

Estruturas de Dados

Matrizes Esparsas (cont)

Professores: Anisio Lacerda
Wagner Meira Jr.

Matrizes esparsas

- Na última aula começamos a estudar matrizes esparsas.

Matrizes esparsas

- Na última aula começamos a estudar matrizes esparsas.
- Nosso objetivo é encontrar uma representação que omita os elementos nulos.

Matrizes esparsas

- Na última aula começamos a estudar matrizes esparsas.
- Nosso objetivo é encontrar uma representação que omita os elementos nulos.
- Vamos pensar em uma possível otimização para o formato COO.

Matrizes esparsas

- Na última aula começamos a estudar matrizes esparsas.
- Nosso objetivo é encontrar uma representação que omita os elementos nulos.
- Vamos pensar em uma possível otimização para o formato COO.
- A ideia será comprimir o vetor que armazena as linhas dos elementos não nulos.

Matrizes esparsas

- Na última aula começamos a estudar matrizes esparsas.
- Nosso objetivo é encontrar uma representação que omita os elementos nulos.
- Vamos pensar em uma possível otimização para o formato COO.
- A ideia será comprimir o vetor que armazena as linhas dos elementos não nulos.
- Este novo formato é o *Compressed Sparse Row* (CSR).

Matrizes esparsas (COO)

- Na estrutura da representação por coordenadas tínhamos:
 - A linha onde o elemento está.
 - A coluna onde o elemento está.
 - O valor do elemento.

Matrizes esparsas (COO)

- Na estrutura da representação por coordenadas tínhamos:
 - ❑ A linha onde o elemento está.
 - ❑ A coluna onde o elemento está.
 - ❑ O valor do elemento.

Agora vamos armazenar apenas “ponteiros” para os índices onde cada linha começa no vetor de colunas.

Exemplo CSR

Observe um exemplo da representação CSR.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

O vetor linhas indica os índices em que cada linha começa nos vetores colunas e valores.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

Por exemplo note que os elementos da linha 1 começam a partir da posição 2 em ambos os vetores.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

Conseguimos também saber onde os elementos da linha terminam, simplesmente consultando onde os elementos da próxima linha começam.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

E para simplificar casos de borda, inserimos uma entrada a mais no vetor de linhas, para sabermos onde a última linha acaba.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Note que este valor também computa quantos elementos não nulos existem na matriz original.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Comparando com o modelo COO, os ganhos em termos de memória só se tornam palpáveis quando nossa matriz é muito grande.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo COO vs CSR

COO

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

0	0	1	1	2	3	3
---	---	---	---	---	---	---

colunas:

0	3	1	2	1	0	3
---	---	---	---	---	---	---

valores:

3	15	2	4	7	6	12
---	----	---	---	---	---	----

CSR

linhas:

0	2	4	5	7
---	---	---	---	---

colunas:

0	3	1	2	1	0	3
---	---	---	---	---	---	---

valores:

3	15	2	4	7	6	12
---	----	---	---	---	---	----

Matrizes esparsas (CSR)

Estudaremos as mesmas operações que vimos no modelo COO.

- Construir uma matriz.
- Obter e alterar elementos da matriz.
- Imprimir seus elementos.
- Soma de duas matrizes.
- Produto de uma matriz com um vetor denso.

Matrizes esparsas (CSR)

Observação importante!

As implementações nesta seção são apenas ilustrativas. Não necessariamente são as mais otimizadas, o objetivo é apenas exemplificar o TAD.

Matrizes esparsas (CSR)

```
class MatrizCSR{
    public:
        MatrizCSR(int linhas, int colunas, int leTeclado);
        ~MatrizCSR();
        double Get(int linha, int coluna);
        void Set(int linha, int coluna, double valor);
        void Imprime();
        static MatrizCSR Soma (MatrizCSR A, MatrizCSR B);
        static double* Produto (MatrizCSR A, double* v, int t);
    private:
        void InsereElemento(int linha, int coluna, int posicao, int v);
        void RemoveElemento(int linha, int posicao);
        void AumentaTamanhoVetores();
        int* linhas;
        int* colunas;
        double* valores;
        int tamanho, tamanhoMAX, l, c;
};
```

Matrizes esparsas (CSR)

- **Construir uma matriz.**
- Obter e alterar elementos da matriz.
- Imprimir seus elementos.
- Soma de duas matrizes.
- Produto de uma matriz com um vetor denso.

