FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO (ACF)

Seja w_t uma série temporal estacionária. A função de autocovariância para w_t é dada por:

- **<u>Função de Autocovariância</u>:**

$$\boldsymbol{\gamma_k = Cov(W_t, W_{t-k}) = E[W_t - E(W_t)]E[W_{t-k} - E(W_{t-k})]}$$

Assim, a função de autocorrelação é dada por:

- **<u>Função de Autocorrelação (ACF)</u>:**

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \qquad k = 0,1,2, \dots$$

onde $\gamma_0 = Var(W_t)$.

ACF PARA MODELOS MA

A função de autocorrelação de um MA(q) é dada por:

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2}, & k = 1,2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

A função de autocorrelação do modelo MA(q) apresenta "q" picos (valores) diferentes de zero (isto é, para k = 1,2, ... , q) e é identicamente nula para $k > q$.

Exemplo: Modelo MA(1)

No modelo MA(1): $W_t = (1 - \theta_1 B)u_t \Rightarrow \quad W_t = u_t - \theta_1 u_{t-1}$

Assim:

$$\gamma_0 = Cov(W_t, W_t) = Cov(u_t - \theta_1 u_{t-1}, u_t - \theta_1 u_{t-1})$$

$$= Cov(u_t, u_t) - \theta_1 Cov(u_t, u_{t-1}) - \theta_1 Cov(u_{t-1}, u_t) + \theta_1^2 Cov(u_{t-1}, u_{t-1})$$

$$= \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 \quad = \sigma^2(1 + \theta_1^2)$$

$$\gamma_1 = Cov(W_t, W_{t-1}) = Cov(u_t - \theta_1 u_{t-1}, u_{t-1} - \theta_1 u_{t-2})$$

$$= Cov(u_t, u_{t-1}) - \theta_1 Cov(u_t, u_{t-2}) - \theta_1 Cov(u_{t-1}, u_{t-1}) + \theta_1^2 Cov(u_{t-1}, u_{t-2})$$

$$= -\theta_1 \sigma^2$$

$$\gamma_k = 0, \qquad \text{para} \quad k \geq 2$$

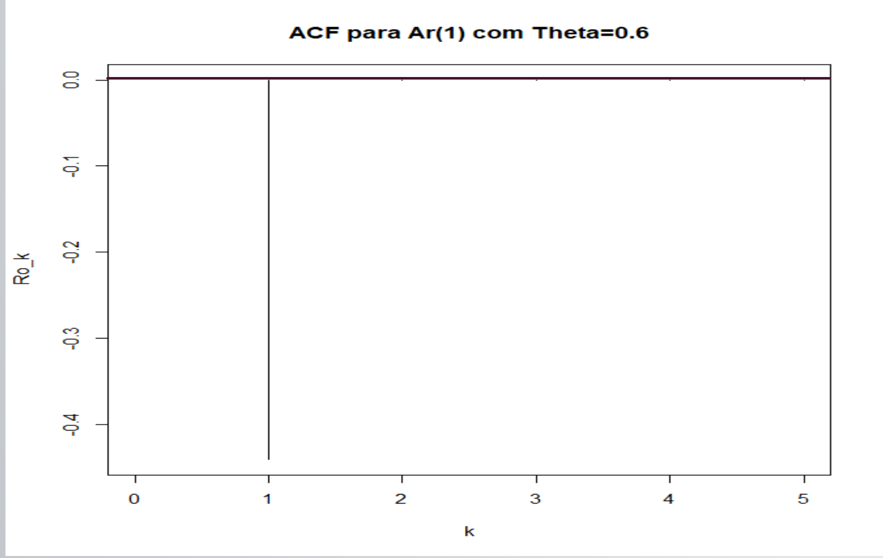
Desta forma, a Função de Autocorrelação (ACF) de um MA(1) é dada por:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1\sigma^2}{\sigma^2(1+\theta_1^2)} = \frac{-\theta_1}{(1+\theta_1^2)}$$

