DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

Estruturas de Dados

Pesquisa em Memória Secundária: Árvores B

Professores: Anisio Lacerda
Lucas Ferreira
Wagner Meira Jr.
Washington Cunha

Pesquisa em Memória Secundária

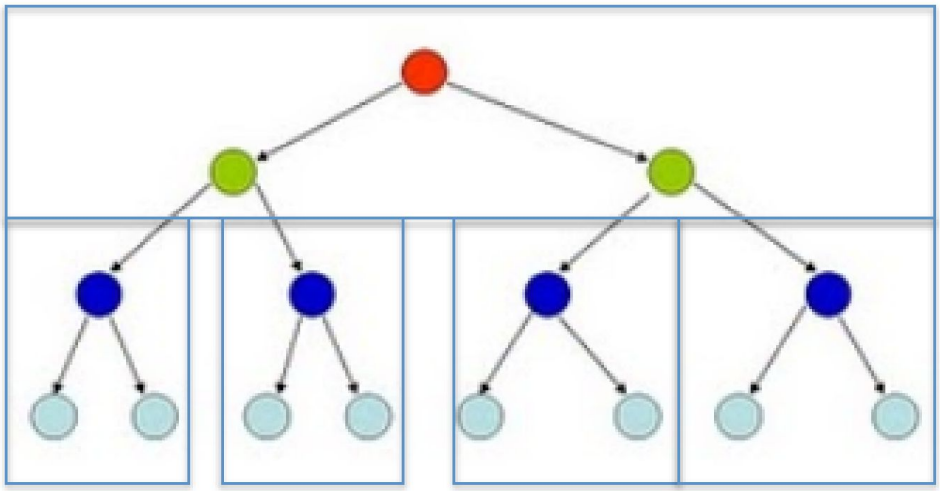
- Arquivos contém mais registros do que a memória interna (primária) pode armazenar
- Custo para acessar um registro é ordens de grandeza maior que o custo de acesso à memória primária
- **Medida de complexidade**: custo de transferir dados entre a memória principal e secundária (minimizar o número de transferências)

Árvores B: Introdução

- **Problema**: acessar dados em arquivos grandes armazenados em memória secundária
- **Solução 1**: Usar uma árvore binária
  - Armazenar nós em disco
  - Ponteiros *esq* e *dir* apontam para endereços em disco
  - Custo de leitura: O(log n) acessos em disco
    - n = 10^6, log(n) ≈ 20 acessos em disco!

Solução 2

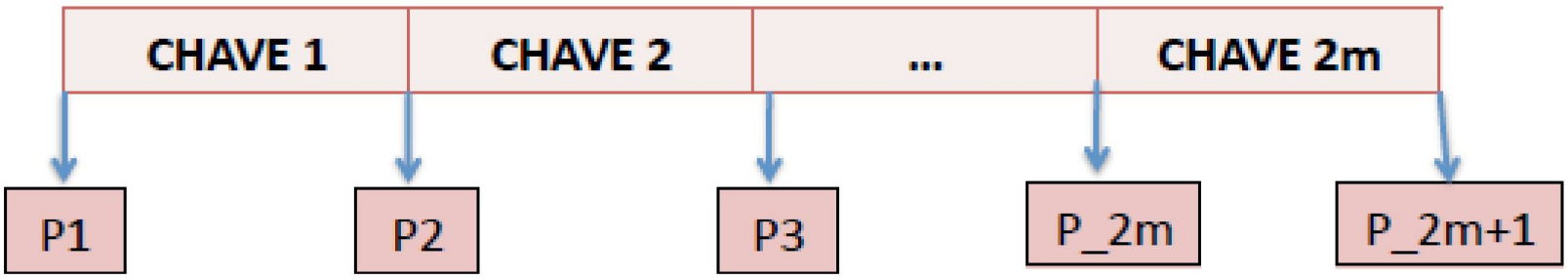
- Agrupar nós da árvore binária em páginas



- Árvore binária □ árvore quaternária (4 filhos por página)
- Problema: qual a melhor forma de distribuir os registros entre as páginas? (problema de otimização complexo)

Árvores B

- Solução para o problema de distribuir os registros entre páginas
- Proposto por Bayer & McCreight em 1972 (*Boeing Research Lab*)
- Página de uma árvore B de ordem *m*:

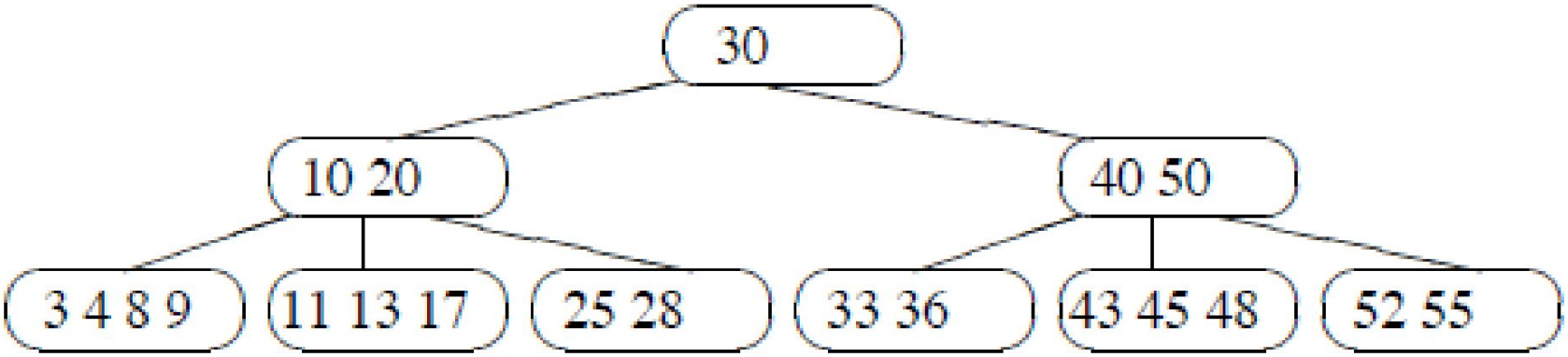


Árvores B - Propriedades

- São árvores *n*-árias: mais de um registro por nó
- Em uma árvore B de ordem *m*:
  - Página raiz: entre *1* a *2m* registros
  - Demais páginas:
    - No mínimo *m* registros e *m+1* descendentes
    - No máximo *2m* registros e *2m+1* descendentes
  - Páginas folhas: aparecem todas no mesmo nível
  - Registros em ordem crescente da esquerda para a direita

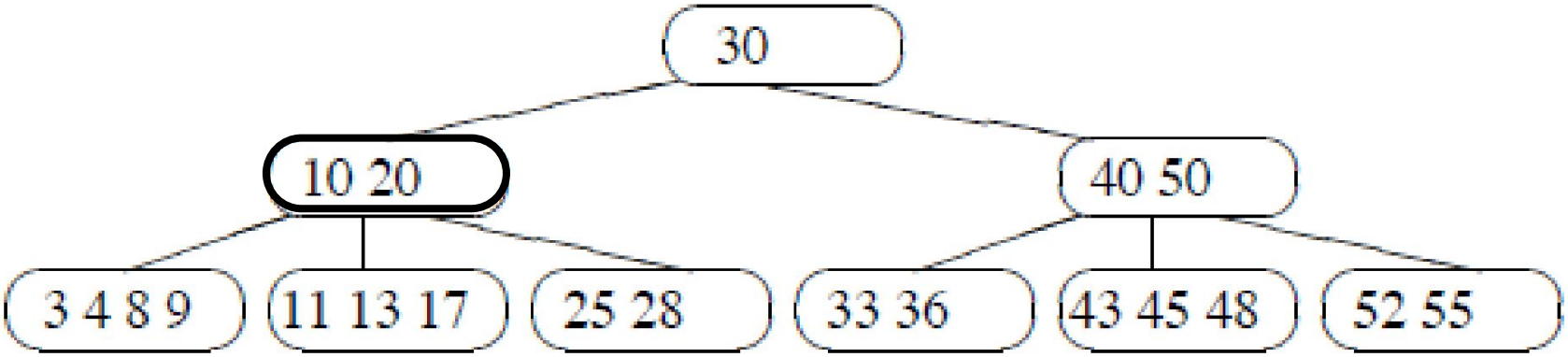
Exemplo

- Árvore B de ordem *m*=*2* com três níveis:



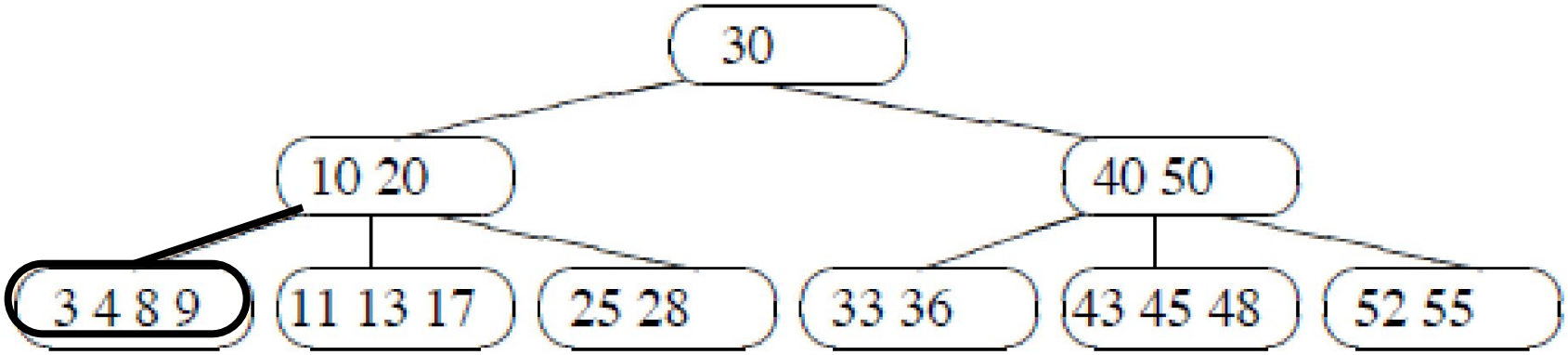
Exemplo

- Árvore B de ordem *m*=*2* com três níveis:



Exemplo

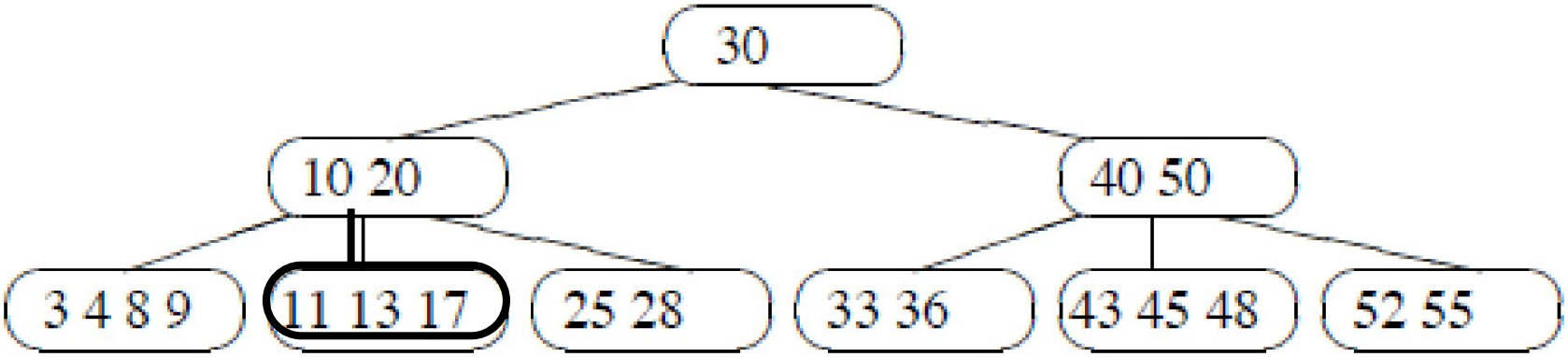
- Árvore B de ordem *m*=*2* com três níveis:



