L1. Exercícios sobre estacionariedade e inversibilidade em modelos ARIMA

1) Os seguintes processos são estacionários? Justifique.

a) $Y_t = u_t + u_{t-1}$ $\quad u_t \sim i.i.d.\ N(0, \sigma^2)$

Sim. Modelos média móveis são sempre estacionários

b) $Y_t = Y_{t-1} + u_t$ $\quad u_t \sim i.i.d.\ N(0, \sigma^2)$

Não. $|\phi_1| = |1|$ não é menor que 1

c) $Y_t - Y_{t-1} + 0{,}5Y_{t-2} = u_t$ $\quad u_t \sim i.i.d.\ N(0, \sigma^2)$

i. $\phi_1 + \phi_2 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 < 1$

ii. $\phi_2 - \phi_1 = -0{,}5 - 1 = -1{,}5 < 1$

iii. $|\phi_2| = |-0{,}5| < 1$

Como todas as condições são satisfeitas, o modelo é estacionário.

2) Seja o modelo MA(1):

$$Y_t = u_t - 0{,}9u_{t-1}$$

Para este modelo pede-se:

a) É estacionário? Sim. Modelos média móveis são sempre estacionários

b) É inversível? Sim, pois $|\theta_1| = |0{,}9| < 1$

c) Calcule os pesos $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_5$ do modelo AR(∞) equivalente.

Sabemos, pela forma inversa de representar o modelo ARIMA, que

$$(1 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \pi_3 B^3 + \cdots)Y_t = u_t \qquad (1)$$

E como temos um MA(1):

$$Y_t = (1 - 0{,}9B)u_t \qquad (2)$$

Assim, substituindo (2) em (1):

$$(1 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \pi_3 B^3 + \cdots) \times (1 - 0{,}9B)u_t = u_t$$

$$\Rightarrow (1 - 0{,}9B + \pi_1 B \times (1 - 0{,}9B) + \pi_2 B^2 \times (1 - 0{,}9) + \pi_3 B^3 \times (1 - 0{,}9B) + \pi_4 B^4 \times (1 - 0{,}9) + \pi_5 B^5 \times (1 - 0{,}9B) + \cdots)$$

$$= 1 + 0B + 0B^2 + 0B^3 + 0B^4 + 0B^5 + \cdots$$

$$\Rightarrow (1 - 0{,}9B + \pi_1 B - 0{,}9\pi_1 B^2 + \pi_2 B^2 - 0{,}9\pi_2 B^3 + \pi_3 B^3 - 0{,}9\pi_3 B^4 + \pi_4 B^4 - 0{,}9\pi_4 B^5 + \pi_5 B^5 - 0{,}9\pi_5 B^6 + \cdots) = 1 + 0B + 0B^2 + 0B^3 + +0B^4 + 0B^5 + \cdots$$

$$\Rightarrow (1 + (\pi_1 - 0{,}9)B + (\pi_2 - 0{,}9\pi_1)B^2 + (\pi_3 - 0{,}9\pi_2)B^3 + (\pi_4 - 0{,}9\pi_3)B^4 + (\pi_5 - 0{,}9\pi_4)B^5 + \cdots) = 1 + 0B + 0B^2 + 0B^3 + 0B^4 + 0B^5 + \cdots$$

Desta forma, igualando os termos de mesma ordem do polinômio B,

$$\boldsymbol{\pi_1 = 0,9}$$

$$\pi_2 - 0{,}9\pi_1 = 0 \Rightarrow \pi_2 = 0{,}9\pi_1 \Rightarrow \pi_2 = 0{,}9 \times 0{,}9 \Rightarrow \boldsymbol{\pi_2 = 0,81}$$

$$\pi_3 - 0{,}9\pi_2 = 0 \Rightarrow \pi_3 = 0{,}9\pi_2 \Rightarrow \pi_3 = 0{,}81 \times 0{,}9 \Rightarrow \boldsymbol{\pi_3 = 0,729}$$

$$\pi_4 - 0{,}9\pi_3 = 0 \Rightarrow \pi_4 = 0{,}9\pi_3 \Rightarrow \pi_4 = 0{,}729 \times 0{,}9 \Rightarrow \boldsymbol{\pi_4 = 0,6561}$$

$$\pi_5 - 0{,}9\pi_4 = 0 \Rightarrow \pi_5 = 0{,}9\pi_4 \Rightarrow \pi_5 = 0{,}6561 \times 0{,}9 \Rightarrow \boldsymbol{\pi_5 = 0,59049}$$