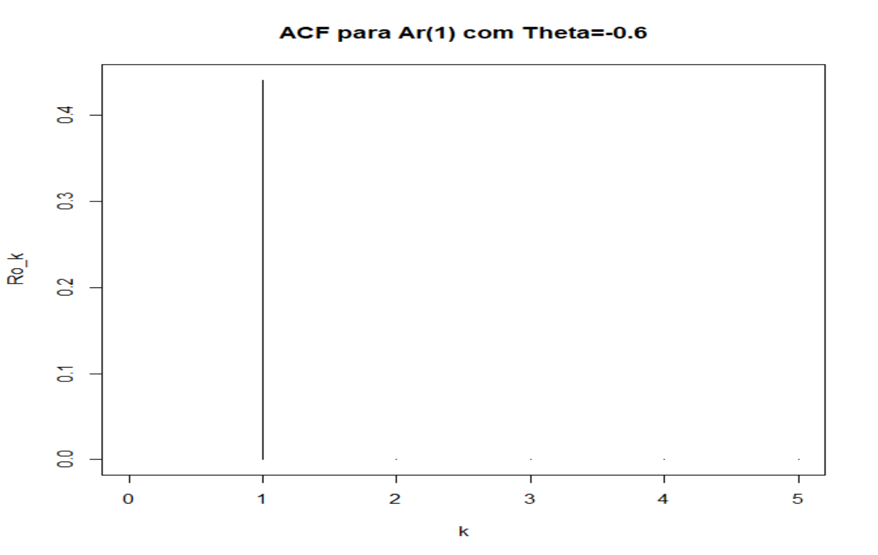
$$\rho_k = 0, \quad \text{para} \quad k \geq 2$$

<u>Exemplo</u>: ACF para um modelo MA(1) quando $\theta = 0{,}6$:

Se $\theta > 0$



Se $\theta < 0$



ACF PARA MODELOS AR

A função de autocorrelação de um AR(p) é dada por:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}$$

Ou seja, ρ_k satisfaz à equação:

$$\phi(B)\rho_k = 0 \quad \text{onde} \quad \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

Assim, para modelos AR as autocorrelações decrescem exponencialmente, podendo ou não ter componentes senoidais amortecidas.

Exemplo: Modelo AR(1)

No modelo AR(1): $(1-\phi_1 B)W_t = u_t \Rightarrow \quad W_t - \phi_1 W_{t-1} = u_t \Rightarrow \quad W_t = \phi_1 W_{t-1} + u_t$
Assim:

$$\gamma_1 = Cov(W_t, W_{t-1}) = Cov(\phi W_{t-1} + u_t, W_{t-1})$$

$$= \phi Cov(W_{t-1}, W_{t-1}) + Cov(u_t, W_{t-1})$$

$$= \phi \gamma_0$$

$$\gamma_2 = Cov(W_t, W_{t-2}) = Cov(\phi W_{t-1} + u_t, W_{t-2})$$

$$= \phi Cov(W_{t-1}, W_{t-2}) + Cov(u_t, W_{t-1})$$

$$= \phi \gamma_1 = \phi^2 \gamma_0$$

$$\vdots$$

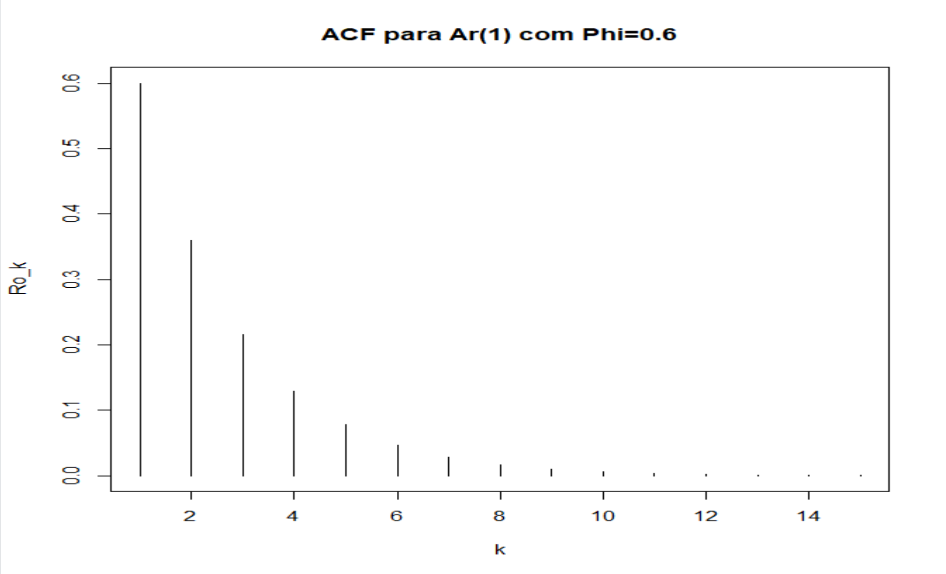
$$\gamma_k = \phi \gamma_{k-1} = \phi^k \gamma_0$$