< 10

Exemplo

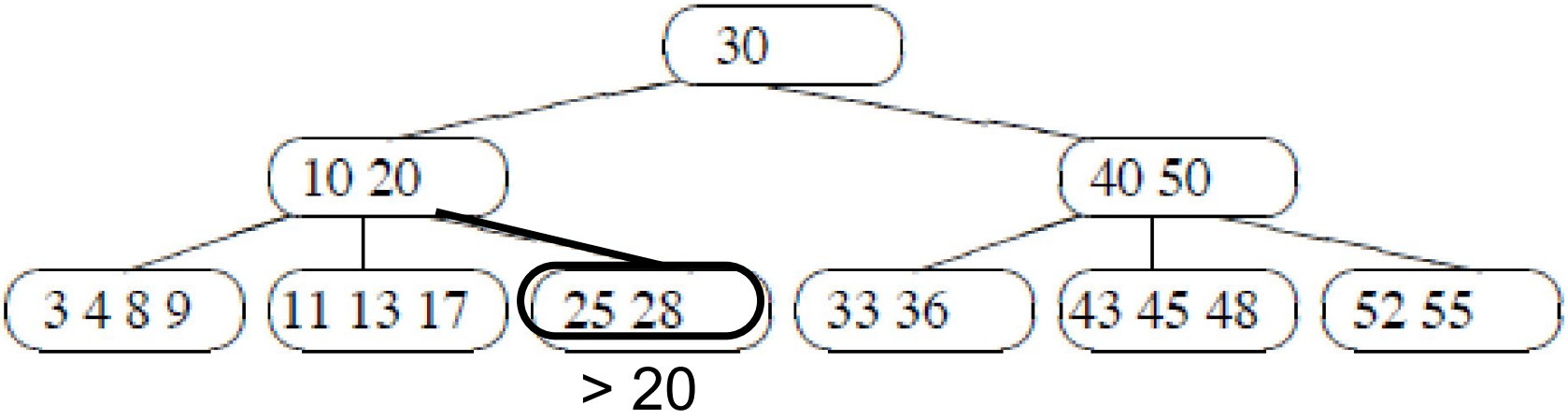
- Árvore B de ordem *m*=*2* com três níveis:



10 < x < 20

Exemplo

- Árvore B de ordem *m*=*2* com três níveis:

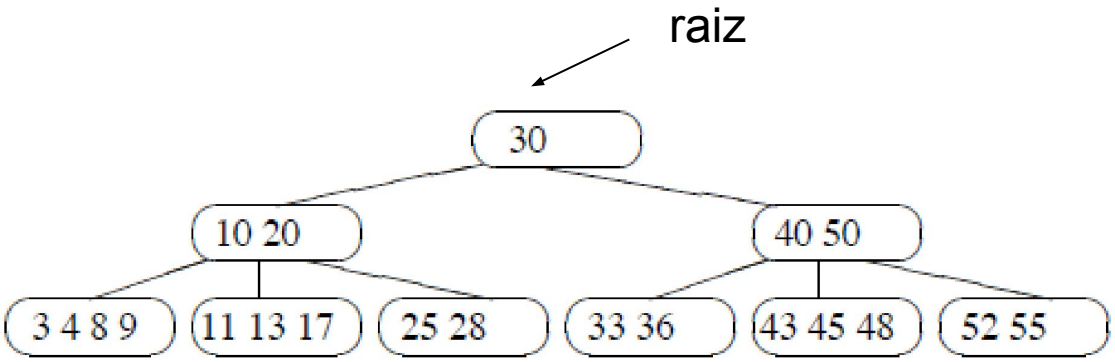


TAD Árvore B

```
const int M = 2;
class Registro {
    int chave;
    // Outros dados:
    // ...
};

class Pagina {
    int n;
    Registro registros[2*M];
    Pagina * filhos[2*M+1];
};
```

```
class ArvoreB {
    Pagina * raiz;
    // Operações:
    // ...
};
```



- Operações:
  - Inicializar
  - Pesquisar
  - Inserir
  - Remover

Árvore B – Inicializar

```
void ArvoreB :: inicializa() {
    raiz = NULL;
}
```

Árvore B - Pesquisa

```
Registro * Pagina :: pesquisa(Registro x) {
    if (this == NULL) {
        printf("Registro não encontrado.");
        return NULL;
    }

    int i = 1;
    while (i < n && x.chave > registros[i-1].chave) i++;

    if (x.chave == registros[i-1].chave) //Encontrou x
        return &registros[i-1];
    if (x.chave < registros[i-1].chave)
        return filhos[i-1] -> pesquisa(x);
    else
        return filhos[i] -> pesquisa(x);
}
```

busca dentro da página

busca na sub-árvore à esquerda do registro *i*

busca na sub-árvore à direita do registro *i*

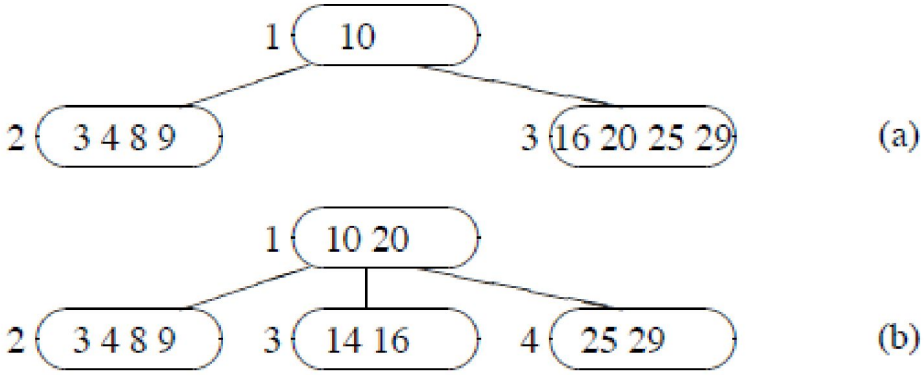
Árvore B - Inserção

1. Localizar a página onde o registro deve ser inserido
2. Se a página encontrada tem menos de *2m* registros, o processo de inserção fica limitado à página
3. Se a página encontrada está cheia, é criada uma nova página. No caso da página “pai” estar cheia, o processo de divisão se propaga

Árvore B - Inserção

1. Localizar a página onde o registro deve ser inserido
2. Se a página encontrada tem menos de *2m* registros, o processo de inserção fica limitado à página
3. Se a página encontrada está cheia, é criada uma nova página. No caso da página “pai” estar cheia, o processo de divisão se propaga

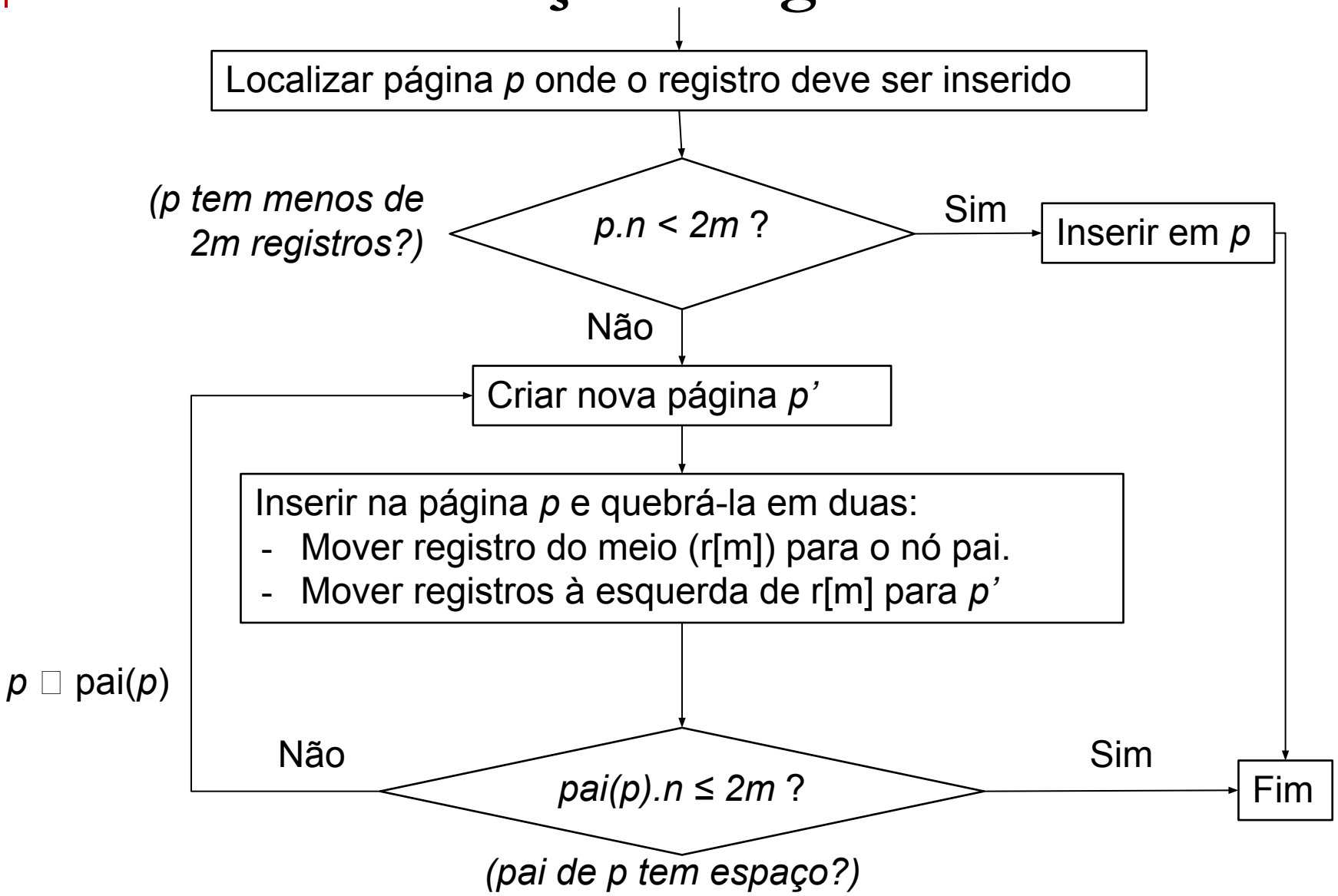
- Ex.: *m*=2. Inserir o registro com chave 14:



Árvore B - Inserção

- Se a página a receber o novo registro contém *2m* registros, a mesma é quebrada em duas, cada uma com *m* registros. O *(m+1)*-ésimo registro (o do meio) é movido para o nó pai
- Se a página-pai estiver cheia, o mesmo procedimento de divisão é repetido recursivamente
- No pior caso, uma nova raiz é criada, aumentando a altura da árvore
- Obs.: Uma árvore B somente aumenta a altura com a divisão da raiz