Exemplo CSR

Vamos construir a representação CSR a partir de uma matriz.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12


linhas:

colunas:

valores:

Exemplo CSR

O vetor de linhas será inicializado com -1, e a matriz será lida sequencialmente por linhas.



3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

-1	-1	-1	-1	-1
----	----	----	----	----

colunas:

valores:

Exemplo CSR

Ao encontrar um elemento não nulo devemos inseri-lo na estrutura.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

-1	-1	-1	-1	-1
----	----	----	----	----

colunas:

valores:

Exemplo CSR

Nosso elemento está na linha 0, e o “ponteiro” desta linha está com -1, o que significa que este é o primeiro elemento não nulo da linha 0 que foi lido.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

-1	-1	-1	-1	-1
----	----	----	----	----

colunas:

valores:

Exemplo CSR

Devemos então gravar nesta posição o tamanho atual dos nossos vetores de colunas e valores, que é precisamente o índice que este elemento irá aparecer nestes vetores.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

0	-1	-1	-1	-1
---	----	----	----	----

colunas:

0

valores:

3

Exemplo CSR

Apenas os elementos não nulos nos interessam, então podemos ignorar todos os elementos nulos lidos.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:	0	-1	-1	-1	-1
colunas:	0				
valores:	3				

Exemplo CSR

Note que ao ler mais elementos na mesma linha nosso “ponteiro” já não é mais -1, então apenas inserimos o novo elemento no fim dos vetores.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:	0	-1	-1	-1	-1
colunas:	0	3			
valores:	3	15			

Exemplo CSR

É importante lembrar que ao trocar de linha devemos atualizar o “ponteiro” referente àquela linha ao ler o primeiro elemento não nulo.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	-1	-1	-1	-1
0	3			
3	15			

Exemplo CSR

É importante lembrar que ao trocar de linha devemos atualizar o “ponteiro” referente àquela linha ao ler o primeiro elemento não nulo.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	-1	-1	-1
0	3	1		
3	15	2		

Exemplo CSR

Terminando a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

0	2	-1	-1	-1
---	---	----	----	----

colunas:

0	3	1	2
---	---	---	---

valores:

3	15	2	4
---	----	---	---

Exemplo CSR

Terminando a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	-1	-1	-1
0	3	1	2	
3	15	2	4	

Exemplo CSR

Terminando a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:
colunas:
valores:

0	2	4	-1	-1
0	3	1	2	1
3	15	2	4	7

Exemplo CSR

Terminando a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:
colunas:
valores:

0	2	4	-1	-1
0	3	1	2	1
3	15	2	4	7

Exemplo CSR

Terminando a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:
colunas:
valores:

0	2	4	5	-1	
0	3	1	2	1	0
3	15	2	4	7	6

Exemplo CSR

Terminando a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:
colunas:
valores:

0	2	4	5	-1		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

Após terminar de ler a matriz, o último elemento deve receber a quantidade de elementos não nulos. Em outras palavras ele recebe o tamanho dos vetores de colunas e valores.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	-1		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

E assim encerra o algoritmo e obtemos nossa representação CSR.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

- Qual a complexidade de criar uma representação lendo a matriz da entrada padrão?

Exemplo CSR

- Qual a complexidade de criar uma representação lendo a matriz da entrada padrão?
 - A quantidade de elementos que uma matriz $n \times n$ pode ter é n^2 , e como temos que ler todos os elementos da matriz obtemos um limite “folgado” de $O(n^2)$.

