Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Héctor Gramaglia   Pedro Sánchez Terraf
M. Clara Gorín   Matías Steinberg

FaMAF, segundo cuatrimestre 2020

Información Básica

Aula virtual

Aquí pondremos toda la información actualizada:

https://www.famaf.proed.unc.edu.ar/course/view.php?id=604

Información Básica

Aula virtual

Aquí pondremos toda la información actualizada:

https://www.famaf.proed.unc.edu.ar/course/view.php?id=604

Ediciones anteriores de la materia

En la Wiki de Ciencias de la Computación.

Información Básica

Regularidad

Deberán **entregar 6 ejercicios** durante el cuatrimestre.

Información Básica

Regularidad

Deberán **entregar 6 ejercicios** durante el cuatrimestre.

Finales

Todavía la situación no está definida en cuanto a la toma de exámenes, tendremos más información cerca del final del cuatrimestre.

Información Básica

Regularidad

Deberán **entregar 6 ejercicios** durante el cuatrimestre.

Finales

Todavía la situación no está definida en cuanto a la toma de exámenes, tendremos más información cerca del final del cuatrimestre.
Los exámenes tendrán un ejercicio extra muy fácil pero obligatorio para libres, y las personas que hayan entregado **5 ejercicios** (de los 6 anteriores) **bien resueltos**, tendrán 1 punto extra para su examen final.

Dinámica de trabajo

Clases virtuales (puaj)

- La interacción es súmamente difícil.

Dinámica de trabajo

Clases virtuales (puaj)

- La interacción es súmamente difícil.
- Clara y Matías serán moderadores del chat para facilitarla.

Dinámica de trabajo

Clases virtuales (puaj)

- La interacción es súmamente difícil.
- Clara y Matías serán moderadores del chat para facilitarla.
- Hagan consultas ahí, y en caso de ser necesario, me la comunicarán a mí.

Dinámica de trabajo

Clases virtuales (puaj)

- La interacción es súmamente difícil.
- Clara y Matías serán moderadores del chat para facilitarla.
- Hagan consultas ahí, y en caso de ser necesario, me la comunicarán a mí.
- Trataré de hacer pausas regulares para ver cómo estamos avanzando

Dinámica de trabajo

Clases virtuales (puaj)

- La interacción es súmamente difícil.
- Clara y Matías serán moderadores del chat para facilitarla.
- Hagan consultas ahí, y en caso de ser necesario, me la comunicarán a mí.
- Trataré de hacer pausas regulares para ver cómo estamos avanzando

¿Sólo ver el teórico?

Dinámica de trabajo

Clases virtuales (puaj)

- La interacción es súmamente difícil.
- Clara y Matías serán moderadores del chat para facilitarla.
- Hagan consultas ahí, y en caso de ser necesario, me la comunicarán a mí.
- Trataré de hacer pausas regulares para ver cómo estamos avanzando

¿Sólo ver el teórico?

Al $85\,\%$ del alumnado no le sirve eso.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Dinámica de trabajo

Clases virtuales (puaj)

- La interacción es súmamente difícil.
- Clara y Matías serán moderadores del chat para facilitarla.
- Hagan consultas ahí, y en caso de ser necesario, me la comunicarán a mí.
- Trataré de hacer pausas regulares para ver cómo estamos avanzando

¿Sólo ver el teórico?

Al $85\,\%$ del alumnado no le sirve eso.

- Cada clase (aproximadamente) tendrá indicada una lectura previa.

Dinámica de trabajo

Clases virtuales (puaj)

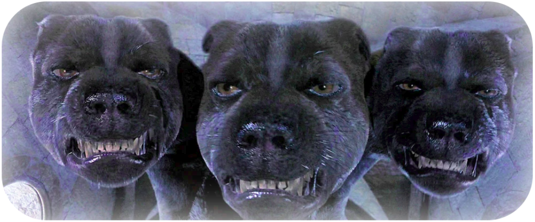
- La interacción es súmamente difícil.
- Clara y Matías serán moderadores del chat para facilitarla.
- Hagan consultas ahí, y en caso de ser necesario, me la comunicarán a mí.
- Trataré de hacer pausas regulares para ver cómo estamos avanzando

¿Sólo ver el teórico?

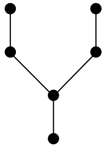
Al $85\,\%$ del alumnado no le sirve eso.

- Cada clase (aproximadamente) tendrá indicada una lectura previa.
- De esta manera podrán sacarse más dudas en vivo.

