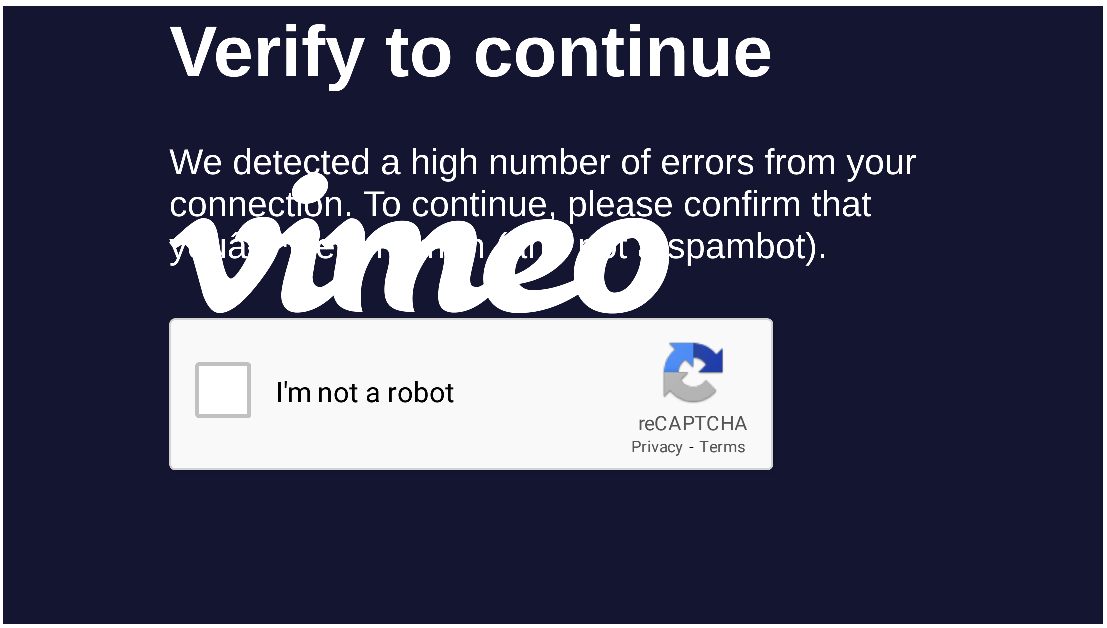
Módulo 3. Logaritmos y progresiones

Es momento de conocer sobre logaritmos y progresiones. Mediante ejercicios prácticos, podremos aplicar las propiedades generales de los logaritmos y las leyes de las operaciones entre ellos. Además, distinguiremos entre progresiones aritméticas y geométricas. ¿Sabías qué las diferencia?

Lección 1 de 6

Video de inmersión



Unidad 3.1 Logaritmos

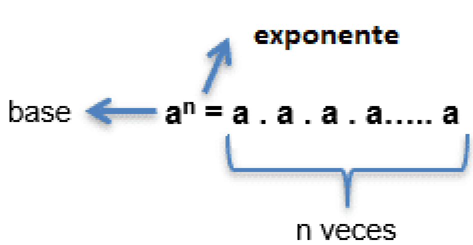
Introducción: Exponentes

Antes de comenzar, repasemos acerca de los exponentes. ¿Cómo podemos abreviar la siguiente expresión?

$$2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2. 2 = 512$$

Para no tener que escribir todos los **factores iguales** de esta multiplicación usaremos **potencias**. Por lo tanto, a este producto lo escribiremos como 2^9. El número 9 se llama **exponente** y nos indica el número de veces que hay que multiplicar a 2 por sí mismo. Al número 2^9 se lo llama una **potencia** de 2 y se lee “2 a la novena potencia” o “2 a la nueve”.

Definición



Entonces:

$$b^3 = b . b . b \qquad b^5 = b . b . b . b . b$$

Ejemplos:

$(-4)^3 = (-4) . (-4) . (-4) = -64$ $5^4 = 5 . 5 . 5 . 5 = 625$ $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$

El uso de la calculadora científica para el cálculo de potencias y logaritmos

Figura 1

Fuente: adaptado de CASIO, 2020.

Figura 2

Fuente: adaptado de Google Inc., 2020.

Tanto una calculadora científica convencional como una calculadora *online*, te permitirán realizar los cálculos de las actividades de este módulo. La tecla **^** o $\mathbf{x^y}$ posibilita calcular **potencia**s. Por ejemplo, para calcular 2^9 se debés hacer **2 ^ 9** o 2 x^y 9.

