PRÁCTICO 8

CADENAS DE MARKOV

Ejercicio 1: La Figura 1 muestra el diagrama de transición de una cadena de Markov. Dar la matriz de transición, y determinar:

a) $P(X_4 = 2 \mid X_3 = 1)$ y $P(X_3 = 1 \mid X_2 = 1)$.

b) $P(X_4 = 2 \mid X_1 = 1)$ y $P(X_4 = 2 \mid X_0 = 1)$.

c) Si se sabe que $P(X_0 = 0) = \frac{1}{3}$, dar $P(X_0 = 0, X_1 = 1)$ y $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2)$.

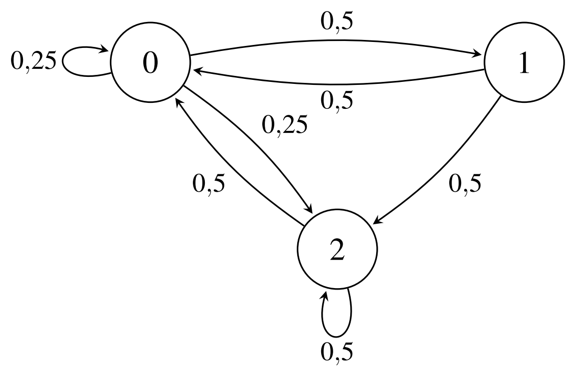

Figura 1: Ejercicio 1

Ejercicio 2: Considerar la cadena de Markov con tres estados: $S = \{0, 1, 2\}$ que tiene la siguiente matriz de transición:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dar el diagrama de transición de la cadena.

b) Si conocemos $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 1) = \frac{1}{4}$, determinar $P(X_0 = 2, X_1 = 1, X_2 = 0)$.

c) Dar las probabilidades de transición en dos pasos.

Ejercicio 3. Considerar una cadena de Markov con dos posibles estados: $S = \{0, 1\}$. Suponer que $P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0) = \frac{1}{2}$ y $P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) = \frac{2}{3}$.

a) Dar la matriz de transición y el diagrama de transición.

b) Determinar la probabilidad de que la cadena esté en el estado 1 en $n = 3$ dado que $X_0 = 1$.

Ejercicio 4. Una pulga salta aleatoriamente sobre vértices de un triángulo, cambiando siempre de vértice, y donde todos los saltos son igualmente probables. Calcular la probabilidad de que en n saltos la pulga vuelva al mismo vértice.

Otra pulga también salta sobre los vértices del triángulo, pero con el doble de probabilidad de ir en sentido horario que antihorario. ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al vértice donde comenzó?

Ejercicio 5. Dada la cadena de Markov de la Figura 2:

a) Determinar las clases comunicantes.

b) Dar los subconjuntos cerrados.

c) Indicar si es una cadena irreducible.

d) Determinar los estados transitorios, recurrentes y periódicos.

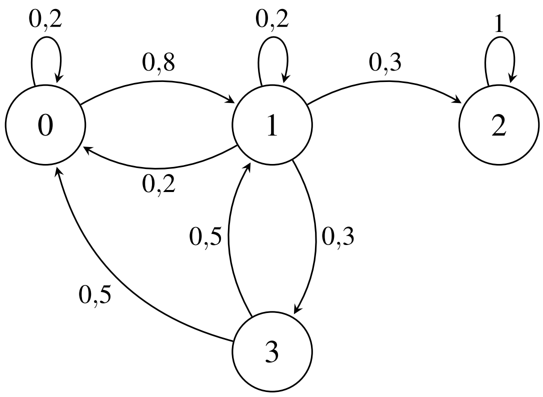

Figura 2: Ejercicio 2

Ejercicio 6. Considerar una cadena de Markov con estados $S = \{0,1,2,3,4\}$ y matriz de transición:

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0
1	0,25	0	0,75	0	0
2	0	0,5	0	0,5	0
3	0	0	0,75	0	0,25
4	0	0	0	1	0

a) Determinar las clases comunicantes, estados recurrentes, transitorios, absorbentes y estacionarios, si los hubiere.

b) Dar los subconjuntos cerrados irreducibles, e indicar si la cadena es irreducible.

Ejercicio 7. Para la cadena de Markov dada en la Figura 3, calcular:

a) La probabilidad de alcanzar el estado j dado que $X_0 = 0$, para $j = 0,1,2$.

b) El tiempo medio de alcance del estado j, dado que $X_0 = 0$, para $j = 0,1,2$.

c) El tiempo medio de retorno al estado 0.

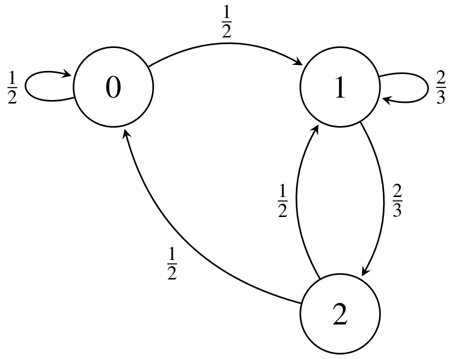

Figura 3:

Ejercicio 8. Para las siguientes cadenas de Markov, determinar:

a) Estados recurrentes, transitorios, absorbentes y periódicos.

b) Clases comunicantes y subconjuntos cerrados.

c) Para el estado $\{0\}$ determinar probabilidades de alcance, tiempo medio de alcance y tiempo medio de retorno.

d) Distribución estacionaria, e indicar si coinciden con la distribución límite.