Resolução:Q1

Dada a função: temos que,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -e^{x}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

e sua transformada de Fourier

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{-i\xi}{1+\xi^2},$$

queremos verificar se é válida a igualdade:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi \sin(\xi x)}{1+\xi^2} \, d\xi.$$

Sabemos que, para funções ímpares, a fórmula de inversão da transformada de Fourier é:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im}\left(\mathcal{F}f(\xi)\right) \sin(\xi x) \, d\xi,$$

onde Im denota a parte imaginária.

Calculando a parte imaginária:

$$\operatorname{Im}\left(\mathcal{F}f(\xi)\right) = -\frac{\xi}{1+\xi^2}.$$

Substituindo:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(-\frac{\xi}{1+\xi^2}\right) \sin(\xi x) \, d\xi,$$

ou seja:

$$f(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi \sin(\xi x)}{1+\xi^2} \, d\xi.$$

Comparando com a expressão fornecida no enunciado:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi \sin(\xi x)}{1+\xi^2} \, d\xi,$$

percebemos que:
- Não há o sinal de menos, e - O fator de $\frac{2}{\pi}$ foi substituído por $\frac{1}{\pi}$.

Portanto: A afirmativa é **Falsa**.

Resolução:Q2
Dada a função

$$h(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0, \\ -5e^{4x}, & x < 0, \end{cases}$$

queremos calcular a sua transformada de Fourier.
Sabemos que:

$$\mathcal{F}[e^{-ax}\mathbf{1}_{x\geq 0}](w) = \frac{1}{a+iw}, \quad \mathcal{F}[e^{ax}\mathbf{1}_{x<0}](w) = \frac{1}{a-iw}.$$

Assim, a transformada de Fourier de $h(x)$ é:

$$\mathcal{F}[h(x)](w) = 2 \times \frac{1}{2+iw} - 5 \times \frac{1}{4-iw}.$$

Comparando com o enunciado:

$$2\left(\frac{1}{2+iw} + \frac{5}{4+iw}\right),$$

observamos que:

- Deveria haver uma subtração, não uma adição;
- O segundo denominador correto é $4 - iw$, não $4 + iw$.

Portanto: A afirmativa é **Falsa**.