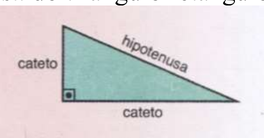
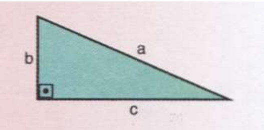
RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÃNGULO E TEOREMA DE PITÁGORAS

Enunciado

Vamos discutir um teorema, chamado teorema de Pitágoras, que é um dos mais importantes da geometria plana.
Este teorema se refere aos triângulos retângulos. Um triângulo retângulo é aquele que possui um dos ângulos internos medindo 90° (reto). Os lados que formam o ângulo reto costumam ser chamados de **catetos**.
O lado oposto ao ângulo reto é a **hipotenusa** do triângulo retângulo.



Considere um triângulo retângulo de hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**:

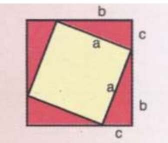


O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

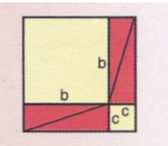
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstração por áreas

Este teorema pode ser demonstrado de diversas maneiras. Vamos apresentar uma demonstração usando áreas. Considere um quadrado de lado a construído dentro de outro quadrado de lado b + c conforme a figura abaixo.



Entre os dois quadrados formam-se quatro triângulos retângulos. Podemos redesenhar esses triângulos dentro do quadrado maior, obtendo a figura:

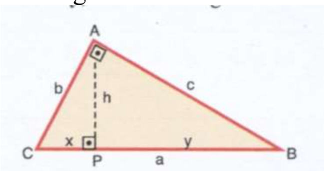


Assim, a área do quadrado de lado **a** (espaço em amarelo na primeira figura) é igual a soma das áreas dos quadrado de lados **b** e **c** (em amarelo na segunda figura):

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstração por semelhança

Outra demonstração comum do teorema de Pitágoras usa semelhança de triângulos.
Considere um triângulo retângulo ABC com hipotenusa a e catetos **b** e **c**. Vamos construir a altura em relação à hipotenusa que divide-a em dois segmentos de comprimentos **x** e **y**, conforme a figura abaixo:



O triângulo ACP é semelhante ao triângulo ABC, porque tem dois ângulos congruentes entre si: o ângulo comum C e o ângulo reto. Logo, podemos montar a seguinte relação de semelhança:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Analogamente, o triângulo ABP é semelhante ao triângulo ABC porque tem, em comum o ângulo B e tem um ângulo reto. Logo:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{y}$$

Das duas proporções anteriores, concluímos que:

$b^2 = a \,.\, x$ e $c^2 = a \,.\, y$

Somando membro a membro estas duas igualdades.

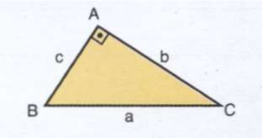
$$b^2 + c^2 = a.x + a.y$$
$$b^2 + c^2 = a.\,(x+y)$$
$$b^2 + c^2 = a.a$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Recíproco

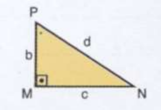
Podemos demonstrar que é válido também o recíproco do teorema de Pitágoras:
se, num triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo.
Ou seja:

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow \Delta$ ABC é retângulo

Para demonstrar este teorema, considere um triângulo ABC de lados a, b, c, tal que $a^2 = b^2 + c^2$; vamos demonstrar que este triângulo é retângulo.



Para isso, vamos construir um outro triângulo (MNP) com dois lados de comprimentos **b** e **c** formando um ângulo reto.



De acordo com o teorema de Pitágoras, a hipotenusa **d** deste novo triângulo é dado por

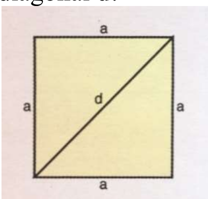
$$d^2 = b^2 + c^2$$

Logo, pela hipótese dada, d = a.
Assim, os dois triângulos são congruentes pelo caso LLL. Como o triângulo MNP é retângulo (por construção), podemos concluir que o triângulo ABC também é retângulo.

