REDES NEURONALES

2022

Clase 4 Parte 2

Facultad de Matemática, Astronomía, Física
Universidad Nacional de Córdobas

Jueves 25 de agosto 2022

http://www.famaf.unc.edu.ar/~ftamarit/redes2022

https://www.famaf.unc.edu.ar/course/view.php?id=981

SISTEMAS DINÁMICOS UNIDIMENSIONALES: Flujo en la línea

Consideremos a partir de ahora (y por ahora) un sistema unidimensional, descripto por una variable x real. Supongamos además que la razón de cambio no depende explícitamente del tiempo, o sea, el sistema es autónomo

$$\dot{x} = f(x)$$

Miremos un ejemplo supuestamente simple

$$\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$$

Notemos que $\operatorname{sen}(x)$ es una función muy buena, desde el punto de vista del análisis. Intentemos resolverla:

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow dt = \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$\int_0^{t} dt' = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\operatorname{sen}(x')} \qquad x(0) = x_0$$

$$t = \int_{x_0}^{x} \operatorname{cosec}(x')\,dx'$$

$$= -\ln\left(\left|\operatorname{cosc}(x) + \operatorname{cotg}(x)\right|\right) + C$$

Si $X = X_0$ en $t = t_0 = 0$

$$t_0 = 0 = -\ln\left(\left|\operatorname{cosc}(x_0) + \operatorname{cotg}(x_0)\right|\right) + C$$

$$C = \ln\left(\left|\operatorname{cosc}(x_0) + \operatorname{cotg}(x_0)\right|\right)$$

Así

$$t = -\ln\left(\left|\operatorname{cosc}(x) + \operatorname{cotg}(x)\right|\right) + \ln\left(\left|\operatorname{cosc}(x_0) + \operatorname{cotg}(x_0)\right|\right)$$

$$t = \ln\left(\left|\frac{\csc(x_0)+\cot g(x_0)}{\csc(x)+\cot g(x)}\right|\right)$$

Observamos que siendo $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ una función matemáticamente bien comportada, hemos llegado tan lejos como podemos en la búsqueda de la expresión analítica de la solución de $\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$.

No podemos invertir esta expresión para encontrar

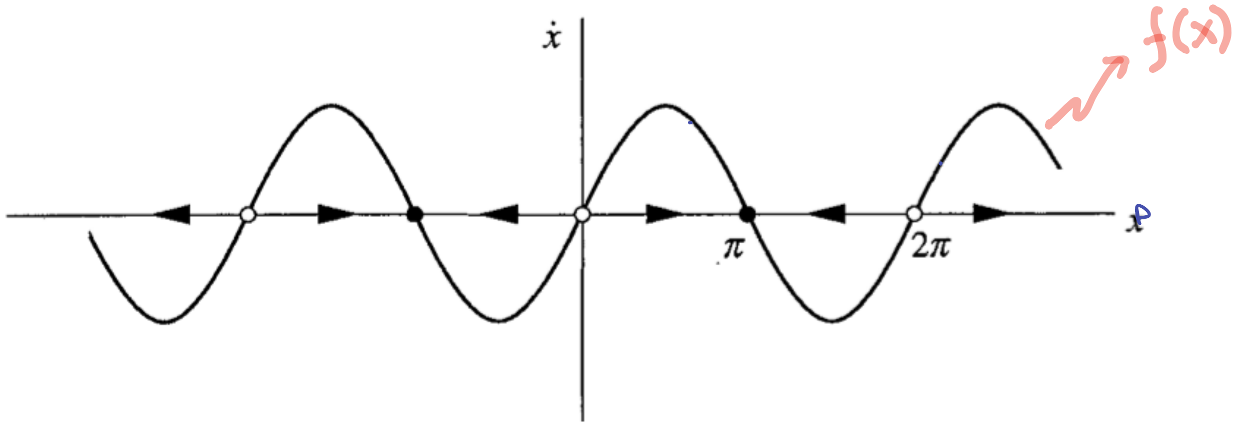
$$x(t)$$

A lo sumo podríamos resolver la inversión en forma numérica, pero no es una opción muy interesante.

Nos preguntamos, dada una condición inicial arbitraria $x(t=t_0) = x_0$, ¿ cuál será el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \longrightarrow \infty$?

Comenzaremos graficando el lado derecho, que modela la razón de cambio de $x(t)$ en función de $x(t)$.

$$\dot{x} = f(x)$$



Tengamos en cuenta que el tiempo no aparece en este gráfico x vs. $\dot{x}$.

La curva representa la razón de cambio. Si $f(x) > 0$ el punto x estará en un instante posterior a la derecha, pues su razón de cambio es positiva. Si $f(x) < 0$ se desplazará hacia la izquierda.

Si $f(x) = 0$, el sistema se quedará en ese punto para siempre ($t \to \infty$).

Las raíces (los ceros) de la función $f(x)$ se denominan PUNTOS FIJOS del sistema, pues si en t_0 el sistema está en ese valor, se quedará allí (recuerden que nuestro sistema es determinista).

