Ejercicios de álgebra lineal

1. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones determinar si existe solución única, infinitas o ninguna solución.

   a) $\begin{cases} 3x+4y-2z=1 \\ x+y+z=1 \\ -x-3y+5z=1 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} 4x-7y+11z=0 \\ x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x+4y-3z=2 \\ 3x+3y-z=0 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x+4y-3z=3 \\ 3x+3y-z=2 \end{cases}$

2. Dadas las matrices

   $$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   calcular, cuando sea posible, las siguientes operaciones:

   a) $A\cdot B$

   b) $B\cdot A$

   c) $B\cdot C$

   d) $B\cdot C^T$

   e) $A\cdot A^T$

   f) $A^T\cdot A$

   g) $A+B$

   h) $A+C^T$

   i) $2A$

3. Calcular el determinante de las siguientes matrices, y si es posible determinar su inversa.

   a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

   b) $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

   c) $C=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$

   d) $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones a través del cálculo de la inversa de la matriz asociada:

   a) $\begin{cases} x+y=2 \\ 5x+6y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 5x+6y=1 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x+3y+z=0 \\ 2x+2y+z=-1 \\ 2x+3y+z=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+3y+z=4 \\ 2x+2y+z=-1 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases}$

5. Dados los vectores $\mathbf{v} = (1, -2)$ y $\mathbf{w} = (2, 3)$, calcular y representar gráficamente cada uno de los siguientes vectores:

   a) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ c) $3\mathbf{v}$

   b) $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ d) $\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{w}$

6. Representar las siguientes rectas en la forma $t\,\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

   a) La recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

   b) La recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$ $(0, 0, 1)$.

   c) La recta en $\mathbb{R}^3$ paralela a $(1, 2, 0)$ que pasa por el punto $(1, 1, 1)$.

7. Representar los siguientes planos en $\mathbb{R}^3$ en forma $s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v} + \mathbf{w}$, donde s y t son números reales.

   a) el plano paralelo a los vectores $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$ que pasa por el origen.

   b) el plano paralelo a los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ que pasa por el punto $(0, 0, 1)$.

   c) el plano que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

8. Determinar si los siguientes pares de vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son o no ortogonales. En cada caso calcular el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

   a) $\mathbf{v} = (6, 2), \quad \mathbf{w} = (-3, 1)$ c) $\mathbf{v} = (-2, -2, -2), \quad \mathbf{w} = (1, 1, 1)$

   b) $\mathbf{v} = (-1, 3, 2), \quad \mathbf{w} = (4, 2, -1)$ d) $\mathbf{v} = (-4, 6, -1, 1), \quad \mathbf{w} = (1, 1, -6, 4)$

9. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores forman una base de $\mathbb{R}^2$:

a) $\{(2,1),\ (3,0)\}$ *b*) $\{(1,2),\ (0,3),\ (0,7)\}$ *c*) $\{(1,2),\ (-2,-4)\}$

10. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$:

    a) $\{1,0,-1),\ (1,2,1),\ (0,3,-2)\}$
    b) $\{(-1,3,2),\ (6,1,3)\}$
    c) $\{(1,2,3),\ (1,2,-1),\ (1,2,1)\}$
    d) $\{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$

11. Encontrar las coordenadas en la base $\beta = \{(1,1),\ (1,-1)\}$ del vector indicado:

    a) $\mathbf{v} = (1,0)$ *b*) $\mathbf{w} = (0,1)$ *c*) $\mathbf{u} = (1,-1)$

12. Encontrar las coordenadas $[\mathbf{v}]_\beta$ y $[\mathbf{v}]_\gamma$ del vector $\mathbf{v} = (2,-1,3)$ en las bases:

    a) $\beta = \{(1,0,0),\ (2,2,0),\ (3,3,3)\}$ *b*) $\gamma = \{(1,0,1),\ (0,1,0),\ (-1,-1,0)\}$

13. Considerar la base canónica $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B} = \{(2,1),(-3,4)\}$.

    a) Dar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
    b) Dar la matriz de cambio de base de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.
    c) Calcular $[\mathbf{w}]_\mathcal{B}$ para $\mathbf{w} = (-3,5)$.

14. Para cada una de las siguientes matrices:

    a) Escribir el polinomio característico.
    b) Calcular los autovalores reales y el autoespacio asociado a cada uno de ellos.
    c) Determinar si son diagonalizables, y en tal caso determinar la matriz P que diagonaliza.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$$