Árvore B – Inserção - Algoritmo

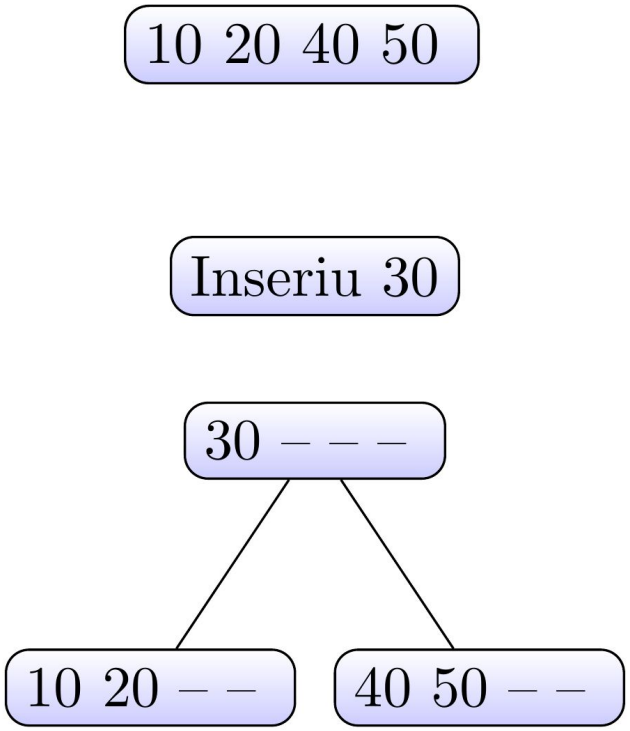


Árvore B - Exemplo

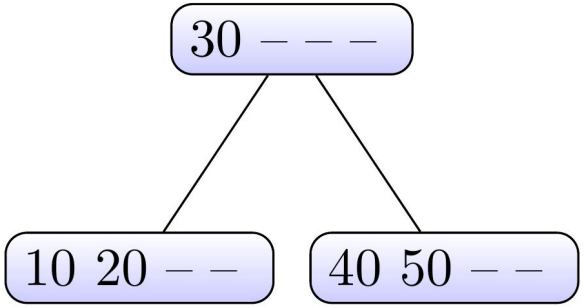
Inseriu 20, 10, 40 e 50

10 20 40 50

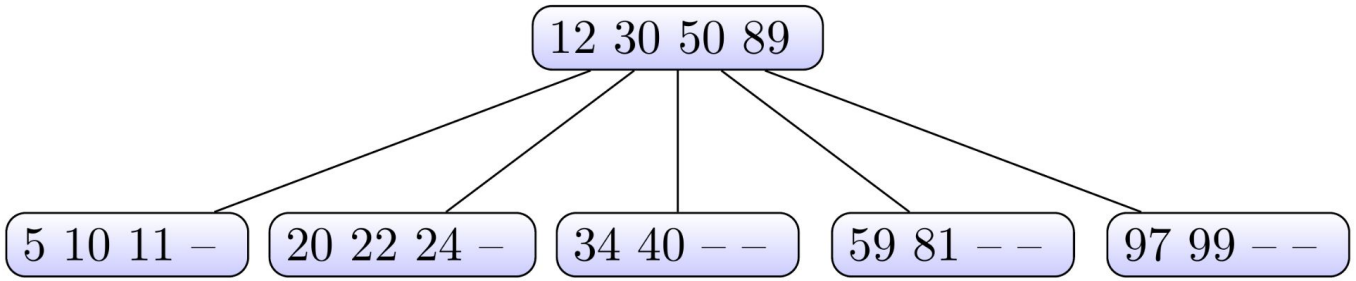
Árvore B - Exemplo



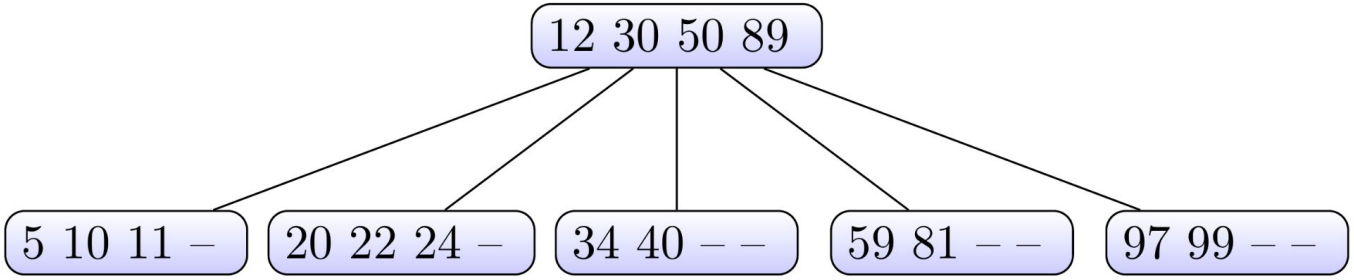
Árvore B - Exemplo



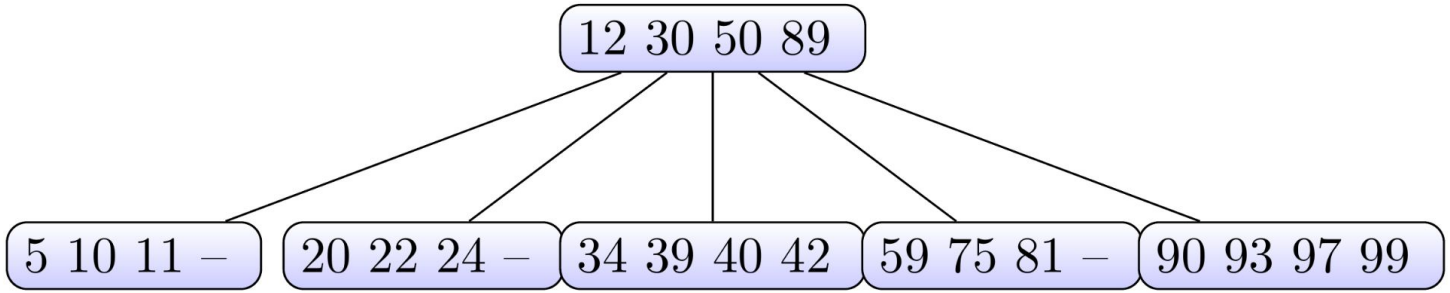
Inseriu 59,81,34,11,24,99,12,89,5,97,22



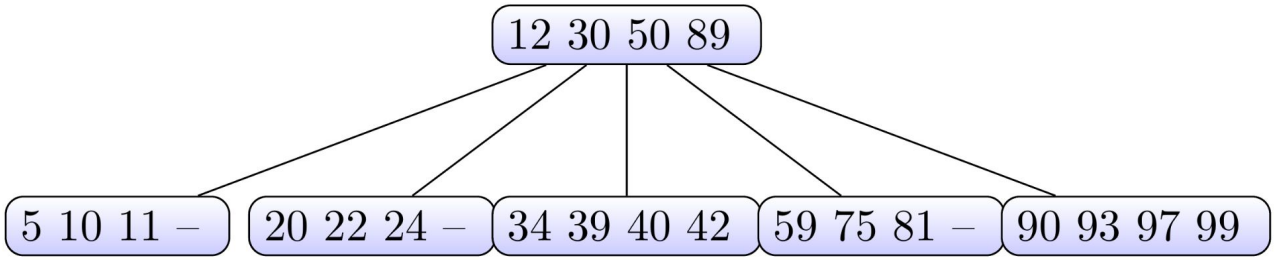
Árvore B - Exemplo

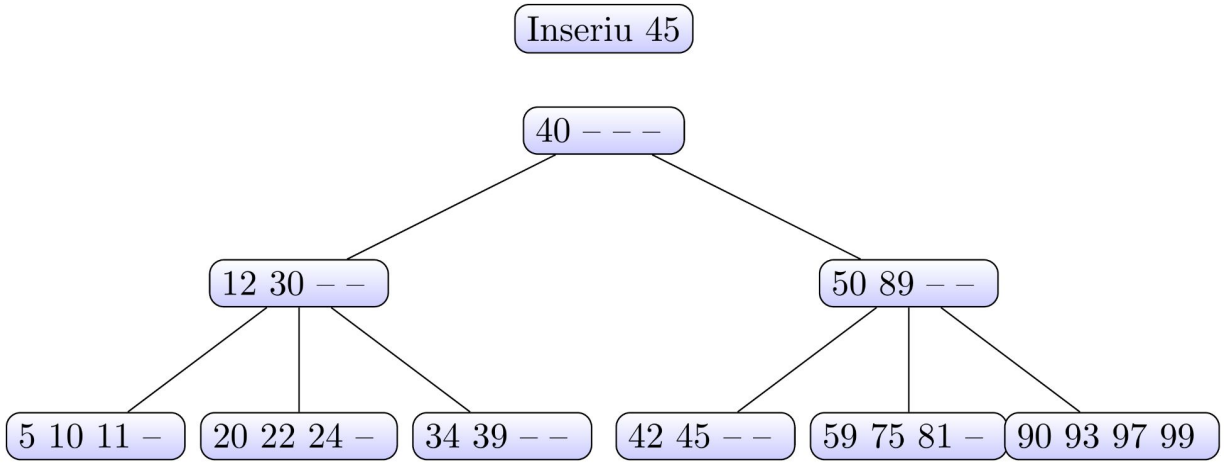


Inseriu 39,42,90,75,93

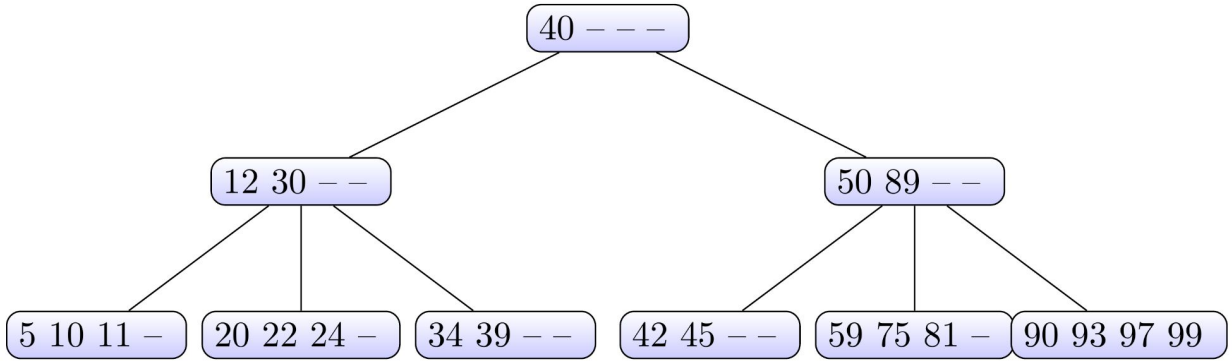


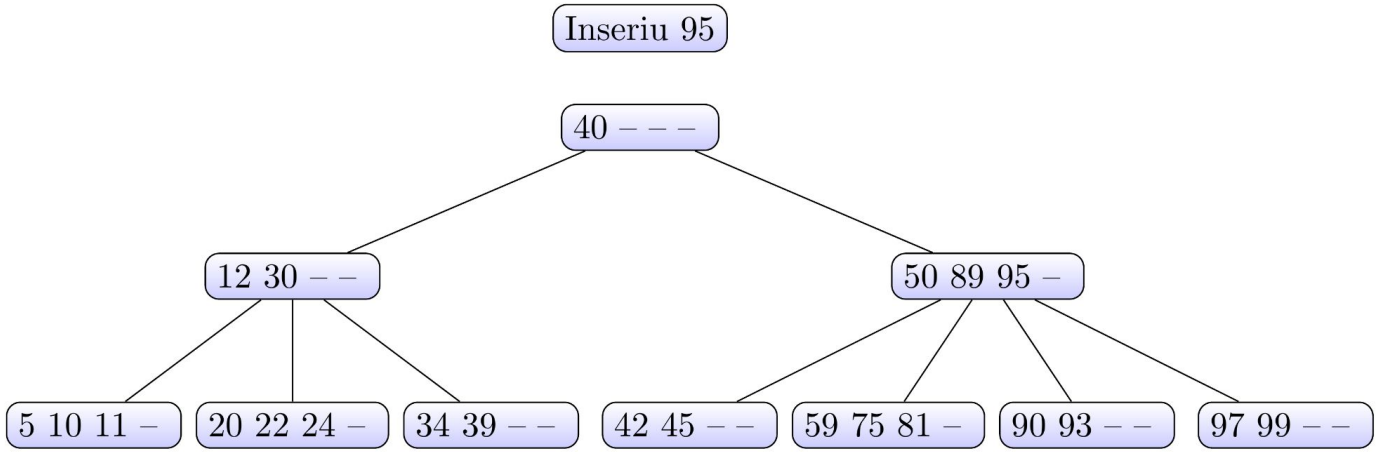
Árvore B - Exemplo



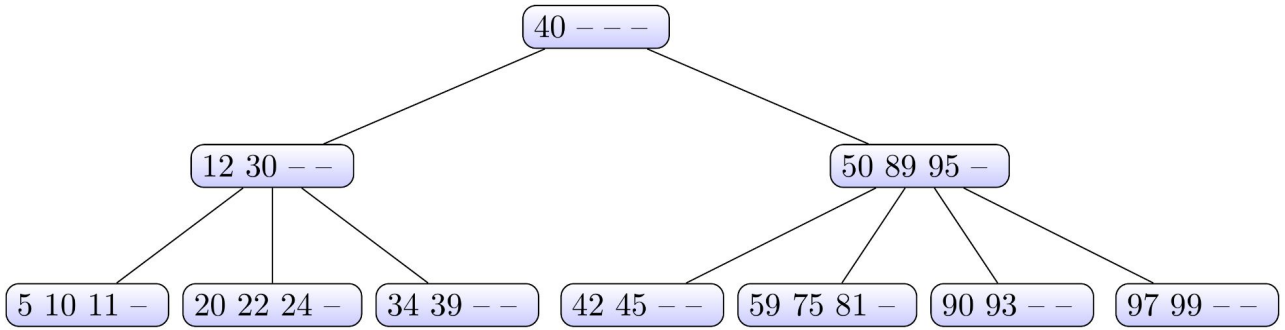


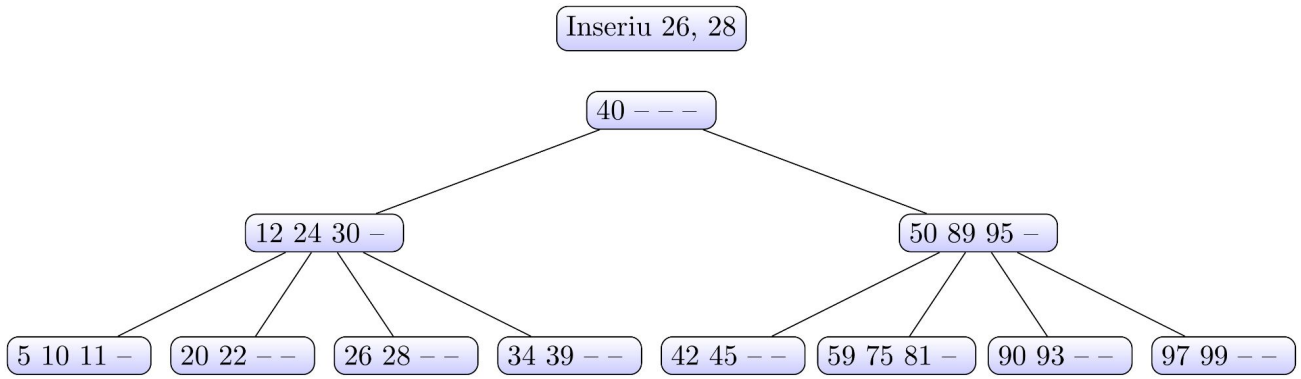
Árvore B - Exemplo



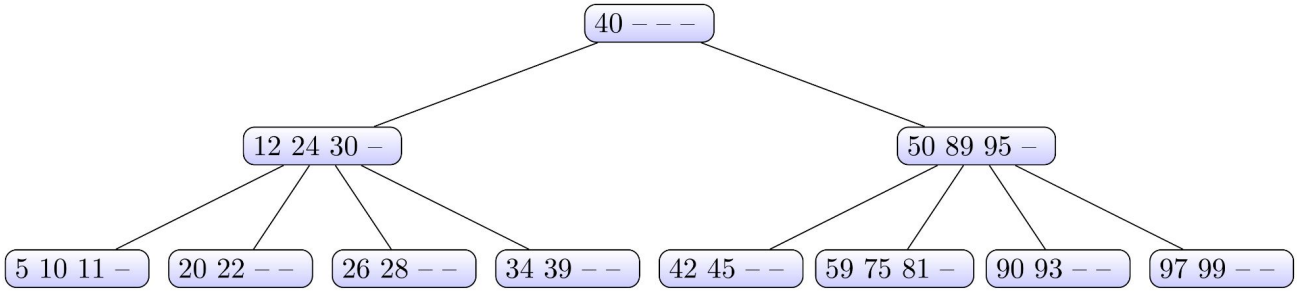


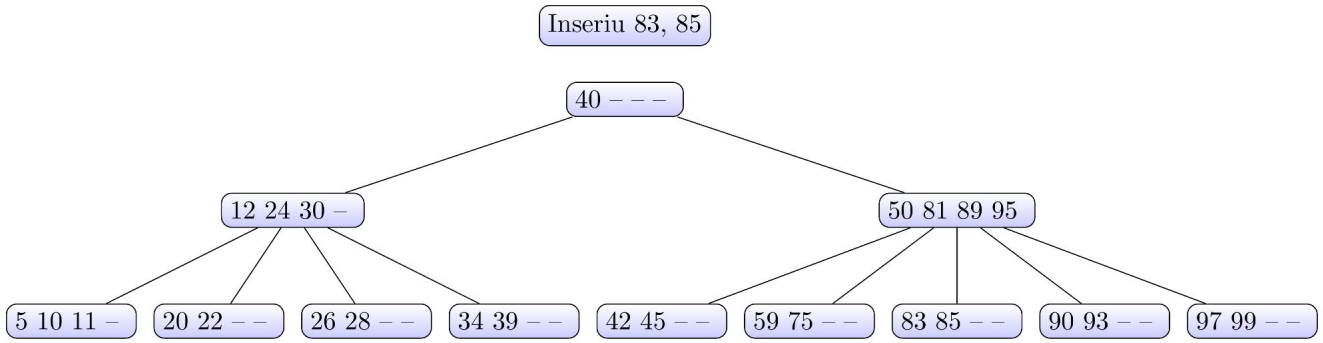
Árvore B - Exemplo



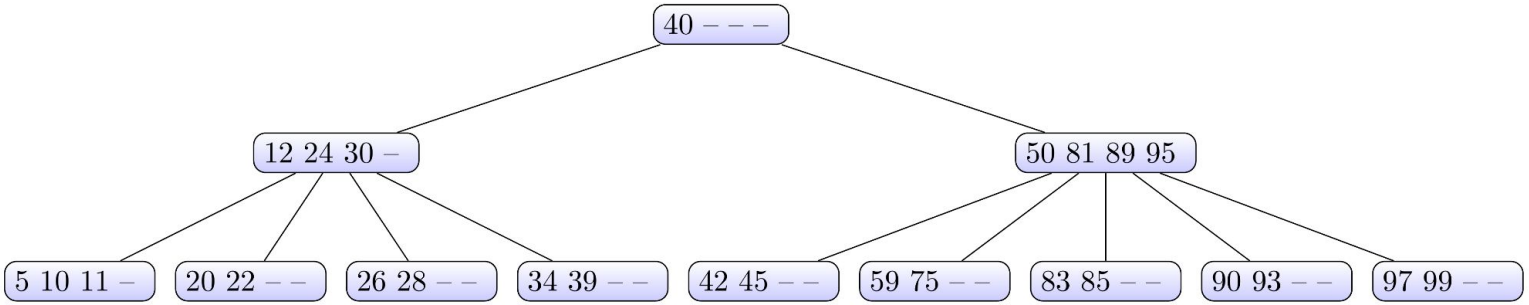


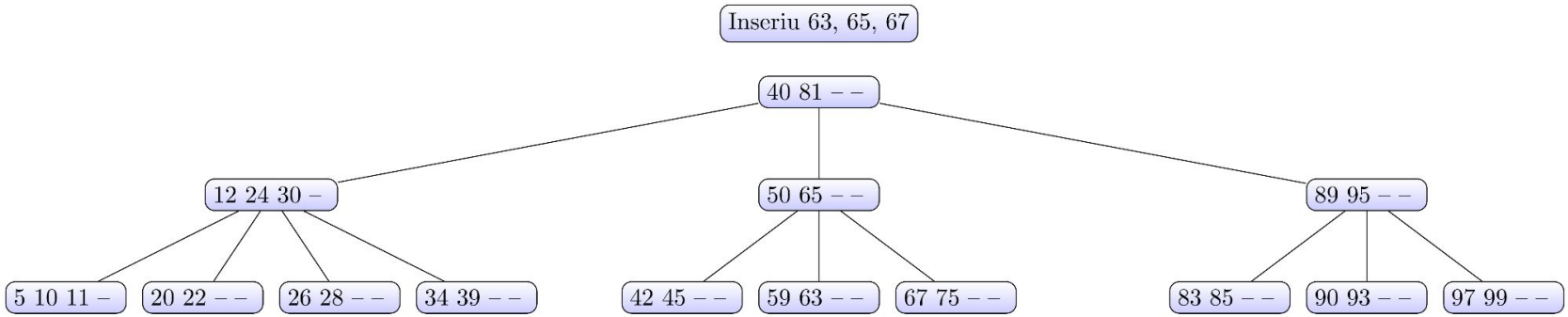
Árvore B - Exemplo





Árvore B - Exemplo





Inserção - Código

```
void Insere(Registro Reg, Apontador *Ap)
{
  short Cresceu;

  Registro RegRetorno;
  Pagina *ApRetorno, *ApTemp;

  Ins(Reg, *Ap, &Cresceu, &RegRetorno, &ApRetorno);

  if (Cresceu)  /* Arvore cresce na altura pela raiz */
  {
    ApTemp = (Pagina *)malloc(sizeof(Pagina));

    ApTemp->n = 1;
    ApTemp->r[0] = RegRetorno;
    ApTemp->p[1] = ApRetorno;
    ApTemp->p[0] = *Ap;
    *Ap = ApTemp;
  }
}
```

Inserção - Código

```
void Ins(Registro Reg, Apontador Ap, short *Cresceu, Registro *RegRetorno,  Apontador *ApRetorno)
{
   long i = 1,j;
   Apontador ApTemp;

   if (Ap == NULL) {
