistema de Lorenz: Caos em sistemas contínuos.
- Aplicação financeira: Volatilidade caótica em preços de ativos.

Próxima sessão

Análise qualitativa e retratos de fase no Capítulo 5.