Vértices e Arestas - Conexidade

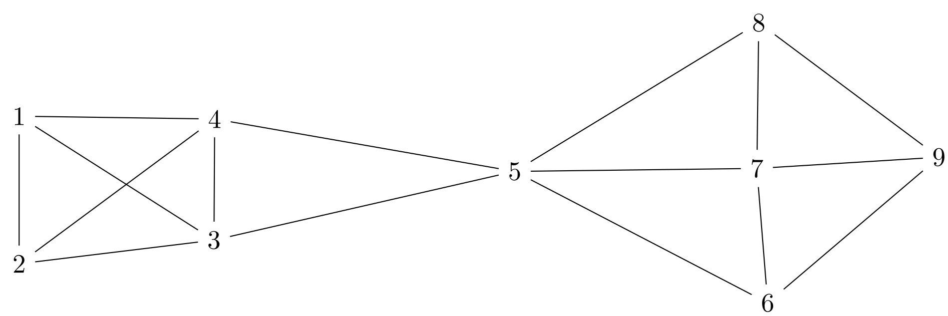
Isaías Castro

Janeiro 2025

1 Aresta-conexidade

1. Um grafo é k-arestas-conexo se é preciso remover pelo menos k de suas arestas para desconectá-lo. A aresta-conexidade de um grafo é o maior k tal que o grafo é k-aresta-conexo.

   Ex.:

   Aresta-conexidade: 2.

2. Uma ponte é uma aresta cuja remoção aumenta o número de componentes conexas no grafo.

   - Proposição 1: Uma aresta é ponte se, e somente se, ela não está contida em nenhum ciclo.
   - Proposição 2: A aresta-convexidade do K_n é n-1.
   - Proposição 3: As árvores com 2 ou mais vértices tem aresta convexidade 1.
   - Proposição 4: Um grafo conexo é 2-aresta se ele não possui ponte

   Definição: Seja G um grafo. Denotamos por $\delta(G)$ o grau mínimo de G, ou seja, o grau do vértice de G que tem menor grau.

- Proposição 5: A aresta-conexidade de G é no máximo $\delta(G)$.

3. Algoritmo Aresta-conexo.

   Entrada: Um grafo G com n vértices e com m arestas e um inteiro positivo K.
   Saída: SIM, se G for k-aresta-conexo; NAO, caso contrário.

   Se k > δ(G) devolva NAO e pare
   Se k = 1 devolva Conexo(G)
   Para i = 1 até m

   G' = G - aresta i
   Se aresta-convexo(G', k-1) = não
   devolva NAO e pare

   devolva SIM

4. Análise do tempo.

   T(k) = mT(k-1) + m,
   T(1) = m

   Soma telescópica:

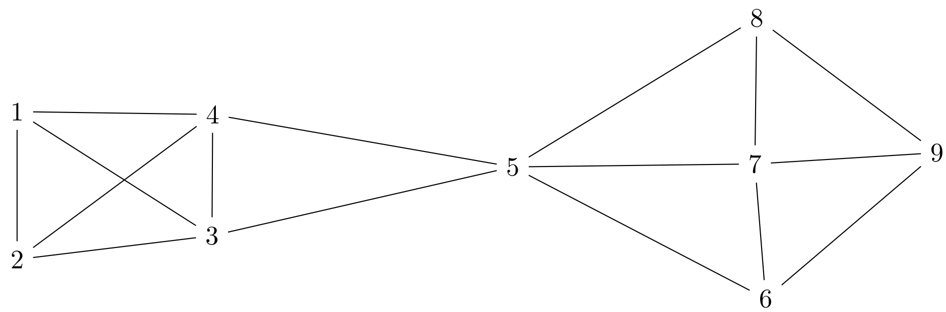
$$\begin{aligned} T(k) &= mT(k-1) + m \\ mT(k-1) &= m^2T(k-2) + m^2 \\ m^2T(k-2) &= m^3T(k-3) + m^3 \\ &\ldots \\ m^{k-2}T(2) &= m^{k-1}T(1) + m^{k-1} \\ m^{k-1}T(1) &= m^k \end{aligned}$$

   Somando temos $T(k) = m + m^2 + m^3 + ... + m^k$, logo $T(k) \in \Theta(m^k)$

2 Vértice-conexidade

1. Um grafo é k-vértice-convexo se é preciso tirar pelo menos k de seus vértices para desconectá-lo. A vértice-conexidade de um grafo é o maior k tal que o grafo é k-vértice-conexo.

Ex.:



Vértice complexidade: 1

2. Um vértice de corte é um vértice cuja remoção aumenta o número de componentes conexos do grafo.
   Não é possível desconectar um grafo completo removendo alguns de seus vértices. Dizemos que a vértice-complexidade dos grafos completos é infinita.

   - Proposição 6: As árvores com 3 ou mais vértices têm vértice-complexidade 1.
   - Proposição 7: Um grafo conexo é 2-vértice-conexo se não possui vértice de corte.

   Definição: Seja G um grafo. Denotamos por $\delta(G)$ o grau mínimo de G, ou seja, o grau do vértice de G que tem o menos grau.

   - Proposição 8: A vértice-conexidade dos grafos não completos é no máximo $\delta(G)$.

3. Algoritmo Aresta-conexo.

   Entrada: Um grafo G com n vértices e com m arestas e um inteiro positivo K.
   Saída: SIM, se G for k-aresta-conexo; NAO, caso contrário.

   Se G for completo devolva SIM e pare
   Se k > δ(G) devolva NAO e pare
   Se k = 1 devolva Conexo(G)
   Para i = 1 até m

   G' = G - aresta i
   Se aresta-convexo(G', k-1) = não
   devolva NAO e pare

devolva SIM

OBs: Esse algoritmo requer tempo $\Theta(n^{k+1})$