ACH2033 - Matrizes, Vetores e Geometria Analítica

EP2: explicação e considerações

Prof. Flávio Luiz Coutinho (flcoutinho@usp.br)

Objetivos

Exercitar e aplicar os conceitos vistos nas últimas aulas no ano passado:

- base / mudança de base
- transformações matriciais

O que vocês devem fazer

Completar as “lacunas” no código do programa fornecido. O programa essencialmente realiza o desenho de formas geométricas (no plano 2D) a partir de definições contidas em um arquivo. Sobre o plano 2D, assumimos que:

- canto superior esquerdo: (-1, 1)
- canto superior direito: (1, 1)
- canto inferior direito: (1, -1)
- canto inferior esquerdo: (-1, -1)

O que o programa deve fazer quando completo

Ler um arquivo de entrada contendo essencialmente:

- a definição de algumas formas geométricas (Shapes)
- uma sequência de comandos de desenho. Para cada um são definidos:
    - a forma geométrica a ser desenhada (shape_id)
    - a “cor” que deve ser usada no desenho
    - parâmetros que aplicam algum tipo de transformação na forma geométrica: basicamente rotação, escala e translação (mas também deve ser possível definir outras transformações arbitrárias)

O que o programa deve fazer quando completo

Além disso, o arquivo define a posição de um observador (coordenadas x e y) e a direção para a qual ele “olha”. Portanto, as figuras geométricas tem que ser desenhadas sob o ponto de vista do observador.

O que o programa completo deve fazer quando completo

Exemplos de execução: entradas e saídas esperadas.

Revisão…

Revisando os pontos principais relacionados à mudança de base e transformações matriciais…

Mudanças de bases

Generalizando para espaços de dimensão arbitrária: se mudamos a base de um espaço vetorial V de B = { $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$} para S = { $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$}, então qualquer vetor $\mathbf{v}$ em V de coordenadas $(\mathbf{v})_B$ está relacionado ao vetor expresso na nova base $(\mathbf{v})_S$ pela equação:

$$(\mathbf{v})_B = P\,(\mathbf{v})_S\,, \quad \text{onde } P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} (\mathbf{w}_1)_B & (\mathbf{w}_2)_B & \cdots & (\mathbf{w}_n)_B \end{array} \right)$$

Mudanças de bases

A matriz P é chamada matriz de transição de S para B, ou $P_{S->B}$:

$$P_{S->B} = \left[\ (\mathbf{w_1})_B \ \middle|\ (\mathbf{w_2})_B \ \middle|\ \dots \ \middle|\ (\mathbf{w_3})_B\ \right]$$

$$(\mathbf{v})_B = P_{S->B}\ (\mathbf{v})_S$$

Mudanças de bases

Analogamente a matriz de transição de B para S, ou $P_{B\to S}$ é dada por:

$$P_{B\to S} = \left[\ (\mathbf{u_1})_S \mid (\mathbf{u_2})_S \mid \ \ldots \ \mid (\mathbf{u_3})_S\ \right]$$

$$(\mathbf{v})_S = P_{B\to S}\ (\mathbf{v})_B$$

Invertibilidade de matrizes de transição

Logo $(P_{S->B})$ é inversível e sua inversa é $(P_{B->S})$, o que nos leva ao teorema:

Se P for a matriz de transição de uma base S para uma base B de um espaço vetorial V de dimensão finita, então P é inversível e P^{-1} é a matriz de transição de B para S.

Invertibilidade de matrizes de transição

Procedimento para calcular $P_{S->B}$:

- Definir a matriz [B | S]
- Reduzir a matriz ao formato escalonado reduzido
- A matriz resultante é [I | $P_{S->B}$]

Quando B é a base canônica, a matriz [B | S] = [I | S], e portanto já estará no formato escalonado reduzido. Logo, $P_{S->B}$ será simplesmente S.

