Sistemas Dinâmicos: Equações Diferenciais Ordinárias

Prof. Ana Isabel C.

June 23, 2025

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

O que são EDOs?

Definição

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação que relaciona uma função $x(t)$ com suas derivadas em relação ao tempo t.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

O que são EDOs?

Definição

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação que relaciona uma função $x(t)$ com suas derivadas em relação ao tempo t.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Classificação

- Ordem: Grau da maior derivada (ex.: 1ª ordem: $\dot{x} = f(x)$).
- Linearidade: Lineares (ex.: $\dot{x} = ax + b$) vs. Não lineares (ex.: $\dot{x} = x^2$).
- Autônomas: $f(t, x) = f(x)$.

O que são EDOs?

Definição

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação que relaciona uma função $x(t)$ com suas derivadas em relação ao tempo t.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Classificação

- Ordem: Grau da maior derivada (ex.: 1ª ordem: $\dot{x} = f(x)$).
- Linearidade: Lineares (ex.: $\dot{x} = ax + b$) vs. Não lineares (ex.: $\dot{x} = x^2$).
- Autônomas: $f(t, x) = f(x)$.

Aplicação em Finanças

Modelam crescimento de portfólios, taxas de juros variáveis e

Sumário

Métodos de Solução

Separação de Variáveis

Para EDOs na forma $\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$:

$$\int \frac{1}{h(x)}\,dx = \int g(t)\,dt$$

Métodos de Solução

Separação de Variáveis

Para EDOs na forma $\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$:

$$\int \frac{1}{h(x)}\,dx = \int g(t)\,dt$$

Exemplo: Crescimento Exponencial

Resolva $\dot{x} = 0,05x$, $x(0) = 1000$.

$$\frac{dx}{x} = 0,05\,dt \implies \int \frac{dx}{x} = \int 0,05\,dt$$

$$\ln|x| = 0,05t + C \implies x = Ce^{0,05t}$$

Com $x(0) = 1000$: $x = 1000e^{0,05t}$.

Métodos de Solução (cont.)

Fator Integrante

Para EDOs lineares de 1ª ordem: $\dot{x} + P(t)x = Q(t)$, use o fator integrante:

$$\mu(t) = e^{\int P(t)\,dt}$$

Solução: $x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)Q(t)\,dt$.

Métodos de Solução (cont.)

Fator Integrante

Para EDOs lineares de 1ª ordem: $\dot{x} + P(t)x = Q(t)$, use o fator integrante:

$$\mu(t) = e^{\int P(t)\,dt}$$

Solução: $x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)Q(t)\,dt$.

Exemplo: Taxa Variável

Resolva $\dot{x} + 0,1x = 50$, $x(0) = 0$.

$$\mu(t) = e^{\int 0,1\,dt} = e^{0,1t}$$

$$xe^{0,1t} = \int 50e^{0,1t}\,dt = 500e^{0,1t} + C$$

$$x = 500 + Ce^{-0,1t}, \quad x(0) = 0 \implies C = -500 \implies x = 500(1 - e^{-0,1t})$$

Sumário

Modelo de Portfólio

Contexto

Um portfólio cresce com taxa de retorno variável: $\dot{x} = (0,06 - 0,001t)x$, $x(0) = 10000$. Representa um mercado com retorno decrescente ao longo do tempo.

Modelo de Portfólio

Contexto

Um portfólio cresce com taxa de retorno variável: $\dot{x} = (0,06 - 0,001t)x$, $x(0) = 10000$. Representa um mercado com retorno decrescente ao longo do tempo.

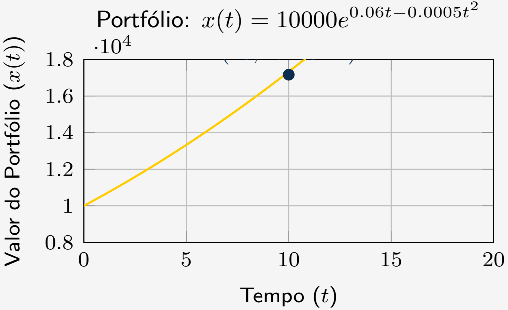
Solução

$$\frac{dx}{x} = (0,06 - 0,001t)\,dt \implies \int \frac{dx}{x} = \int (0,06 - 0,001t)\,dt$$

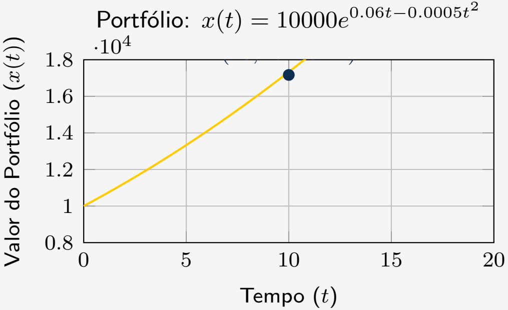
$$\ln|x| = 0,06t - 0,0005t^2 + C \implies x = Ce^{0,06t - 0,0005t^2}$$

Com $x(0) = 10000$: $x = 10000e^{0,06t-0,0005t^2}$. *Resposta*: Após 10 anos, $x(10) \approx 17168,11$.

Visualização



Visualização



Interpretação

O portfólio cresce rapidamente no início, mas a taxa decrescente limita o crescimento a longo prazo.

Sumário

Conclusão

Resumo

- EDOs modelam sistemas dinâmicos contínuos.
- Métodos: Separação de variáveis e fator integrante.
- Aplicação financeira: Crescimento de portfólios com taxas variáveis.

Conclusão

Resumo

- EDOs modelam sistemas dinâmicos contínuos.
- Métodos: Separação de variáveis e fator integrante.
- Aplicação financeira: Crescimento de portfólios com taxas variáveis.

Próxima sessão

Análise de estabilidade de equilíbrios no Capítulo 3.