Una materia con tres partes



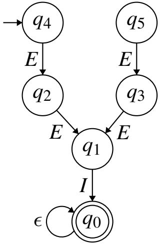
1. Estructuras Ordenadas



2. Lógica Proposicional

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi\wedge\psi]_1}{\psi}\,\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi\wedge\psi]_1}{\varphi}\,\wedge E}{\psi\wedge\varphi}\,\wedge I}{\varphi\wedge\psi\to\psi\wedge\varphi}\,\to I_1$$

3. Lenguajes y Autómatas



Parte 1: Estructuras Ordenadas

Bibliografía

- A. Tiraboschi y H. Gramaglia, *Apunte sobre estructuras ordenadas* (en la web de la materia).
- B.A. Davey y H.A. Priestley *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press.

Contenidos estimados para esta semana

1. Relaciones
   - Propiedades de relaciones sobre un mismo conjunto
   - Relaciones de equivalencia
   - Particiones de un conjunto

2. Conjuntos parcialmente ordenados
   - Diagramas de Hasse y Ejemplos
   - Máximos, mínimos, maximales y minimales
   - Supremos e ínfimos
   - Isomorfismo de posets

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- "es múltiplo de".

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- "es múltiplo de".
- "divide a".

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- "es múltiplo de".
- "divide a".
- "es menor que".

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- "es múltiplo de".
- "divide a".
- "es menor que".
- "es la longitud de".

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- "es múltiplo de".
- "divide a".
- "es menor que".
- "es la longitud de".
- "es igual a".

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- “es múltiplo de”.
- “divide a”.
- “es menor que”.
- “es la longitud de”.
- “es igual a”.
- “es elemento de”.

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- "es múltiplo de".
- "divide a".
- "es menor que".
- "es la longitud de".
- "es igual a".
- "es elemento de".
- "es segmento inicial de".

Definición de relación

Definición intuitiva

Una *relación* viene dada por una propiedad que pueden tener (o no) dos objetos.

Nos van a interesar relaciones entre objetos formales (matemáticos), y es más fácil entender en términos de ejemplos.

Ejemplo

Las siguientes son relaciones:

- “es múltiplo de”.
- “divide a”.
- “es menor que”.
- “es la longitud de”.
- “es igual a”.
- “es elemento de”.
- “es segmento inicial de”.
- “esta incluido en”.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Definición de relación

Formalizamos este concepto intuitivo: esencialmente, *especificamos* lo que que queremos decir.

Definición de relación

Formalizamos este concepto intuitivo: esencialmente, *especificamos* lo que que queremos decir.

Definición

- Dados dos conjuntos A y B, una **relación** (binaria) entre A y B es un subconjunto de $A \times B$.

Definición de relación

Formalizamos este concepto intuitivo: esencialmente, *especificamos* lo que que queremos decir.

Definición

- Dados dos conjuntos A y B, una **relación** (binaria) entre A y B es un subconjunto de $A \times B$.
- Sea $R \subseteq A \times B$ una relación y sean $a \in A$ y $b \in B$. Escribiremos $a \; R \; b$ para denotar $(a, b) \in R$ y $a \not R \; b$ en lugar de $(a, b) \notin R$.

Definición de relación

Formalizamos este concepto intuitivo: esencialmente, *especificamos* lo que que queremos decir.

Definición

- Dados dos conjuntos A y B, una **relación** (binaria) entre A y B es un subconjunto de $A \times B$.
- Sea $R \subseteq A \times B$ una relación y sean $a \in A$ y $b \in B$. Escribiremos $a \; R \; b$ para denotar $(a, b) \in R$ y $a \not R \; b$ en lugar de $(a, b) \notin R$.

Ejemplo

Si $A := \{2, 4, 8, 10\}$ y $B := \{1, 3, 9\}$, entonces la relación "*es menor que*" (restringida a $A \times B$) corresponde al conjunto de pares

$$R = \{(2, 3), (2, 9), (4, 9), (8, 9)\}$$

Definición de relación

Formalizamos este concepto intuitivo: esencialmente, *especificamos* lo que que queremos decir.

Definición

- Dados dos conjuntos A y B, una **relación** (binaria) entre A y B es un subconjunto de $A \times B$.
- Sea $R \subseteq A \times B$ una relación y sean $a \in A$ y $b \in B$. Escribiremos $a \; R \; b$ para denotar $(a, b) \in R$ y $a \not R \; b$ en lugar de $(a, b) \notin R$.

Ejemplo

Si $A := \{2, 4, 8, 10\}$ y $B := \{1, 3, 9\}$, entonces la relación "*es menor que*" (restringida a $A \times B$) corresponde al conjunto de pares

$$R = \{(2, 3), (2, 9), (4, 9), (8, 9)\}$$

Luego, tenemos que $2 \; R \; 9$ y $8 \not R \; 3$.

