

Sistemas Dinâmicos: Estabilidade de Equilíbrios

Prof. Ana Isabel C.

June 23, 2025

Pontos de Equilíbrio

Pontos de Equilíbrio

Estabilidade

Pontos de Equilíbrio

Estabilidade

Exemplo Financeiro

Pontos de Equilíbrio

Estabilidade

Exemplo Financeiro

Visualização

Pontos de Equilíbrio

Estabilidade

Exemplo Financeiro

Visualização

Conclusão

Pontos de Equilíbrio

Estabilidade

Exemplo Financeiro

Visualização

Conclusão

Definição

Um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é um estado \mathbf{x}^* tal que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$$

Nesse ponto, o sistema permanece constante se não for perturbado.

Pontos de Equilíbrio

Definição

Um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é um estado \mathbf{x}^* tal que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$$

Nesse ponto, o sistema permanece constante se não for perturbado.

Como Encontrar

Resolva o sistema de equações $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$. Exemplo: Para $\dot{x} = x(1 - x)$, os equilíbrios são $x = 0$ e $x = 1$.

Pontos de Equilíbrio

Definição

Um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é um estado \mathbf{x}^* tal que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$$

Nesse ponto, o sistema permanece constante se não for perturbado.

Como Encontrar

Resolva o sistema de equações $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$. Exemplo: Para $\dot{x} = x(1 - x)$, os equilíbrios são $x = 0$ e $x = 1$.

Aplicação em Finanças

Equilíbrios representam preços estáveis em mercados ou taxas de retorno constantes.

Pontos de Equilíbrio

Estabilidade

Exemplo Financeiro

Visualização

Conclusão

Classificação de Equilíbrios

Tipos de Estabilidade

- **Estável:** O sistema retorna ao equilíbrio após pequenas perturbações.
- **Instável:** Pequenas perturbações afastam o sistema do equilíbrio.
- **Sela:** Estável em algumas direções, instável em outras.

Classificação de Equilíbrios

Tipos de Estabilidade

- **Estável**: O sistema retorna ao equilíbrio após pequenas perturbações.
- **Instável**: Pequenas perturbações afastam o sistema do equilíbrio.
- **Sela**: Estável em algumas direções, instável em outras.

Linearização

Para analisar a estabilidade, linearize o sistema em torno de \mathbf{x}^* usando a matriz Jacobiana:

$$J = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}^*}$$

Os autovalores de J determinam a estabilidade:

- Todos negativos ou com parte real negativa: Estável.

Pontos de Equilíbrio

Estabilidade

Exemplo Financeiro

Visualização

Conclusão

Estabilidade de Preços em um Mercado

Modelo

Considere um mercado com preço $p(t)$ e excesso de demanda $D(p) - S(p)$. A dinâmica é:

$$\dot{p} = k(D(p) - S(p)), \quad D(p) = 100 - 2p, \quad S(p) = 3p$$

Onde $k > 0$ é a velocidade de ajuste.

Estabilidade de Preços em um Mercado

Modelo

Considere um mercado com preço $p(t)$ e excesso de demanda $D(p) - S(p)$. A dinâmica é:

$$\dot{p} = k(D(p) - S(p)), \quad D(p) = 100 - 2p, \quad S(p) = 3p$$

Onde $k > 0$ é a velocidade de ajuste.

Pontos de Equilíbrio

Encontre p^* tal que $D(p^*) = S(p^*)$:

$$100 - 2p = 3p \implies 5p = 100 \implies p^* = 20$$

O preço de equilíbrio é $p^* = 20$.

Estabilidade de Preços em um Mercado

Modelo

Considere um mercado com preço $p(t)$ e excesso de demanda $D(p) - S(p)$. A dinâmica é:

$$\dot{p} = k(D(p) - S(p)), \quad D(p) = 100 - 2p, \quad S(p) = 3p$$

Onde $k > 0$ é a velocidade de ajuste.

Pontos de Equilíbrio

Encontre p^* tal que $D(p^*) = S(p^*)$:

$$100 - 2p = 3p \implies 5p = 100 \implies p^* = 20$$

O preço de equilíbrio é $p^* = 20$.

Estabilidade

Linearize: $\dot{p} = k(100 - 2p - 3p) = k(100 - 5p)$.

Significado

O preço $p = 20$ é estável: se o preço sobe ou desce, a dinâmica do mercado (excesso de oferta ou demanda) o ajusta de volta a $p = 20$.

Significado

O preço $p = 20$ é estável: se o preço sobe ou desce, a dinâmica do mercado (excesso de oferta ou demanda) o ajusta de volta a $p = 20$.

Exemplo Real

Em mercados financeiros, preços de ações tendem a equilíbrios estáveis quando oferta e demanda se balanceiam, mas choques (ex.: notícias) podem criar instabilidade temporária.

Pontos de Equilíbrio

Estabilidade

Exemplo Financeiro

Visualização

Conclusão

Diagrama de Fase

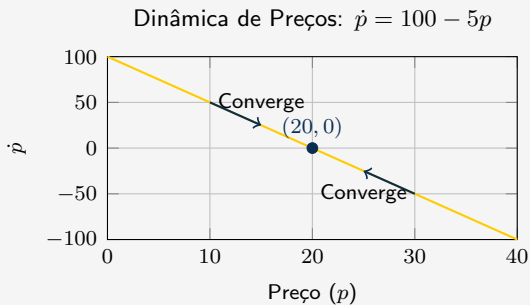
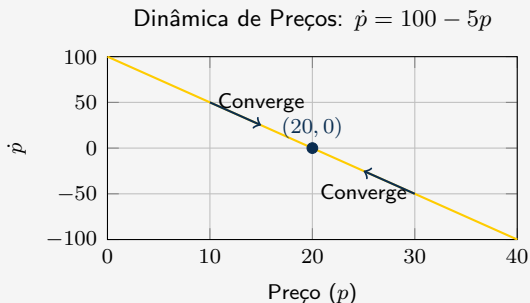


Diagrama de Fase



Interpretação

O diagrama mostra que $p = 20$ é um atrator: preços acima ou abaixo convergem para o equilíbrio.

Pontos de Equilíbrio

Estabilidade

Exemplo Financeiro

Visualização

Conclusão

Resumo

- Pontos de equilíbrio são estados estacionários.
- Estabilidade é determinada pelos autovalores da Jacobiana.
- Exemplo financeiro: Preços de mercado tendem a equilíbrios estáveis.

Resumo

- Pontos de equilíbrio são estados estacionários.
- Estabilidade é determinada pelos autovalores da Jacobiana.
- Exemplo financeiro: Preços de mercado tendem a equilíbrios estáveis.

Próxima sessão

Sistemas não lineares e caos no Capítulo 4.