     *Cresceu = TRUE;
     (*RegRetorno) = Reg;
     (*ApRetorno) = NULL;
      return;
   }

   while (i < Ap->n && Reg.Chave > Ap->r[i-1].Chave)  i++;

   if (Reg.Chave == Ap->r[i-1].Chave) {
      printf(" Erro: Registro ja esta presente %ld\n",Reg.Chave);
      *Cresceu = FALSE;
      return;
   }
   if (Reg.Chave < Ap->r[i-1].Chave)  i--;

   Ins(Reg, Ap->p[i], Cresceu, RegRetorno, ApRetorno); if (!*Cresceu)  return;

   if (Ap->n < m) { /* Pagina tem espaco */
       InsereNaPagina(Ap, *RegRetorno, *ApRetorno);
        *Cresceu = FALSE; return;
   }

   ApTemp = (Apontador)malloc(sizeof(Pagina)); ApTemp->n = 0; ApTemp->p[0] = NULL;
   if (i < m+1) {
       InsereNaPagina(ApTemp, Ap->r[mm-1], Ap->p[mm]);
        Ap->n--;
        InsereNaPagina(Ap, *RegRetorno, *ApRetorno);
   }
   else
       InsereNaPagina(ApTemp, *RegRetorno, *ApRetorno);

   for (j = m + 2; j <= mm; j++)
       InsereNaPagina(ApTemp, Ap->r[j-1], Ap->p[j]);

   Ap->n = m;  ApTemp->p[0] = Ap->p[m+1];
   *RegRetorno = Ap->r[m]; *ApRetorno = ApTemp;
}
```

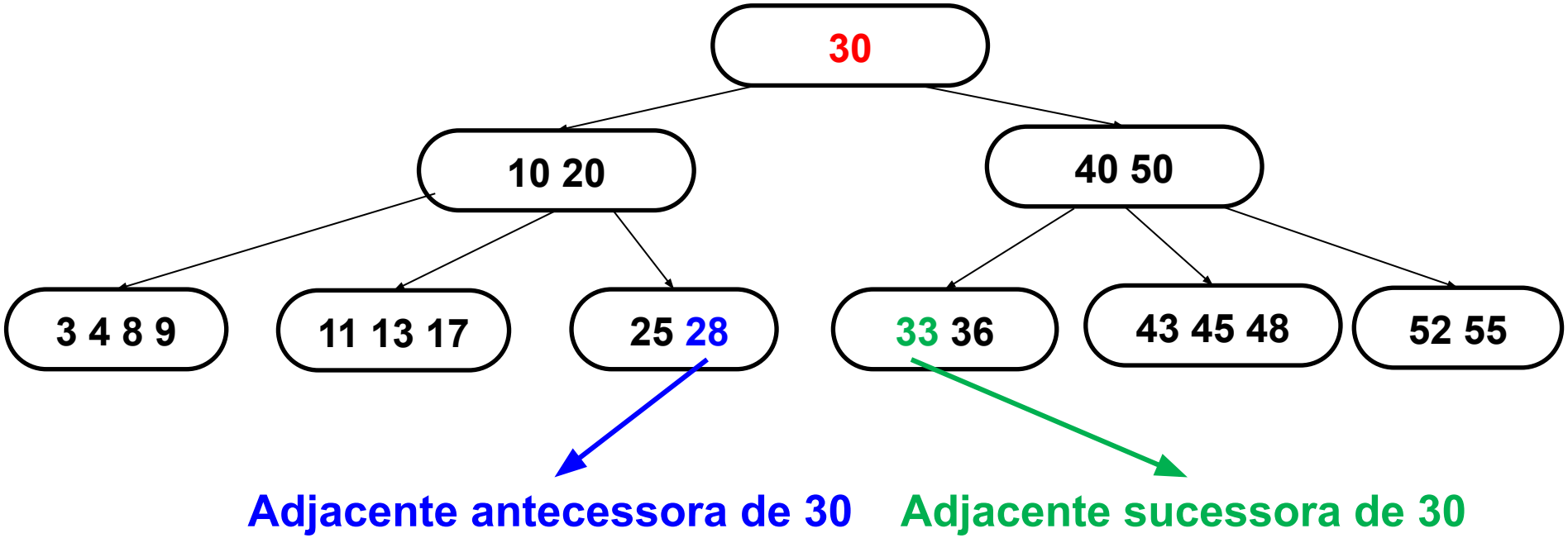
Árvore B - Remoção

- Página com registro a ser removido é folha:
  - Retira-se o registro
  - Se a página não possui pelo menos *m* registros, a propriedade da árvore B é violada. Pega-se um registro emprestado da página vizinha. Se não existir registros suficientes na página vizinha, as duas páginas devem ser fundidas em uma só.
- Página com o registro não é folha:
  - O registro a ser retirado deve ser primeiramente substituído por um registro contendo uma chave adjacente.