3) Seja o modelo AR(1):

$$Y_t = 0{,}8Y_{t-1} + u_t$$

Para este modelo pede-se:

a) É estacionário? Sim, pois $|\phi_1| = |0{,}8| < 1$

b) É inversível? Sim. Modelos autorregressivos são sempre inversíveis

c) Calcule os pesos $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_5$ do modelo MA(∞) equivalente.

Sabemos, pela forma inversa de representar o modelo ARIMA, que

$$Y_t = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \cdots)u_t \qquad (1)$$

E como temos um AR(1):

$$(1 - 0{,}8B)Y_t = u_t \qquad (2)$$

Assim, substituindo (2) em (1):

$$Y_t = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \cdots) \times (1 - 0{,}8B)Y_t$$

$$\Rightarrow (1 - 0{,}8B + \psi_1 B \times (1 - 0{,}8B) + \psi_2 B^2 \times (1 - 0{,}8B) + \psi_3 B^3 \times (1 - 0{,}8B) + \psi_4 B^4 \times (1 - 0{,}8B) + \psi_5 B^5 \times (1 - 0{,}8B) + \cdots) = 1 + 0B + 0B^2 + 0B^3 + 0B^4 + 0B^5 + \cdots$$

$$\Rightarrow (1 - 0{,}8B + \psi_1 B - 0{,}8\psi_1 B^2 + \psi_2 B^2 - 0{,}8\psi_2 B^3 + \psi_3 B^3 - 0{,}8\psi_3 B^4 + \psi_4 B^4 - 0{,}8\psi_4 B^5 + \psi_5 B^5 - 0{,}8\psi_5 B^6 + \cdots) = 1 + 0B + 0B^2 + 0B^3 + +0B^4 + 0B^5 + \cdots$$

$$\Rightarrow (1 + (\psi_1 - 0{,}8)B + (\psi_2 - 0{,}8\psi_1)B^2 + (\psi_3 - 0{,}8\psi_2)B^3 + (\psi_4 - 0{,}8\psi_3)B^4 + (\psi_5 - 0{,}8\psi_4)B^5 + \cdots) = 1 + 0B + 0B^2 + 0B^3 + 0B^4 + 0B^5 + \cdots$$

Desta forma, igualando os termos de mesma ordem do polinômio B,

$$\boldsymbol{\psi_1 = 0,8}$$

$$\psi_2 - 0{,}8\psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_2 = 0{,}8\psi_1 \Rightarrow \psi_2 = 0{,}8 \times 0{,}8 \Rightarrow \boldsymbol{\psi_2 = 0,64}$$

$$\psi_3 - 0{,}8\psi_2 = 0 \Rightarrow \psi_3 = 0{,}8\psi_2 \Rightarrow \psi_3 = 0{,}64 \times 0{,}8 \Rightarrow \boldsymbol{\psi_3 = 0,512}$$

$$\psi_4 - 0{,}8\psi_3 = 0 \Rightarrow \psi_4 = 0{,}8\psi_3 \Rightarrow \psi_4 = 0{,}512 \times 0{,}8 \Rightarrow \boldsymbol{\psi_4 = 0,4096}$$

$$\psi_5 - 0{,}8\psi_4 = 0 \Rightarrow \psi_5 = 0{,}8\psi_4 \Rightarrow \psi_5 = 0{,}4096 \times 0{,}8 \Rightarrow \boldsymbol{\psi_5 = 0,32768}$$

4) Seja o modelo MA(2) inversível com parâmetros $\theta_1 = 0{,}9$ e $\theta_2 = -0{,}5$ aplicado a Y_t:

a) Escreva o modelo na forma do operador B;

$$Y_t = (1 - 0{,}9B + 0{,}5B^2)u_t$$

b) Escreva o modelo na forma da equação de diferenças;

$$Y_t = u_t - 0{,}9u_{t-1} + 0{,}5u_{t-2}$$

c) Determinar a sequência $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_5$ do polinômio $\pi(B)$ correspondente.