Definición de relación

Formalizamos este concepto intuitivo: esencialmente, *especificamos* lo que que queremos decir.

Definición

- Dados dos conjuntos A y B, una **relación** (binaria) entre A y B es un subconjunto de $A \times B$.
- Sea $R \subseteq A \times B$ una relación y sean $a \in A$ y $b \in B$. Escribiremos $a \; R \; b$ para denotar $(a, b) \in R$ y $a \not R \; b$ en lugar de $(a, b) \notin R$.

Ejemplo

Si $A := \{2, 4, 8, 10\}$ y $B := \{1, 3, 9\}$, entonces la relación "*es menor que*" (restringida a $A \times B$) corresponde al conjunto de pares

$$R = \{(2, 3), (2, 9), (4, 9), (8, 9)\}$$

Luego, tenemos que $2 \; R \; 9$ y $8 \not R \; 3$. ¿ $9 \; R \; 10$?

Dos tipos de relaciones

- “es múltiplo de”.
- “divide a”.
- “es menor que”.
- “es la longitud de”.

- “es igual a”.
- “es elemento de”.
- “es segmento inicial de”.
- “esta incluido en”.

Dos tipos de relaciones

- “es múltiplo de”.
- “divide a”.
- “es menor que”.
- “es la longitud de”.
- “es igual a”.
- “es elemento de”.
- “es segmento inicial de”.
- “esta incluido en”.

Estas relaciones se dan entre conjuntos A y B distintos.

Dos tipos de relaciones

- "es múltiplo de".
- "divide a".
- "es menor que".
- "es la longitud de".
- "es igual a".
- "es elemento de".
- "es segmento inicial de".
- "esta incluido en".

Estas relaciones se dan entre conjuntos A y B distintos.

Nuestro interés estará en las relaciones R entre un conjunto A y él mismo, relaciones **sobre** A (es decir, tales que $R \subseteq A \times A$).

Propiedades de una relación

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es:

- **reflexiva** si y sólo si

  para todo $a \in A, \;\; a \, R \, a$

Propiedades de una relación

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es:

- **reflexiva** si y sólo si

  para todo $a \in A, \ \ a\,R\,a$

- **simétrica** si y sólo si

  para todos $a, b \in A, \ \ a\,R\,b \implies b\,R\,a$

Propiedades de una relación

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es:

- **reflexiva** si y sólo si

  para todo $a \in A, \;\; a \; R \; a$
- **simétrica** si y sólo si

  para todos $a, b \in A, \;\; a \; R \; b \implies b \; R \; a$
- **antisimétrica** si y sólo si

  para todos $a, b \in A, \;\; a \; R \; b \;\; \& \;\; b \; R \; a \implies a = b$

Propiedades de una relación

Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es:

- **reflexiva** si y sólo si

  para todo $a \in A, \;\; a\,R\,a$
- **simétrica** si y sólo si

  para todos $a, b \in A, \;\; a\,R\,b \implies b\,R\,a$
- **antisimétrica** si y sólo si

  para todos $a, b \in A, \;\; a\,R\,b \;\;\&\;\; b\,R\,a \implies a = b$
- **transitiva** si y sólo si

  para todos $a, b, c \in A, a\,R\,b \;\;\&\;\; b\,R\,c \implies a\,R\,c$

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a \; R \; a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a \; R \; b \implies b \; R \; a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a \; R \; b \;\&\; b \; R \; a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a \; R \; b \;\&\; b \; R \; c \implies a \; R \; c$.

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a\ R\ a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\ R\ b \implies b\ R\ a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\ R\ b \ \&\ b\ R\ a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a\ R\ b \ \&\ b\ R\ c \implies a\ R\ c$.

“es menor que” $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Es la relación “$<$” definida entre números naturales:
$1 < 2, \ 2012 < 2020$, etcétera.

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a\ R\ a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\ R\ b \implies b\ R\ a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\ R\ b\ \&\ b\ R\ a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a\ R\ b\ \&\ b\ R\ c \implies a\ R\ c$.

“es menor que” $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Es la relación “$<$” definida entre números naturales:
$1 < 2, \; 2012 < 2020$, etcétera.

¿Qué propiedades cumple?

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a\,R\,a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\,R\,b \implies b\,R\,a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\,R\,b \,\&\, b\,R\,a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a\,R\,b \,\&\, b\,R\,c \implies a\,R\,c$.