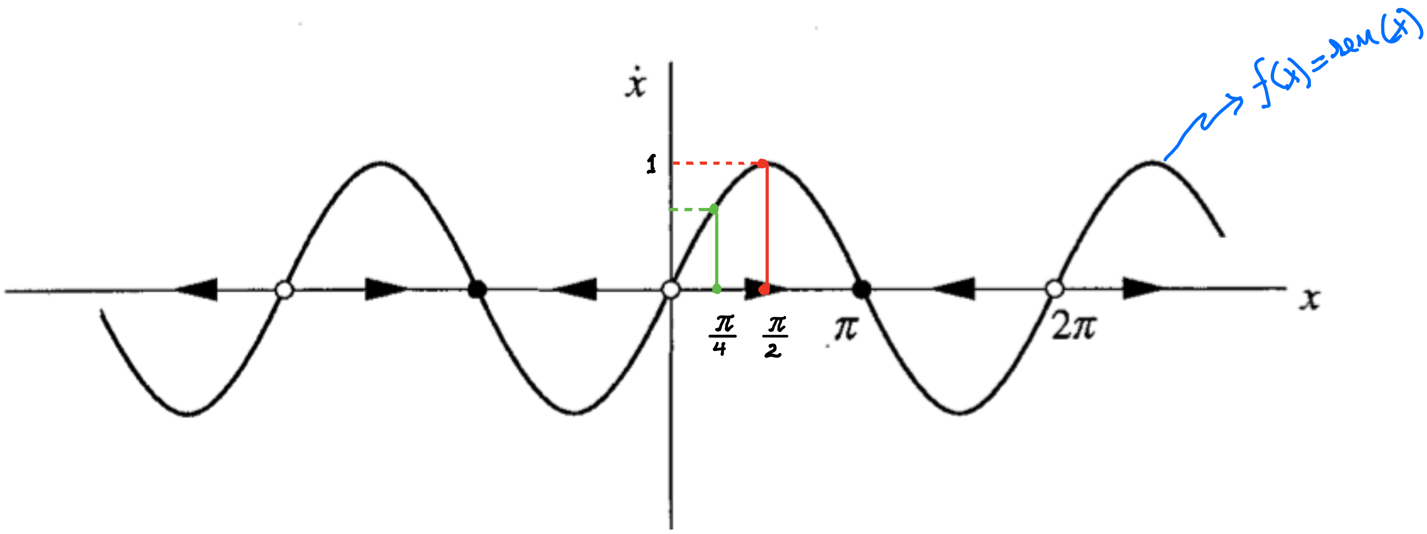
> Si $f(x^*) = 0$, decimos que x^* es un PUNTO FIJO del sistema $\dot{x} = f(x)$.

En el gráfico vemos que hay puntos que atraen a ciertas porciones del dominio de f, y son puntos fijos ATRACTORES o ESTABLES. Se lo representa con círculos llenos en el gráfico.

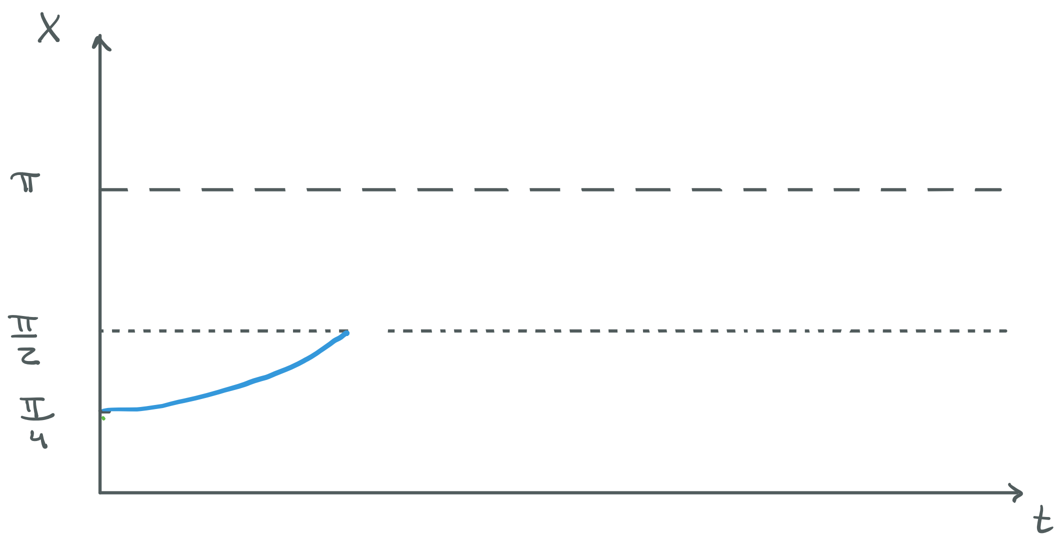
También hay puntos que repelen trayectorias, y son puntos fijos REPULSORES o INESTABLES. Se representan con círculos vacíos en el gráfico.

Si por ejemplo, comenzamos con $x_0 = \frac{\pi}{4}$ en $t=0$, el punto se desplazará hacia la derecha, hacia $x^* = \pi$.