APLICAÇÕES

Diagonal de um quadrado

A diagonal de um quadrado pode ser calculada em função do seu lado aplicando
o teorema de Pitágoras.
Considere um quadrado de lado **a** e diagonal **d**.

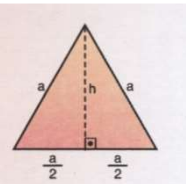


A diagonal divide o quadrado em dois triângulos retângulos de hipotenusa **d** e catetos **a**. Aplicando o teorema de Pitágoras em um desses triângulos:

$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2a^2$$
$$d = a\sqrt{2}$$

Altura do triângulo eqüilátero

Podemos também aplicar o teorema de Pitágoras para calcular a altura de um triângulo eqüilátero.
Considere um triângulo eqüilátero de lado **a** e altura **h**.



A altura **h** divide o triângulo eqüilátero em dois triângulos retângulos de hipotenusa **a** e catetos **h** e **a/2**. Aplicando o teorema de

Pitágoras em um desses triângulos retângulos: $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

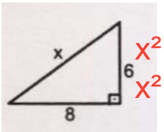
$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

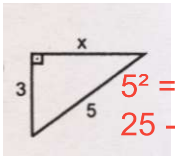
$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \qquad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Exercícios de Aula

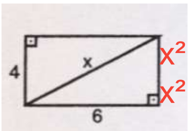
01. Determine o valor de x nas figuras abaixo, considerando os comprimentos indicados.

a) 

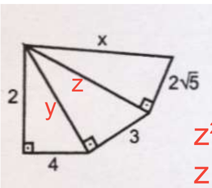
$x^2 = 6^2 + 8^2$
$x^2 = 100 \Rightarrow x = 10.$

b) 

$5^2 = 3^2 + x^2$
$25 - 9 = x^2 \Rightarrow x = 4.$

c) 

$x^2 = 6^2 + 4^2$
$x^2 = 52 \Rightarrow x = \sqrt{52}.$

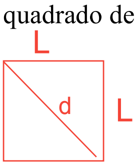
d) 

$y^2 = 2^2 + 4^2$
$y = \sqrt{20}$

$z^2 = (\sqrt{20})^2 + 3^2$
$z = \sqrt{29}$

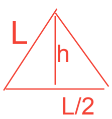
$x^2 = (\sqrt{29})^2 + (2\sqrt{5})^2$
$x = \sqrt{39}.$

02. Determine a diagonal de um quadrado de lado ℓ.



$d^2 = L^2 + L^2$
$d^2 = 2L^2$
$d = L\sqrt{2}$

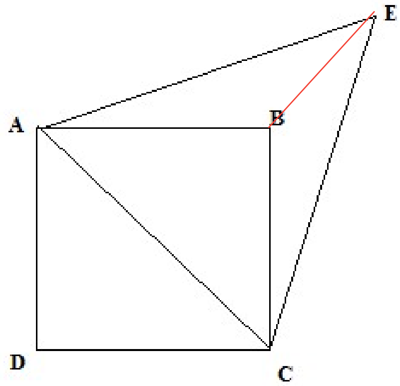
03. Determine a altura de um triângulo eqüilátero de lado ℓ.



$L^2 = h^2 + (L/2)^2$
$L^2 = h^2 + L^2/4$
$L^2 - L^2/4 = h^2$
$4L^2 - L^2/4 = h^2$

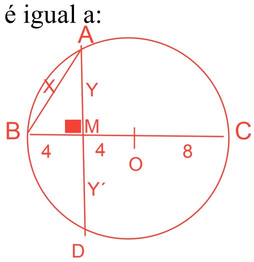
$3L^2/4 = h^2$
$h = \sqrt{3L^2/4}$
$h = L\sqrt{3}/2$

04. (UFRJ) – Na figura, o triângulo AEC é eqüilátero e ABCD é um quadrado de lado 2cm. Calcule a distância BE.