Reglas de los exponentes

Figura 3

Regla	Ejemplos
$a^0 = 1$	$2^0 = 1$
$a^{-n} = 1/a^n$	$2^{-1} = ½$ $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
$a^m a^n = a^{m+n}$	$2^3 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3.4} = 2^{12} = 4096$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(20)^3 = (2.10)^3 = 2^3.10^3 = 8.1000 = 8000$
$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ $b \neq 0$	$(\frac{2}{5})^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	$\frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^{5-3}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Fuente: elaboración propia.

3.1.1. Funciones exponenciales

La frase **crecimiento exponencial** es utilizada con frecuencia por profesores, científicos, economistas, entre otros. Todos hemos escuchado que la población, la cantidad de personas infectadas por un virus o el uso de la energía crece exponencialmente. Aunque no tengamos del todo claro qué significa el crecimiento exponencial, sabemos que sus consecuencias son alarmantes. Muchos acontecimientos de la sociedad moderna se comportan de esta manera.

Ejemplos

Pensemos en el ejemplo de la infección por un virus. Una persona está infectada y "supongamos que el individuo infectado es capaz de infectar solamente a otros dos individuos. En el día cero tendría un infectado. (…) El primer día habría 2 infectados, al segundo día 4, al tercer día 8 y así sucesivamente"

(Capasso, 2020, https://www.perfil.com/noticias/opinion/opinion-dario-capasso-coronavirus-que-es-un-crecimiento-exponencial.phtml).

Veámoslo en una **tabla de valores**, donde x representa el número de día y donde y representa la cantidad de personas infectadas.

Tabla 1

x: día	y: cantidad de personas infectadas
0	1
1	2
2	2 . 2 = 4
3	4 . 2 = 8
4	8 . 2 = 16
5	16 . 2 = 32

Fuente: elaboración propia.

A partir de la tabla de valores podés ver que "el número de infectados cada día es igual al número de infectados del día anterior multiplicado por dos. Si quisiéramos calcular el número de infectados en cualquier día" (Capasso, 2020, https://www.perfil.com/noticias/opinion/opinion-dario-capasso-coronavirus-que-es-un-crecimiento-exponencial.phtml), podríamos hacerlo con la fórmula $f(x) = 2x$.

Volvamos a ver la tabla, recordá que **x** representa el número de día e **y = f(x)** la cantidad de personas infectadas.

Tabla 2

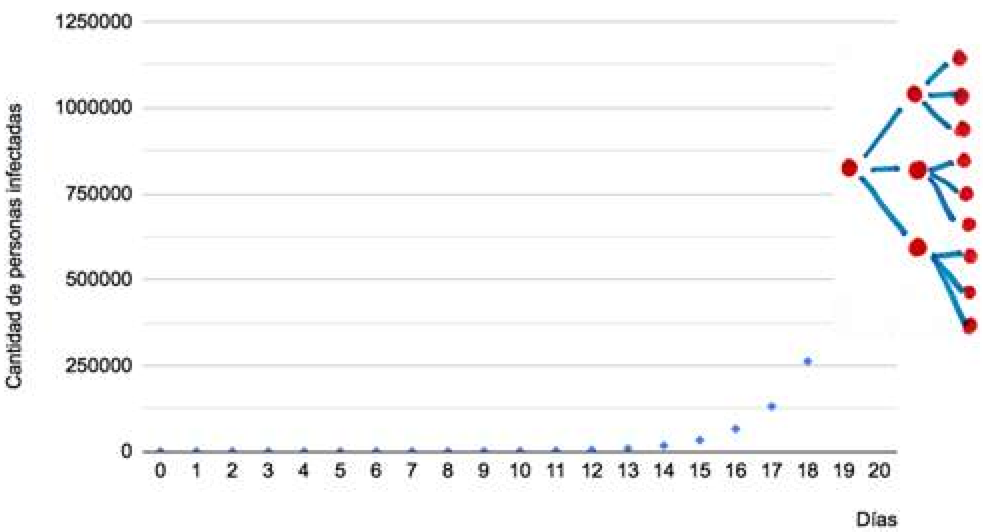
x	$f(x) = 2^x$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
10	$2^{10} = 1.024$
20	$2^{20} = 1.048.576$

Fuente: elaboración propia.

¿Observaste cómo la función **f** tomó rápidamente valores grandísimos? La tabla muestra como el día 10 se infectaron 1.024 personas y el día 20, 1.048.576 personas. ¡Impresionante!

El párrafo anterior se puede expresar simbólicamente de la siguiente manera: f(10) = 1.024 y f(20) = 1.048.576. Sin embargo, más impresionante aún será ver estos datos reflejados en un gráfico de coordenadas.

Figura 4



Fuente: elaboración propia.