Sabemos, pela forma inversa de representar o modelo ARIMA, que

$$(1 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \pi_3 B^3 + \cdots)Y_t = u_t \qquad (1)$$

E como temos um MA(2):

$$Y_t = (1 - 0{,}5B + 0{,}3B^2)u_t \qquad (2)$$

Assim, substituindo (2) em (1):

$$(1+\pi_1 B+\pi_2 B^2+\pi_3 B^3+\cdots)\times(1-0{,}9B+0{,}5B^2)u_t=u_t$$

$$\Rightarrow (1-0{,}9B+0{,}5B^2+\pi_1 B\times(1-0{,}9B+0{,}5B^2)+\pi_2 B^2\times(1-0{,}9B+0{,}5B^2) \\ +\pi_3 B^3\times(1-0{,}9B+0{,}5B^2)+\pi_4 B^4\times(1-0{,}9B+0{,}5B^2)+\pi_5 B^5 \\ \times(1-0{,}9B+0{,}5B^2)+\cdots)=1+0B+0B^2+0B^3+0B^4+0B^5+\cdots$$

$$\Rightarrow (1-0{,}9B+0{,}5B^2+\pi_1 B-0{,}9\pi_1 B^2+0{,}5\pi_1 B^3+\pi_2 B^2-0{,}9\pi_2 B^3+0{,}5\pi_2 B^4 \\ +\pi_3 B^3-0{,}9\pi_3 B^4+0{,}5\pi_3 B^5+\pi_4 B^4-0{,}9\pi_4 B^5+0{,}5\pi_4 B^6+\pi_5 B^5 \\ -0{,}9\pi_5 B^6+0{,}5\pi_5 B^7+\cdots)=1+0B+0B^2+0B^3+0B^4+0B^5+\cdots$$

$$\Rightarrow (1+(\pi_1-0{,}9)B+(\pi_2+0{,}5-0{,}9\pi_1)B^2+(\pi_3+0{,}5\pi_1-0{,}9\pi_2)B^3+(\pi_4+0{,}5\pi_2 \\ -0{,}9\pi_3)B^4+(\pi_5+0{,}5\pi_3-0{,}9\pi_4)B^5+\cdots) \\ =1+0B+0B^2+0B^3+0B^4+0B^5+\cdots$$

Desta forma, igualando os termos de mesma ordem do polinômio B,

$$\boldsymbol{\pi_1=0,9}$$

$$\pi_2+0{,}5-0{,}9\pi_1=0\Rightarrow\ \pi_2=0{,}9\pi_1-0{,}5\Rightarrow\pi_2=0{,}9\times0{,}9-0{,}5\Rightarrow\boldsymbol{\pi_2=0,31}$$

$$\pi_3+0{,}5\pi_1-0{,}9\pi_2=0\Rightarrow\pi_3=0{,}9\pi_2-0{,}5\pi_1\Rightarrow\pi_3=0{,}9\times(0{,}31)-0{,}5\times0{,}9\Rightarrow\boldsymbol{\pi_3} \\ \boldsymbol{=-0,171}$$

$$\pi_4+0{,}5\pi_2-0{,}9\pi_3=0\Rightarrow\pi_4=0{,}9\pi_3-0{,}5\pi_2\Rightarrow\pi_4=0{,}9\times(-0{,}171)-0{,}5\times0{,}31 \\ \Rightarrow\boldsymbol{\pi_3=-0,3089}$$

$$\pi_5+0{,}5\pi_3-0{,}9\pi_4=0\Rightarrow\pi_5=0{,}9\pi_4-0{,}5\pi_3\Rightarrow\pi_5 \\ =0{,}9\times(-0{,}3089)-0{,}5\times(-0{,}171)\Rightarrow\boldsymbol{\pi_5=-0,19251}$$