Matrizes esparsas (CSR)

```
MatrizCSR::MatrizCSR(int m, int n, int leTeclado){
    l = m; c = n; tamanho = 0;
    linhas = new int[l+1];
    if(!leTeclado){
        for(int i = 0; i <= l; i++)
            linhas[i] = -1;
        tamanhoMAX = 10;
        colunas = new int[tamanhoMAX];
        valores = new double[tamanhoMAX];
    }
    else{
        //Le a matriz do teclado
    }
}
```


Matrizes esparsas (CSR)

```
//Le a matriz do teclado
tamanhoMAX = floor(0.3*l*c);
tamanho = 0;

colunas = new int[tamanhoMAX];
valores = new double[tamanhoMAX];

for(int i = 0; i <= l; i++)    linhas[i] = -1;
for(int i = 0; i < l; i++){
    linhas[i] = tamanho;
    for(int j = 0; j < c; j++){
        double x;  cin >> x;
        if(x != 0){
            if(tamanho == tamanhoMAX) AumentaTamanhoVetores();
            colunas[tamanho] = j;
            valores[tamanho] = x;
            tamanho++;
        }
    }
}

linhas[l] = tamanho;
```

Matrizes esparsas (CSR)

- Construir uma matriz.
- **Obter e alterar elementos da matriz.**
- Imprimir seus elementos.
- Soma de duas matrizes.
- Produto de uma matriz com um vetor denso.

Exemplo CSR

Dadas as coordenadas i e j , retornar o elemento na linha i coluna j .

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

Dados coordenadas i e j , retornar o elemento na linha i coluna j .

Suponha que recebemos de entrada linha 1 e coluna 2.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

Primeiro consultamos no vetor das linhas em qual posição os elementos da linha 1 começam e terminam.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

Agora temos um subvetor de candidatos. Basta executarmos uma busca nesse subvetor.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para encontrar um elemento?

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para encontrar um elemento?
 - Conseguimos acessar a linha em tempo constante.

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para encontrar um elemento?
 - ❑ Conseguimos acessar a linha em tempo constante.
 - ❑ Nosso pior caso é quando toda a linha possui elementos não nulos, ou seja $O(n)$.

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para encontrar um elemento?
 - ❑ Conseguimos acessar a linha em tempo constante.
 - ❑ Nosso pior caso é quando toda a linha possui elementos não nulos, ou seja $O(n)$.
 - ❑ Considerando que a matriz é esparsa e que tem k elementos não nulos, temos $O(k)$.

Exemplo CSR

- É possível fazer melhor?

Exemplo CSR

- É possível fazer melhor?
 - Neste caso possuímos um intervalo de candidatos a resposta que estão ordenados.

Exemplo CSR

- É possível fazer melhor?
 - ❑ Neste caso possuímos um intervalo de candidatos a resposta que estão ordenados.
 - ❑ Diferente do formato COO também conseguimos obter rapidamente (em tempo $O(1)$) os limites deste intervalo.

Exemplo CSR

- É possível fazer melhor?
 - ❑ Neste caso possuímos um intervalo de candidatos a resposta que estão ordenados.
 - ❑ Diferente do formato COO também conseguimos obter rapidamente (em tempo $O(1)$) os limites deste intervalo.
 - ❑ Então poderíamos ao invés de fazer uma busca sequencial, utilizar a **busca binária** e obter uma complexidade de tempo $O(\log(k))$.

Exemplo CSR

- É possível fazer melhor?
 - Mas é importante ressaltar que como estamos tratando de matrizes esparsas, não esperamos que o tamanho do intervalo seja muito grande.

Exemplo CSR

- É possível fazer melhor?
 - ❑ Mas é importante ressaltar que como estamos tratando de matrizes esparsas, não esperamos que o tamanho do intervalo seja muito grande.
 - ❑ O que significa que o ganho computacional de tempo pode na prática não ser tão grande assim.

Matrizes esparsas (CSR)

```
double MatrizCSR::Get(int i, int j){  
    if(i < 0 || i >= l || j < 0 || j >= c){  
        throw "Posicao inválida!!!\n";  
    }  
  
    for(int k = linhas[i]; k < linhas[i+1]; k++){  
        if(colunas[k] == j)  
            return valores[k];  
    }  
    return 0;  
}
```

Exemplo CSR

Dados coordenadas i e j e um valor v , alterar o valor do elemento na linha i coluna j para v .