"es menor que" $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Es la relación "$<$" definida entre números naturales:
$1 < 2, \; 2012 < 2020$, etcétera.

¿Qué propiedades cumple? $\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a\ R\ a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\ R\ b \implies b\ R\ a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\ R\ b\ \&\ b\ R\ a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a\ R\ b\ \&\ b\ R\ c \implies a\ R\ c$.

“divide a” $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$a \mid b$ si existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot q = b$.

¿Qué propiedades cumple?

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a\,R\,a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\,R\,b \implies b\,R\,a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\,R\,b \,\&\, b\,R\,a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a\,R\,b \,\&\, b\,R\,c \implies a\,R\,c$.

“divide a” $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$a \mid b$ si existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot q = b$.

¿Qué propiedades cumple? ¿Y si estuviera definida sobre $\mathbb{Z}$?

Propiedades de una relación

- **reflexiva**: $\forall a \in A, \quad a\ R\ a$.
- **simétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\ R\ b \implies b\ R\ a$.
- **antisimétrica**: $\forall a, b \in A, \quad a\ R\ b\ \&\ b\ R\ a \implies a = b$.
- **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, \quad a\ R\ b\ \&\ b\ R\ c \implies a\ R\ c$.

“es congruente módulo k a” $\subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ($k \neq 0$, fijo)

$a \equiv_k b$ si y sólo si k es divide a $b - a$

¿Qué propiedades cumple?

Relaciones de equivalencia

Definición

Una relación es de **equivalencia** si satisface las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

Relaciones de equivalencia

Definición

Una relación es de **equivalencia** si satisface las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

Por ejemplo, la relación "congruente módulo k" es una relación de equivalencia para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Clases de equivalencia

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sea x un elemento de A.
La **clase de equivalencia de** x es el conjunto

$$[x] = \{y \in A : x \sim y\}$$

Clases de equivalencia

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sea x un elemento de A.

La **clase de equivalencia de** x es el conjunto

$$[x] = \{y \in A : x \sim y\}$$

Por ejemplo, la relación "congruente módulo 3" tiene sólo tres clases de equivalencia

Clases de equivalencia

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sea x un elemento de A.
La **clase de equivalencia de** x es el conjunto

$$[x] = \{y \in A : x \sim y\}$$

Por ejemplo, la relación "congruente módulo 3" tiene sólo tres clases de equivalencia

$$\begin{aligned}
[0] &= \{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, \dots\} \\
[1] &= \{1, 4, -2, 7, -5, 10, -8, \dots\} \\
[2] &= \{2, 5, -1, 8, -4, 11, -7, \dots\}
\end{aligned}$$

Clases de equivalencia

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sea x un elemento de A.
La **clase de equivalencia de** x es el conjunto

$$[x] = \{y \in A : x \sim y\}$$

Por ejemplo, la relación "congruente módulo 3" tiene sólo tres clases de equivalencia

$$\begin{aligned} [0] &= \{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, \dots\} \\ [1] &= \{1, 4, -2, 7, -5, 10, -8, \dots\} \\ [2] &= \{2, 5, -1, 8, -4, 11, -7, \dots\} \end{aligned}$$

Se dan las siguientes igualdades:

$$[3] = [0], \quad [4] = [1], \quad [5] = [2], \dots$$

Particiones de un conjunto

Definición

Una **partición** de un conjunto A es una familia de subconjuntos no vacíos de A, que son disjuntos entre sí, y cuya unión es todo A.

Particiones de un conjunto

Definición

Una **partición** de un conjunto A es una familia de subconjuntos no vacíos de A, que son disjuntos entre sí, y cuya unión es todo A.

Ejemplo

Las siguientes son particiones de $A = \{a,\ b,\ c\}$:

1. $P_1 := \{\{a\}, \{b, c\}\}$;

Particiones de un conjunto

Definición

Una **partición** de un conjunto A es una familia de subconjuntos no vacíos de A, que son disjuntos entre sí, y cuya unión es todo A.

Ejemplo

Las siguientes son particiones de $A = \{a,\ b,\ c\}$:

1. $P_1 := \{\{a\}, \{b, c\}\}$;
   Los *elementos* de la partición $A_1 := \{a\}$ y $A_2 := \{b, c\}$ son *subconjuntos* de A.

Particiones de un conjunto

Definición

Una **partición** de un conjunto A es una familia de subconjuntos no vacíos de A, que son disjuntos entre sí, y cuya unión es todo A.

