∇ data

Revisão de Álgebra Linear

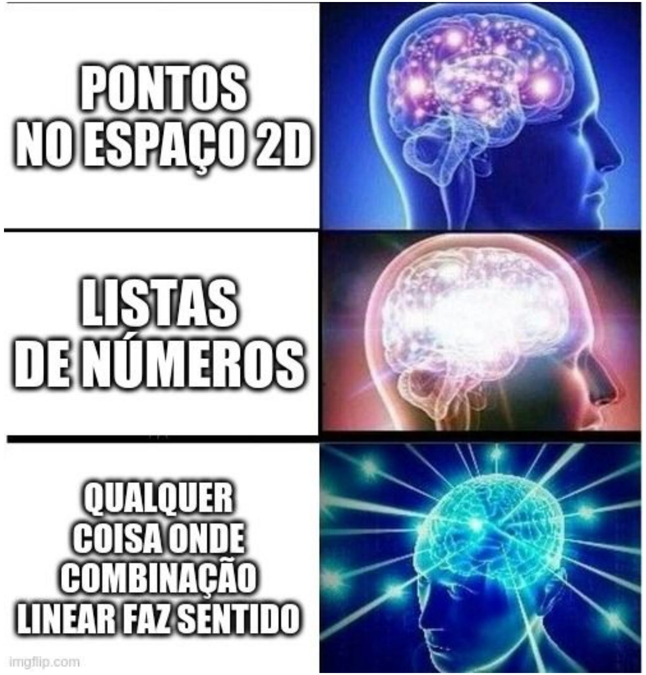
João Guilherme Madeira Araújo
@_joaogui1