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

Dados coordenadas i e j e um valor v , alterar o valor do elemento na linha i coluna j para v .

Suponha que nossa entrada seja linha 2, coluna 3 e o valor seja 8.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	8
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

O primeiro passo é verificar se a linha 2 coluna 3 está na estrutura, de forma semelhante a função *get*.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

Como a posição não está presente, devemos adicioná-la.

linhas:	0	2	4	5	7		
colunas:	0	3	1	2	1	0	3
valores:	3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

Uma vez que haverá um novo elemento na linha 2, a posição do primeiro elemento das próximas linhas é incrementada em 1.

linhas:	0	2	4	6	8		
colunas:	0	3	1	2	1	0	3
valores:	3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

Agora basta inserir de forma a manter a ordenação o novo elemento.

linhas:	0	2	4	6	8			
colunas:	0	3	1	2	1	3	0	3
valores:	3	15	2	4	7	8	6	12

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para alterar um elemento?

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para alterar um elemento?
 - O procedimento é bem semelhante ao de encontrar um elemento.

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para alterar um elemento?
 - ❑ O procedimento é bem semelhante ao de encontrar um elemento.
 - ❑ O pior dos casos é quando a posição em questão não está na estrutura e o valor é não nulo.

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para alterar um elemento?
 - ❑ O procedimento é bem semelhante ao de encontrar um elemento.
 - ❑ O pior dos casos é quando a posição em questão não está na estrutura e o valor é não nulo.
 - ❑ Utilizando um método de ordenação eficaz para a situação (como o método da inserção) conseguimos inserir ordenado em tempo $O(k)$.

Matrizes esparsas (CSR)

```
void MatrizCSR::Set(int i, int j, double valor){  
    if(i < 0 || i >= 1 || j < 0 || j >= c){  
        throw "Posicao inválida!!!\n";  
    }  
    for(int k = linhas[i]; k < linhas[i+1]; k++){  
        if(colunas[k] == j){  
            if(valor == 0) RemoveElemento(i, k);  
            else valores[k] = valor;  
            return;  
        }  
        else if(colunas[k] > j){  
            InsereElemento(i, j, k, valor);  
            return;  
        }  
    }  
    if(valor == 0) return;  
    InsereElemento(i, j, tamanho, valor);  
}
```

Matrizes esparsas (CSR)

- Construir uma matriz.
- Obter e alterar elementos da matriz.
- **Imprimir seus elementos.**
- Soma de duas matrizes.
- Produto de uma matriz com um vetor denso.

Exemplo CSR

Dada representação CSR de uma matriz M ,
imprimir M .

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

O procedimento é bem semelhante ao do formato COO. Vamos simplesmente varrer a matriz e verificar se o próximo valor a ser impresso na representação possui as coordenadas desejadas.

linhas:	0	2	4	5	7		
colunas:	0	3	1	2	1	0	3
valores:	3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

Temos um contador indicando qual a próxima posição da estrutura que deve ser impressa.

linhas:

0	2	4	5	7
---	---	---	---	---

colunas:

0	3	1	2	1	0	3
---	---	---	---	---	---	---

valores:

3	15	2	4	7	6	12
---	----	---	---	---	---	----



Exemplo CSR

Temos um contador indicando qual a próxima posição da estrutura que deve ser impressa. Caso as coordenadas coincidam, basta imprimir o valor e incrementar o contador.

linhas:	0	2	4	5	7		
colunas:	0	3	1	2	1	0	3
valores:	3	15	2	4	7	6	12




Exemplo CSR

Caso as coordenadas não coincidam é porque a entrada da matriz naquela posição é 0.

3			

linhas:	0	2	4	5	7		
colunas:	0	3	1	2	1	0	3
valores:	3	15	2	4	7	6	12




Exemplo CSR

Segue a execução do algoritmo no exemplo:

3	0		

linhas:	0	2	4	5	7		
colunas:	0	3	1	2	1	0	3
valores:	3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Segue a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12




Exemplo CSR

Segue a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15

linhas:	0	2	4	5	7		
colunas:	0	3	1	2	1	0	3
valores:	3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Segue a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15
0			

linhas:	0	2	4	5	7		
colunas:	0	3	1	2	1	0	3
valores:	3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Segue a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15
0	2		

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Sendo assim até o fim da linha podemos apenas imprimir valores 0!