Ejemplo

Las siguientes son particiones de $A = \{a,\ b,\ c\}$:

1. $P_1 := \{\{a\}, \{b, c\}\}$;
   Los *elementos* de la partición $A_1 := \{a\}$ y $A_2 := \{b, c\}$ son *subconjuntos* de A.
2. $P_2 := \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$;

Particiones de un conjunto

Definición

Una **partición** de un conjunto A es una familia de subconjuntos no vacíos de A, que son disjuntos entre sí, y cuya unión es todo A.

Ejemplo

Las siguientes son particiones de $A = \{a,\ b,\ c\}$:

1. $P_1 := \{\{a\}, \{b, c\}\}$;
   Los *elementos* de la partición $A_1 := \{a\}$ y $A_2 := \{b, c\}$ son *subconjuntos* de A.
2. $P_2 := \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$;
3. $P_3 := \{\{a,\ b,\ c\}\}$.

Las equivalencias dan particiones

Lema

Sea $\sim$ *una relación de equivalencia sobre* A *y sean* $x, y \in A$*. Entonces*

1. $[x] = [y]$ *si y sólo si* $x \sim y$*.*
2. *si* $x \not\sim y$*, entonces* $[x]$ *e* $[y]$ *son disjuntas.*

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Las equivalencias dan particiones

Lema

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre A y sean $x, y \in A$. Entonces

1. $[x] = [y]$ *si y sólo si* $x \sim y$.
2. *si* $x \nsim y$, *entonces* $[x]$ *e* $[y]$ *son disjuntas.*

Corolario

El conjunto $A/\sim$ *de las clases de equivalencia de* $\sim$ *es una partición de* A.

Una equivalencia (valga la redundancia)

Lema

Sea $P = \{A_j : j \in J\}$ *una partición de* A. *Definamos, para* $a, b \in A$,

$$a \sim_P b \iff a \text{ y } b \text{ están en la misma parte de la partición.}$$

Entonces $\sim_P$ *es una relación de equivalencia.*

Una equivalencia (valga la redundancia)

Lema

Sea $P = \{A_j : j \in J\}$ *una partición de* A*. Definamos, para* $a, b \in A$*,*

$$
\begin{aligned}
a \sim_P b &\iff a \text{ y } b \text{ están en la misma parte de la partición.} \\
&\iff \text{existe } j \in J \,.\; a, b \in A_j
\end{aligned}
$$

Entonces $\sim_P$ *es una relación de equivalencia.*

Una equivalencia (valga la redundancia)

Lema

Sea $P = \{A_j : j \in J\}$ *una partición de* A. *Definamos, para* $a, b \in A$,

$$\begin{aligned} a \sim_P b &\iff a \text{ y } b \text{ están en la misma parte de la partición.} \\ &\iff \text{existe } j \in J \,.\, a, b \in A_j \end{aligned}$$

Entonces $\sim_P$ *es una relación de equivalencia.*

En consecuencia, es exactamente lo mismo tener una partición que una relación de equivalencia.

Definición

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Definición

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Ejemplo

1. La relación de **orden usual** $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.

Relaciones de orden y posets

Definición

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Ejemplo

1. La relación de **orden usual** $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.
2. La relación "divide" sobre $\mathbb{N}$.

Relaciones de orden y posets

Definición

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Ejemplo

1. La relación de **orden usual** $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.
2. La relación "divide" sobre $\mathbb{N}$.
3. La relación de **inclusión** $\subseteq$ sobre las partes $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto A.

Relaciones de orden y posets

Definición

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Ejemplo

1. La relación de **orden usual** $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.
2. La relación “divide” sobre $\mathbb{N}$.
3. La relación de **inclusión** $\subseteq$ sobre las partes $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto A.

Definición

Un **conjunto parcial ordenado** (**cpo** ó **poset**) es un par (A, R) donde A es un conjunto y R es un orden parcial sobre A.

Relaciones de orden y posets

Definición

Una **relación de orden parcial** R sobre un conjunto A es una relación que satisface las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

Ejemplo

1. La relación de **orden usual** $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.
2. La relación "divide" sobre $\mathbb{N}$.
3. La relación de **inclusión** $\subseteq$ sobre las partes $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto A.

Definición

Un **conjunto parcial ordenado** (**cpo** ó **poset**) es un par (A, R) donde A es un conjunto y R es un orden parcial sobre A.

Luego $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $(\mathbb{N}, |)$ y $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ son posets.

Diagramas de Hasse

Definición

Sea $\leq$ un orden parcial sobre un conjunto A, y $a, b \in A$ distintos.
Decimos que b **cubre** a a si

Diagramas de Hasse

Definición

Sea $\leq$ un orden parcial sobre un conjunto A, y $a, b \in A$ distintos.
Decimos que b **cubre** a a si

- $a \leq b$ y
- no existe $c \neq a, b$ tal que $a \leq c$ y $c \leq b$.