05. (UNIRIO) – Numa circunferência de 16 cm de diâmetro, uma corda AB é projetada ortogonalmente sobre o diâmetro BC. Sabendo-se que a referida projeçao mede 4cm, a medida do segmento AB , em centímetros, é igual a:

(A) 6
(B) 8
(C) 10
(D) 12
(E) 14

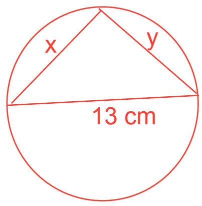


$AM \cdot MD = BM \cdot MC$
$Y \cdot Y' = 4 \cdot 12$
$Y^2 = 48$

$X^2 = Y^2 + 4^2$
$X^2 = 48 + 16$
$X = 8$

AB = 8cm

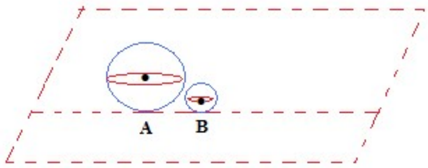
06. (FEI-2002) – Um dos lados de um triângulo inscrito em uma circunferência coincide com um dos seus diâmetros. O perímetro do triângulo mede 30 cm e o diâmetro da circunferência mede 13 cm. Quanto mede a área deste triângulo?



07. (PUC-SP) – Uma estação de tratamento de água (ETA) localiza-se a 600m de uma estrada reta. Uma estação de rádio localiza-se nessa mesma estrada, a 1000m de ETA. Pretende-se construir um restaurante, na estrada, que fique à mesma distância das duas estações. A distância do restaurante a cada uma das estações deverá ser (em metros):
(A) 575 (B) 600 (C) 625
(D) 700 (E) 750

08. (FUVEST) – No jogo de bocha, disputado num terreno plano, o objetivo é conseguir lançar uma bola de raio 8 o mais próximo possível de uma bola menor, de raio 4. Num lançamento, um jogador conseguiu fazer com que as duas bolas ficassem encostadas, conforme ilustra a figura abaixo. A distância entre os pontos A e B, em que as bolas tocam o chão é:

(A) 8 (B) $6\sqrt{2}$ (C) $8\sqrt{2}$
(D) $4\sqrt{3}$ (E) $6\sqrt{3}$



Tarefa Básica

01. (PUC) Num triângulo retângulo, cujos catetos medem $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$, a hipotenusa mede

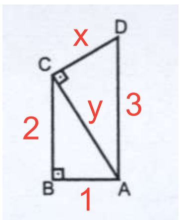
(A) $\sqrt{5}$
~~(B)~~ $\sqrt{7}$
(C) $\sqrt{8}$
(D) $\sqrt{9}$
(E) $\sqrt{12}$

h² = (√3)² + (√4)²
h² = 7
h = √7

10² = 6² + x²
100 - 36 = x²
x = 8m.

02. (UFSC) Uma escada com 10 m de comprimento foi apoiada em uma parede que é perpendicular ao solo. Sabendo-se que o pé da escada está afastado 6 m da base da parede, determine a altura, em metros, alcançada pela escada.

03. (U.F.SERGIPE) Se nos triângulos retângulos, representados na figura abaixo, têm-se AB= 1, BC=2 e AD=3, então CD é igual a



y² = 2² + 1²
y = √5

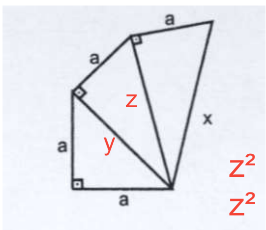
3² = (√5)² + x²
9 - 5 = x²
x = 2

(A) 1
~~(B)~~ 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

CD = 2 cm.

