L3. Exercícios sobre ACF e PACF em modelos ARIMA

1) Sabe-se que os valores das 5 primeiras autocorrelações teóricas de um processo são:

$$\rho_1 = 0{,}70 \qquad \rho_2 = 0{,}49 \qquad \rho_3 = 0{,}34 \qquad \rho_4 = 0{,}24 \qquad \rho_5 = 0{,}17$$

Que modelo ARMA(p,q) pode ter originado estes coeficientes?
Obs.: Os valores p e q são pequenos.

Vemos que $\rho_2 = \rho_1^2,\ \rho_3 = \rho_1^3,\ \rho_4 = \rho_1^4, \rho_5 = \rho_1^5$.

Esta é a função de autocorrelação de um AR(1)

2) Seja o modelo AR(2) estacionário aplicado a Y_t:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + u_t$$

Sabendo-se que $\phi_1 = 0{,}7$ e $\rho_2 = 0{,}6$, é possível deduzir o valor de ϕ_2?

Para o modelo AR(2),

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$$

Logo,

$$\rho_1 = \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1 \Rightarrow (1-\phi_2)\rho_1 = \phi_1 \ \Rightarrow \rho_1 = \phi_1/(1-\phi_2) \ \Rightarrow \rho_1 = 0{,}7/(1-\phi_2) \ \ (1)$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 \Rightarrow \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \Rightarrow 0{,}6 = 0{,}7\rho_1 + \phi_2 \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

$$0{,}6 = 0{,}7 \times \frac{0{,}7}{(1-\phi_2)} + \phi_2 \Rightarrow 0{,}6 \times (1-\phi_2) = 0{,}49 + \phi_2 - \phi_2^2$$

$$\Rightarrow -0{,}6 \times \phi_2 - \phi_2 + \phi_2^2 + 0{,}6 - 0{,}49 = 0$$

$$\Rightarrow \phi_2^2 - 1{,}6 \times \phi_2 + 0{,}11 = 0$$

As raízes da equação são:

$$\phi_2 = 0{,}07 \ \text{ e } \ \phi_2 = 1{,}53$$

Para que o processo seja estacionário, é necessário que

i. $\phi_1 + \phi_2 < 1$
ii. $\phi_2 - \phi_1 < 1$

iii. $|\phi_2| < 1$

E isto só ocorre para a raiz $\phi_2 = 0{,}07$.

3) Seja o seguinte processo estocástico:

$$Y_t = 14 + u_t + 0{,}4u_{t-1} - 0{,}2u_{t-2}$$

a) Determine a função de autocorrelação do processo;

Para o modelo MA(2), sabemos que

$$\rho_k = \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2 + {\theta_3}^2}, \quad k = 1,2$$

$$\rho_k = 0, k \geq 3$$

Como $\theta_1 = -0{,}4$ e $\theta_2 = 0{,}2$:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2} = 0{,}27$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2} = -0{,}17$$

$$\rho_k = 0, \qquad k > 2$$

b) Determine a função de autocorrelação parcial do processo.

$$\phi_{11} = \rho_1 = 0{,}27$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{-0{,}17 - 0{,}27^2}{1 - 0{,}27^2}$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_3 + \rho_3\rho_2^2 + \rho_1^3 - \rho_1\rho_2 - \rho_3\rho_1^2 - \rho_1\rho_2}{1 + \rho_2\rho_1^2 + \rho_2\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_1^2 - \rho_1^2} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2 - \rho_1\rho_2}{1 + \rho_2\rho_1^2 + \rho_2\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_1^2 - \rho_1^2}$$

E assim por diante.

4) a) Esboce a função de autocorrelação do processo

$$Y_t = -0{,}5Y_{t-1} + u_t - 0{,}8u_{t-1}$$

a) Ache os coeficientes ψ_j da representação MA infinita.

Sabemos, pela forma inversa de representar o modelo ARIMA, que

$$Y_t = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \cdots)u_t$$

E como temos um ARMA(1,1):

$$(1 + 0{,}5B)Y_t = (1 - 0{,}8B)u_t$$

$$Y_t = \frac{(1 - 0{,}8B)}{(1 + 0{,}5B)}\, u_t = (1 - 0{,}8B)(1 + 0{,}5B + (0{,}5B)^2 + \cdots)u_t$$

$$= (1 - 0{,}8B + 0{,}5B - 0{,}04B^2 + (0{,}5B)^2 - 0{,}0425 + \cdots)u_t$$

Os coeficientes ψ_k são calculados através da equação acima.

