

# Sistemas Dinâmicos: Aplicações Práticas em Física, Biologia e Finanças

Prof. Ana Isabel C.

June 23, 2025

# Sumário

Física: Pêndulo Amortecido

# Sumário

Física: Pêndulo Amortecido

Biologia: Modelo SIR

# Sumário

Física: Pêndulo Amortecido

Biologia: Modelo SIR

Finanças: Black-Scholes Simplificado

# Sumário

Física: Pêndulo Amortecido

Biologia: Modelo SIR

Finanças: Black-Scholes Simplificado

Visualização

# Sumário

Física: Pêndulo Amortecido

Biologia: Modelo SIR

Finanças: Black-Scholes Simplificado

Visualização

Conclusão

# Sumário

Física: Pêndulo Amortecido

Biologia: Modelo SIR

Finanças: Black-Scholes Simplificado

Visualização

Conclusão

# Pêndulo Amortecido

## Modelo

A dinâmica de um pêndulo com atrito é descrita por:

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + g \sin(\theta) = 0$$

Para ângulos pequenos, linearize:  $\sin(\theta) \approx \theta$ :

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Onde  $b$  é o coeficiente de atrito,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $l$  é o comprimento.



# Pêndulo Amortecido

## Modelo

A dinâmica de um pêndulo com atrito é descrita por:

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + g \sin(\theta) = 0$$

Para ângulos pequenos, linearize:  $\sin(\theta) \approx \theta$ :

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Onde  $b$  é o coeficiente de atrito,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $l$  é o comprimento.

## Aplicação

Usado em engenharia (ex.: suspensão de veículos, relógios).

# Solução

## Exemplo

Para  $b = 0.5$ ,  $g/l = 1$ ,  $\theta(0) = 0.2$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ :

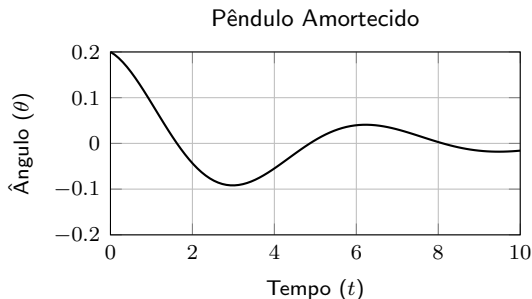
$$\theta(t) = 0.2e^{-0.25t} \cos(\sqrt{0.9375}t)$$

# Solução

## Exemplo

Para  $b = 0.5$ ,  $g/l = 1$ ,  $\theta(0) = 0.2$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ :

$$\theta(t) = 0.2e^{-0.25t} \cos(\sqrt{0.9375}t)$$



# Sumário

Física: Pêndulo Amortecido

**Biologia: Modelo SIR**

Finanças: Black-Scholes Simplificado

Visualização

Conclusão

# Modelo SIR

## Modelo

O modelo SIR descreve a propagação de doenças infecciosas:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I \end{cases}$$

Onde  $S$ : suscetíveis,  $I$ : infectados,  $R$ : recuperados,  $\beta$ : taxa de infecção,  $\gamma$ : taxa de recuperação.

# Modelo SIR

## Modelo

O modelo SIR descreve a propagação de doenças infecciosas:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I \end{cases}$$

Onde  $S$ : suscetíveis,  $I$ : infectados,  $R$ : recuperados,  $\beta$ : taxa de infecção,  $\gamma$ : taxa de recuperação.

## Aplicação

Usado em epidemiologia (ex.: COVID-19, 2020).

