L2. Exercícios sobre ACF em modelos AR e MA

1) Seja o modelo MA(1):

$$Y_t = u_t - 0{,}9u_{t-1} \qquad \text{onde} \quad u_t \sim N(0{,}2)$$

Calcule as sequências γ_k e ρ_k, $k = 0,1,\ldots,5$.

$$\gamma_0 = Cov(Y_t, Y_t) = Cov(u_t - 0{,}9u_{t-1}, u_t - 0{,}9u_{t-1})$$

$$= Cov(u_t\,, u_t) - 0{,}9Cov(u_t\,, u_{t-1}) - 0{,}9Cov(u_{t-1}\,, u_t) + 0{,}81Cov(u_{t-1}\,, u_{t-1})$$

$$= \sigma_u^2 + 0{,}81\sigma_u^2 = 1{,}81\sigma_u^2$$

$$\gamma_1 = Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(u_t - 0{,}9u_{t-1}, u_{t-1} - 0{,}9u_{t-2})$$

$$= Cov(u_t\,, u_{t-1}) - 0{,}9Cov(u_t\,, u_{t-2}) - 0{,}9Cov(u_{t-1}\,, u_{t-1}) + 0{,}81Cov(u_{t-1}\,, u_{t-2})$$

$$= -0{,}9\sigma_u^2$$

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-0{,}9\sigma_u^2}{1{,}81\sigma_u^2} = -0{,}497$$

$$\rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = 0$$

2) Seja o modelo AR(1):

$$Y_t = 0{,}8Y_{t-1} + u_t$$

Calcule as sequências γ_k e ρ_k, $k = 0,1,\ldots,5$.

$$\gamma_0 = Cov(Y_t, Y_t) = Cov(\,0{,}8Y_{t-1} + u_t, Y_t)$$

$$= 0{,}8Cov(Y_{t-1}\,, Y_t) + Cov(u_t\,, Y_t) = 0{,}8\gamma_1 + \sigma_u^2 \qquad (1)$$

$$\gamma_1 = Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(0{,}8Y_{t-1} + u_t\,, Y_{t-1})$$

$$= 0{,}8Cov(Y_{t-1}\,, Y_{t-1}) + Cov(u_t\,, Y_{t-1}) = 0{,}8\gamma_0 \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$\gamma_0 = 0{,}8 \times 0{,}8\gamma_0 + \sigma_u^2 \Rightarrow (1 - 0{,}64)\gamma_0 = \sigma_u^2 \Rightarrow \gamma_0 = \sigma_u^2/0{,}36$$

Substituindo γ_0 em γ_1:

$$\gamma_1 = \frac{0{,}8 \times \sigma_u^2}{0{,}36}$$

$\gamma_k = 0{,}8\gamma_{k-1}, k \geq 2$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\frac{0{,}8 \times \sigma_u^2}{0{,}36}}{\sigma_u^2/0{,}36} = 0{,}8$$

$\rho_2 = 0{,}8^2 = 0{,}64;\quad \rho_3 = 0{,}8^3;\quad \rho_4 = 0{,}8^4;\quad \rho_5 = 0{,}8^5$

3) Calcule as autocorrelações de ordem 1 a 5 para um processo AR(3) com $\phi_1 = 0{,}2$; $\phi_2 = 0{,}3$ e $\phi_3 = 0{,}1$. Esboce a função de autocorrelação.

Para o modelo AR(3), sabemos que

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \phi_3\rho_{k-3}$$

Logo,

$$\rho_1 = \phi_1\rho_0 + \phi_2\rho_1 + \phi_3\rho_2 \Rightarrow (1 - \phi_2)\rho_1 = \phi_1 + \phi_3\rho_2 \quad (1)$$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_0 + \phi_3\rho_1 \Rightarrow \rho_2 = (\phi_1 + \phi_3)\rho_1 + \phi_2 \quad (2)$$

$$\rho_3 = \phi_1\rho_2 + \phi_2\rho_1 + \phi_3\rho_0 \Rightarrow \rho_3 = \phi_1\rho_2 + \phi_2\rho_1 + \phi_3\rho_0$$

$$\rho_4 = \phi_1\rho_3 + \phi_2\rho_2 + \phi_3\rho_1$$

E assim por diante.

Substituindo (2) em (1):

$$\begin{gathered}(1 - \phi_2)\rho_1 = \phi_1 + \phi_3 \times \big((\phi_1 + \phi_3)\rho_1 + \phi_2\big) \\ \Rightarrow (1 - \phi_2)\rho_1 - \phi_3 \times (\phi_1 + \phi_3)\rho_1 = \phi_1 + \phi_3 \times \phi_2 \\ \Rightarrow (1 - \phi_2 - \phi_3 \times \phi_1 - \phi_3 \times \phi_3)\rho_1 = \phi_1 + \phi_3 \times \phi_2 \\ \Rightarrow \rho_1 = \frac{\phi_1 + \phi_3 \times \phi_2}{(1 - \phi_2 - \phi_3 \times \phi_1 - \phi_3 \times \phi_3)} = 0{,}34\end{gathered}$$

Substituindo ρ_1 em ρ_2:

$$\rho_2 = (\phi_1 + \phi_3)\rho_1 + \phi_2 = 0{,}40$$

Substituindo ρ_3:

$$\rho_3 = \phi_1\rho_2 + \phi_2\rho_1 + \phi_3 = 0{,}28$$

Substituindo ρ_4:

$$\rho_4 = \phi_1\rho_3 + \phi_2\rho_2 + \phi_3\rho_1 = 0{,}21$$

E assim por diante.

4) Calcule as autocorrelações de ordem 1 a 3 para um processo MA(3) com $\theta_1 = 0{,}2$, $\theta_2 = 0{,}3$ e $\theta_3 = 0{,}1$. Esboce a função de autocorrelação.

Para o modelo MA(3), sabemos que

$$\rho_k = \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2 + {\theta_3}^2}, \quad k = 1,2,3$$

$$\rho_k = 0, k \geq 4$$

Logo,

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3}{1 + {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2 + {\theta_3}^2} = -0{,}096$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2 + \theta_1\theta_3}{1 + {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2 + {\theta_3}^2} = -0{,}245$$

$$\rho_3 = \frac{-\theta_3}{1 + {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2 + {\theta_3}^2} = -0{,}088$$