3	0	0	15
0	2	4	

linhas:

colunas:

valores:


0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Este formato requer alguns cuidados especiais. Note que nosso contador está agora em uma posição da linha 2!


linhas:	0	2	4	5	7		
colunas:	0	3	1	2	1	0	3
valores:	3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Conseguimos identificar se este é o caso verificando a posição do primeiro elemento da próxima linha!

linhas:	0	2	4	5	7		
colunas:	0	3	1	2	1	0	3
valores:	3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Segue a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15
0	2	4	0

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Segue a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15
0	2	4	0
0			

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

O marcador já está em elementos da próxima linha, então os elementos restantes desta linha são todos 0.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7		

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Segue a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Segue a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6			

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Segue a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0		

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Segue a execução do algoritmo no exemplo:

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12



Exemplo CSR

Após iterar por todas as posições possíveis, o algoritmo encerra.

3	0	0	15
0	2	4	0
0	7	0	0
6	0	0	12

linhas:

colunas:

valores:

0	2	4	5	7		
0	3	1	2	1	0	3
3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para imprimir os elementos da matriz?

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para imprimir os elementos da matriz?
 - Devemos passar por todos os elementos da matriz, até mesmo os nulos. Portanto a complexidade é $O(n^2)$.

Matrizes esparsas (CSR)

```
void MatrizCSR::Imprime() {  
    int k = 0;  
    for(int i = 0; i < l; i++){  
        for(int j = 0; j < c; j++){  
            if(k < linhas[i+1] && colunas[k] == j){  
                cout << valores[k] << " ";  
                k++;  
            }  
            else cout << "0 ";  
        }  
        cout << "\n";  
    }  
}
```

Matrizes esparsas (CSR)

- Construir uma matriz.
- Obter e alterar elementos da matriz.
- Imprimir seus elementos.
- **Soma de duas matrizes.**
- Produto de uma matriz com um vetor denso.

Exemplo CSR

Dado duas representações CSR de matrizes A e B , retornar a representação CSR da matriz $A+B$.

l:	0	1	4	5	6	
c:	1	0	1	2	1	3
v:	1	1	1	1	1	1

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

A execução é semelhante a da representação COO. Vamos varrer as representações e combinar os elementos caso as coordenadas sejam iguais.

l:	0	1	4	5	6	
c:	1	0	1	2	1	3
v:	1	1	1	1	1	1

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

Exemplo CSR

Vamos executar o algoritmo no exemplo:

l:	0	1	4	5	6	
c:	1	0	1	2	1	3
v:	1	1	1	1	1	1



l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12



l:

c:

v:

Exemplo CSR

Vamos executar o algoritmo no exemplo:

l:	0	1	4	5	6	
c:	1	0	1	2	1	3
v:	1	1	1	1	1	1



l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12



l:	0
c:	0
v:	3

Exemplo CSR

Vamos executar o algoritmo no exemplo:

I:	0	1	4	5	6	
C:	1	0	1	2	1	3
V:	1	1	1	1	1	1



I:	0	2	4	5	7		
C:	0	3	1	2	1	0	3
V:	3	15	2	4	7	6	12



I:	0	
C:	0	1
V:	3	1

Exemplo CSR

Vamos executar o algoritmo no exemplo:

l:	0	1	4	5	6	
c:	1	0	1	2	1	3
v:	1	1	1	1	1	1



l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12



l:	0		
c:	0	1	3
v:	3	1	15

Exemplo CSR

Vamos executar o algoritmo no exemplo:

l:	0	1	4	5	6	
c:	1	0	1	2	1	3
v:	1	1	1	1	1	1



l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12



l:	0	3		
c:	0	1	3	0
v:	3	1	15	1

Exemplo CSR

Vamos executar o algoritmo no exemplo:

