REDES NEURONALES

2022

Clase 3 Parte 2

Facultad de Matemática, Astronomía, Física
Universidad Nacional de Córdobas

Martes 23 de agosto

http://www.famaf.unc.edu.ar/~ftamarit/redes2022

https://www.famaf.unc.edu.ar/course/view.php?id=981

SISTEMAS DINÁMICOS

Un sistema dinámico para nosotros es cualquier sistema físico cuyo estado evoluciona en el tiempo. Si bien nos interesará especialmente cómo evolucionan los estados de las neuronas, lo que aprendamos tendrá una aplicación muy general, y si bien estos estudios surgieron como una subdisciplina de la matemática inspirados en el,mecanicismo de la física, veremos que estas ideas se aplican a muchas disciplinas, entre ellas la biología, la ingeniería y la economía. Veremos cómo pueden aportar los,sistemas dinámicos a la neurociencia teórica y computacional.

Hay dos tipos de sistemas dinámicos:

- Sistemas dinámicos continuos: las variables que describen el estado del sistema toman valores continuos y sus razones de cambio se riegen por ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t)\,(1 - x(t))$$

El tiempo, que es la variable independiente, es entonces continuo.

- Sistemas dinámicos discretos: las variables que describen el estado del sistema se describen por relaciones de recurrencia. La variable independiente, el tiempo, es discreto. Las variables del estado del sistema pueden ser discretas o continuas. Si son continuas tendremos un difeomorfismo. Veamos un ejemplo:

$$x(t+1) = a\,x(t)\,(1 - x(t)).$$

En ambos casos las variables de estado son números reales.

Nosotros nos dedicaremos al estudio de sistemas dinámicos continuos y veremos un solo ejemplo, muy instructivo, de difeomorfismos.

Nos concentremos por un momento en sistemas cuyos estados están descriptos por una única variable continua x. Esta variable cambia con el tiempo, por lo tanto, para conocer la dinámica del sistema debemos conocer la función $x(t)$ para cierto dominio D de la variable t. Entonces:

$$t \in \mathbb{R}$$

$$x(t) \in \mathbb{R}$$

Tener un modelo, para la física, es tener una ecuación que nos permita deducir o aproximar la función *x(t)*. Y en general lo único que podemos deducir es cómo depende la razón de cambio de *x* del tiempo *t*. Deducir cómo depende la razón de cambio de x y de t es algo bastante accesible para expertos y expertas.

El artefacto matemático que nos permite conocer o aproximar x(t) es la ecuación diferencial ordinaria, que tiene la forma general:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t)$$

el tiempo puede aparecer explícitamente

Noten que la razón de cambio *f*, el lado derecho, puede depender explícitamente de *t* y también implícitamente, a través de la propia variable *x*.

Como tenemos una única variable para describir al estado del sistema, lo llamamos unidimensional, pues el estado vive en el,espacio vectorial R, o sea lo podemos representar en la recta real.

Si el el tiempo *t* no aparece explícitamente en la razón de cambio *f*, decimos que la ecuación diferencial ordinaria, y por lo tanto el sistema, es AUTÓNOMO.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

Un poco más adelante veremos que todo sistema no autónomo se puede reducir a un sistema autónomo, lo cual nos permitirá en este curso abocarnos solo a estos últimos sin por eso perder generalidad.

Obviamente no todos los sistemas son tales que su estado, en el tiempo t, se puede describir por una única variable continua. En general tendremos muchas variables, al menos en los problemas interesantes. Supongamos que tenemos n variables dinámicas y que cada una depende solo del tiempo t, donde n es un número natural. En este caso diremos que la dinámica (la evolución temporal) de nuestro sistema estará descrita por un SISTEMA DE n ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS acopladas de la forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)) \\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t))
\end{aligned}
$$

Además, no siempre conocemos la dependencia de la razón de cambio en función de x y t (donde ahora x puede ser un conjunto de n variables). Por ejemplo, podemos conocer la razón de cambio de la razón de cambio:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}, t\right)$$

La forma más general es:

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n} = f\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}, t\right)$$

En la física newtoniana en particular, las variables dinámicas de interés son las funciones posición de cada partícula. Si tenemos una única partícula en tres dimensiones, tenemos tres incógnitas: $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$.

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), r(t))$$

$$m \frac{d^2 \bar{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}\left(\bar{r}(t), \frac{d\bar{r}(t)}{dt}, t\right)$$

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F_x\left(\bar{r}(t), \frac{d\bar{r}(t)}{dt}, t\right)$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F_y\left(\bar{r}(t), \frac{d\bar{r}(t)}{dt}, t\right)$$

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = F_z\left(\bar{r}(t), \frac{d\bar{r}(t)}{dt}, t\right)$$

$$\in \mathbb{R}$$

$$\tilde{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \frac{d\tilde{r}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \\ \frac{dz}{dt}(t) \end{pmatrix} \qquad \bar{F}(t) = \begin{pmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \\ F_z(t) \end{pmatrix}$$

$$\bar{r} \in \mathbb{R}^3 \qquad \frac{d\bar{r}}{dt} \in \mathbb{R}^3 \qquad \bar{F} \in \mathbb{R}^3 \qquad t \in \mathbb{R}$$

La masa m por la aceleración es igual a la fuerza que se ejerce sobre la partícula. Y esta fuerza en general depende de la posición de la partícula, de la velocidad de la partícula y del tiempo t.

Newtón inventó el cálculo diferencial (la idea de una razón de cambio "instantánea" o derivada), las ecuaciones diferenciales y luego su magnífica SEGUNDA LEY. Y ayudó muchísimo a encontrar algoritmos para resolverlas.