b) Determine a função de autocorrelação parcial do processo

1ª Autocorrelação Parcial:

$$\phi_{11} = \rho_1$$

Para calcular ρ_1:

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B)Y_t = (1 - \theta_1 B)u_t$$

$$\Rightarrow (1 - \phi_1 B)W_t = (1 - \theta_1 B)u_t$$

$$\Rightarrow W_t = \phi_1 W_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1}$$

Além disto:

$$W_{t-1} = \phi_1 W_{t-2} + u_{t-1} - \theta_1 u_{t-2}$$

$$\gamma_0 = Cov(W_t, W_t) = Cov(W_t\,, \phi_1 W_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1})$$

$$= \phi_1 Cov(W_t\,, W_{t-1}) + Cov(W_t\,, u_t) - \theta_1 Cov(W_t\,, u_{t-1})$$

$$= \phi_1 \gamma_1 + \sigma_u^2 - \theta_1 Cov(\phi_1 W_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1}\,, u_{t-1})$$

$$= \phi_1 \gamma_1 + \sigma_u^2 - \theta_1 \phi_1 Cov(W_{t-1}\,, u_{t-1}) - \theta_1 Cov(u_t\,, u_{t-1}) + \theta_1^2 Cov(u_{t-1}\,, u_{t-1})$$

$$= \phi_1 \gamma_1 + \sigma_u^2 - \theta_1 \phi_1 Cov(\phi_1 W_{t-2} + u_{t-1} - \theta_1 u_{t-2}\,, u_{t-1}) + \theta_1^2 \sigma_u^2$$

$$= \phi_1 \gamma_1 + \sigma_u^2 - \theta_1 \phi_1^2 Cov(W_{t-2}\,, u_{t-1}) - \theta_1 \phi_1 Cov(u_{t-1}\,, u_{t-1}) + \theta_1^2 \phi_1 Cov(u_{t-2}\,, u_{t-1}) + \theta_1^2 \sigma_u^2$$

$$= \phi_1 \gamma_1 + \sigma_u^2 - \theta_1 \phi_1 \sigma_u^2 + \theta_1^2 \sigma_u^2$$

$$\boldsymbol{\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \left(1 - \theta_1\phi_1 + \theta_1^2\right)\sigma_u^2}$$

$$\gamma_1 = Cov(W_t, W_{t-1}) = Cov(\phi_1 W_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1}, W_{t-1})$$

$$= \phi_1 Cov(W_{t-1}, W_{t-1}) + Cov(W_{t-1}, u_t) - \theta_1 Cov(W_{t-1}, u_{t-1})$$

$$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma_u^2$$

Para calcular ρ_1 substituir γ_1 em γ_0.

2ª Autocorrelação Parcial:

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

Para calcular ρ_2:

$$\gamma_2 = Cov(W_t, W_{t-2}) = Cov(\phi_1 W_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1}, W_{t-2})$$

$$= \phi_1 Cov(W_t, W_{t-2}) = \phi_1\gamma_1$$

3ª Autocorrelação Parcial:

$$\phi_{33} = \frac{\rho_3 + \rho_3\rho_2^2 + \rho_1^3 - \rho_1\rho_2 - \rho_3\rho_1^2 - \rho_1\rho_2}{1 + \rho_2\rho_1^2 + \rho_2\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_1^2 - \rho_1^2}$$

E assim por diante.

5) O modelo

$$Y_t = -0{,}2Y_{t-1} + 0{,}48Y_{t-2} + u_t + 0{,}6u_{t-1} - 0{,}16u_{t-2}$$

está sobre-parametrizado?

Para que o processo seja estacionário, é necessário que

i. $\phi_1 + \phi_2 < 1$

ii. $\phi_2 - \phi_1 < 1$

iii. $|\phi_2| < 1$

Como todas as condições são satisfeitas, o processo é estacionário.

Para que o processo seja inversível, é necessário que

i. $\theta_1 + \theta_2 < 1$

ii. $\theta_2 - \theta_1 < 1$

iii. $|\theta_2| < 1$

Como todas as condições são satisfeitas, o processo é inversível.

Logo, o modelo não está sobre-parametrizado.

6) Seja o processo AR(2) aplicado a Y_t. Sendo conhecida a primeira autocorrelação parcial $\phi_{11} = 0{,}9$ e sabendo-se que $\rho_2 = 0{,}8$ pede-se determinar ϕ_{22}.

$$\phi_{11} = \rho_1 = 0{,}9$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{0{,}8 - 0{,}9^2}{1 - 0{,}9^2} = -0{,}05$$