5) Seja o modelo AR(2) estacionário com parâmetros $\phi_1=0{,}5$ e $\phi_2=0{,}2$ aplicado a Y_t:

a) Escreva o modelo na forma do operador B;

$$(1-0{,}5B-0{,}2B^2)Y_t=u_t$$

b) Escreva o modelo na forma da equação de diferenças;

$$Y_t - 0{,}5Y_{t-1} - 0{,}2Y_{t-2} = u_t$$

c) Determinar a sequência $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_5$ do polinômio $\psi(B)$ correspondente.

Sabemos, pela forma inversa de representar o modelo ARIMA, que

$$Y_t = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \cdots)u_t \qquad (1)$$

E como temos um AR(2):

$$(1 - 0{,}5B - 0{,}2B^2)Y_t = u_t \qquad (2)$$

Assim, substituindo (2) em (1):

$$Y_t = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \cdots) \times (1 - 0{,}5B - 0{,}2B^2)Y_t$$

$$\Rightarrow (1 - 0{,}5B - 0{,}2B^2 + \psi_1 B \times (1 - 0{,}5B - 0{,}2B^2) + \psi_2 B^2 \times (1 - 0{,}5B - 0{,}2B^2) + \psi_3 B^3 \times (1 - 0{,}5B - 0{,}2B^2) + \psi_4 B^4 \times (1 - 0{,}5B - 0{,}2B^2) + \psi_5 B^5 \times (1 - 0{,}5B - 0{,}2B^2) + \cdots) = 1 + 0B + 0B^2 + 0B^3 + 0B^4 + 0B^5 + \cdots$$

$$\Rightarrow (1 - 0{,}5B - 0{,}2B^2 + \psi_1 B - 0{,}5\psi_1 B^2 - 0{,}2\psi_1 B^3 + \psi_2 B^2 - 0{,}5\psi_2 B^3 - 0{,}2\psi_2 B^4 + \psi_3 B^3 - 0{,}5\psi_3 B^4 - 0{,}2\psi_3 B^5 + \psi_4 B^4 - 0{,}5\psi_4 B^5 - 0{,}2\psi_4 B^6 + \psi_5 B^5 - 0{,}5\psi_5 B^6 - 0{,}2\psi_5 B^7 + \cdots) = 1 + 0B + 0B^2 + 0B^3 + +0B^4 + 0B^5 + \cdots$$

$$\Rightarrow (1 + (\psi_1 - 0{,}5)B + (\psi_2 - 0{,}5\psi_1 - 0{,}2)B^2 + (\psi_3 - 0{,}5\psi_2 - 0{,}2\psi_1)B^3 + (\psi_4 - 0{,}5\psi_3 - 0{,}2\psi_2)B^4 + (\psi_5 - 0{,}5\psi_4 - 0{,}2\psi_3)B^5 + \cdots) = 1 + 0B + 0B^2 + 0B^3 + 0B^4 + 0B^5 + \cdots$$

Desta forma, igualando os termos de mesma ordem do polinômio B,

$$\boldsymbol{\psi_1 = 0,5}$$

$$\psi_2 - 0{,}5\psi_1 - 0{,}2 = 0 \Rightarrow \psi_2 = 0{,}5\psi_1 + 0{,}2 \Rightarrow \psi_2 = 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}2 \Rightarrow \boldsymbol{\psi_2 = 0,45}$$

$$\psi_3 - 0{,}5\psi_2 - 0{,}2\psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_3 = 0{,}5\psi_2 + 0{,}2\psi_1 \Rightarrow \psi_3 = 0{,}5 \times 0{,}45 + 0{,}2 \times 0{,}5 \Rightarrow \boldsymbol{\psi_3 = 0,235}$$

