Modelos y Simulación

Resolución Ejercicio 10 - Guía 5

Sea D un disco centrado en (a, b) de radio 1, es decir:

$$D = \{(x, y) \in R^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq 1\}$$

Luego, como (X, Y) está unifomemente distribuida en D, ocurre que $P((X, Y) \in D) = 1$.

Llamemos D_r al disco centrado en (a, b) de radio r, es decir,

$$D_r = \{(x, y) \in R^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq r\}.$$

Entonces,

$$P((X, Y) \in D_r) = \frac{\text{Área } D_r}{\text{Área } D} = \frac{2\pi r^2}{2\pi} = r^2.$$

Sea $R^2 = (X-a)^2 + (Y-b)^2$ (R es la variable distancia de (X, Y) al centro (a, b) del disco).

Queremos ver como distribuye R^2 y para ello es necesario conocer su función de distribución acumulada F_{R^2}.

- Si $\boldsymbol{0 < z \leq 1}$,

$$\begin{aligned} F_{R^2}(z) &= P(R^2 \leq z) = P((X-a)^2 + (Y-b)^2 \leq z) = P(\sqrt{(X-a)^2 + (Y-b)^2} \leq \sqrt{z}) \\ &= P((X, Y) \in D_{\sqrt{z}}) = \frac{\text{Área} D_{\sqrt{z}}}{\text{Área} D} = \frac{2\pi(\sqrt{z})^2}{2\pi} = z. \end{aligned}$$

- Si $\boldsymbol{z \leq 0}$,

$$F_{R^2}(z) = P(R^2 \leq z) = P(\emptyset) = 0.$$

- Si $\boldsymbol{1 < z}$,

$$F_{R^2}(z) = P(R^2 \leq z) = P(R^2 \leq 1) = P((X, Y) \in D) = 1.$$

Luego,

$$F_{R^2}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0; \\ z & \text{si } 0 < z \leq 1; \\ 1 & \text{si } 1 < z \end{cases}$$

Es decir, R^2 distribuye como una variable uniforme en $(0, 1)$.