

PRÁCTICA 4

GENERACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS.

Ejercicio 1. Se baraja un conjunto de $n = 100$ cartas (numeradas consecutivamente del 1 al 100) y se extrae del mazo una carta por vez. Consideramos que ocurre un “éxito” si la i -ésima carta extraída es aquella cuyo número es i ($i = 1, \dots, n$).

- a) Calcule la probabilidad de que
 - (i) las primeras r cartas sean coincidencias y dé su valor para $r = 10$.
 - (ii) haya exactamente r coincidencias y estén en las primeras r cartas. Dé su valor para $r = 10$.
- b) Pruebe que $E(X) = Var(X) = 1$ donde X es el número de coincidencias obtenidas en una baraja de n cartas.
- c) Escriba un programa de simulación para estimar la esperanza y la varianza del número total de éxitos, y de los eventos del inciso (a) con $r = 10$, y compare los resultados obtenidos con 100, 1000, 10000 y 100000 iteraciones.

Use el archivo “Problemas de coincidencias” para guiarse.

Ejercicio 2. Se desea construir una aproximación de:

$$\sum_{k=1}^N \exp\left(\frac{k}{N}\right) \text{ donde } N = 10000.$$

- a) Escriba un algoritmo para estimar la cantidad deseada.
- b) Obtenga la aproximación sorteando 100 números aleatorios.
- c) Escriba un algoritmo para calcular la suma de los primeros 100 términos, y compare el valor exacto con las dos aproximaciones, y el tiempo de cálculo.

Ejercicio 3. Se lanzan simultáneamente un par de dados legales y se anota el resultado de la suma de ambos. El proceso se repite hasta que todos los resultados posibles: $2, 3, \dots, 12$ hayan aparecido al menos una vez. Estudiar mediante una simulación la variable N , el número de lanzamientos necesarios para cumplir el proceso. Cada lanzamiento implica arrojar *el par* de dados.

- a) Describa la estructura lógica del algoritmo que permite simular en computadora el número de lanzamientos necesarios para cumplir el proceso.
- b) Mediante una implementación en computadora,
 - (i) estime el valor medio y la desviación estándar del número de lanzamientos, repitiendo el algoritmo: 100, 1000, 10000 y 100000 veces.
 - (ii) estime la probabilidad de que N sea por lo menos 15 y la probabilidad de que N sea a lo sumo 9, repitiendo el algoritmo: 100, 1000, 10000 y 100000.

Ejercicio 4. Una variable aleatoria X tiene una función de probabilidad puntual $p_i = P(X = i)$ dada por

$$p_0 = 0.15, \quad p_1 = 0.20, \quad p_2 = 0.10, \quad p_3 = 0.35, \quad p_4 = 0.20$$

- Describir mediante un pseudocódigo un algoritmo que simule X utilizando el método de la transformada inversa y que minimice el número esperado de búsquedas.
- Describir mediante un pseudocódigo un algoritmo que simule X utilizando el método de aceptación y rechazo con una variable soporte Y con distribución uniforme discreta. Indicar cuál es la distribución uniforme discreta que optimiza el número de simulaciones por el método de aceptación y rechazo y por qué.
- Compare la eficiencia de los dos algoritmos realizando 10000 simulaciones.

Ejercicio 5. Implemente tres métodos para generar una variable X que toma los valores del 1 al 10, con probabilidades $p_1 = 0.11$, $p_2 = 0.14$, $p_3 = 0.09$, $p_4 = 0.08$, $p_5 = 0.12$, $p_6 = 0.10$, $p_7 = 0.09$, $p_8 = 0.07$, $p_9 = 0.11$, $p_{10} = 0.09$ usando:

- Método de rechazo con una uniforme discreta.
- Transformada inversa.
- Método de la urna: utilizar un arreglo A de tamaño 100 donde cada valor i está en exactamente $p_i * 100$ posiciones. El método debe devolver $A[k]$ con probabilidad 0.01. ¿Por qué funciona?