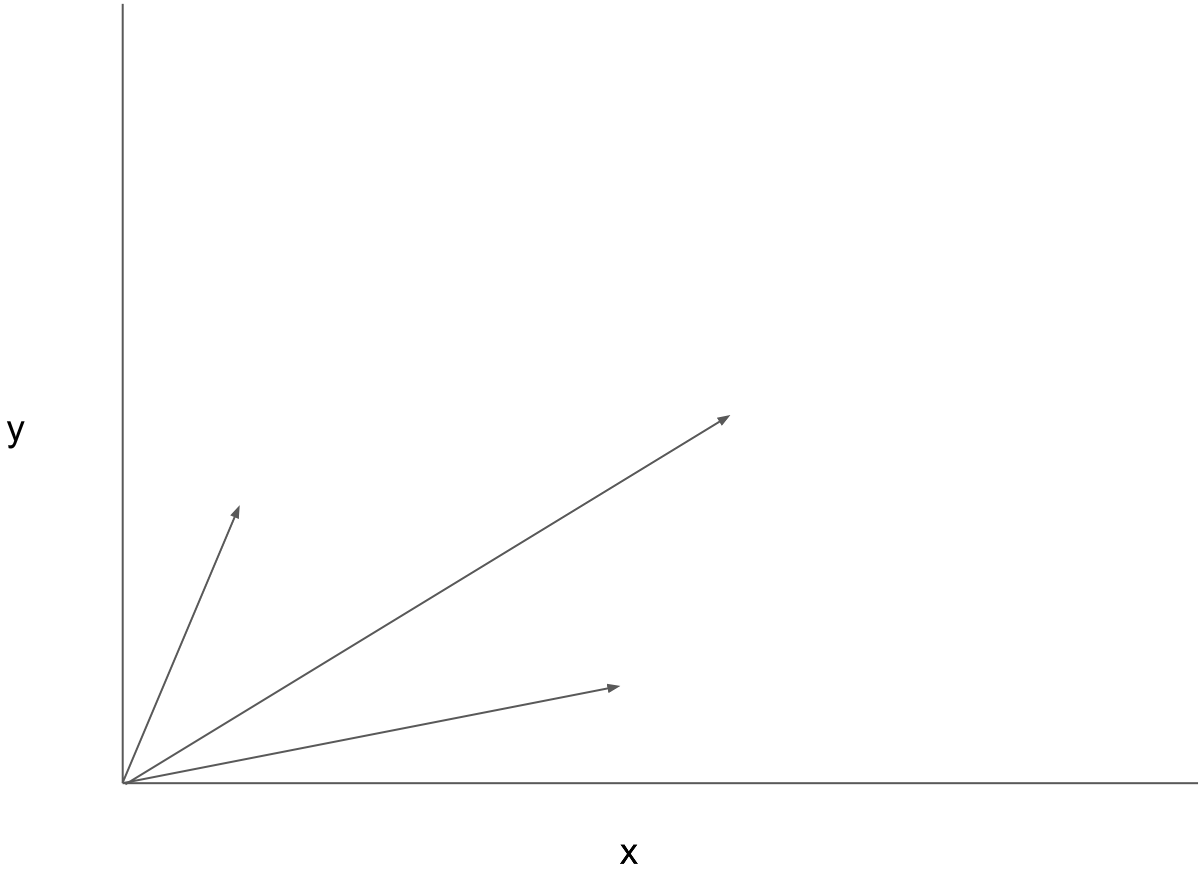
Relembrando Vetores

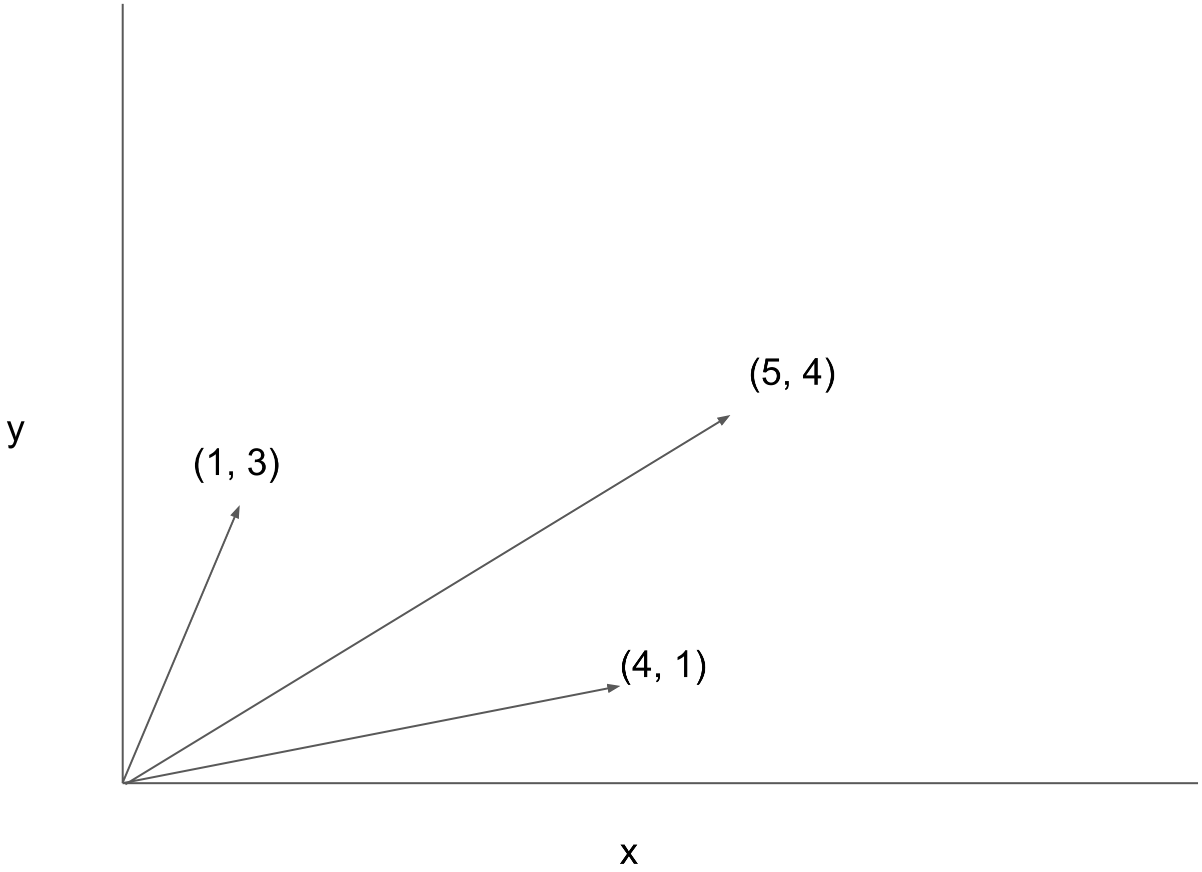
Relembrando vetores

É possível entender vetores de 3 maneiras:

- Pontos no espaço, ou segmentos da origem até esses pontos
- Listas de números em que podemos operar
- Qualquer conjunto que dê pra fazer combinações lineares




y
x



y
(5, 4)
(1, 3)
(4, 1)
x

Conjunto independente

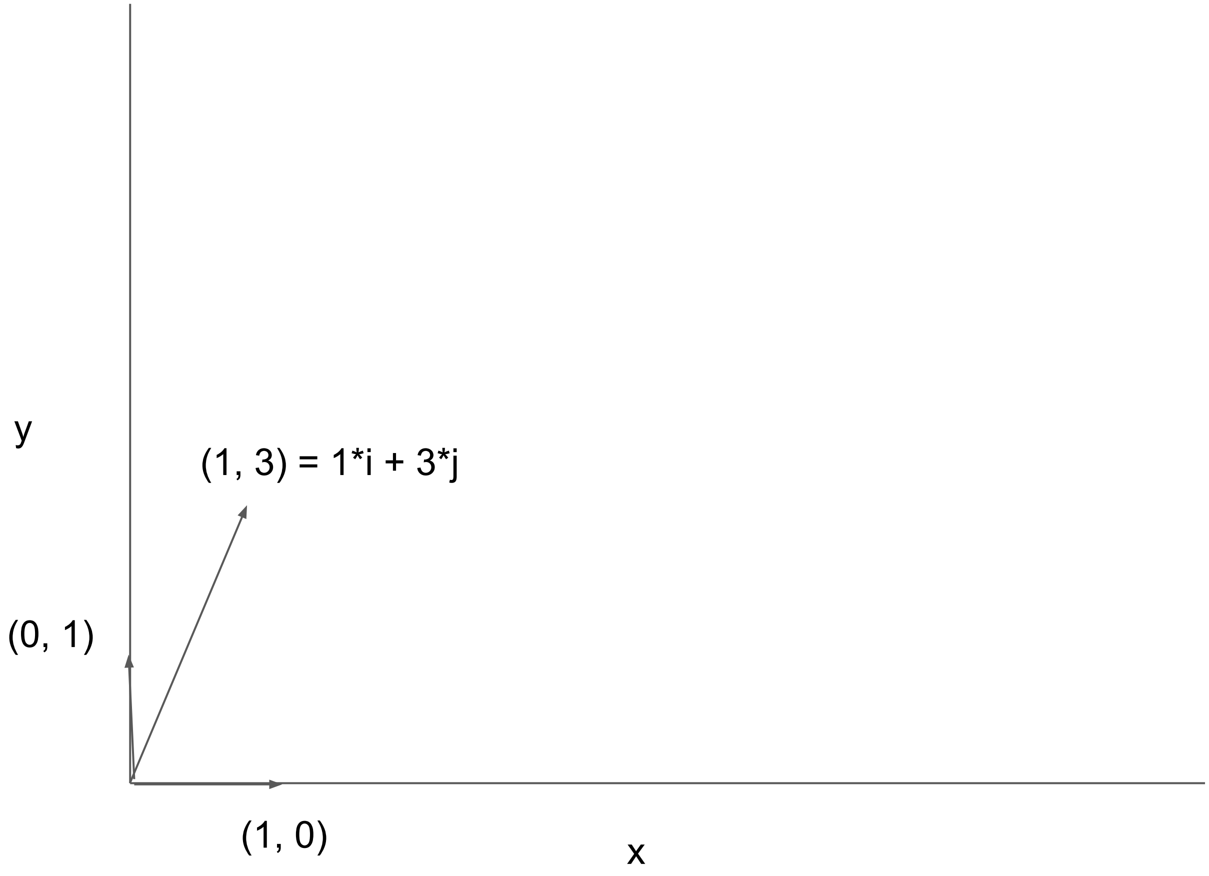
- Um conjunto de vetores é dito independente quando nenhum deles é uma combinação linear dos outros
- Todo conjunto independente tem no máximo (dimensão do espaço) elementos
    - Exemplos: {(1, 0), (0, 1)}, {(1, 2), (1, 1)}
    - Não são: {(1, 1), (2, 2)}, {(0, 1), (1, 0), (1, 12)}, {(0, 0}, u, v}