04. (UEL) Na figura abaixo, o valor de x é

y² = a² + a²
y² = 2a²
y = a√2



z² = a² + (a√2)²
z² = a² + 2a
z = √a² + 2a

(A) a
(B) 2a
(C) 3a
(D) $\sqrt{2a}$
(E) $\sqrt{3a}$

x² = a² + (√a² + 2a)²

05. (FUVEST) Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 2 e a hipotenusa mede 6. A área do triângulo é

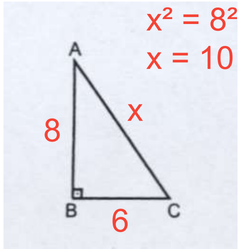
(A) $2\sqrt{2}$

6² = 2² + x²
36 - 4 = x²
x = √32

A = 2.√32/2
A = 4√2

(B) 6
~~(C)~~ $4\sqrt{2}$
(D) 3
(E) $\sqrt{6}$

06. (UEL) Na figura abaixo, tem-se o triângulo retângulo ABC cujos catetos medem 6m e 8m. Quer-se construir um outro triângulo retângulo, com hipotenusa $\overline{AC}$ e tal que a medida de um dos catetos seja igual ao dobro da medida do outro.



x² = 8² + 6²
x = 10

A medida do menor cateto, em metros, será

(A) $2\sqrt{5}$
(B) $4\sqrt{5}$
(C) 5
(D) 10
(E) 20

07. (MACKENZIE) – Considere um poste perpendicular ao plano do chão. Uma aranha está no chão, a 2 m do poste, e começa a se aproximar dele no mesmo instante que uma formiga começa a subir no poste. A velocidade da aranha é de 16 cm por segundo e a da formiga é de 10 cm por segundo. Após 5 segundos do início dos movimentos, a menor distância entre a aranha e a formiga é:

(A) 2,0 m (B) 1,3 m (C) 1,5 m
(D) 2,2 m (E) 1,8 m

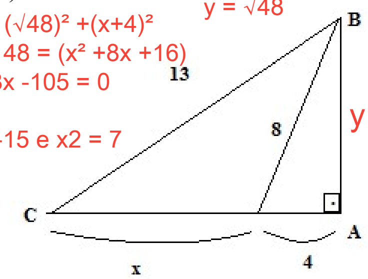
08. (PUC) – Na figura seguinte, os segmentos são medidos em metros. O segmento x vale:

(A) 11 m
(B) 105 m
(C) é impossível saber, pois 43 não tem raiz exata
~~(D)~~ 7m

8² = y² + 4²
y = √48

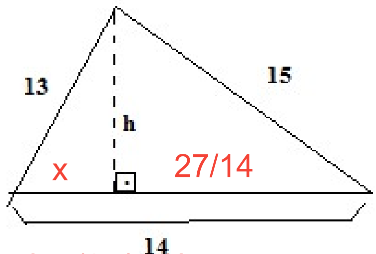
13² = (√48)² +(x+4)²
169 - 48 = (x² +8x +16)
x² + 8x -105 = 0

x1 = -15 e x2 = 7



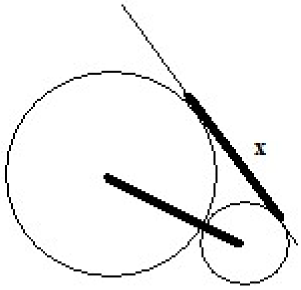
09. Com os dados da figura, calcule h.

14/13 = 13/x => x = 169/14



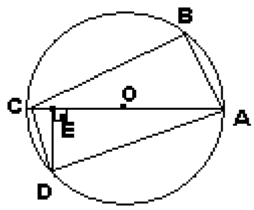
15² = h² + (27/14)²

10. (FEI) – Calcular o comprimento x na tangente exterior, comum a duas circunferências tangentes externas, de raios r e r’.



11. (MACK) – Na figura, AB=30, BC=40, CD=20. O é o centro da circunferência e $\hat{DEA}$ =90º. O valor de CE é:

(A)12,5
(B) 10
(C) 8
(D) 5
(E) faltam dados para calcular



- Respostas da Tarefa Básica

01. (B)
02. 8m
03. (B)
04. (B)
05. (C)
06. (A)
07. (B)
08. (D)
09. 12
10. $2\sqrt{r.r'}$
11. (C)