l:	0	1	4	5	6	
c:	1	0	1	2	1	3
v:	1	1	1	1	1	1



l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12



l:	0	3			
c:	0	1	3	0	1
v:	3	1	15	1	3

Exemplo CSR

Vamos executar o algoritmo no exemplo:

l:	0	1	4	5	6	
c:	1	0	1	2	1	3
v:	1	1	1	1	1	1



l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12



l:	0	3				
c:	0	1	3	0	1	2
v:	3	1	15	1	3	5

Exemplo CSR

Vamos executar o algoritmo no exemplo:

l:	0	1	4	5	6	
c:	1	0	1	2	1	3
v:	1	1	1	1	1	1



l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12



l:	0	3	6				
c:	0	1	3	0	1	2	1
v:	3	1	15	1	3	5	8

Exemplo CSR

Vamos executar o algoritmo no exemplo:

l:	0	1	4	5	6	
c:	1	0	1	2	1	3
v:	1	1	1	1	1	1



l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12



l:	0	3	6	7				
c:	0	1	3	0	1	2	1	0
v:	3	1	15	1	3	5	8	6

Exemplo CSR

Vamos executar o algoritmo no exemplo:

l:	0	1	4	5	6	
c:	1	0	1	2	1	3
v:	1	1	1	1	1	1

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

l:	0	3	6	7					
c:	0	1	3	0	1	2	1	0	3
v:	3	1	15	1	3	5	8	6	13

Exemplo CSR

Vamos executar o algoritmo no exemplo:

l:	0	1	4	5	6	
c:	1	0	1	2	1	3
v:	1	1	1	1	1	1

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

l:	0	3	6	7	9				
c:	0	1	3	0	1	2	1	0	3
v:	3	1	15	1	3	5	8	6	13

Exemplo CSR

Vamos executar o algoritmo no exemplo:

l:	0	1	4	5	6	
c:	1	0	1	2	1	3
v:	1	1	1	1	1	1

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

l:	0	3	6	7	9				
c:	0	1	3	0	1	2	1	0	3
v:	3	1	15	1	3	5	8	6	13

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para somar duas representações?

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para somar duas representações?
 - Assuma que as representações possuem respectivamente k_1 e k_2 elementos.

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para somar duas representações?
 - Assuma que as representações possuem respectivamente k_1 e k_2 elementos.
 - Nesse caso nossa complexidade é $O(\max(k_1, k_2))$.

Matrizes esparsas (CSR)

```
MatrizCSR MatrizCSR::Soma (MatrizCSR A, MatrizCSR B) {  
    if (A.l != B.l || A.c != B.c) {  
        throw "Dimensoes das matrizes incompativeis\n";  
    }  
    MatrizCSR C = MatrizCSR(A.l, A.c, 0);  
    for (int i = 0; i < A.l; i++) {  
        int cA = A.linhas[i]; int lA = A.linhas[i+1];  
        int cB = B.linhas[i]; int lB = B.linhas[i+1];  
        while (cA < lA && cB < lB)  
            // Parte 1  
            while (cA < lA)  
                // Parte 2  
                while (cB < lB)  
                    // Parte 2  
            }  
        return C;  
    }  
}
```


Matrizes esparsas (CSR)

```
// Parte 1
while (cA < lA && cB < lB){
    if(A.colunas[cA] == B.colunas[cB]){
        C.InsereElemento(i, A.colunas[cA], C.tamanho, A.valores[cA] +
                        B.valores[cB]);
        cA++; cB++;
    } else if(A.colunas[cA] < B.colunas[cB]){
        C.InsereElemento(i, A.colunas[cA], C.tamanho, A.valores[cA]);
        cA++;
    } else {
        C.InsereElemento(i, B.colunas[cB], C.tamanho, B.valores[cB]);
        cB++;
    }
}
```

Matrizes esparsas (CSR)

```
// Parte 2
while (cA < lA) {
    C.InsereElemento(i, A.colunas[cA], C.tamanho, A.valores[cA]);
    cA++;
}
while (cB < lB) {
    C.InsereElemento(i, B.colunas[cB], C.tamanho, B.valores[cB]);
    cB++;
}
```

Matrizes esparsas (CSR)

- Construir uma matriz.
- Obter e alterar elementos da matriz.
- Imprimir seus elementos.
- Soma de duas matrizes.
- **Produto de uma matriz com um vetor denso.**

Exemplo CSR

Dado uma representação CSR de uma matriz M e um vetor u , calcule Mu .