# Solução Numérica

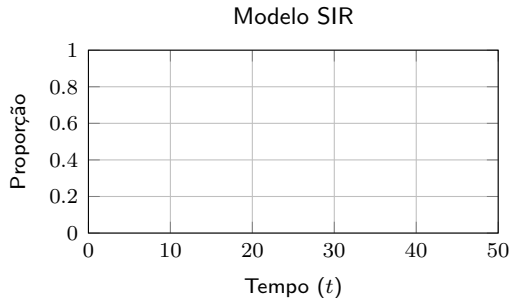
## Exemplo

Para  $\beta = 0.3$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $S(0) = 0.99$ ,  $I(0) = 0.01$ ,  $R(0) = 0$ :

# Solução Numérica

## Exemplo

Para  $\beta = 0.3$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $S(0) = 0.99$ ,  $I(0) = 0.01$ ,  $R(0) = 0$ :





# Sumário

Física: Pêndulo Amortecido

Biologia: Modelo SIR

**Finanças: Black-Scholes Simplificado**

Visualização

Conclusão

# Modelo de Black-Scholes

## Modelo

O preço de uma opção europeia segue a EDO parcial de Black-Scholes, simplificada aqui como uma EDO para volatilidade constante:

$$\dot{V} = rV - \sigma^2 S^2 V_{SS}$$

Onde  $V$ : preço da opção,  $S$ : preço do ativo,  $r$ : taxa de juros,  $\sigma$ : volatilidade.

# Modelo de Black-Scholes

## Modelo

O preço de uma opção europeia segue a EDO parcial de Black-Scholes, simplificada aqui como uma EDO para volatilidade constante:

$$\dot{V} = rV - \sigma^2 S^2 V_{SS}$$

Onde  $V$ : preço da opção,  $S$ : preço do ativo,  $r$ : taxa de juros,  $\sigma$ : volatilidade.

## Aplicação

Usado para precificar derivativos (ex.: opções de ações como GOLL4.SA).

# Solução

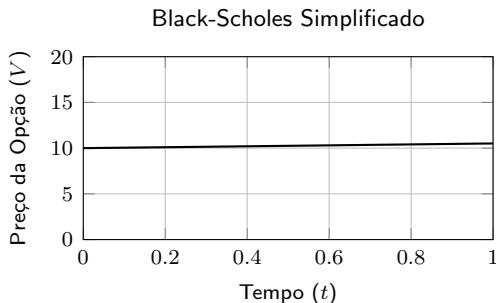
## Exemplo

Para  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.2$ , preço inicial  $S = 100$ , a solução aproximada mostra o valor da opção ao longo do tempo.

# Solução

## Exemplo

Para  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.2$ , preço inicial  $S = 100$ , a solução aproximada mostra o valor da opção ao longo do tempo.



# Sumário

Física: Pêndulo Amortecido

Biologia: Modelo SIR

Finanças: Black-Scholes Simplificado

**Visualização**

Conclusão

# Comparação

## Resumo

Cada área usa sistemas dinâmicos para modelar fenômenos reais:

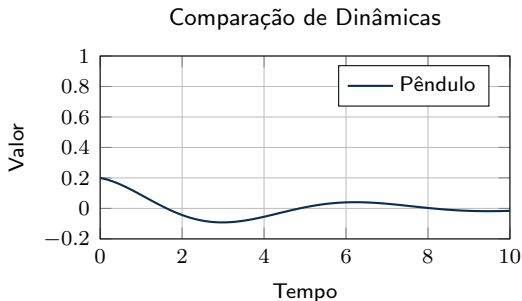
- Física: Oscilações amortecidas.
- Biologia: Propagação de doenças.
- Finanças: Precificação de ativos.

# Comparação

## Resumo

Cada área usa sistemas dinâmicos para modelar fenômenos reais:

- Física: Oscilações amortecidas.
- Biologia: Propagação de doenças.
- Finanças: Precificação de ativos.





# Sumário

Física: Pêndulo Amortecido

Biologia: Modelo SIR

Finanças: Black-Scholes Simplificado

Visualização

Conclusão

# Conclusão

## Resumo

- Física: Pêndulo amortecido modela oscilações.
- Biologia: Modelo SIR prevê epidemias.
- Finanças: Black-Scholes precifica opções.

# Conclusão

## Resumo

- Física: Pêndulo amortecido modela oscilações.
- Biologia: Modelo SIR prevê epidemias.
- Finanças: Black-Scholes precifica opções.

## Próxima Sessão

Simulações numéricas e visualizações em Python no Capítulo 7.