Diagramas de Hasse

Definición

Sea $\leq$ un orden parcial sobre un conjunto A, y $a, b \in A$ distintos.
Decimos que b **cubre** a a si

- $a \leq b$ y
- no existe $c \neq a, b$ tal que $a \leq c$ y $c \leq b$.

Diagramas de Hasse

Nos sirven para representar a los órdenes parciales sobre conjuntos finitos.

Diagramas de Hasse

Definición

Sea $\leq$ un orden parcial sobre un conjunto A, y $a, b \in A$ distintos.
Decimos que b **cubre** a a si

- $a \leq b$ y
- no existe $c \neq a, b$ tal que $a \leq c$ y $c \leq b$.

Diagramas de Hasse

Nos sirven para representar a los órdenes parciales sobre conjuntos finitos.
Ponemos un punto por cada elemento de A y unimos mediante segmentos rectos los puntos que se cubren.

Diagramas de Hasse

Definición

Sea $\leq$ un orden parcial sobre un conjunto A, y $a, b \in A$ distintos.
Decimos que b **cubre** a a si

- $a \leq b$ y
- no existe $c \neq a, b$ tal que $a \leq c$ y $c \leq b$.

Diagramas de Hasse

Nos sirven para representar a los órdenes parciales sobre conjuntos finitos.
Ponemos un punto por cada elemento de A y unimos mediante segmentos rectos los puntos que se cubren.
Si b cubre a a, entonces b debe ser dibujado más arriba que a.

Órdenes totales

Un **orden total** o **cadena** sobre un conjunto P es un orden parcial $\leq$ sobre P que satisface la **ley de dicotomía**:

$$\text{para todo } a, b \in P, \quad a \leq b \text{ ó } b \leq a.$$

Órdenes totales

Un **orden total** o **cadena** sobre un conjunto P es un orden parcial $\leq$ sobre P que satisface la **ley de dicotomía**:

$$\text{para todo } a, b \in P, \quad a \leq b \ \text{ó} \ b \leq a.$$

Ejemplo

1. El orden $\leqslant$ sobre $\mathbb{R}$
2. El orden lexicográfico en un diccionario.

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

¡Ojo! Esto de arriba está mal así tal cual

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

¡Ojo! Esto de arriba está mal así tal cual: para que ande hay que poner la **restricción de R a B** —$R \cap (B \times B)$— junto a B para tener un poset.

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

¡Ojo! Esto de arriba está mal así tal cual: para que ande hay que poner la **restricción de R a B** —$R \cap (B \times B)$— junto a B para tener un poset.
Nos haremos las y los giles de ahora en más con esto (i.e., omitiremos la restricción).

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

¡Ojo! Esto de arriba está mal así tal cual: para que ande hay que poner la **restricción de R a B** —$R \cap (B \times B)$— junto a B para tener un poset.
Nos haremos las y los giles de ahora en más con esto (i.e., omitiremos la restricción).

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$.

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

¡Ojo! Esto de arriba está mal así tal cual: para que ande hay que poner la **restricción de R a B** —$R \cap (B \times B)$— junto a B para tener un poset. Nos haremos las y los giles de ahora en más con esto (i.e., omitiremos la restricción).

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$. $(D_n, |)$ es un poset.

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

¡Ojo! Esto de arriba está mal así tal cual: para que ande hay que poner la **restricción de R a B** —$R \cap (B \times B)$— junto a B para tener un poset.
Nos haremos las y los giles de ahora en más con esto (i.e., omitiremos la restricción).

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$. $(D_n, \mid)$ es un poset.

- $D_4 =$

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

¡Ojo! Esto de arriba está mal así tal cual: para que ande hay que poner la **restricción de R a B** —$R \cap (B \times B)$— junto a B para tener un poset.
Nos haremos las y los giles de ahora en más con esto (i.e., omitiremos la restricción).

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$. $(D_n, \mid)$ es un poset.

- $D_4 = \{1, 2, 4\}$.

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

¡Ojo! Esto de arriba está mal así tal cual: para que ande hay que poner la **restricción de R a B** —$R \cap (B \times B)$— junto a B para tener un poset. Nos haremos las y los giles de ahora en más con esto (i.e., omitiremos la restricción).

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$. $(D_n, |)$ es un poset.

- $D_4 = \{1, 2, 4\}$.
- $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$.

Muchísimos ejemplos

Subposets

Si (A, R) es un poset y $B \subseteq A$, entonces (B, R) también es un poset.