Compare la eficiencia de los tres algoritmos realizando 10000 simulaciones.

Ejercicio 6. Implemente dos métodos para generar una binomial $Bin(n, p)$:

- Usando transformada inversa.
- Simulando n ensayos con probabilidad de éxito p y contando el número de éxitos.

Para ambos métodos:

- Compare la eficiencia de ambos algoritmos para $n = 10$ y $p = 0.3$, evaluando el tiempo necesario para realizar 10000 simulaciones.
- Estime el valor con mayor ocurrencia y la proporción de veces que se obtuvieron los valores 0 y 10 respectivamente.
- Compare estos valores con las probabilidades teóricas de la binomial. Si están alejados, revise el código.

Ejercicio 7. Estime $P(Y > 2)$ con $\lambda = 0.7$, y 1000 repeticiones para la variable Poisson simulando con método de transformada inversa común e inversa mejorado.

Ejercicio 8.

- Desarrolle el método de la Transformada Inversa y el de Rechazo para generar una variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = i) = \frac{\frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}}{\sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}} \quad (i = 0, \dots, k)$$

- b) Estime $P(X > 2)$ con $k = 10$ y $\lambda = 0.7$, y 1000 repeticiones. Compare con el valor exacto.
- c) Generalice el problema escribiendo un pseudocódigo para el método de rechazo para cualquier variable truncada usando como soporte a la variable original.

Ejercicio 9.

- (a) Desarrolle un método para generar una variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{j-1}}}{3^j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

- (b) Estime $E(X)$ con 1000 repeticiones y compare con la esperanza exacta.

Ejercicio 10. Implemente dos métodos para simular una variable geométrica $Geom(p)$:

- a) Usando transformada inversa y aplicando la fórmula recursiva para $P(X = i)$.
- b) Simulando ensayos con probabilidad de éxito p hasta obtener un éxito.

Compare la eficiencia de estos algoritmos para $p = 0.8$ y para $p = 0.2$.

Para cada caso, realice 10000 simulaciones y calcule el promedio de los valores obtenidos. Compare estos valores con el valor esperado de la distribución correspondiente. Si están alejados, revise el código.

Ejercicio 11. Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es $P(X = j) = p_j$ con $j = 1, 2, \dots$. Sea:

$$\lambda_n = P(X = n | X > n - 1) = \frac{p_n}{1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_j}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Las cantidades λ_n , son las tasas discretas de riesgo. Considerando a X como el tiempo (discreto) de vida de algún artículo, λ_n representa la probabilidad de que habiendo sobrevivido hasta el tiempo $n - 1$, muera en el tiempo n .

- a) Muestre que $p_1 = \lambda_1$ y que

$$p_n = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \cdots (1 - \lambda_{n-1})\lambda_n$$

Método de la tasa discreta de riesgo para simular variables aleatorias discretas: Se genera una sucesión de números aleatorios que termina cuando el n -ésimo número generado es menor que λ_n . El algoritmo puede escribirse como sigue:

Paso 1: $X = 1$

Paso 2: Generar U

Paso 3: Si $U < \lambda_X$, devolver X y terminar.

Paso 4: $X = X + 1$

Paso 5: Ir al Paso 2

- b) Muestre que los valores de X que genera este proceso tienen la distribución de probabilidad deseada.
- c) Suponga que X es una variable aleatoria geométrica con parámetro p :

$$P(X = n) = p(1 - p)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Determine los valores de $\lambda_n, n \geq 1$. Explique cómo funciona el algoritmo anterior en este caso y por qué es evidente su validez.

Ejercicio 12. ¿Qué distribución tiene la variable simulada por el siguiente algoritmo?

```
def QueDevuelve(p1, p2):  
    X = int(np.log(1-random())/np.log(1-p1))+1  
    Y = int(np.log(1-random())/np.log(1-p2))+1  
    return min(X, Y)
```

Escriba otro algoritmo que utilice un único número aleatorio (`random()`) y que simule una variable con la misma distribución que la simulada por `QueDevuelve(0.05, 0.2)`.