

# Exercício Importance Sampling

Isabelle Fernandes de Oliveira

2025-06-02

```
mi_real <- 5 # valor a estimar
sigma2 <- 9 # valor conhecido
n <- 50 # tamanho da amostra
x <- rnorm(n, mi_real, sqrt(sigma2)) # amostra
v <- 10 # variancia da priori
m <- 8 # media da priori

v_star <- 1/((n/sigma2) + (1/v)) # variancia a posteriori
m_star <- v_star * ((sum(x)/sigma2) + m/v) # media a posteriori

corrida <- 100000 # numeros de pontos a serem gerados
theta <- rnorm(corrida, m, sqrt(v)) # gerados a partir de uma  $g(\theta) \sim N(m, v)$ 

pi_theta <- exp(-1/(2*sigma2) * (-2*theta*sum(x) + n*theta^2))*
  exp(-1/(2*v)*(theta - m)^2) # nucleo  $\pi(\theta|x)$ 

w_theta <- pi_theta/dnorm(theta, m, sqrt(v)) # calcula os pesos
w_theta = w_theta / sum(w_theta) # normaliza

me_posterior = sum(w_theta * theta) # media a posteriori do Importance Sampling
v_posterior = sum(w_theta * (theta - me_posterior)^2)
# variancia a posterior do Importance Sampling
dens_est <- density(theta, weights = w_theta)

d_post = (w_theta * corrida) / (max(theta) - min(theta))

d_post_real <- dnorm(theta, mean = m_star, sd = sqrt(v_star))
# densidade da formula fechada

df <- bind_rows(
  data.frame(theta = theta, densidade = d_post_real, tipo = "Posteriori real"),
  data.frame(theta = dens_est$x, densidade = dens_est$y, tipo = "Posterior estimada")
)

cat(paste0("Variancia da posteriori formula fechada: ", round(v_star,5), "\n"))

## Variancia da posteriori formula fechada: 0.17682

cat(paste0("Média da posteriori formula fechada: ", round(m_star,5), "\n", "\n"))

## Média da posteriori formula fechada: 5.58362
```