$\psi_4 - 0{,}5\psi_3 - 0{,}2\psi_2 = 0 \Rightarrow \psi_4 = 0{,}5\psi_3 + 0{,}2\psi_2 \Rightarrow \psi_4 = 0{,}5 \times 0{,}235 + 0{,}2 \times 0{,}45$
$\Rightarrow \psi_4 = \mathbf{0,2075}$

$\psi_5 - 0{,}5\psi_4 - 0{,}2\psi_3 = 0 \Rightarrow \psi_5 = 0{,}5\psi_4 + 0{,}2\psi_3 \Rightarrow \psi_5 = 0{,}5 \times 0{,}2075 + 0{,}2 \times 0{,}235$
$\Rightarrow \psi_5 = \mathbf{0,157075}$

6) Seja o modelo linear para Y_t:

$$Y_t = 0{,}1Y_{t-1} + 0{,}9Y_{t-2} + u_t$$

Para este modelo pede-se:

a) Verificar as condições de estacionariedade.

i. $\phi_1 + \phi_2 = 1 + 0{,}9 = 1$ Não é menor que 1

ii. $\phi_2 - \phi_1 = 0{,}9 - 0{,}1 = 0{,}8 < 1$

iii. $|\phi_2| = |0{,}9| < 1$

Como uma das condições não foi satisfeita, o modelo não é estacionário.

b) Em caso de não estacionariedade, como torná-lo estacionário?

O modelo pode ser escrito como:

$$(1 - 0{,}1B - 0{,}9B^2)Y_t = u_t$$

As raízes do polinômio em B são: 1 e -0,9. Logo, o polinômio em B pode ser fatorado como $(1 - B)(1 + 0{,}9B)$ e o modelo se torna:

$$(1 - B)(1 + 0{,}9B)Y_t = u_t$$

Portanto, tomando uma diferença na série Yt conseguimos o modelo estacionário.

7) Verifique as condições de Inversibilidade e Estacionariedade dos seguintes modelos:

a) $(1 - 0.3B)\ Y_t = (1 - 0.5B - 0.2B^2)\ u_t$

Para o modelo ser estacionário, temos que verificar a parte autorregressiva do modelo:
Como $|\phi_1| = |0{,}3| < 1$ o modelo é estacionário

Para o modelo ser inversível, temos que verificar a parte média móvel do modelo:

i. $\theta_1 + \theta_2 = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7 < 1$

ii. $\theta_2 - \theta_1 = 0{,}2 - 0{,}5 = -0{,}3 < 1$

iii. $|\theta_2| = |0{,}2| < 1$

Como todas as condições são satisfeitas, o modelo é inversível.

b) $(1 - 0.5B)(1 - B)Y_t = (1 - 0.8B)u_t$

Como $|\phi_1| = |0{,}5| < 1$ o modelo para $(1 - B)Y_t$ é estacionário

Como $|\theta_1| = |0{,}8| < 1$ o modelo para $(1 - B)Y_t$ é inversível.

c) $(1 - 0.8B + 1.5B^2)Y_t = u_t$

i. $\phi_1 + \phi_2 = 0{,}8 - 1{,}5 = -0{,}7 < 1$

ii. $\phi_2 - \phi_1 = -1{,}5 - 0{,}8 = -2{,}3 < 1$

iii. $|\phi_2| = |1{,}5| > 1$

Como uma das condições não foi satisfeita, o modelo não é estacionário.

O modelo é inversível pois todo autorregressivo é inversível.

d) $(1 + 1{,}5B + 0{,}8B^2)Y_t = u_t$

i. $\phi_1 + \phi_2 = -1{,}5 - 0{,}8 = -2{,}3 < 1$

ii. $\phi_2 - \phi_1 = -0{,}8 + 1{,}5 = 0{,}7 < 1$

iii. $|\phi_2| = |-0{,}8| < 1$

Como todas as condições foram satisfeitas, o modelo é estacionário.

O modelo é inversível pois todo autorregressivo é inversível.