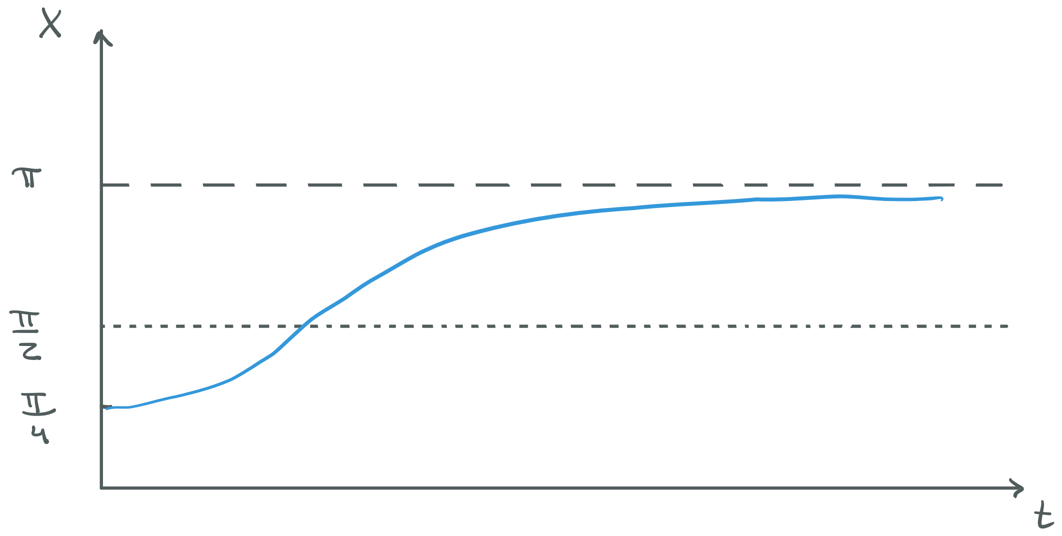
Noten que asignamos a cada punto de dominio de f (en este caso $\mathbb{R}$) un vector cuya magnitud es $|f(x)|$ y sentido es hacia la derecha si $f(x)>0$ y hacia la izquierda si $f(x)<0$. Esto define un campo vectorial (flechas) que representa EL FLUJO.



Miremos qué pasa si comenzamos con $\frac{\pi}{4}$. El sistema comienza a crecer (va hacia la derecha), y como la razón de cambio, además de ser positiva crece más, la derivada segunda de $X(t)$ es positiva.

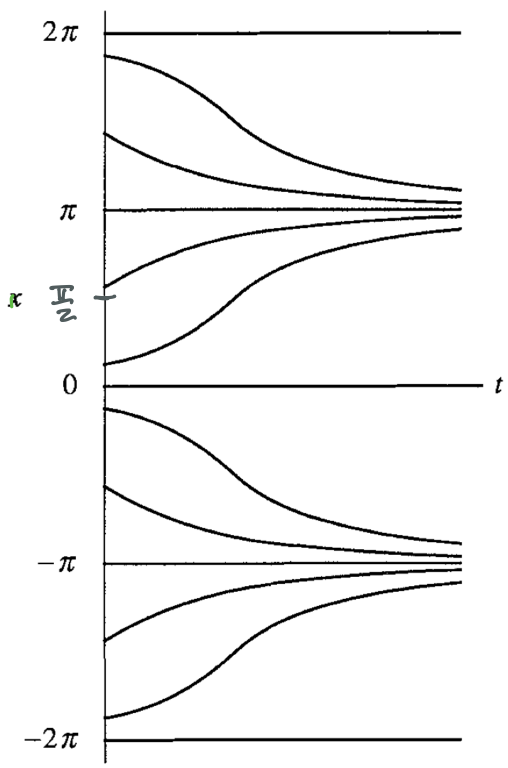


Cuando alcanza $X = \frac{\pi}{2}$, vale 1. A partir de ahora la razón de cambio sigue siendo positiva, pero cada vez es menos importante, y entonces la derivada primera es positiva pero la segunda es negativa.



El sistema se aproxima a π asimptóticamente, pero nunca llega, pues a medida que se aproxima la velocidad tiende a cero.

Con esto podemos hacernos una idea cualitativa de las trayectorias posibles, y precisas sobre dónde estará el sistema cuando $t \longrightarrow \infty$.



Los ATRACTORES son los múltiplos de π.

$$x^*_k = k\pi \qquad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Los atractores con k par o cero son inestables. El sistema puede estar en ellos, pero para estar en uno de estos puntos cuando $t \to \infty$, debió estar ahí todo el tiempo medido.

Los atractores con k impar son estables. Estos atractores atraen flujo de infinitas trayectorias.

abierto

$x^*_{2k+1} = (2k+1)\pi$ atrae trayectorias que están en $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$

Cuando $t \to \infty$ el sistema puede:

- ir hacia infinito $\quad x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} +\infty$
- ir hacia menos infinito $\quad x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} -\infty$
- ir hacia o permanecer en un punto fijo estable.
- permanecer en un punto fijo inestable.