Árvore B - Remoção

- Quando o registro a ser removido não pertence a uma página-folha, o mesmo deve ser substituído pelo registro de chave adjacente
- Chave adjacente *antecessora*: está na página-folha mais à direita na sub-árvore à esquerda
- Chave adjacente *sucessora*: está na página-folha mais à esquerda na sub-árvore à direita

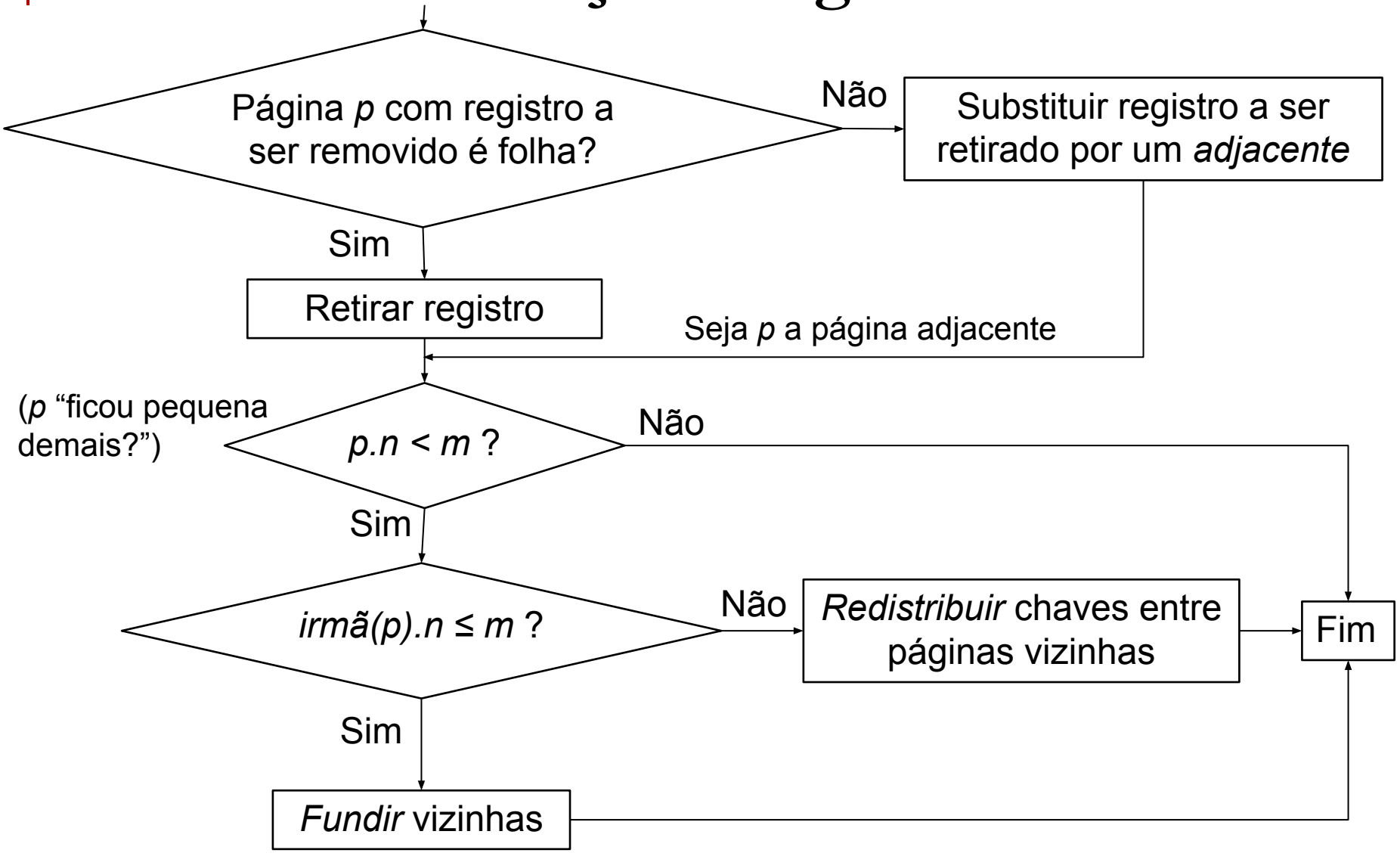
Chaves adjacentes - Exemplo



Árvore B - Remoção

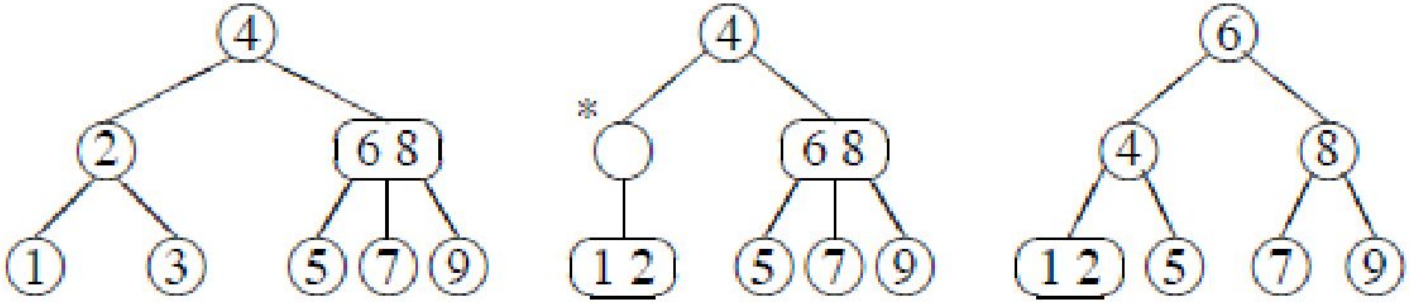
- Se o número de registros restantes na página-folha for < *m*, um registro da página vizinha deve ser emprestado
- Se a página vizinha tiver *m* registros apenas, as duas páginas devem ser fundidas, pois possuem *2m-1* registros
- Fundindo duas páginas:
  - O registro do meio deve ser emprestado do nó-pai
  - O procedimento é propagado até a raiz
  - Se o número de registros na raiz zerar, reduzir altura da árvore

Árvore B – Remoção - Algoritmo

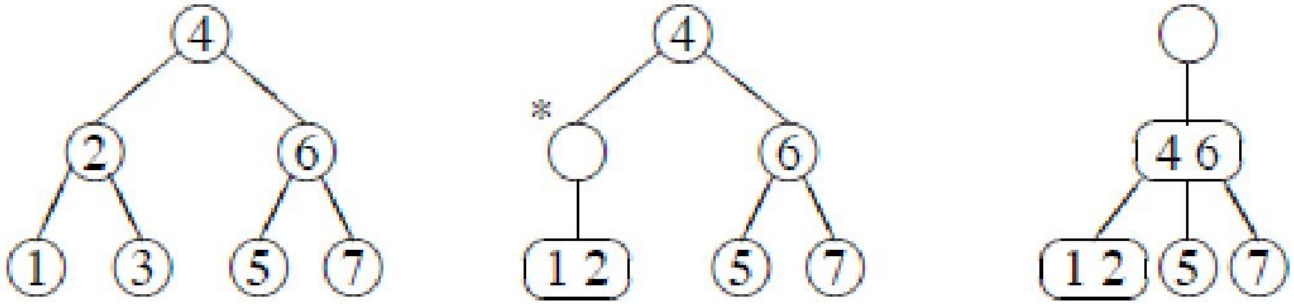


Remoção - Exemplo

- Ordem *m=1*. Retirando a chave 3



(a) Página vizinha possui mais do que m registros



(b) Página vizinha possui exatamente m registros

Remoção - Pseudo Código

```
Ret(Ch, Ap, Diminuiu)
    Se Ap == NULL, não está na árvore
    Se Ch no registro
        Se página folha,
            Remove
            Diminuiu = n<m
        Senão
            Antecessor
            Se Diminuiu, Reconstitui
    Ret(Ch,Ap->[i],Diminuiu)
    Se Diminuiu, Reconstitui
```

Remoção - Pseudo Código

```
Reconstitui(ApPag, ApPai, PosPai, Diminuiu)
    Se PosPai<ApPai->n // Verifica irmão à direita
        Se Irmão à direita tem folga
            Transfere Chave passando pelo pai
            Diminuiu = False
        Senão
            Fusão com o irmão à direita
            Se Pai >= m, Diminuiu = False
    Senão
        Se Irmão à esquerda tem folga
            Transfere Chave passando pelo pai
            Diminuiu = False
        Senão
            Fusão com irmão à esquerda
            Se Pai >= m, Diminuiu = False
```

Remoção - Algoritmo

```
void Retira(TipoChave Ch, Apontador *Ap){
        short Diminuiu;
        Apontador Aux;
        Ret(Ch, Ap, &Diminuiu);
        if (Diminuiu && (*Ap)->n == 0)  /* Arvore diminui na altura */
              { Aux = *Ap;   *Ap = Aux->p[0]; free(Aux);}
}
void Antecessor(Apontador Ap, int Ind, Apontador ApPai, short *Diminuiu)
{ if (ApPai->p[ApPai->n] != NULL)
  { Antecessor(Ap, Ind, ApPai->p[ApPai->n], Diminuiu);
     if (*Diminuiu)
       Reconstitui(ApPai->p[ApPai->n], ApPai, (long)ApPai->n, Diminuiu);
     return;
  }
  Ap->r[Ind-1] = ApPai->r[ApPai->n - 1];
  ApPai->n--;
  *Diminuiu = (ApPai->n < m);
}
```

Remoção - Algoritmo

```
void Ret(TipoChave Ch, Apontador *Ap, short *Diminuiu)
{ long j, Ind = 1;
  Apontador Pag;
  if (*Ap == NULL){ printf("Erro: registro nao esta na arvore\n"); *Diminuiu = FALSE; return;}
  Pag = *Ap;
  while (Ind < Pag->n && Ch > Pag->r[Ind-1].Chave) Ind++; // Procura chave
  if (Ch == Pag->r[Ind-1].Chave) // Achou Ch em Pag
  { if (Pag->p[Ind-1] == NULL)   /* Pagina folha */
        { Pag->n--;
        *Diminuiu = (Pag->n < m); // Folha ainda tem m registros?
        for (j = Ind; j <= Pag->n; j++) { Pag->r[j-1] = Pag->r[j]; Pag->p[j] = Pag->p[j+1]; }
        return;
        }
        Antecessor(*Ap, Ind, Pag->p[Ind-1], Diminuiu); /* Pagina nao e folha: trocar com antecessor */
        if (*Diminuiu) Reconstitui(Pag->p[Ind-1], *Ap, Ind - 1, Diminuiu);
        return;
  }
  if (Ch > Pag->r[Ind-1].Chave) Ind++;
  Ret(Ch, &Pag->p[Ind-1], Diminuiu);
  if (*Diminuiu) Reconstitui(Pag->p[Ind-1], *Ap, Ind - 1, Diminuiu);
}
```

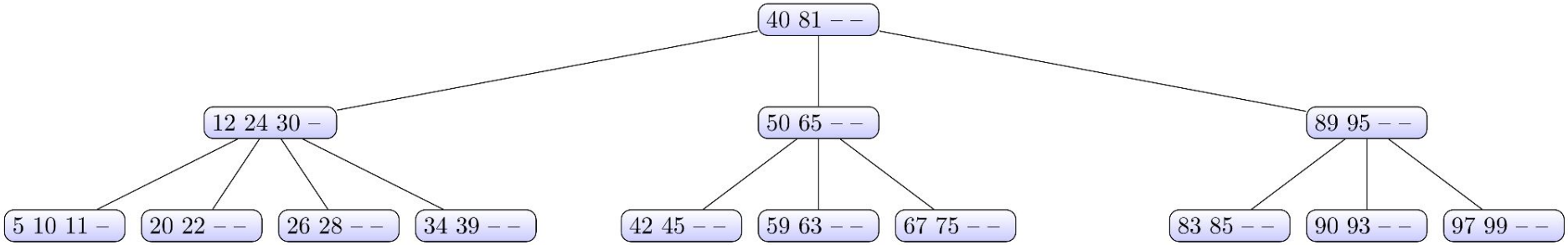
Remoção - Algoritmo

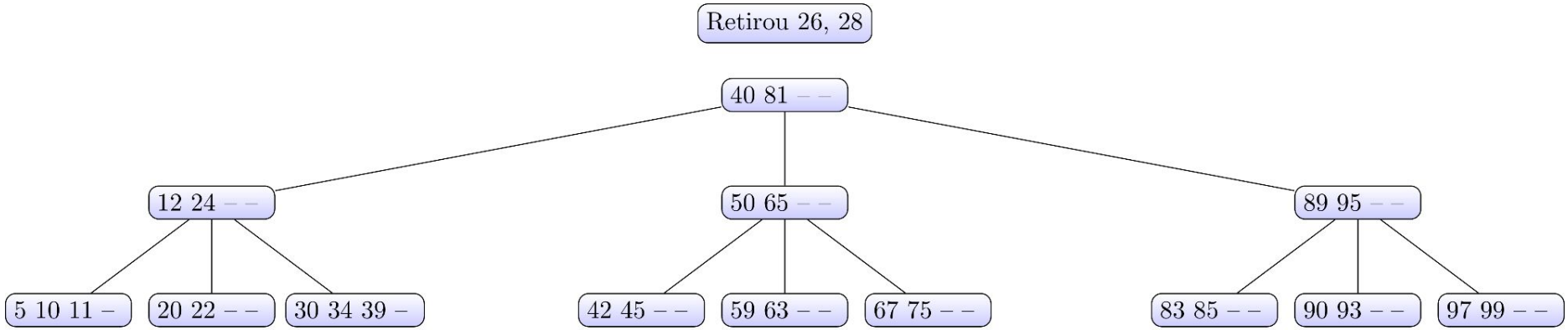
```
void Reconstitui(Apontador ApPag, Apontador ApPai, int PosPai, short *Diminuiu)
{ Pagina *Aux;
  long DispAux, j;
  if (PosPai < ApPai->n)   /* Aux = Pagina a direita de ApPag */
    { Aux = ApPai->p[PosPai+1]; DispAux = (Aux->n - m + 1) / 2;
      ApPag->r[ApPag->n] = ApPai->r[PosPai];
      ApPag->p[ApPag->n + 1] = Aux->p[0];   ApPag->n++;
      if (DispAux > 0)  /* Existe folga: transfere de Aux para ApPag */
        { for (j = 1; j < DispAux; j++) InsereNaPagina(ApPag, Aux->r[j-1], Aux->p[j]);
          ApPai->r[PosPai] = Aux->r[DispAux-1];
          Aux->n -= DispAux;
          for (j = 0; j < Aux->n; j++)  Aux->r[j]   = Aux->r[j + DispAux];
          for (j = 0; j <= Aux->n; j++)   Aux->p[j] = Aux->p[j + DispAux];
          *Diminuiu = FALSE;
        }
      else { /* Fusao: intercala Aux em ApPag e libera Aux */
        for (j = 1; j <= m; j++) InsereNaPagina(ApPag, Aux->r[j-1], Aux->p[j]);
        free(Aux);
        for (j = PosPai + 1; j < ApPai->n; j++){ ApPai->r[j-1] = ApPai->r[j]; ApPai->p[j] = ApPai->p[j+1]; }
        ApPai->n--;
        if (ApPai->n >= m)*Diminuiu = FALSE;
        }
  }
  else …. (próximo slide)
```

