

Sistemas Dinâmicos: Análise Qualitativa e Retratos de Fase

Prof. Ana Isabel C.

June 23, 2025

Análise Qualitativa

Análise Qualitativa

Retratos de Fase

Análise Qualitativa

Retratos de Fase

Exemplo Financeiro

Análise Qualitativa

Retratos de Fase

Exemplo Financeiro

Visualização

Análise Qualitativa

Retratos de Fase

Exemplo Financeiro

Visualização

Conclusão

Análise Qualitativa

Retratos de Fase

Exemplo Financeiro

Visualização

Conclusão

O que é Análise Qualitativa?

Definição

Análise qualitativa estuda o comportamento de sistemas dinâmicos sem resolver equações analiticamente, focando em:

- Equilíbrios e sua estabilidade.
- Trajetórias e comportamento assintótico.

O que é Análise Qualitativa?

Definição

Análise qualitativa estuda o comportamento de sistemas dinâmicos sem resolver equações analiticamente, focando em:

- Equilíbrios e sua estabilidade.
- Trajetórias e comportamento assintótico.

Importância

- Permite prever dinâmicas complexas sem soluções exatas.
- Útil em finanças para modelar oferta, demanda e preços.

O que é Análise Qualitativa?

Definição

Análise qualitativa estuda o comportamento de sistemas dinâmicos sem resolver equações analiticamente, focando em:

- Equilíbrios e sua estabilidade.
- Trajetórias e comportamento assintótico.

Importância

- Permite prever dinâmicas complexas sem soluções exatas.
- Útil em finanças para modelar oferta, demanda e preços.

Ferramenta Principal

Retratos de fase: Gráficos que mostram todas as trajetórias possíveis de um sistema 2D.

Análise Qualitativa

Retratos de Fase

Exemplo Financeiro

Visualização

Conclusão

Definição

Um retrato de fase é um gráfico no plano (x, y) que mostra as trajetórias de um sistema 2D:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Construção de Retratos de Fase

Definição

Um retrato de fase é um gráfico no plano (x, y) que mostra as trajetórias de um sistema 2D:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Passos

- Encontrar equilíbrios: $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$.
- Analisar estabilidade via Jacobiana.
- Traçar trajetórias com setas indicando a direção do fluxo.

Construção de Retratos de Fase

Definição

Um retrato de fase é um gráfico no plano (x, y) que mostra as trajetórias de um sistema 2D:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Passos

- Encontrar equilíbrios: $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$.
- Analisar estabilidade via Jacobiana.
- Traçar trajetórias com setas indicando a direção do fluxo.

Aplicação

Em finanças, retratos de fase modelam interações entre oferta e demanda ou preços e volumes de negociação.

Análise Qualitativa

Retratos de Fase

Exemplo Financeiro

Visualização

Conclusão

Modelo

Considere um mercado com preço $p(t)$ e quantidade $q(t)$:

$$\begin{cases} \dot{p} = 0.5(100 - 2p - q) \\ \dot{q} = 0.3(p - 20 - q) \end{cases}$$

Onde p é o preço e q é a quantidade ofertada.

Modelo

Considere um mercado com preço $p(t)$ e quantidade $q(t)$:

$$\begin{cases} \dot{p} = 0.5(100 - 2p - q) \\ \dot{q} = 0.3(p - 20 - q) \end{cases}$$

Onde p é o preço e q é a quantidade ofertada.

Equilíbrios

Resolva $\dot{p} = 0$, $\dot{q} = 0$:

$$100 - 2p - q = 0, \quad p - 20 - q = 0$$

Substitua: $q = p - 20$, então

$$100 - 2p - (p - 20) = 0 \implies 3p = 80 \implies p = \frac{80}{3} \approx 26.67, \\ q = \frac{20}{3} \approx 6.67. \text{ Equilíbrio: } (p^*, q^*) \approx (26.67, 6.67).$$

Análise

Jacobiana do sistema:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial q} \\ \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 0.3 & -0.3 \end{bmatrix}$$

Autovalores: Solução de $\det(J - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & -0.5 \\ 0.3 & -0.3 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \implies \lambda^2 + 1.3\lambda + 0.45 = 0$$

Raízes: $\lambda \approx -0.346 \pm 0.424i$ (parte real negativa, espiral estável).

Análise

Jacobiana do sistema:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial q} \\ \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 0.3 & -0.3 \end{bmatrix}$$

Autovalores: Solução de $\det(J - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & -0.5 \\ 0.3 & -0.3 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \implies \lambda^2 + 1.3\lambda + 0.45 = 0$$

Raízes: $\lambda \approx -0.346 \pm 0.424i$ (parte real negativa, espiral estável).

Interpretação

O equilíbrio (26.67, 6.67) é uma **espiral estável**: preços e quantidades oscilam, mas convergem.

Análise Qualitativa

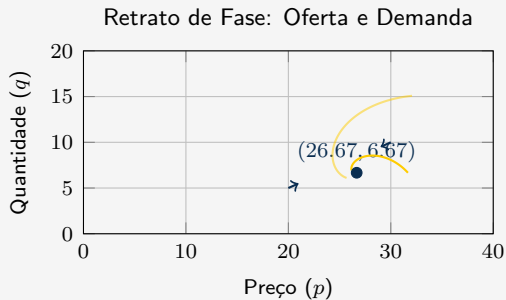
Retratos de Fase

Exemplo Financeiro

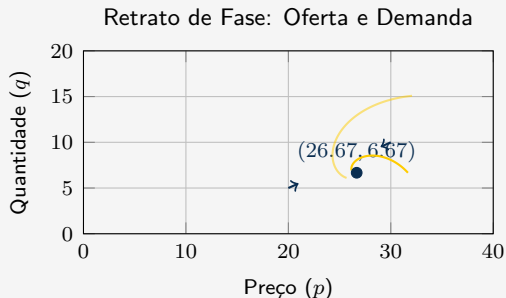
Visualização

Conclusão

Retrato de Fase



Retrato de Fase



Interpretação

O retrato de fase mostra trajetórias espiralando para o equilíbrio, refletindo oscilações em preços e quantidades.

Análise Qualitativa

Retratos de Fase

Exemplo Financeiro

Visualização

Conclusão

Resumo

- Análise qualitativa revela comportamentos sem soluções analíticas.
- Retratos de fase visualizam dinâmicas 2D.
- Exemplo financeiro: Oferta e demanda convergem para um equilíbrio estável.

Resumo

- Análise qualitativa revela comportamentos sem soluções analíticas.
- Retratos de fase visualizam dinâmicas 2D.
- Exemplo financeiro: Oferta e demanda convergem para um equilíbrio estável.

Próxima Sessão

Aplicações práticas em física, biologia e finanças no Capítulo 6.