Span

- O span de um conjunto de vetores é o conjuntos de todas as combinações lineares deles
- É a resposta para: “Quais vetores eu posso formar a partir desses aqui?”
- Um spanning set consegue gerar todos os vetores do seu espaço, todo spanning set tem pelo menos (dimensão do espaço) elementos
  - span{(1, 3)} = {(a, 3a), para todo a real}
  - {(1, 0), (0, 1)} é um spanning set de R^2

Base

- É um conjunto de vetores que representa de maneira única qualquer vetor do espaço
- São os “átomos” do seu espaço
- Toda base tem um número de elementos igual a (dimensão do espaço)
- Cada espaço tem infinitas bases


y
(1, 3) = 1*i + 3*j
(0, 1)
(1, 0)
x

Produto escalar

- Também chamado de produto interno, é uma operação que recebe dois vetores e retorna um número como resposta
- Algebricamente: $x \bullet y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n$
- Geometricamente: $||x||\ ||y||\cos\theta$
  - $||x||^2 = x_1{}^2 + \dots x_n{}^2$
  - θ é o ângulo entre x e y
- Dois vetores são ortogonais quando o seu produto escalar é 0

Entendendo Matrizes

Matrizes

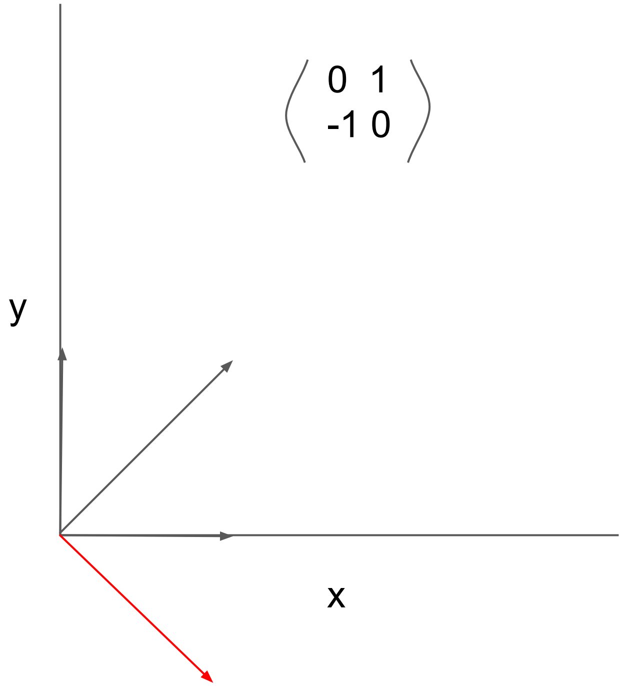
É possível entender matrizes de 3 maneiras:

- Tabela de números
- Conjuntos de vetores
- Representação de uma transformação linear em uma base (transformação do espaço)

Matrizes

Rotação de 90º no sentido horário

- Tabela de números
- Vetor [0, -1] e vetor [1, 0]
- Se rotacionarmos o [1, 0] vamos parar no [0, -1], e o [0, 1] vai para o [1, 0]



Produto matriz-vetor

- Estamos aplicando a transformação induzida pela matriz A no vetor v
- Podemos também ver como uma combinação linear das colunas da matriz A, em que os coeficientes são os elementos de v

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

Matriz de mudança de base

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

- Como já vimos cada coluna de uma matriz é o efeito da transformação linear que ela representa nos vetores da base
- Quando as colunas da matriz formam uma base dizemos que ela é uma matriz de mudança de base, indo da base canônica para a base de seus vetores coluna