Remoção - Algoritmo

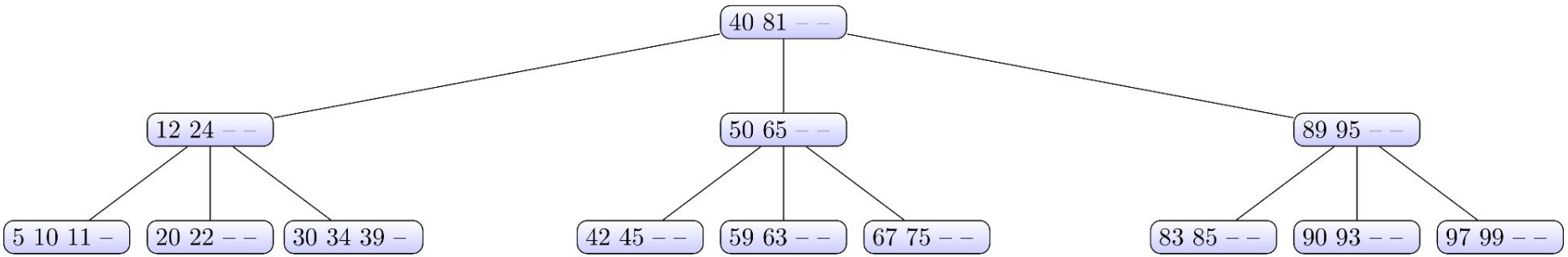
```
void Reconstitui(Apontador ApPag, Apontador ApPai, int PosPai, short *Diminuiu)
{ Pagina *Aux;
  long DispAux, j;
  if (PosPai < ApPai->n)   /* Aux = Pagina a direita de ApPag */
  { …. (slide anterior)
  }
  else { /* Aux = Pagina a esquerda de ApPag */
         Aux = ApPai->p[PosPai-1]; DispAux = (Aux->n - m + 1) / 2;
         for (j = ApPag->n; j >= 1; j--) ApPag->r[j] = ApPag->r[j-1];
         ApPag->r[0] = ApPai->r[PosPai-1];
         for (j = ApPag->n; j >= 0; j--) ApPag->p[j+1] = ApPag->p[j];
         ApPag->n++;
         if (DispAux > 0)   /* Existe folga: transfere de Aux para ApPag */
           { for (j = 1; j<DispAux; j++) InsereNaPagina(ApPag, Aux->r[Aux->n - j], Aux->p[Aux->n - j + 1]);
             ApPag->p[0] = Aux->p[Aux->n - DispAux + 1];
             ApPai->r[PosPai-1] = Aux->r[Aux->n - DispAux];
             Aux->n -= DispAux; *Diminuiu = FALSE;
         } else { /* Fusao: intercala ApPag em Aux e libera ApPag */
           for (j = 1; j <= m; j++) InsereNaPagina(Aux, ApPag->r[j-1], ApPag->p[j]);
           free(ApPag);  ApPai->n--;
           if (ApPai->n >= m)  *Diminuiu = FALSE;
         }
  }
}
```