Desta forma, a Função de Autocorrelação (ACF) de um AR(1) é dada por:

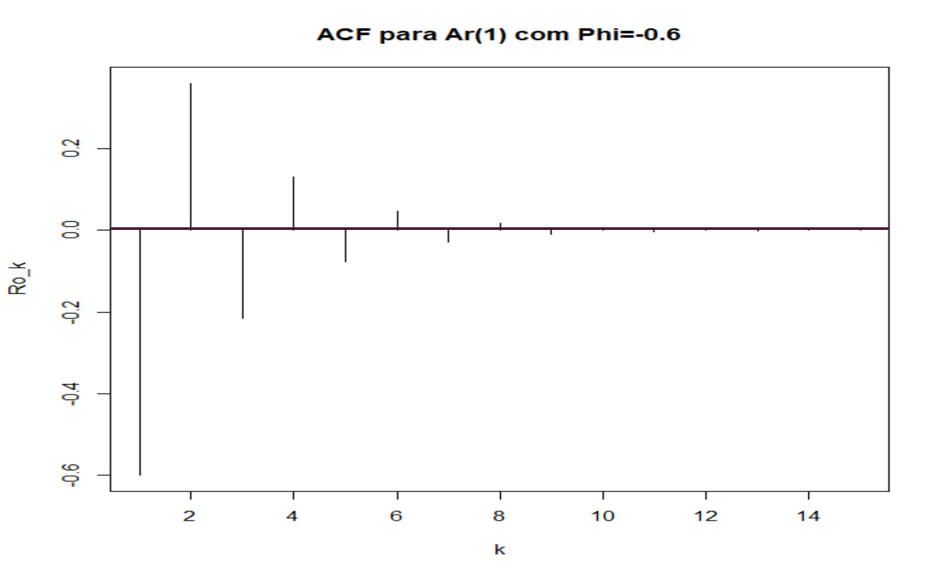
$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\phi^k \gamma_0}{\gamma_0} = \phi^k \quad \text{ou} \quad \rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\phi \gamma_{k-1}}{\gamma_0} = \phi \rho_{k-1}$$

Exemplo: ACF para um modelo AR(1) quando $\phi = 0{,}6$:

Se $\phi > 0$



Se $\phi < 0$



ACF PARA MODELOS ARMA

Como um modelo ARMA é uma mistura de modelos AR e MA, sua função de autocorrelação é uma combinação das autocorrelações dos processos componentes

FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO PARCIAL (FACP)

- A idéia de autocorrelação pode ser estendida para a autocorrelação parcial.

- Se medirmos a correlação entre duas observações seriais, W_t e W_{t+k}, eliminando a dependência dos termos intermediários, W_{t+1}, W_{t+2},..., W_{t+k-1}, temos o que se denomina autocorrelação parcial, representada por:

$$Cov\left(W_t, W_{t-k} | W_{t-1}, W_{t-(k+1)}\right)$$

Equações de Yule-Walker:

$$\begin{bmatrix} \rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \cdots + \phi_p\rho_{p-1} \\ \rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p\rho_{p-2} \\ \ldots \\ \rho_p = \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \cdots + \phi_p \end{bmatrix}$$

Consideremos o sistema de equação de Yule-Walker reescrito como a seguir:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \cdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \cdots \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

A autocorrelação parcial de um processo é definida como a sequência dos ϕ_{kk}'s obtidos pela resolução das equações acima, para *k* = 1,2,3,...

Usando a regra de Cramer para *k* = 1,2,3,... temos:

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ p_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ p_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Em geral,

$$\phi_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|},$$

onde $|\cdot|$ é o determinante da matriz, P_k é a matriz de autocorrelação e P_k^* é a matriz P_k com a última coluna substituída pelo vetor de autocorrelações.

EXEMPLO: MODELO AR(1)

Para $k = 1$:

$$\phi_{11} = \rho_1 = \phi_1$$

Para $k = 2$: $\begin{bmatrix} 1 & \phi_1 \\ \phi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_1^2 \end{bmatrix}$

Usando a regra de Kramer:

$$\Rightarrow \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \phi_1 \\ \phi_1 & \phi_1^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \phi_1 \\ \phi_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\phi_1^2 - \phi_1^2}{1 - \phi_1^2} = 0$$

Ou seja,

$$\phi_{kk} = 0 \qquad \text{para } k \geq 2$$