Invertibilidade de matrizes de transição

Procedimento para calcular $P_{B->S}$:

- Definir a matriz [S | B]
- Reduzir a matriz ao formato escalonado reduzido
- A matriz resultante é [I | $P_{B->S}$]

Quando B é a base canônica, [S | B] = [S | I]. Após a redução para o formato escalonado reduzido a matriz resultante será [I | S^{-1}]. Logo $P_{B->S}$ será simplesmente S^{-1}.

Transformações matriciais de R^n em R^m

Considere m funções reais $f_1, f_2, \ldots, f_m$ de n variáveis:

$$w_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$w_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\ldots$$

$$w_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Observe que as m equações associam um ponto único $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ em R^m a cada ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em R^n, definindo uma transformação T: $R^n \longrightarrow R^m$:

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

Transformações matriciais de R^n em R^m

Quando as equações f_1, f_2, …, f_m forem lineares, podemos expressá-las por:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\
w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\
&\quad\dots \\
w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

Transformações matriciais de R^n em R^m

Ou, equivalentemente, na forma matricial por:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ou ainda, de forma mais compacta, por **w** = A**x**.

Matriz canônica de um operador de R^n em R^n

A matriz canônica de uma operador T_A pode ser encontrada considerando o efeito do mesmo sobre vetores da base canônica de R^n:

$$A = [\ T_A(\mathbf{e_1}) \mid T_A(\mathbf{e_2}) \mid \dots \mid T_A(\mathbf{e_n})\ ]$$

Alguns operadores do R^2

Reflexão no eixo y: base canônica B = { (1, 0), (0, 1) }

Efeito da operador na base canônica: B = { (-1, 0), (0, 1) }

Matriz canônica: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Alguns operadores do R^2

Reflexão na reta y = x: base canônica B = { (1, 0), (0, 1) }

Efeito da operador na base canônica: B = { (0, 1), (1, 0) }

Matriz canônica: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Alguns operadores do R^2

Rotação: base canônica B = { (1, 0), (0, 1) }

Efeito na base canônica: B = { (cos(θ), sen(θ)), (-sen(θ), cos(θ)) }

Matriz canônica: $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\,\text{sen}(\theta) \\ x\,\text{sen}(\theta) + y\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Alguns operadores do R^2

Escala uniforme: base canônica B = { (1, 0), (0, 1) }

Efeito na base canônica: B = { (k, 0), (0, k) }

Matriz canônica: $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Alguns operadores do R^2

Escala no eixo x: base canônica B = { (1, 0), (0, 1) }

Efeito na base canônica: B = { (k, 0), (0, 1) }

Matriz canônica: A = $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}$$

Alguns operadores do R^2

Cisalhamento na direção x: base canônica B = { (1, 0), (0, 1) }

Efeito na base canônica: B = { (1, 0), (*k*, 1) }

Matriz canônica: $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ky \\ y \end{pmatrix}$$

Composição de transformações

Seja:

T_A uma transformação de R^n em R^k

T_B uma transformação de R^k em R^m

Se $\mathbf{x}$ é um vetor em R^n:

$T_A(\mathbf{x})$ em R^k é a aplicação da transformação T_A a $\mathbf{x}$.

$T_B(T_A(\mathbf{x}))$ em R^m é a aplicação da transformação T_B a $T_A(\mathbf{x})$.

Temos, portanto, uma transformação de R^n em R^m, denominada composição de T_B com T_A, denotada por $T_B \circ T_A$.

Composição de transformações

Atenção à ordem das transformações:

$$T_B \circ T_A(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x}))$$

A composição também é uma transformação matricial:

$$T_B \circ T_A(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x})) = \mathrm{B}(T_A(\mathbf{x})) = \mathrm{B}(\mathrm{A}\mathbf{x}) = (\mathrm{BA})\mathbf{x}$$

Logo, $T_B \circ T_A = T_{BA}$.

Composição de transformações

Note que:

$$T_B \circ T_A \text{ não necessariamente equivale a } T_A \circ T_B$$

uma vez que, em geral, AB = BA não é verdade!