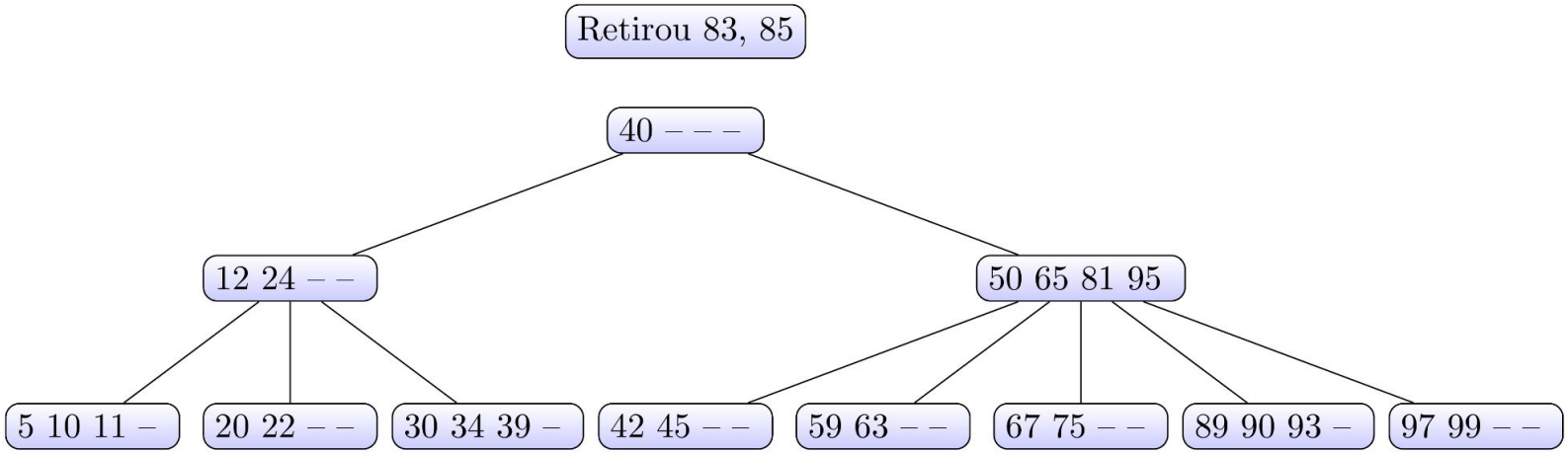
Árvore B - Exemplo



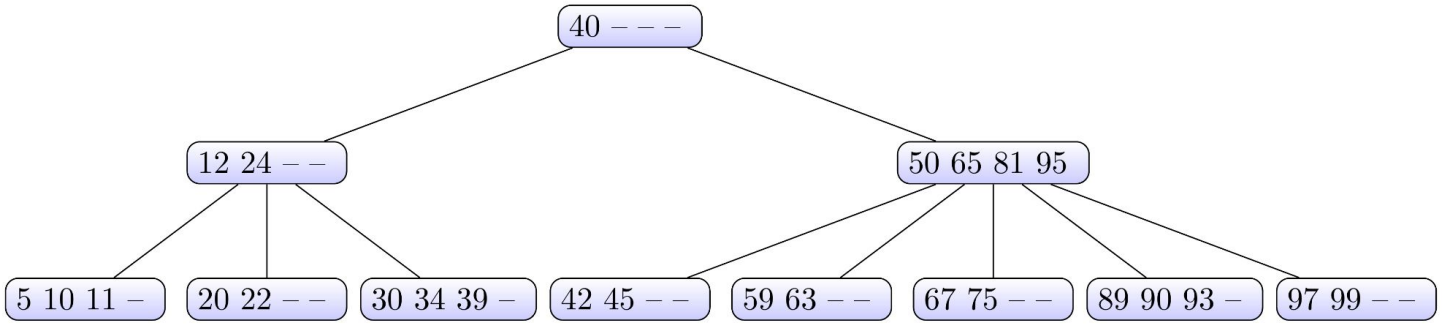


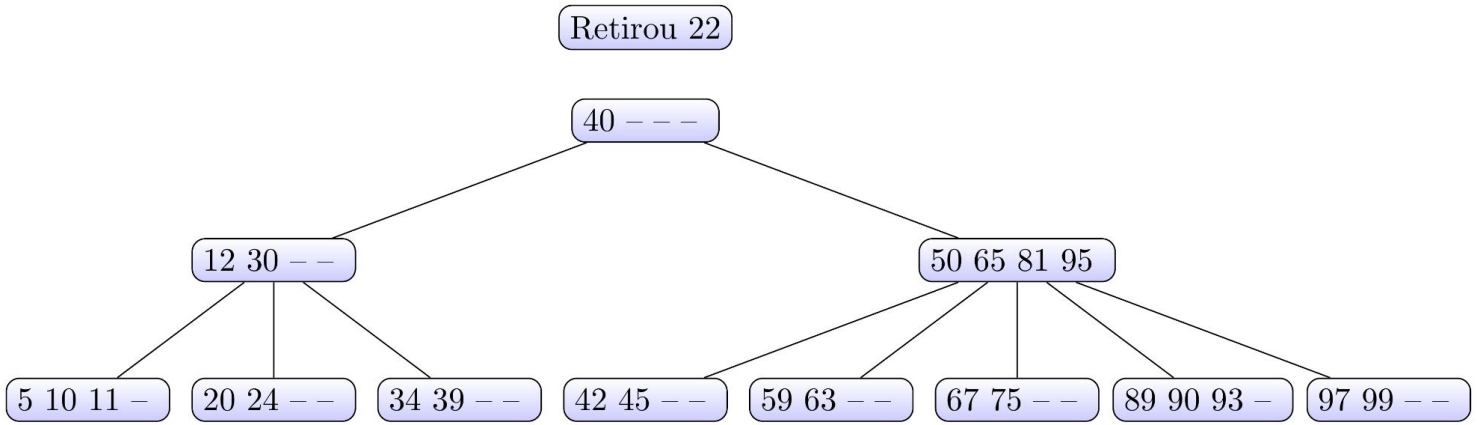
Árvore B - Exemplo



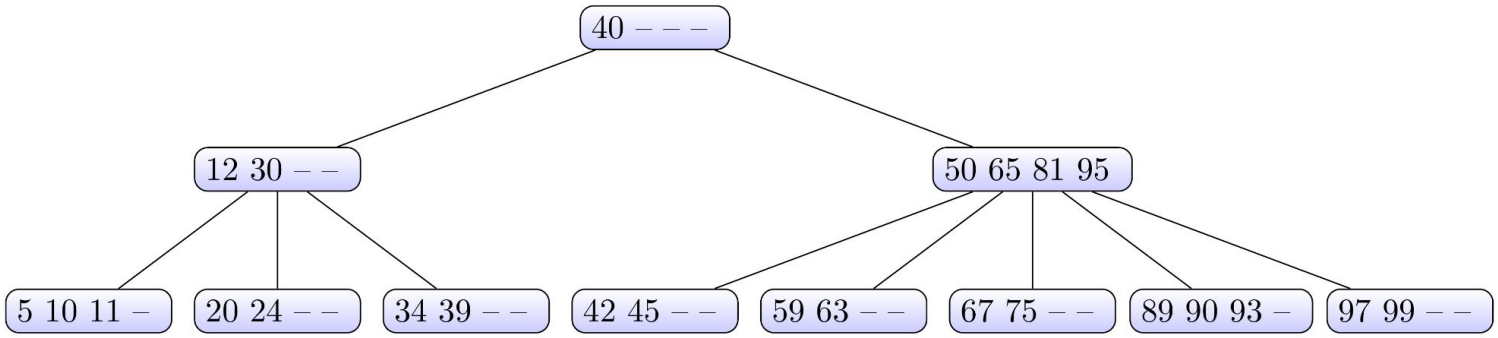


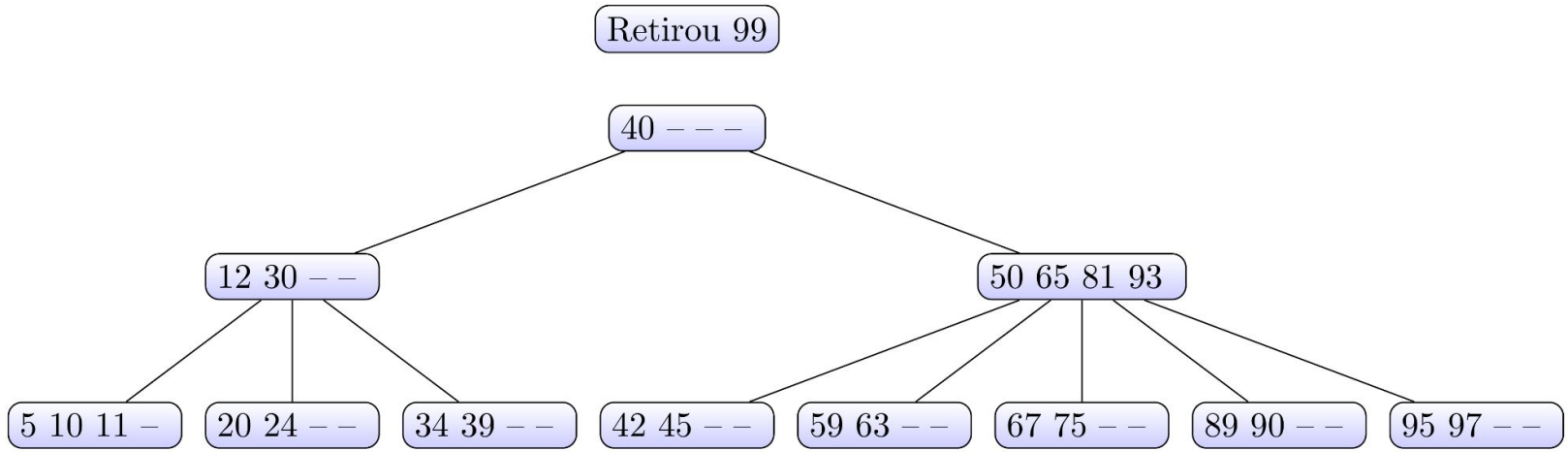
Árvore B - Exemplo



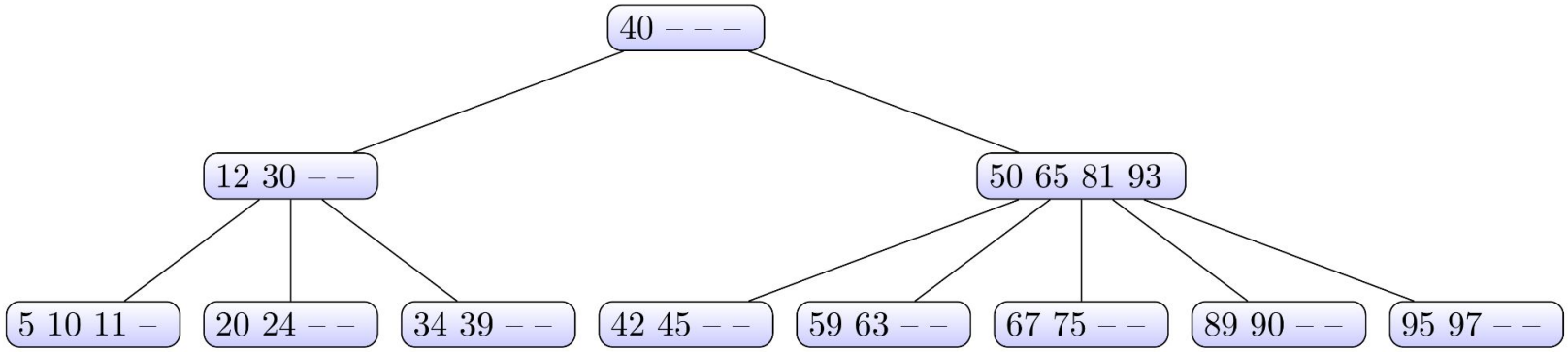


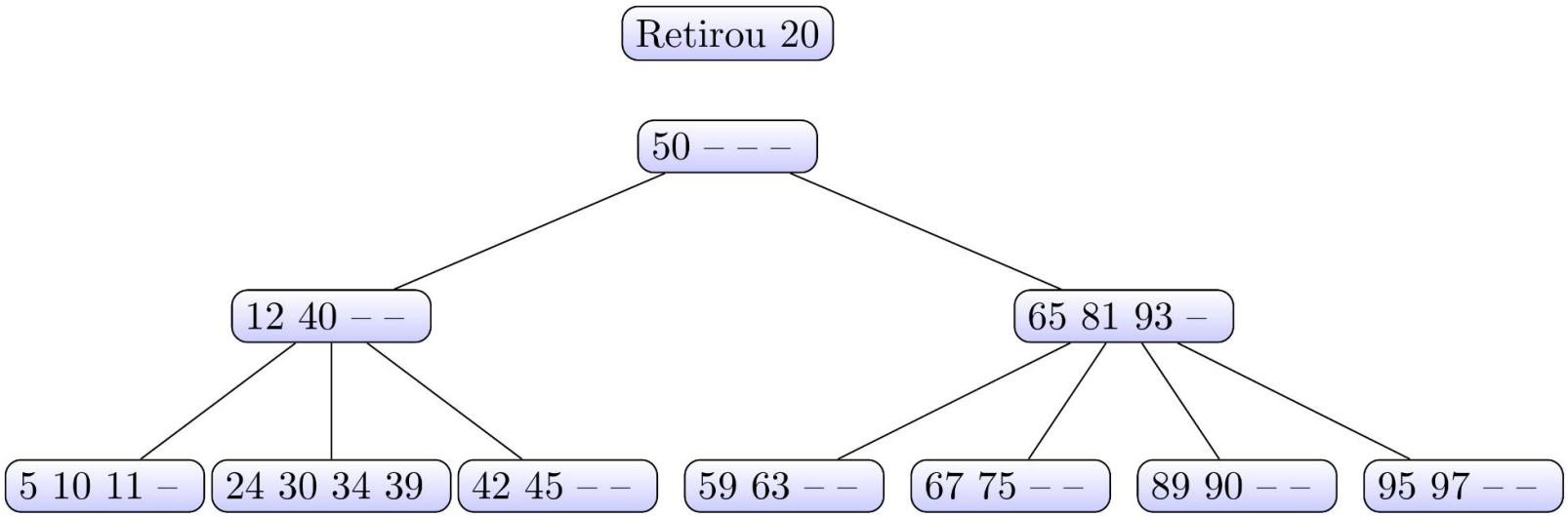
Árvore B - Exemplo



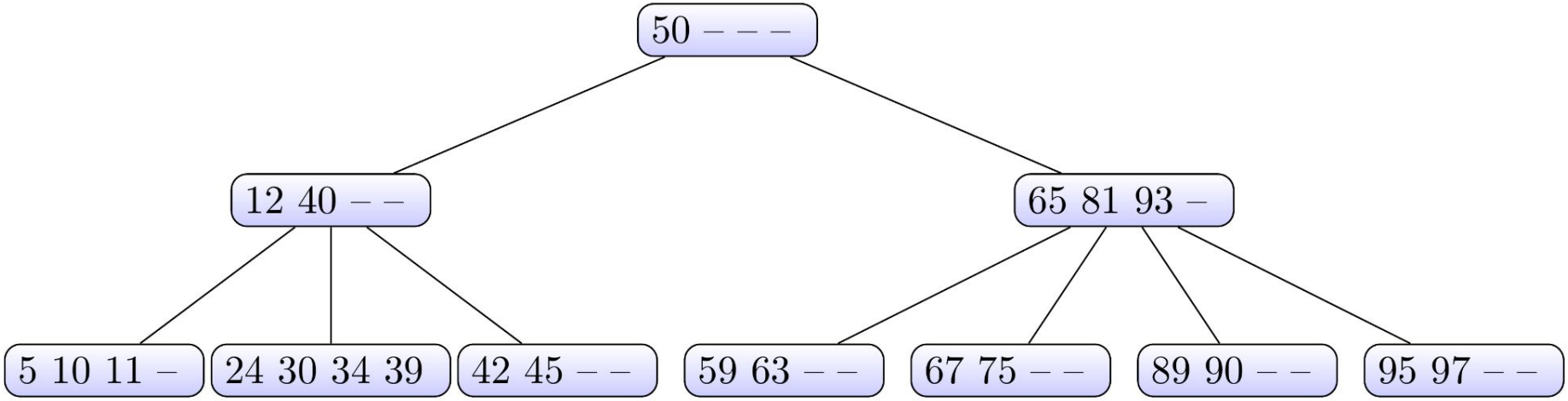


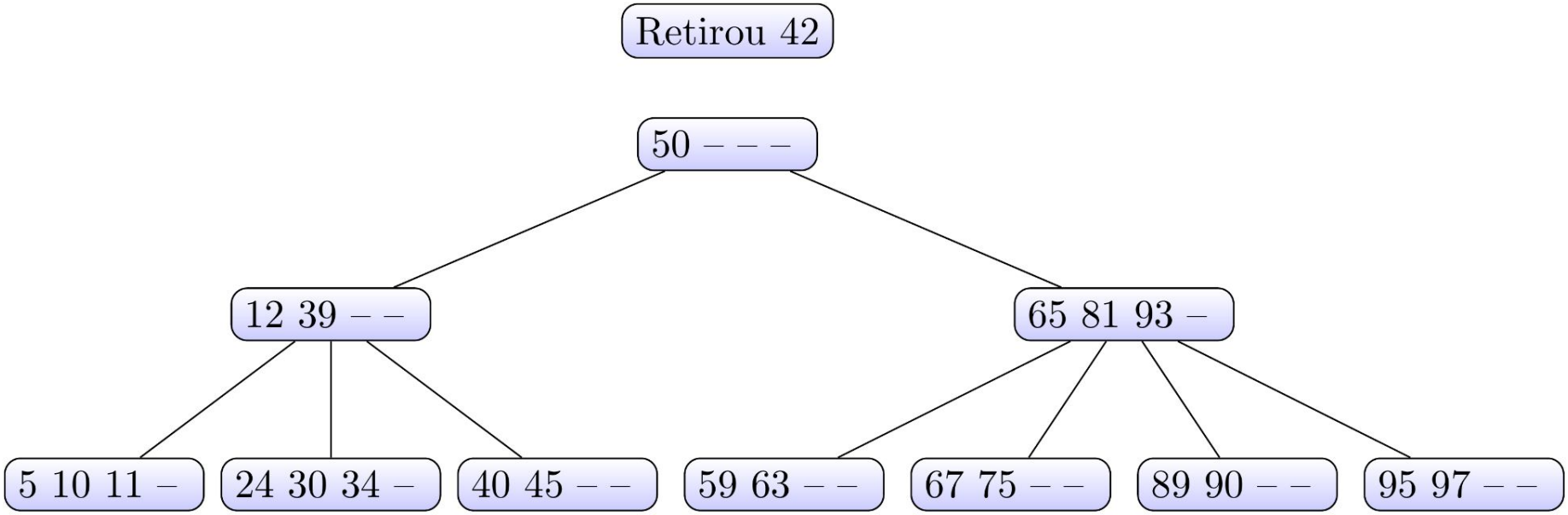
Árvore B - Exemplo



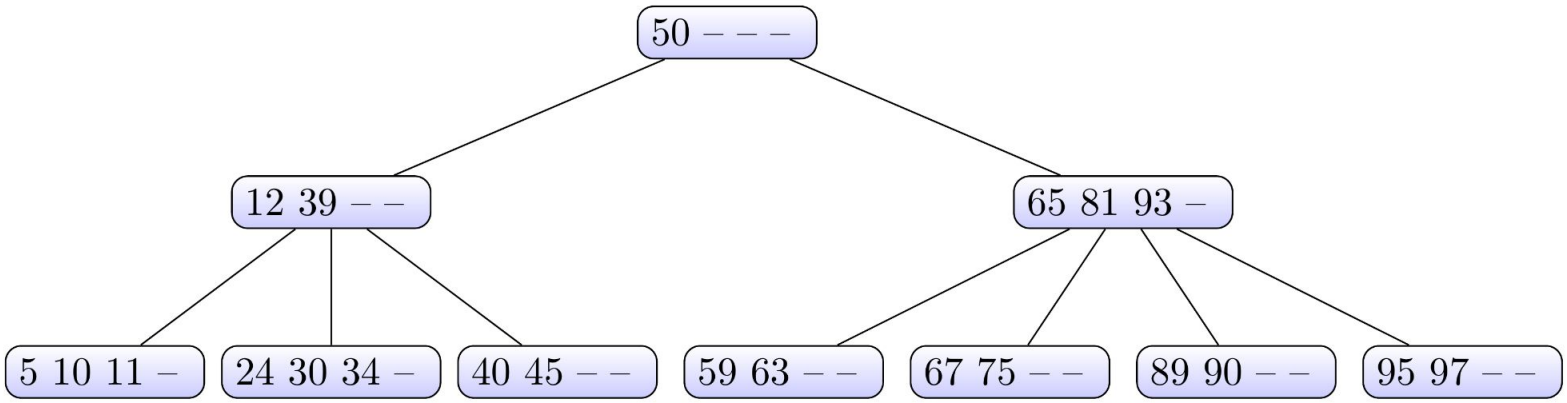


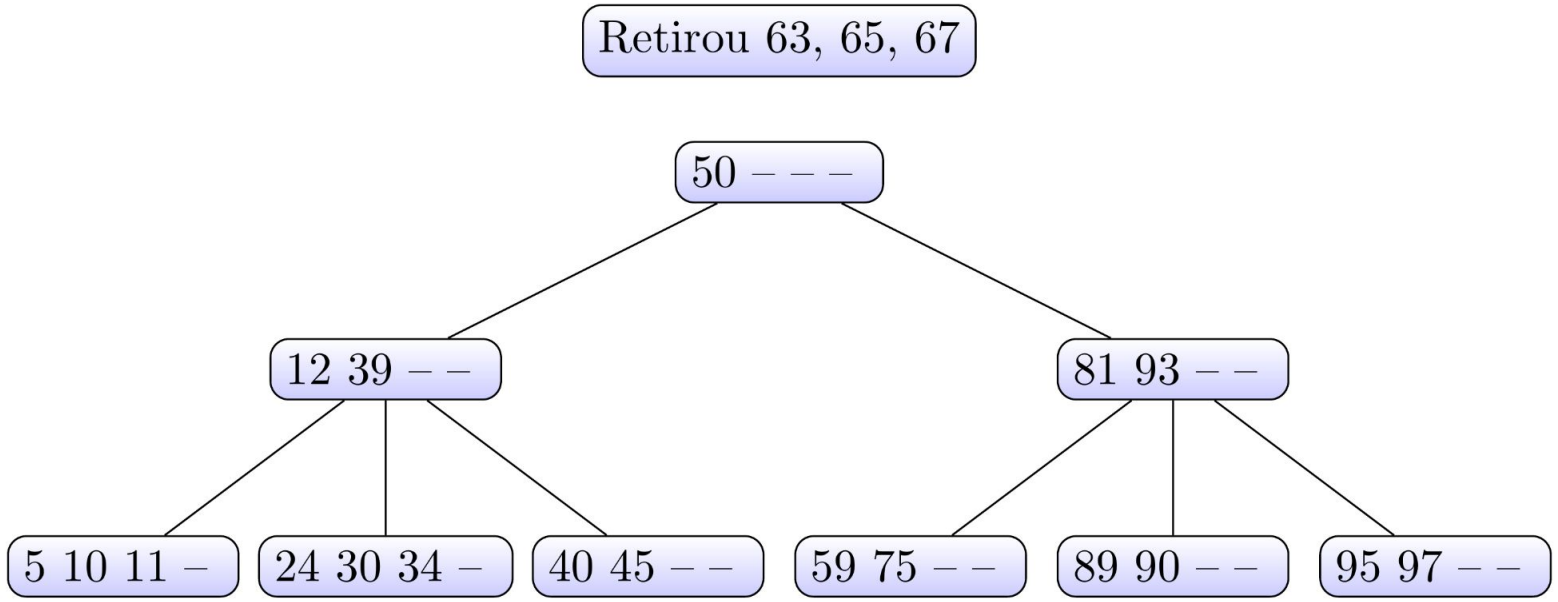
Árvore B - Exemplo



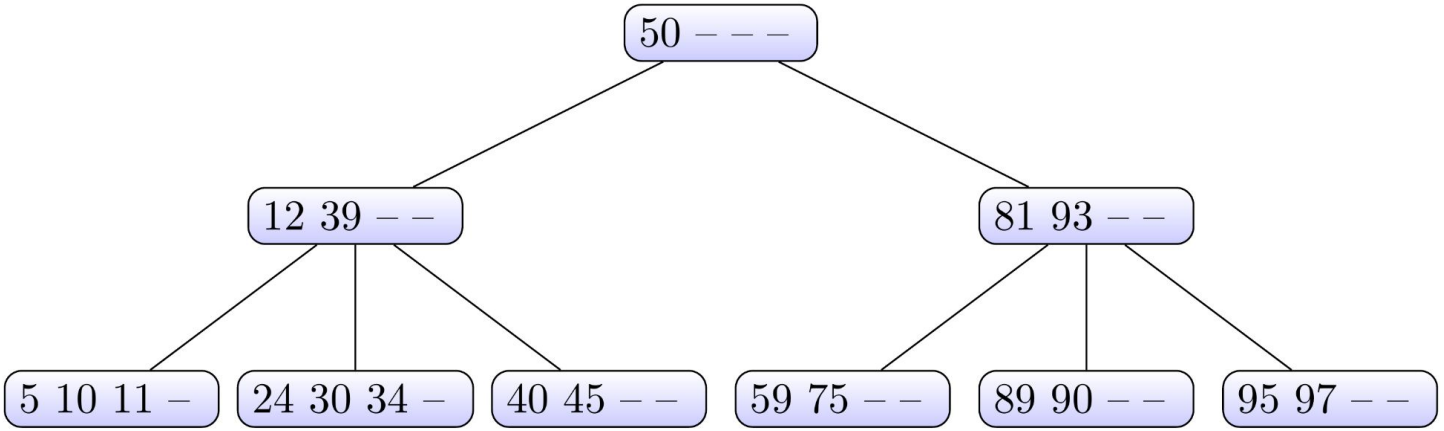


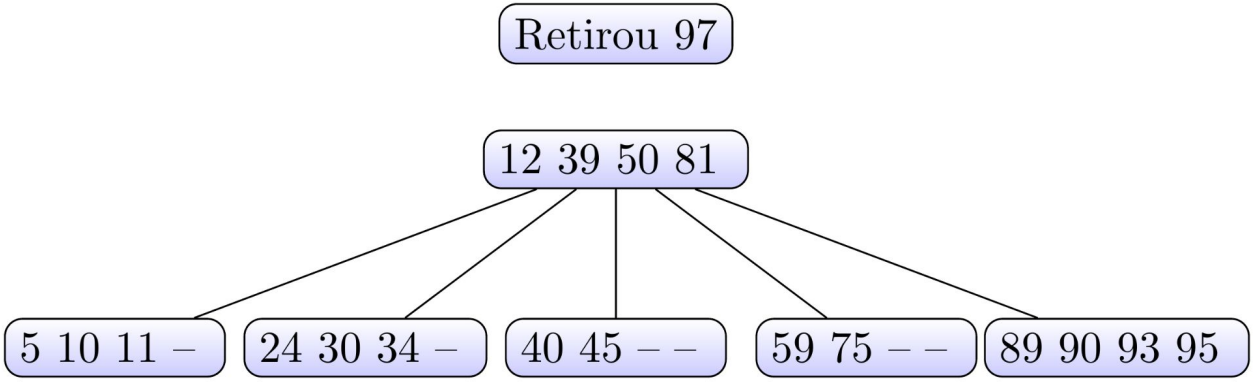
Árvore B - Exemplo



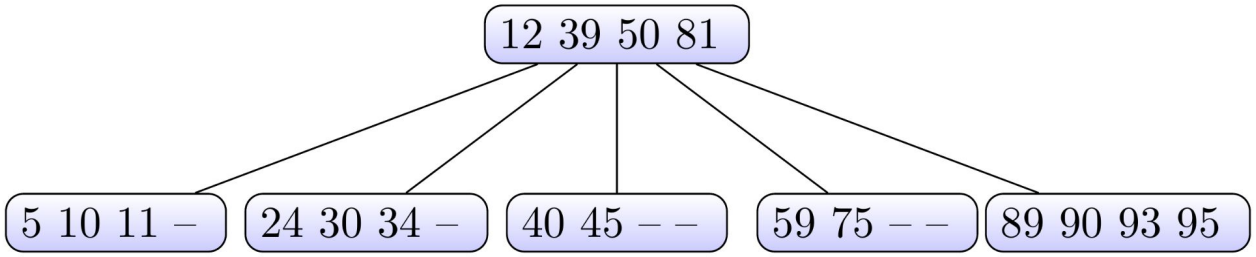


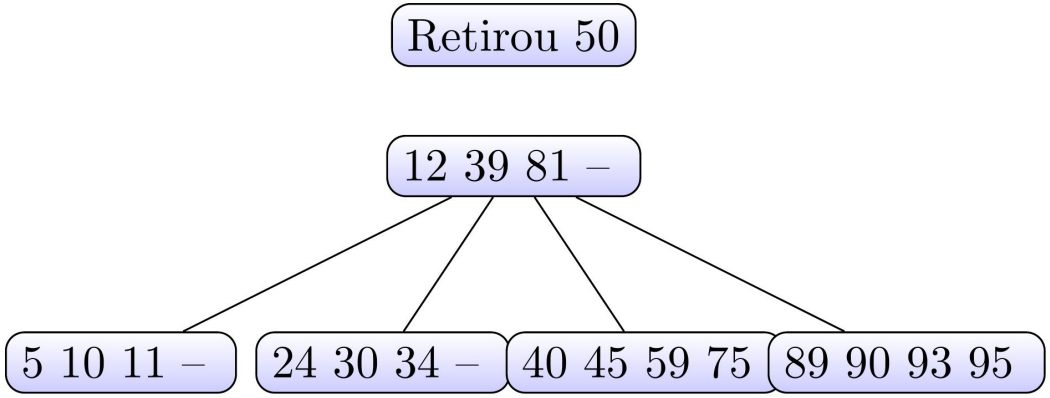
Árvore B - Exemplo





Árvore B - Exemplo





Árvore B – Considerações práticas

- Simples, fácil manutenção, eficiente e versátil
- Permite acesso sequencial eficiente
- Custo para pesquisar, inserir e retirar registros do arquivo é logarítmico
- Emprego onde o acesso concorrente ao banco de dados é necessário é viável e relativamente simples de ser implementado
- Inserção e remoção de registros sempre deixam a árvore balanceada
- Uma árvore B de ordem m com N registros contém no máximo $log_{m+1}N$ páginas

Árvore B – Considerações práticas

- Dada uma árvore B de ordem *m* com *N* registros:

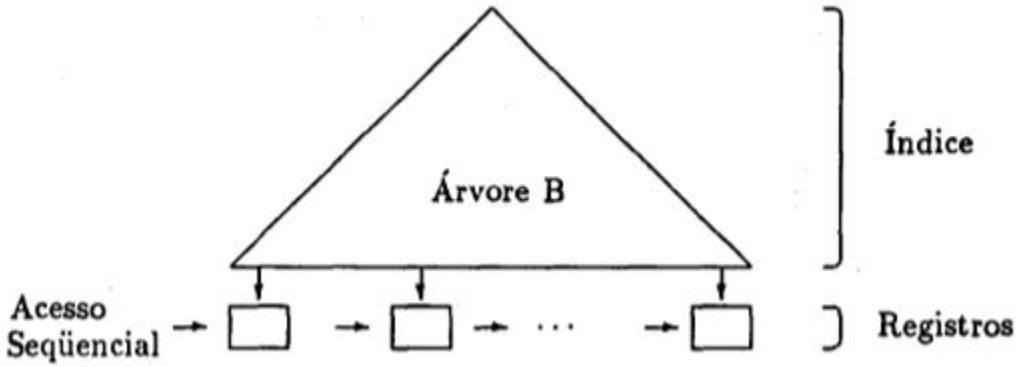
$$\log_{2m+1}(N+1) \leq altura \leq 1 + \log_{m+1}\left(\frac{N+1}{2}\right)$$

- Custo para processar uma operação de pesquisa de um registro cresce com o logaritmo base *m* do tamanho do arquivo
- Altura esperada: não é conhecida analiticamente
- Há uma conjectura proposta a partir do cálculo analítico do número esperado de páginas para os quatro primeiros níveis (das folhas em direção à raiz) de uma árvore 2-3 (árvore B de ordem m=1):
