Modelos y Simulación

Resolución Ejercicio 2-a - Guía 3

El juego es el siguiente:
Se simula $U \sim U(0,1)$. Si $U < \frac{1}{2}$, se simulan $W_i \sim U(0,1)$ con $i = 1,2$ y se define $X = W_1 + W_2$. Si $U \geq \frac{1}{2}$, se simulan $W_i \sim U(0,1)$ con $i = 1,2,3$ y se define $X = W_1 + W_2 + W_3$.
Se gana el juego si $X \geq 1$.

Queremos calcular la probabilidad de ganar, es decir, $P(X \geq 1) =?$.

Usando el teorema de probabilidad total, esta probabilidad se puede plantear de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= P(X \geq 1 | X = W_1 + W_2).P(X = W_1 + W_2) + P(X \geq 1 | X = W_1 + W_2 + W_3).P(X = W_1 + W_2 + W_3) \\
&= P(W_1 + W_2 \geq 1).P(U < 1/2) + P(W_1 + W_2 + W_3 \geq 1).P(U \geq 1/2) \\
&= (1 - F_{W_1+W_2}(1)).F_U(1/2) + (1 - F_{W_1+W_2+W_3}(1)).(1 - F_U(1/2))
\end{aligned}
$$

Luego, nos interesa conocer $F_U(1/2)$, $F_{W_1+W_2}(1)$, $F_{W_1+W_2+W_3}(1)$.

- F_U ya la conocemos porque es la función de distribucuión acumulada de una variable que distribuye uniforme. Es decir, $F_U(x) = x$ cuando $x \in (0,1)$. Entonces como $1/2 \in (0,1)$, $F_U(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

- $F_{W_1+W_2}(1) = \int_{-\infty}^{1} f_{W_1+W_2}(x)dx$. Es decir, nos interesa conocer $f_{W_1+W_2}(x)$ cuando $\boldsymbol{-\infty < x \leq 1}$.
  Como W_1, W_2 son independientes, calcular $f_{W_1+W_2}$ es equivalente a realizar la convolución de las densidades marginales f_{W_1} y f_{W_2}.
  Luego,
  $$f_{W_1+W_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W_1}(t) f_{W_2}(x-t)dt$$
  Aquí hay que destacar que para que $f_{W_1+W_2}(x) > 0$, debe ocurrir que $f_{W_1}(t) > 0$ y $f_{W_2}(x-t) > 0$; y esto ocurre si y sólo si $t > 0$ y $x - t > 0$, es decir, $\boldsymbol{0 < t}$ y $\boldsymbol{t < x}$.

  - Si $\boldsymbol{x \leq 0}$, entonces $t < x \leq 0$ y $f_{W_1}(t) = 0$. Luego, $f_{W_1+W_2}(x) = 0$
  - Si $\boldsymbol{0 < x \leq 1}$, entonces $0 < t < x$ y resulta $f_{W_1}(t) = 1$ y $f_{W_2}(x-t) = 1$. Luego
  $$f_{W_1+W_2}(x) = \int_0^x 1dt = x.$$

  Por lo tanto, $F_{W_1+W_2}(1) = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$.

- Análogamente, $F_{W_1+W_2+W_3}(1) = \int_{-\infty}^{1} f_{W_1+W_2+W_3}(x)dx$. Es decir, nos interesa conocer $f_{W_1+W_2+W_3}(x)$ cuando $\boldsymbol{-\infty < x \leq 1}$.
  Como W_1, W_2, W_3 son independientes, calcular $f_{(W_1+W_2)+W_3}$ es equivalente a realizar la convolución de las densidades marginales $f_{W_1+W_2}$ y f_{W_3}.
  Luego,
  $$f_{(W_1+W_2)+W_3}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W_1+W_2}(t) f_{W_3}(x-t)dt$$
  Aquí hay que destacar que para que $f_{W_1+W_2+W_3}(x) > 0$, debe ocurrir que $f_{W_1+W_2}(t) > 0$ y $f_{W_3}(x-t) > 0$; y esto ocurre si y sólo si $t > 0$ y $x - t > 0$, es decir, $\boldsymbol{0 < t}$ y $\boldsymbol{t < x}$.

- Si $\boldsymbol{x \leq 0}$, entonces $t < x \leq 0$ y $f_{W_1+W_2}(t) = 0$. Luego, $f_{W_1+W_2+W_3}(x) = 0$
- Si $\mathbf{0} < \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}$, entonces $0 < t < x$ y resulta $f_{W_1+W_2}(t) = t$ y $f_{W_2}(x-t) = 1$. Luego

$$f_{W_1+W_2+W_3}(x) = \int_0^x t dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

Por lo tanto, $F_{W_1+W_2+W_3}(1) = \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6}|_0^1 = \frac{1^3}{6} = \frac{1}{6}$.

Finalmente, la probabilidad que queremos calcular es

$$P(X \geq 1) = (1 - \frac{1}{2}).\frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{6}).(1 - \frac{1}{2}) = \mathbf{\frac{2}{3}}.$$