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

u
4
3
2
1

w
0
0
0
0

Exemplo CSR

Este algoritmo também segue uma linha similar ao do COO.

I:	0	2	4	5	7		
C:	0	3	1	2	1	0	3
V:	3	15	2	4	7	6	12

U	W
4	0
3	0
2	0
1	0

Exemplo CSR

Este algoritmo também segue uma linha similar ao do COO.

I:	0	2	4	5	7		
C:	0	3	1	2	1	0	3
V:	3	15	2	4	7	6	12

U	W
4	0
3	0
2	0
1	0

Exemplo CSR

Dado um elemento na posição i, j da matriz M , a linha indica a posição em w que o resultado do produto deste elemento com o vetor u deve ser gravado.

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

u	w
4	0
3	0
2	0
1	0

Exemplo CSR

Enquanto a coluna indica por qual elemento de u ele deve ser multiplicado.

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

u	w
4	0
3	0
2	0
1	0

Exemplo CSR

Agora basta iterar pela estrutura efetuando as multiplicações e somando-as nas posições apropriadas de w .

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

u	w
4	0
3	0
2	0
1	0

Exemplo CSR

$$w[0] += v[0] * u[0]$$

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

<i>u</i>
4
3
2
1

<i>w</i>
0
0
0
0

Exemplo CSR

$$w[0] += v[1] * u[3]$$

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

<i>u</i>	<i>w</i>
4	12
3	0
2	0
1	0

Exemplo CSR

$$w[1] += v[2] * u[1]$$

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

<i>u</i>
4
3
2
1

<i>w</i>
27
0
0
0

Exemplo CSR

$$w[1] += v[3] * u[2]$$

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

<i>u</i>	<i>w</i>
4	27
3	6
2	0
1	0

Exemplo CSR

$$w[2] += v[4] * u[1]$$

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

<i>u</i>
4
3
2
1

<i>w</i>
27
14
0
0

Exemplo CSR

$$w[3] += v[5] * u[0]$$

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

<i>u</i>	<i>w</i>
4	27
3	14
2	21
1	0

Exemplo CSR

$$w[3] += v[6] * u[3]$$

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

<i>u</i>	<i>w</i>
4	27
3	14
2	21
1	24

Exemplo CSR

Após iterar pela estrutura o vetor resultante w é precisamente Mu .

l:	0	2	4	5	7		
c:	0	3	1	2	1	0	3
v:	3	15	2	4	7	6	12

u	w
4	27
3	14
2	21
1	36

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para multiplicar uma representação por um vetor?

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para multiplicar uma representação por um vetor?
 - Note que passamos por cada elemento da representação apenas uma vez. Logo a operação não depende necessariamente do tamanho original da matriz.

Exemplo CSR

- Qual a complexidade para multiplicar uma representação por um vetor?
 - Note que passamos por cada elemento da representação apenas uma vez. Logo a operação não depende necessariamente do tamanho original da matriz.
 - Portanto, podemos concluir que a complexidade é $O(k)$.

Matrizes esparsas (CSR)

```
double* MatrizCSR::Produto(MatrizCSR A, double* v, int n){
    if(A.c != n){
        throw "Dimensoes da entrada incompativeis\n";
    }
    double* s = new double[n];
    for(int i = 0; i < n; i++){
        s[i] = 0;
    }
    for(int i = 0; i < A.l; i++){
        for(int j = A.linhas[i]; j < A.linhas[i+1]; j++){
            int coluna = A.colunas[j];
            s[i] += A.valores[j] * v[coluna];
        }
    }
    return s;
}
```

Outros modelos

- Dentre os modelos de esparsificação mais utilizados ainda existem mais alguns dignos de nota.
 - ▣ *Compressed Sparse Column(CSC)*
 - ▣ *List of Lists (LiL)*
 - ▣ *Dictionary of Keys (DOK)*

Compressed Sparse Column (CSC)

- Análogo ao CSR, no entanto as colunas são comprimidas ao invés das linhas.

