

Exercício 1: Estacionariedade e Invertibilidade em Modelos ARIMA

Considere um modelo MA(2) para Y_t , onde $\theta_1 = 0,5$ e $\theta_2 = -0,3$. Responda os itens abaixo.

- a) **(0,25)** Escreva o modelo na forma do operador B.

$$Y_t = (1 - 0,5B + 0,3B^2)u_t$$

- b) **(0,25)** Escreva o modelo na forma de equação de diferenças.

$$Y_t = u_t - 0,5u_{t-1} + 0,3u_{t-2}$$

- c) **(0,3)** Verifique as condições de Estacionariedade do modelo.

Modelos Média Móvel são sempre estacionários

- d) **(0,6)** Verifique as condições de Invertibilidade do modelo.

i. $\theta_1 + \theta_2 = 0,5 - 0,3 = 0,2 < 1$

ii. $\theta_2 - \theta_1 = -0,3 - 0,5 = -0,8 < 1$

iii. $|\theta_2| = |-0,3| < 1$

Como todas as condições são satisfeitas, o modelo é inversível.

- e) **(0,6)** Calcule os pesos ψ_j , $j=1,2,3$.

$$\psi_1 = 0,5, \quad \psi_2 = -0,3 \quad \text{e} \quad \psi_3 = 0$$

- f) **(1,0)** Calcule os pesos π_j , $j=1,2,3$.

Sabemos, pela forma inversa de representar o modelo ARIMA, que

$$(1 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \pi_3 B^3 + \dots)Y_t = u_t \quad (1)$$

E como temos um MA(2):

$$Y_t = (1 - 0,5B + 0,3B^2)u_t \quad (2)$$

Assim, substituindo (2) em (1):

$$(1 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \pi_3 B^3 + \dots) \times (1 - 0,5B + 0,3B^2) u_t = u_t$$

$$\Rightarrow (1 - 0,5B + 0,3B^2 + \pi_1 B \times (1 - 0,5B + 0,3B^2) + \pi_2 B^2 \times (1 - 0,5B + 0,3B^2) + \pi_3 B^3 \times (1 - 0,5B + 0,3B^2) + \dots) = 1 + 0B + 0B^2 + 0B^3 + \dots$$

$$\Rightarrow (1 - 0,5B + 0,3B^2 + \pi_1 B - 0,5\pi_1 B^2 + 0,3\pi_1 B^3 + \pi_2 B^2 - 0,5\pi_2 B^3 + 0,3\pi_2 B^4 + \pi_3 B^3 - 0,5\pi_3 B^4 + 0,3\pi_3 B^5 + \dots) = 1 + 0B + 0B^2 + 0B^3 + \dots$$

$$\Rightarrow (1 + (\pi_1 - 0,5)B + (\pi_2 + 0,3 - 0,5\pi_1)B^2 + (\pi_3 + 0,3\pi_1 - 0,5\pi_2)B^3 + \dots) = 1 + 0B + 0B^2 + 0B^3 + \dots$$

Desta forma, igualando os termos de mesma ordem do polinômio B,

$$\pi_1 = 0,5$$

$$\pi_2 + 0,3 - 0,5\pi_1 = 0 \Rightarrow \pi_2 = 0,5\pi_1 - 0,3 \Rightarrow \pi_2 = 0,5 \times 0,5 - 0,3 \Rightarrow \pi_2 = -0,05$$

$$\pi_3 + 0,3\pi_1 - 0,5\pi_2 = 0 \Rightarrow \pi_3 = 0,5\pi_2 - 0,3\pi_1 \Rightarrow \pi_3 = 0,5 \times (-0,05) - 0,3 \times 0,5 \Rightarrow \pi_3 = -0,175$$