MODELAGEM BOX & JENKINS

- A metodologia de Box & Jenkins (1976) está fundamentada em quatro passos:

1. **Identificação:** Identifica-se um modelo apropriado para a série em questão;
2. **Estimação:** Estima-se os parâmetros do modelo identificado;
3. **Verificação do modelo:** é necessário checar a adequação do modelo através da análise de resíduos;
4. **Previsão:** o modelo final é usado para prever futuros valores da série.

MODELAGEM

- A modelagem proposta por Box & Jenkins é da forma

$$Y_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k u_{t-k} = \mu + \psi(B) u_t$$

onde o filtro linear ψ é definido por

$$\psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}$$

onde $\theta\,(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$ e $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$ são polinômios de graus p e q, respectivamente.

Chamando $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$, temos:

$$\tilde{Y}_t = \psi(B)u_t.$$

Desta forma, os modelos de Box & Jenkins são dados por:

$$\phi(B)\tilde{Y}_t = \theta(B)u_t \qquad (1)$$

onde u_t é um ruído branco, geralmente Gaussiano.

De acordo com Box & Jenkins, o modelo (1) é denominado ARMA(p,q). De (1) pode-se escrever:

$$\tilde{Y}_t = \phi(B)^{-1}\theta(B)u_t$$

A partir deste ponto vamos assumir, sem perda de generalidade, que $\mu = 0$.

TIPOS DE MODELOS

Modelos Médias Móveis (MA)

- O modelo que tem $\phi(B) \equiv 1$ é chamado Modelo Médias Móveis.

Notação: MA(q)

O nome Médias Móveis vem do fato que Y_t é uma função soma algébrica ponderada dos u_t.

- Exemplo: MA(q)

$$Y_t = \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q\right) u_t$$

$$\Rightarrow Y_t = u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \cdots - \theta_q u_{t-q}$$

Modelos Auto-Regressivos (AR)

- O modelo que tem $\theta(B) \equiv 1$ é chamado Modelo Auto-Regressivo.

Notação: AR(p)

O nome Auto-Regressivo se deve ao fato de que Y_t no instante t é função dos Y's nos instantes anteriores a t.

- Exemplo: AR(p)

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right) Y_t = u_t$$

$$\Rightarrow Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \cdots - \phi_p Y_{t-p} = u_t$$

Modelos Auto-Regressivos - Médias Móveis (ARMA)

- É o modelo que tem tanto uma parte AR $(\phi(\cdot) \neq 1)$ como uma parte MA $(\theta(\cdot) \neq 1)$.

  Notação: ARMA(p,q)

- Exemplo: ARMA(p, q)

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)Y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q)u_t$$

$$\Rightarrow Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \cdots - \phi_p Y_{t-p} = u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \cdots - \theta_q u_{t-q}$$

ESTACIONARIEDADE DOS MODELOS BOX & JENKINS

Proposição 1: Um processo estocástico $Y_t = \psi(B)u_t$ será estacionário se a série

$$\psi(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k B^k$$

converge para $|B| < 1$.

Estacionariedade dos modelos MA

- Como $\psi(B) = \theta(B)$ para modelos MA, a convergência de $\psi(B)$ para $|B| < 1$ é trivial, pois $\psi(B)$ é uma soma finita. Portanto, podemos dizer que **todo** modelo MA é estacionário.

Estacionariedade dos modelos AR

- Os modelos AR devem ter as raízes do polinômio $\psi^{-1}(B) = \phi\,(B) = 0$ fora do círculo unitário como condição de estacionariedade.

Estacionariedade dos modelos ARMA

- Um modelo ARMA(p,q) será estacionário se $\phi(B)$ satisfizer as condições de estacionariedade de um modelo AR.

INVERSIBILIDADE DOS MODELOS BOX & JENKINS

Vamos inicialmente expressar o modelo geral ARMA na forma inversa, isto é, expressando o ruído u_t em função de Y_t:

$$u_t = \phi(B)\theta(B)^{-1}Y_t = \pi(B)Y_t$$

Proposição 2: Um processo estocástico $u_t = \pi(B)Y_t$ será inversível se a série

$$\pi(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k B^k$$

converge para $|B| < 1$.

Inversibilidade dos modelos MA

- Os modelos MA devem ter as raízes do polinômio $\pi^{-1}(B) = \theta(B) = 0$ fora do círculo unitário como condição de inversibilidade.

Inversibilidade dos modelos AR

- Como $\pi(B) = \phi(B)$ para modelos AR, a convergência de $\pi(B)$ para $|B| < 1$ é trivial, pois $\pi(B)$ é uma soma finita. Portanto, podemos dizer que **todo** modelo AR é inversível.

Inversibilidade dos modelos ARMA

- Um modelo ARMA(p, q) será inversível se $\theta(B)$ satisfizer as condições de inversibilidade de um modelo MA.

MODELOS NÃO ESTACIONÁRIOS ARIMA

- Se a série temporal Y_t é não estacionária, vimos que uma forma de torná-la estacionária é tomando diferenças sucessivas da forma $W_t = \nabla^d Y_t = (1-B)^d Y_t$.

- Assim, se W_t for estacionária, podemos representá-la por um modelo ARMA(p,q), ou seja,

$$\phi(B)W_t = \theta(B)u_t.$$

- Neste caso, dizemos que Y_t segue um modelo Auto-Regressivo - Integrado - Média Móvel, ou ARIMA(p, d, q):

$$\phi(B)(1-B)^d Y_t = \theta(B)u_t$$

$$\Rightarrow \left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\cdots-\phi_p B^p\right)(1-B)^d Y_t = \left(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots-\theta_q B^q\right)u_t$$

FORMAS DO MODELO ARIMA

- O modelo ARIMA pode ser representado de 3 formas.

a) **Forma de Equação de Diferenças**

Representado em termos de valores prévios de Y_t e do valor atual:

$$Y_t = \xi_1 Y_{t-1} + \cdots + \xi_{p+d} Y_{t-(p+d)} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \cdots - \theta_q u_{t-q}$$

onde $\xi_i,\ i = 1, \dots, p + d$ é uma função dos ϕ_j's, $j = 1, \dots, p$. É bastante utilizado para calcular previsões.

b) Forma de Choques Aleatórios

Representado em termos do valor atual e prévio de u_t:

$$Y_t = \psi(B)u_t = u_t + \psi_1 u_{t-1} + \psi_2 u_{t-2} + \psi_3 u_{t-3} + \cdots$$

É uma forma conveniente para se calcular a variância dos erros de previsão.

c) Forma Invertida

Representada em termos dos valores prévios de Y_t e do valor atual de u_t:

$$\pi(B)Y_t = Y_t - \pi_1 Y_{t-1} - \pi_2 Y_{t-2} - \pi_3 Y_{t-3} - \cdots = u_t$$