Ou seja, a ordem das transformações em uma composição é importante!

Exemplo composição

Reflexão no eixo y (T_A) e seguida de escala no eixo x (T_B):

$$BA = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Neste caso BA = AB (mas isso é a exceção, e não a regra):

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo composição

Reflexão na reta y = x (T_A) e seguida de escala no eixo x (T_B):

$$BA = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Neste caso BA != AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

Ok, mas e a translação?

Dá pra representar translação com uma transformação matricial?

$\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ [vetor **v** representa um ponto 2D]

$\mathbf{t} = (t_x, t_y)$ [vetor deslocamento que queremos aplicar em **v**]

$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{t}$

$\mathbf{v}' = (v_x, v_y) + (t_x, \mathrm{t}_y)$

$\mathbf{v}' = (v_x + t_x, v_y + \mathrm{t}_y)$

Ok, mas e a translação?

Dá pra representar translação com uma transformação matricial?

$$\mathbf{v'} = (v_x + t_x, v_y + t_y)$$

Ok, mas como representar de forma matricial, de modo que possamos expressar:

$$\mathbf{v'} = A\mathbf{v}$$

Ok, mas e a translação?

Dá pra representar translação com uma transformação matricial?

$$\mathbf{v'} = (v_x + t_x, v_y + t_y)$$

Ok, mas como representar de forma matricial, de modo que possamos expressar:

$$\mathbf{v'} = A\mathbf{v}$$

É possível???

Ok, mas e a translação?

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Não é possível representar a translações através de uma matriz 2x2… :(

Ok, mas e a translação?

Mas podemos usar um truque:

Ok, mas e a translação?

Mas podemos usar um truque: acrescentar uma 3.a dimensão aos vetores:

Ok, mas e a translação?

Mas podemos usar um truque: acrescentar uma 3.a dimensão aos vetores:

$\mathbf{v} = (x, y, 1)$ [vetor representando um ponto]

$\mathbf{u} = (x, y, 0)$ [vetor representando um vetor propriamente dito]

Ok, mas e a translação?

As matrizes que representam as transformações também passariam a ser de dimensão 3x3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ok, mas e a translação?

As matrizes que representam as transformações também passariam a ser de dimensão 3x3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ok, mas e a translação?

As matrizes que representam as transformações também passariam a ser de dimensão 3x3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + tx \\ cx + dy + ty \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ok, mas e a translação?

As matrizes que representam as transformações também passariam a ser de dimensão 3x3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Av = \begin{pmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ 0 \end{pmatrix}$$

E quanto à mudança do ponto de vista?

Essencialmente é uma mudança de base:

B: base canônica (sistemas de coordenadas do “mundo”)

O: base do observador (sistema de coordenadas centrado no observador).

E quanto à mudança do ponto de vista?

Essencialmente é uma mudança de base:

$B = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$

$O = \{ \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, t \}$, onde:

- $\mathbf{e_1}$: aponta para o lado direito do observador
- $\mathbf{e_2}$: direção para onde o observador olha
- $\mathbf{t}$: posição do observador

$(\mathbf{v})_B = P_{O\text{->}B}(\mathbf{v})_O$, onde $P = [\ e1 \mid e2 \mid t\ ]$

E quanto à mudança do ponto de vista?

Mas atente ao fato de que $(\mathbf{v})_B$, é dado (representa um vértice arbitrário de uma forma geométrica após aplicação das transformações), e o que queremos descobrir é $(\mathbf{v})_O$. Logo, precisamos não de $P_{O\text{->}B}$, mas $P_{B\text{->}O}$, de tal modo que:

$$(\mathbf{v})_O = P_{B\text{->}O}(\mathbf{v})_B$$

Como B é a base canônica, então $P_{B\text{->}O} = P_{O\text{->}B}^{-1}$. Logo, $(\mathbf{v})_O = P_{O\text{->}B}^{-1}(\mathbf{v})_B$