¡Ojo! Esto de arriba está mal así tal cual: para que ande hay que poner la **restricción de R a B** —$R \cap (B \times B)$— junto a B para tener un poset. Nos haremos las y los giles de ahora en más con esto (i.e., omitiremos la restricción).

Ejemplo (Conjunto de divisores de n)

$D_n := \{k \in \mathbb{N} : k \mid n\}$. $(D_n, |)$ es un poset.

- $D_4 = \{1, 2, 4\}$.
- $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$.
- $D_9 = \{1, 3, 9\}$.
- $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Máximos y mínimos

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

Máximos y mínimos

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

b está debajo de todo.

Máximos y mínimos

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

  b está debajo de todo.

- t es **máximo** de $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq t$.

Máximos y mínimos

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

  b está debajo de todo.

- t es **máximo** de $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq t$.

  t está encima de todo.

Máximos y mínimos

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

  b está debajo de todo.

- t es **máximo** de $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq t$.

  t está encima de todo.

¿Cuáles de los siguientes tienen máximo y/o mínimo?

1. $(\mathbb{N}, \leqslant)$.

Universidad Nacional de Córdoba UNC 1613 - 2013 400 AÑOS

Máximos y mínimos

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

  b está debajo de todo.

- t es **máximo** de $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq t$.

  t está encima de todo.

¿Cuáles de los siguientes tienen máximo y/o mínimo?

1. $(\mathbb{N}, \leqslant)$.
2. $([0, 1), \leqslant)$

Máximos y mínimos

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

  b está debajo de todo.

- t es **máximo** de $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq t$.

  t está encima de todo.

¿Cuáles de los siguientes tienen máximo y/o mínimo?

1. $(\mathbb{N}, \leqslant)$.
2. $([0, 1), \leqslant)$
3. $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$

Máximos y mínimos

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de $P \iff \forall x \in P, \quad b \leq x$.

  b está debajo de todo.

- t es **máximo** de $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq t$.

  t está encima de todo.

¿Cuáles de los siguientes tienen máximo y/o mínimo?

1. $(\mathbb{N}, \leqslant)$.
2. $([0, 1), \leqslant)$
3. $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$
4. $(\{2, 4, 6, 12\}, |)$

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$

- b es **mínimo** de P $\iff$ $\forall x \in P, \quad b \leq x$.

  b está debajo de todo.

- t es **máximo** de P $\iff$ $\forall x \in P, \quad x \leq t$.

  t está encima de todo.

¿Cuáles de los siguientes tienen máximo y/o mínimo?

1. $(\mathbb{N}, \leqslant)$.
2. $([0, 1), \leqslant)$
3. $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$
4. $(\{2, 4, 6, 12\}, |)$
5. $(\{\{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq)$

Maximales y minimales

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$.

- b es **minimal** en $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq a$ implica $x = b$.

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$.

- b es **minimal** en $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq a$ implica $x = b$.

No hay nadie bajo b.

Maximales y minimales

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$.

- b es **minimal** en P $\iff$ $\forall x \in P, \quad x \leq a$ implica $x = b$.

  No hay nadie bajo b.

- t es **maximal** en P $\iff$ $\forall x \in P, \quad t \leq x$ implica $a = x$.

Maximales y minimales

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$.

- b es **minimal** en $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq a$ implica $x = b$.

  No hay nadie bajo b.

- t es **maximal** en $P \iff \forall x \in P, \quad t \leq x$ implica $a = x$.

  No hay nadie encima de t.

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$.

- b es **minimal** en $P \iff \forall x \in P, \quad x \leq a$ implica $x = b$.

  No hay nadie bajo b.

- t es **maximal** en $P \iff \forall x \in P, \quad t \leq x$ implica $a = x$.

  No hay nadie encima de t.

¿Cuáles de los siguientes tienen maximales y/o minimales?

1. $(\mathbb{N}, \leqslant)$
2. $([0, 1), \leqslant)$
3. $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$
4. $(\{2, 4, 6, 12\}, |)$
5. $(\{\{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq)$

Maximales y minimales

Sea $(P, \leq)$ un poset y $b, t \in P$.

- b es **minimal** en P $\iff$ $\forall x \in P, \quad x \leq a$ implica $x = b$.

  No hay nadie bajo b.

- t es **maximal** en P $\iff$ $\forall x \in P, \quad t \leq x$ implica $a = x$.

  No hay nadie encima de t.

¿Cuáles de los siguientes tienen maximales y/o minimales?