Produto matriz-matriz

- É uma composição das transformações que cada uma das matrizes faz
- Também é o produto escalar entre as linhas da primeira e as colunas da segunda
- Por fim é o produto matriz-vetor da primeira matriz por cada uma das colunas da segunda

$$\begin{array}{cccccc} & & & \begin{matrix}\vec{b_1} & \vec{b_2}\\ \downarrow & \downarrow\end{matrix} & & \\ \begin{matrix}\vec{a_1}\rightarrow\\ \vec{a_2}\rightarrow\end{matrix} & \begin{bmatrix}1 & 7\\ 2 & 4\end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix}3 & 3\\ 5 & 2\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}\vec{a_1}\cdot\vec{b_1} & \vec{a_1}\cdot\vec{b_2}\\ \vec{a_2}\cdot\vec{b_1} & \vec{a_2}\cdot\vec{b_2}\end{bmatrix} \\ & A & & B & & C \end{array}$$

Diagonalizando Matrizes

Matrizes são complexas

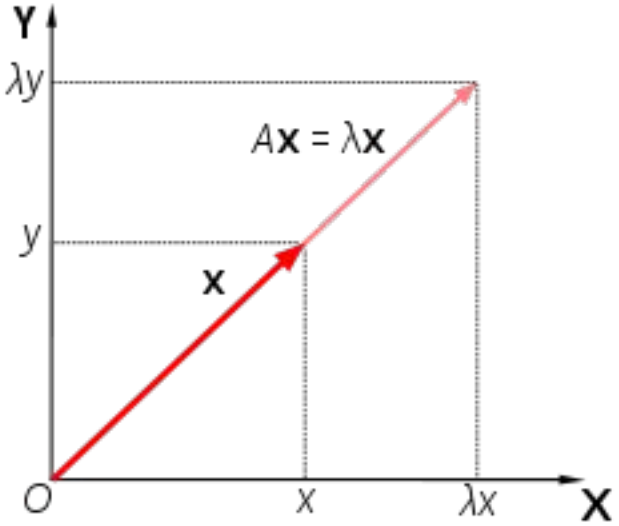
- Uma matriz n por m tem nm números
- Isso torna a análise delas não trivial
- A computação de produtos custosa
- A exponenciação chata

Matrizes diagonais são simples

- Tem apenas n números
- A transformação que ela representa é apenas um scaling das dimensões
- O produto é O(n)
- Basta exponenciar cada um dos valores da diagonal individualmente

Autovetores e autovalores

- São as soluções para Av = ƛv
  - Os v são os autovetores
  - Os ƛ são os autovalores associados
  - Os v são os vetores que a matriz age como se fosse apenas um scaling
- Para encontrar as soluções resolvemos a seguinte equação
  - (A - Iƛ)v = 0
  - det(A - Iƛ) = 0



Autovetores e autovalores

- Sejam v_1 e v_2 autovetores de A e λ_1 e λ_2 os respectivos autovalores
  - E suponha que eles formem uma base
- Queremos calcular Au
  - $u = a_1v_1 + a_2v_2$
  - $Au = A(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1\lambda_1v_1 + a_2\lambda_2v_2$
- Assim A age como uma matriz diagonal em u se u for escrito na base (v_1, v_2)

Diagonalização de matrizes

- No slide anterior
    - Encontramos os vetores em que a matriz age como scaling
    - Reescrevemos um vetor como uma combinação dos caras acima
    - Aplicamos o scaling nos autovetores
    - Voltamos o vetor para a base original
- Forma geral
    - Encontramos os autovalores e autovetores
    - Aplicamos uma matriz de mudança de base para a base composta pelos autovetores
    - Multiplicamos pela matriz diagonal
    - Desfazemos a mudança de base

Eigendecomposition

- Matrizes cujos autovetores formam uma base podem ser diagonizadas ou passar por uma eigendecomposition:
  - $A = Q^{-1}DQ$
  - Q é a matriz de mudança de base para a eigenbasis
    - As colunas são os autovetores
  - D é a matriz diagonal com os autovalores como entradas da diagonal
- Exemplos de coisas legais:
  - $A^n = (Q^{-1}DQ)(Q^{-1}DQ)...(Q^{-1}DQ) = Q^{-1}D^nQ$
  - $A^{-1} = (Q^{-1}DQ)^{-1} = Q^{-1}D^{-1}(Q^{-1})^{-1} = Q^{-1}(1/D)Q$