Compressed Sparse Column (CSC)

- Análogo ao CSR, no entanto as colunas são comprimidas ao invés das linhas.
 - Possui vantagens e desvantagens análogas ao CSR.

Compressed Sparse Column (CSC)

- Análogo ao CSR, no entanto as colunas são comprimidas ao invés das linhas.
 - Possui vantagens e desvantagens análogas ao CSR.
 - Ao contrário de navegar em uma matriz convencional por colunas, esta estrutura não perde em termos de localidade de referência, uma vez que sua construção é feita por vetores separados.

Compressed Sparse Column (CSC)

- Análogo ao CSR, no entanto as colunas são comprimidas ao invés das linhas.
 - Possui vantagens e desvantagens análogas ao CSR.
 - Ao contrário de navegar em uma matriz convencional por colunas, esta estrutura não perde em termos de localidade de referência, uma vez que sua construção é feita por vetores separados.
 - Curiosidade: é o formato utilizado pelo MATLAB em sua função *sparse*.

List of Lists(LiL)

- Essa estrutura consiste em:

List of Lists(LiL)

- Essa estrutura consiste em:
 - Uma lista por linha.

List of Lists(LiL)

- Essa estrutura consiste em:
 - ❑ Uma lista por linha.
 - ❑ Cada uma das listas possui as entradas não nulas e suas respectivas colunas.

List of Lists(LiL)

- Essa estrutura consiste em:
 - ❑ Uma lista por linha.
 - ❑ Cada uma das listas possui as entradas não nulas e suas respectivas colunas.
 - ❑ Assim como COO, é recomendado que estes valores estejam ordenados pela coluna.

List of Lists(LiL)

- Essa estrutura consiste em:
 - ❑ Uma lista por linha.
 - ❑ Cada uma das listas possui as entradas não nulas e suas respectivas colunas.
 - ❑ Assim como COO, é recomendado que estes valores estejam ordenados pela coluna.
 - ❑ Similar a uma **lista de adjacência** em grafos.

List of Lists(LiL)

- Essa estrutura consiste em:
 - ❑ Uma lista por linha.
 - ❑ Cada uma das listas possui as entradas não nulas e suas respectivas colunas.
 - ❑ Assim como COO, é recomendado que estes valores estejam ordenados pela coluna.
 - ❑ Similar a uma **lista de adjacência** em grafos.

Proposta de exercício:

Elabore uma estrutura de esparsificação utilizando a ideia de LiL para linhas e colunas **simultaneamente!**

Dictionary of Keys(DOK)

- Essa estrutura consiste em:
 - Um dicionário que mapeia duplas linha e coluna para seus respectivos valores.

Dictionary of Keys(DOK)

- Essa estrutura consiste em:
 - ❑ Um dicionário que mapeia duplas linha e coluna para seus respectivos valores.
 - ❑ Eficiente para construir a matriz em uma ordem arbitrária.

Dictionary of Keys(DOK)

- Essa estrutura consiste em:
 - ❑ Um dicionário que mapeia duplas linha e coluna para seus respectivos valores.
 - ❑ Eficiente para construir a matriz em uma ordem arbitrária.
 - ❑ Ineficiente para percorrer os elementos por linha/coluna.

Dictionary of Keys(DOK)

- Essa estrutura consiste em:
 - ❑ Um dicionário que mapeia duplas linha e coluna para seus respectivos valores.
 - ❑ Eficiente para construir a matriz em uma ordem arbitrária.
 - ❑ Ineficiente para percorrer os elementos por linha/coluna.
 - ❑ Assim como LiL são formatos bons para construir a matriz, e depois transformá-lo em um formato CSR ou CSC para fazer operações que requerem iterações lexicográficas.