Modelos y Simulación

Resolución Ejercicio 11 - Guía 5

Sea X una variable aleatoria que tiene distribución de Cauchy con parámetro $\lambda = 1$. Entonces, su función densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\pi\,(1+x^2)}, \qquad x \in R \tag{1}$$

Item a)-i): Pruebe que el conjunto $C_f = \{(u,v) \mid 0 < u < \sqrt{f(v/u)}\}$ es el semicírculo derecho centrado en $(0,0)$ de radio $\sqrt{1/\pi}$.

Si $(u,v) \in C_f$ entonces

$$0 < u^2 < f(v/u) = \frac{1}{\pi\,(1+\left(\frac{v}{u}\right)^2)} = \frac{u^2}{\pi(u^2+v^2)}$$

si y sólo si

$$\pi(u^2+v^2) < 1 \quad \text{ y } \quad 0 < u$$

si y sólo si,

$$\sqrt{(u^2+v^2)} < \sqrt{\frac{1}{\pi}} \quad \text{ y } \quad 0 < u$$

Es decir, (u,v) dista del $(0,0)$ en a lo sumo $\sqrt{1/\pi}$, lo que significa que (u,b) está en el semicírculo derecho centrado en $(0,0)$ de radio $\sqrt{1/\pi}$.

Item b): Pruebe que si X tiene distribución de Cauchy con parámetro 1, entonces $\lambda\,X$ tiene distribución de Cauchy con parámetro λ.

Si X tiene distribución Cauchy de parámetro 1, entonces su función de densidad es la dada en (1) y su correspondiente función de distribución acumulada es $F_X(x) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right)$.

Veamos como es la distribución de la variable λX.

$F_{\lambda X}(z) = P(\lambda X \le z) = P(X \le z/\lambda) = F_X(z/\lambda) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(z/\lambda) + \frac{\pi}{2}\right)$. La cual es la función de distribución acumulada de una variable con distribución Cauchy de parámetro λ.