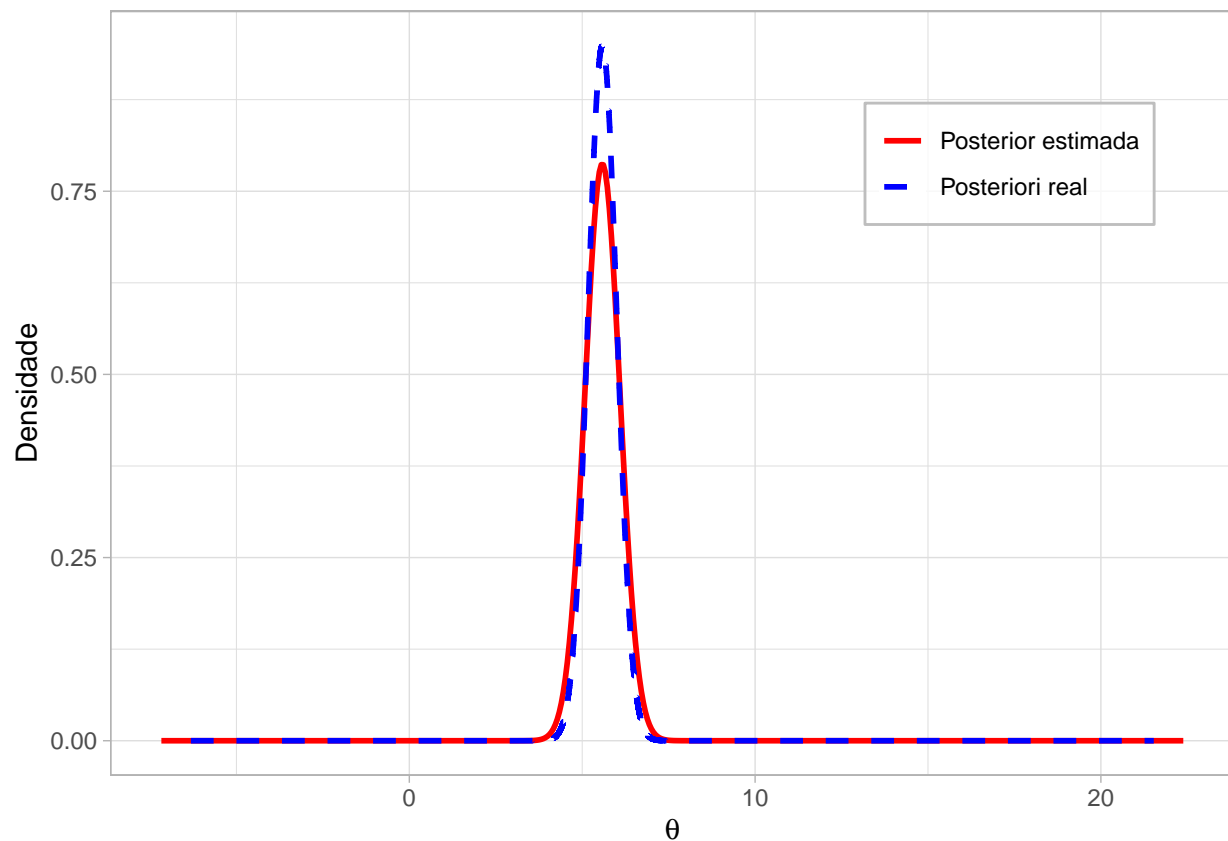
```
cat(paste0("Variancia da posteriori estimada: ", round(v_posterior,5), "\n"))
```

```
## Variancia da posteriori estimada: 0.1758
```

```
cat(paste0("Média da posteriori estimada: ", round(me_posterior,5), "\n"))
```

```
## Média da posteriori estimada: 5.58473
```

```
ggplot(df, aes(x = theta, y = densidade, color = tipo, linetype = tipo)) +  
  geom_line(size = 1) +  
  theme_light() +  
  labs(x = expression(theta), y = "Densidade") +  
  scale_color_manual(values = c("Posteriori real" = "blue", "Posterior estimada" = "red")) +  
  scale_linetype_manual(values = c("Posteriori real" = "dashed", "Posterior estimada" = "solid")) +  
  theme(  
    legend.position = c(0.8, 0.8),  
    legend.background = element_rect(fill = alpha('white', 0.8), color = "gray"),  
    legend.title = element_blank()  
  )
```



```
rm(list = ls(all.names = TRUE))
```

```
dinvgamma <- function(x, alpha, beta) {
```

```

    (beta^alpha / gamma(alpha)) * x^(-alpha - 1) * exp(-beta/x)
} # funcao que calcula a densidade de uma gamma inversa

rinvgamma <- function(n, alpha, beta) {
  1 / rgamma(n, shape = alpha, rate = beta)
} # funcao que gera uma amostra de uma distribuicao inversa gama

sigma2_real <- 5 # valor a estimar
mi <- 10 # valor conhecido
n <- 100 # tamanho da amostra
x <- rnorm(n, mi, sqrt(sigma2_real)) # amostra
a <- 10 # parametro da g(theta) ~ Gama(a, b) E(theta)=10 VAR(theta)=10
b <- 1

a_p <- 12 # parametro da priori GamaInversa(a = 12, b = 110)
b_p <- 110

a_star <- a_p + (n/2) # parametro da posteriori conhecida
# priori(theta) ~ GamaInversa(a = 12, b = 110) E(theta)= 10 e VAR(theta)=10
# posteriori(theta) ~ GamaInversa(a_star = a + n/2, b_star = b + 0.5* ...)
b_star <- b_p + (0.5*(sum(x*x)-2*mi*sum(x)+n*mi^2))

corrida <- 100000 # numeros de pontos a serem gerados
theta <- rgamma(corrida, shape = a, rate = b)
# gerados a partir de uma g(theta) ~ Gama(a, b)

pi_theta <- theta^(-a_p-1-n/2)*
  exp((-0.5*(1/theta)*sum((x - mi)^2)) - (b_p/theta)) # nucleo pi(theta/x)

w_theta <- pi_theta/dgamma(theta, shape = a, rate = b) # calcula os pesos
w_theta = w_theta / sum(w_theta) # normaliza

me_posterior = sum(w_theta * theta) # media a posteriori do Importance Sampling
v_posterior = sum(w_theta * (theta - me_posterior)^2)
# variancia a posterior do Importance Sampling
dens_est <- density(theta, weights = w_theta)

d_post = (w_theta * corrida) / (max(theta) - min(theta))

d_post_real <- dinvgamma(theta, a_star, b_star) # densidade da formula fechada

df <- bind_rows(
  data.frame(theta = theta, densidade = d_post_real, tipo = "Posteriori real"),
  data.frame(theta = dens_est$x, densidade = dens_est$y, tipo = "Posterior estimada")
)

esperanca_posteriori_fechada <- b_star/(a_star-1)
variancia_posteriori_fechada <- (b_star^2)/(((a_star-1)^2) *(a_star-2))

cat(paste0("Variancia da posteriori formula fechada: ",
  round(esperanca_posteriori_fechada,5), "\n"))

```

```
## Variancia da posteriori formula fechada: 6.25931
```

```
cat(paste0("Média da posteriori formula fechada: ",
          round(esperanca_posteriori_fechada,5), "\n", "\n"))
```

```
## Média da posteriori formula fechada: 6.25931
```

```
cat(paste0("Variancia da posteriori estimada: ", round(v_posterior,5), "\n"))
```

```
## Variancia da posteriori estimada: 0.65512
```

```
cat(paste0("Média da posteriori estimada: ", round(me_posterior,5), "\n"))
```

```
## Média da posteriori estimada: 6.25749
```

```
ggplot(df, aes(x = theta, y = densidade, color = tipo, linetype = tipo)) +
  geom_line(size = 1) +
  theme_light() +
  labs(x = expression(theta), y = "Densidade") +
  scale_color_manual(values = c("Posteriori real" = "blue", "Posterior estimada" = "red")) +
  scale_linetype_manual(values = c("Posteriori real" = "dashed", "Posterior estimada" = "solid")) +
  theme(
    legend.position = c(0.8, 0.8),
    legend.background = element_rect(fill = alpha('white', 0.8), color = "gray"),
    legend.title = element_blank()
  )
```