1. $(\mathbb{N}, \leqslant)$
2. $([0, 1), \leqslant)$
3. $(\{2, 4, 6, 12, 16\}, |)$
4. $(\{2, 4, 6, 12\}, |)$
5. $(\{\{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq)$

$\longrightarrow$ Actividad en Aula virtual!

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.

   l está "encima" de S.

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.

   l está "encima" de S.

2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
   l está "encima" de S.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
   l está "debajo" de S.

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
   l está "encima" de S.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
   l está "debajo" de S.
3. $s \in P$ se dice **supremo** de S si s es una cota superior de S y $\forall b \in P$, b es cota superior b de $S \implies s \leq b$.
   Escribimos "$s = \sup S$".

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
   l está "encima" de S.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
   l está "debajo" de S.
3. $s \in P$ se dice **supremo** de S si s es una cota superior de S y
   $\forall b \in P$, b es cota superior b de $S \implies s \leq b$.
   Escribimos "$s = \sup S$". Es la menor cota superior.

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
   l está "encima" de S.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
   l está "debajo" de S.
3. $s \in P$ se dice **supremo** de S si s es una cota superior de S y
   $\forall b \in P$, b es cota superior b de $S \implies s \leq b$.
   Escribimos "$s = \sup S$". Es la menor cota superior.
4. $i \in P$ se dice **ínfimo** de S si i es una cota inferior de S y
   $\forall b \in P$, b es cota inferior b de $S \implies b \leq i$.
   Escribimos "$i = \text{ínf}\, S$".

Supremos e ínfimos

Sea $(P, \leq)$ un poset, sea $S \subseteq P$ y sean $u, l, s, i \in P$.

Definición

1. $u \in P$ se dice **cota superior** de $S \iff \forall x \in S, \quad x \leq u$.
   l está "encima" de S.
2. $l \in P$ se dice **cota inferior** de $S \iff \forall x \in S, \quad l \leq x$.
   l está "debajo" de S.
3. $s \in P$ se dice **supremo** de S si s es una cota superior de S y
   $\forall b \in P$, b es cota superior b de $S \implies s \leq b$.
   Escribimos "$s = \sup S$". Es la menor cota superior.
4. $i \in P$ se dice **ínfimo** de S si i es una cota inferior de S y
   $\forall b \in P$, b es cota inferior b de $S \implies b \leq i$.
   Escribimos "$i = \text{ínf}\, S$". Es la mayor cota inferior.

Universidad Nacional de Córdoba

Isomorfismo de posets

Sean $(P, \leq)$, $(Q, \leq')$ dos posets, y sea $f : P \to Q$ una función.

Isomorfismo de posets

Sean $(P, \leq)$, $(Q, \leq')$ dos posets, y sea $f : P \to Q$ una función.

Definición

f es un **isomorfismo** si

- f es biyectiva y
- para todo $x, y \in P$, se cumple que

$$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y).$$

Isomorfismo de posets

Sean $(P, \leq)$, $(Q, \leq')$ dos posets, y sea $f : P \to Q$ una función.

Definición

f es un **isomorfismo** si

- f es biyectiva y
- para todo $x, y \in P$, se cumple que

$$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y).$$

Decimos entonces que $(P, \leq)$ y $(Q, \leq')$ son **isomorfos** y escribimos $(P, \leq) \cong (Q, \leq')$.

Isomorfismo de posets preservan $\sup$ e $\inf$

Lema

Sean $(P, \leq)$ y $(Q, \leq')$ posets. Sea $f : P \to Q$ un isomorfismo y supongamos que $S \subseteq P$.

Isomorfismo de posets preservan $\sup$ e $\inf$

Lema

Sean $(P, \leq)$ *y* $(Q, \leq')$ *posets. Sea* $f : P \to Q$ *un isomorfismo y supongamos que* $S \subseteq P$*.*

1. *Se tiene que*

$$\textit{existe } \sup S \iff \textit{existe } \sup f(S)$$

y en el caso de que existan, se tiene que

$$f(\sup S) = \sup f(S).$$

Isomorfismo de posets preservan $\sup$ e $\inf$

Lema

Sean $(P, \leq)$ y $(Q, \leq')$ posets. Sea $f : P \to Q$ un isomorfismo y supongamos que $S \subseteq P$.

1. *Se tiene que*

$$\textit{existe } \sup S \iff \textit{existe } \sup f(S)$$

y en el caso de que existan, se tiene que

$$f(\sup S) = \sup f(S).$$

2. *Se tiene que*

$$\textit{existe } \inf S \iff \textit{existe } \inf f(S)$$

y en el caso de que existan, se tiene que

$$f(\inf S) = \inf f(S).$$