- Conjectura: a altura esperada de uma árvore 2-3 aleatória com *N* chaves é $\mathrm{h(N)} \cong \log_{7/3}(N+1)$

Árvores B*

Árvore B*

- Similar à Árvore B.
- Os registros ficam gravados apenas em nós folha.
- Nos nós internos ficam gravados apenas as chaves dos registros, para auxiliar na localização dos mesmos.
- As folhas também são encadeadas da esquerda para a direita, permitindo acesso sequencial das páginas.
- Essas mudanças fazem com que a inserção e remoção se tornem procedimentos mais simples.



Árvore B* - Pesquisa

- Similar à Árvore B.
  - Diferença: Uma vez que os registros estão gravados apenas nas folhas, não podemos encerrar a busca caso a chave seja encontrada em um nó interno.

- **Convenção:** Se uma chave *k* está presente em um nó interno, então seu registro estará no seu filho da direita.
  - Dessa forma conseguimos lidar com a presença das duplicatas das chaves e encontrar o registro desejado.

- A pesquisa segue até encontrar o registro com a chave desejada em uma folha.

Árvore B* - Inserção

- Também similar à Árvore B.
  - Diferença: O registro só pode ser inserido em um nó folha. Caso essa nó exceda sua capacidade máxima, durante o processo de divisão, apenas uma cópia da chave do registro do meio será propagada para os nós internos.

- **Convenção:** Se uma chave *k* está presente em um nó interno, então seu registro estará no seu filho da direita.
  - Sendo assim, caso o nó tenha que ser dividido após a inserção, o registro do meio deve ficar no filho à direita.

Árvore B* - Remoção

- Relativamente mais simples que a Árvore B.
  - O registro a ser removido sempre estará em uma folha, logo não precisamos computar o elemento adjacente.
  - Desde que a página folha fique pelo menos com metade dos registros, as páginas do índice não precisam ser modificadas, mesmo se uma cópia da chave que pertence ao registro a ser retirado esteja no índice.