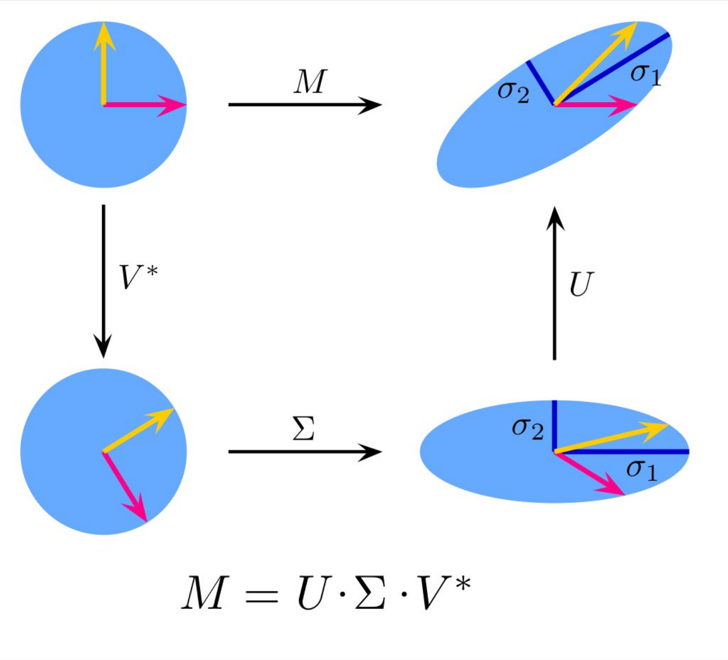
Singular Value Decomposition

E matrizes retangulares?

- Tudo o que fizemos até aqui foi para matrizes quadradas
  - Não temos um determinante para matrizes retangulares
- Mas muitas matrizes importantíssimas não são quadradas
- Daí que surge a ideia de valores singulares e vetores singulares

Singular Value Decomposition

- $A = U\Sigma V^T$
  - U é a matriz de vetores singulares esquerdos
  - Σ é a matriz diagonal de valores singulares
  - V é a matriz de vetores singulares direitos

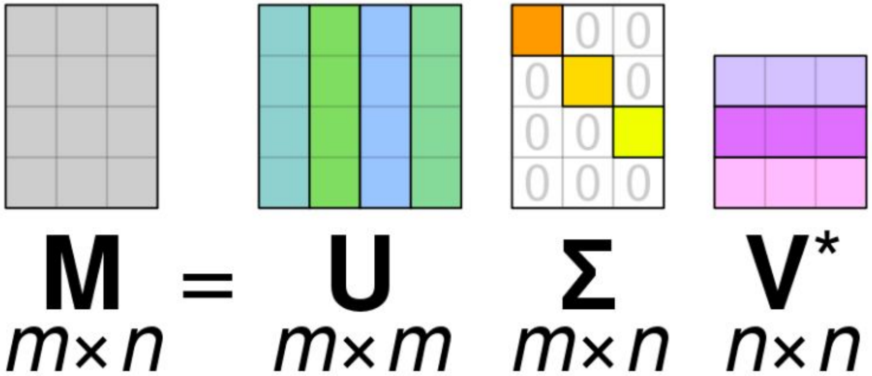


Singular Value Decomposition

- $A = U\Sigma V^T$
  - $U^TU = I$
  - $V^TV = I$
  - $AV = U\Sigma$
- Como computar eles?
  - $A^TA = V\Sigma^2V^T$
    - vs são os autovetores
    - σs são as raízes dos autovalores
  - $u_i = Av_i/\sigma_i$

SVD - Interpretação

- U é a matriz com a "base"
  - Os vetores de U serão combinados para gerar os vetores de A
- Σ é a importância de cada U
  - $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_m$
  - Dão a importância relativa de cada vetor de U (já que eles têm norma 1)
- V é como combinamos os u's para gerar os a's
  - Cada $u_i\sigma_i$ vai ser multiplicado por um elemento de v_j e somado para gerar o a_j



Aplicações

- Redução de dimensão
- Processamento de sinais
- Redução de ruído
- Compressão
- ...