2^a **Lista de Exercícios**

EST088 - Inferência Bayesiana

1. Considere as seguintes afirmações e indique se cada uma delas é Verdadeira (V) ou Falsa (F).

    1. A inferência Bayesiana adota uma postura subjetivista, onde tudo o que é desconhecido deve ser probabilizado e tratado como aleatório.
    2. A inferência Bayesiana trata parâmetros desconhecidos como quantidades fixas, enquanto a inferência Clássica os considera variáveis aleatórias.
    3. A Estatística Bayesiana utiliza regras de probabilidade para atualizar crenças sobre quantidades desconhecidas com base na observação dos dados.
    4. A inferência Frequentista permite incorporar informações prévias sobre os parâmetros, enquanto a Bayesiana não.
    5. Em um experimento aleatório, sempre que as condições forem repetidas, o resultado será o mesmo, não podendo variar.

    Qual a alternativa correta?

    a) V, F, V, F, F
    b) V, F, F, V, F
    c) F, V, V, V, F
    d) F, F, V, F, V
    e) V, V, V, F, F

2. Dois dados justos são lançados. Qual é a probabilidade condicional de que pelo menos um deles mostre 6, dado que os números obtidos são diferentes?

3. Suponha que uma fábrica tenha as máquinas I, II e III, responsáveis pela produção de luminárias. O histórico da fábrica indica que as máquinas I, II e III produzem, respectivamente, 2%, 1% e 3% de luminárias defeituosas. Além disso, a participação de cada máquina na produção total é de 35%, 25% e 40%, respectivamente. Uma luminária é selecionada aleatoriamente da produção da fábrica.

    a) Qual é a probabilidade de a luminária selecionada ser defeituosa?

    b) Sabendo que a luminária é defeituosa, qual é a probabilidade condicional de que tenha sido produzida pela máquina III?

4. Dois fabricantes fornecem lâmpadas para o mercado. As lâmpadas da fábrica X funcionam por mais de 3.000 horas em 99% dos casos, enquanto as lâmpadas da fábrica Y funcionam por mais de 3.000 horas em 95% dos casos. Além disso, a fábrica X é responsável por 60% do total de lâmpadas disponíveis no mercado.

a) Qual é a probabilidade de que uma lâmpada comprada funcione por mais de 3.000 horas?

b) Sabendo que uma lâmpada funciona por mais de 3.000 horas, qual é a probabilidade condicional de que tenha sido fornecida pela fábrica Y?

c) Sabendo que uma lâmpada não funciona por mais de 3.000 horas, qual é a probabilidade condicional de que tenha sido fornecida pela fábrica X?

5. Uma caixa contém 1 bola verde e 1 bola vermelha, e uma segunda caixa contém 2 bolas verdes e 3 bolas vermelhas. Primeiro, uma caixa é escolhida e, em seguida, uma bola é retirada da caixa selecionada. Ambas as caixas têm a mesma probabilidade de serem escolhidas. Dado que uma bola verde foi retirada, qual é a probabilidade de que a primeira caixa tenha sido escolhida?

6. Li em um jornal que "o risco de uma gravidez ectópica é duas vezes maior em mulheres grávidas que fumam do que naquelas que não fumam". Além disso, uma pesquisa revelou que "32% das mulheres em idade fértil são fumantes". Com base nessas informações, determine a porcentagem de mulheres com gravidez ectópica que são fumantes.

7. Estima-se que 50% dos e-mails sejam classificados como spam. Um software foi aplicado para filtrar esses e-mails de spam antes que cheguem à sua caixa de entrada. Uma marca específica de software afirma que consegue detectar 99% dos e-mails de spam, e a probabilidade de um falso positivo (um e-mail não spam identificado como spam) é de 5%. Agora, se um e-mail for identificado como spam, qual é a probabilidade de que ele, na verdade, seja um e-mail não spam?

8. Há uma urna contendo 9 bolas, que podem ser verdes ou vermelhas. O número de bolas vermelhas na urna é desconhecido. Uma bola é sorteada aleatoriamente da urna e sua cor é observada.

a) Qual é o espaço amostral Bayesiano ($\mathbf{U}$) do experimento?

b) Seja X o número de bolas vermelhas na urna. Suponha que todos os valores possíveis de X, de 0 a 9, sejam igualmente prováveis. Seja $Y_1 = 1$ se a primeira bola sorteada for vermelha, e $Y_1 = 0$ caso contrário. Preencha a tabela de probabilidade conjunta para X e Y_1 abaixo:

$X = x$	*priori*	$Y_1 = 0$	$Y_1 = 1$

c) Encontre a distribuição marginal de $Y_1 = 1$ e insira-a na tabela do item (b).

d) Suponha que uma bola vermelha tenha sido sorteada. Qual é o espaço amostral Bayesiano reduzido?

e) Encontre a distribuição a posteriori de X, preenchendo a tabela simplificada.

$X = x$	*priori*	*verossim.*	*priori* $\times$ *verossim.*	*posteriori*

9. Seja uma variável aleatória proveniente de uma distribuição com função densidade de probabilidade dada por:

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} xy^{x-1} & \text{se } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha também que a variável aleatória X não seja observável, ou seja, desconhecida ($X > 0$) e que a distribuição a priori de X seja uma distribuição gama com parâmetros α e β ($\alpha > 0$ e $\beta > 0$). Determine a distribuição a posteriori de X.

10. Suponha que $(Y \mid X = x) \sim Bin(n, x)$ e que a distribuição a priori de X seja $Beta(1, 1)$. Encontre a distribuição a posteriori de X?

11. Suponha que $(Y \mid X = x) \sim Pois(x)$, e que a distribuição a priori de X seja $Exp(1)$. Encontre a distribuição a posteriori de $(X \mid Y = 0)$.

12. Use a regra do produto para fatorar a distribuição de probabilidade conjunta $P(A, B, C)$. Quais suposições específicas de independência condicional devem ser feitas entre as três variáveis para que a distribuição conjunta seja completamente descrita pelas distribuições condicionais $P(A \mid B)$, $P(B \mid C)$ e $P(C)$?

Funções de densidade de probabilidade (f.d.p.) e funções de massa de probabilidade (f.m.p.) das distribuições mencionadas nos exercícios:

- Distribuição Binomial: Se $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, então sua f.m.p. é dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

- Distribuição de Poisson: Se $X \sim \text{Poisson}(y)$, então sua f.m.p. é dada por:

$$P(X = k) = \frac{y^k e^{-y}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Distribuição Exponencial: Se $X \sim \text{Exp}(y)$, então sua f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{y} e^{-x/y}, \quad x > 0.$$

- Distribuição Gama: Se $X \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$, então sua f.d.p. é:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

- Distribuição Beta: Se $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, então sua f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad 0 < x < 1,$$

  onde $B(\alpha, \beta)$ é a função Beta, definida em termos da função Gama $\Gamma(\cdot)$ como:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$