Pensemos ahora en el caso de Luis que crea un mensaje de WhatsApp que envía a 3 contactos suyos. El mensaje contiene un pedido que dice que, al terminar de leerlo, este sea reenviado a 3 contactos. Si cada persona que recibe el mensaje y se lo envía a 3 contactos suyos, ¿podemos saber cuántas personas recibirán el mensaje el séptimo día?

Nuevamente usaremos la fórmula exponencial, aunque ahora cambiamos la base 2 por la base 3.

$$g(x) = 3^x$$

Veamos la tabla de valores donde x representa el número de día y g(x) la cantidad de mensajes enviados ese día.

Tabla 3

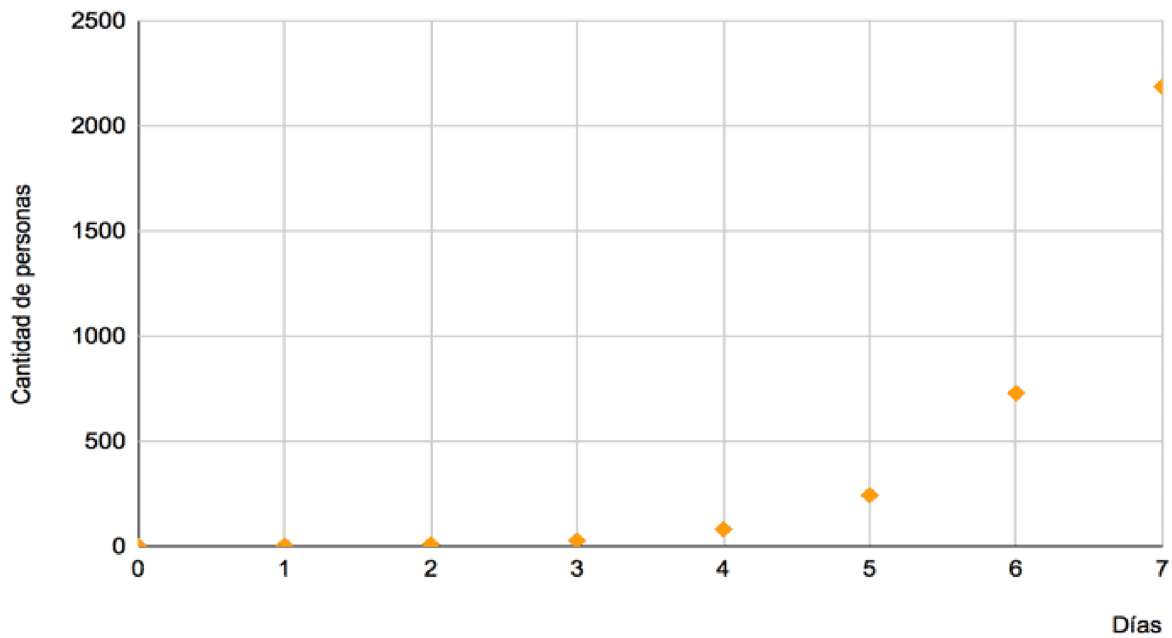
x	$g(x) = 3^x$
0	$3^0 = 1$
1	$3^1 = 2$
2	$3^2 = 3 . 3 = 9$
3	$3^3 = 3 . 3 . 3 = 27$
4	$3^4 = 3 . 3 . 3 . 3 = 81$
5	$3^5 = 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 243$
6	$3^6 = 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 729$
7	$3^7 = 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 2.187$

Fuente: elaboración propia.

g(7) = 2.187, esto significa que 2.187 personas recibirán el mensaje el día 7.

Observá el gráfico que presentamos a continuación, se comporta de manera similar al gráfico de la figura 3. A medida que los valores de x crecen, los valores de la función g crecen de manera mucho más veloz.

Figura 5



Fuente: elaboración propia.

¿Cómo harías para averiguar cuántas personas recibirán el mensaje el día 15? Por supuesto, mediante el cálculo de 3^{15}, que te dará 14.348.907. ¡Un número más que interesante de personas!

Veamos otro fenómeno de crecimiento exponencial: las amebas. Estos seres unicelulares se reproducen al partirse en dos (proceso que se conoce con el nombre de bipartición). Esto se realiza rápidamente según las condiciones del medio en el que se encuentren (cultivo). Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente a cada hora y que inicialmente hay 400 amebas (Pomar Amillo, 2001).

Si al principio hubiese una sola ameba, la fórmula que utilizaremos para calcular cómo se duplica cada hora sería:

$$y = 2^x$$

Donde **x** representa las horas, e **y** el número total de amebas.

Pero, en este caso se nos dice que inicialmente no hay una ameba, sino 400. Por lo tanto, ahora la fórmula de la función que llamaremos **h** será:

$$h(x) = 400.\ 2^x$$

A continuación, veamos la tabla de valores y su gráfica.

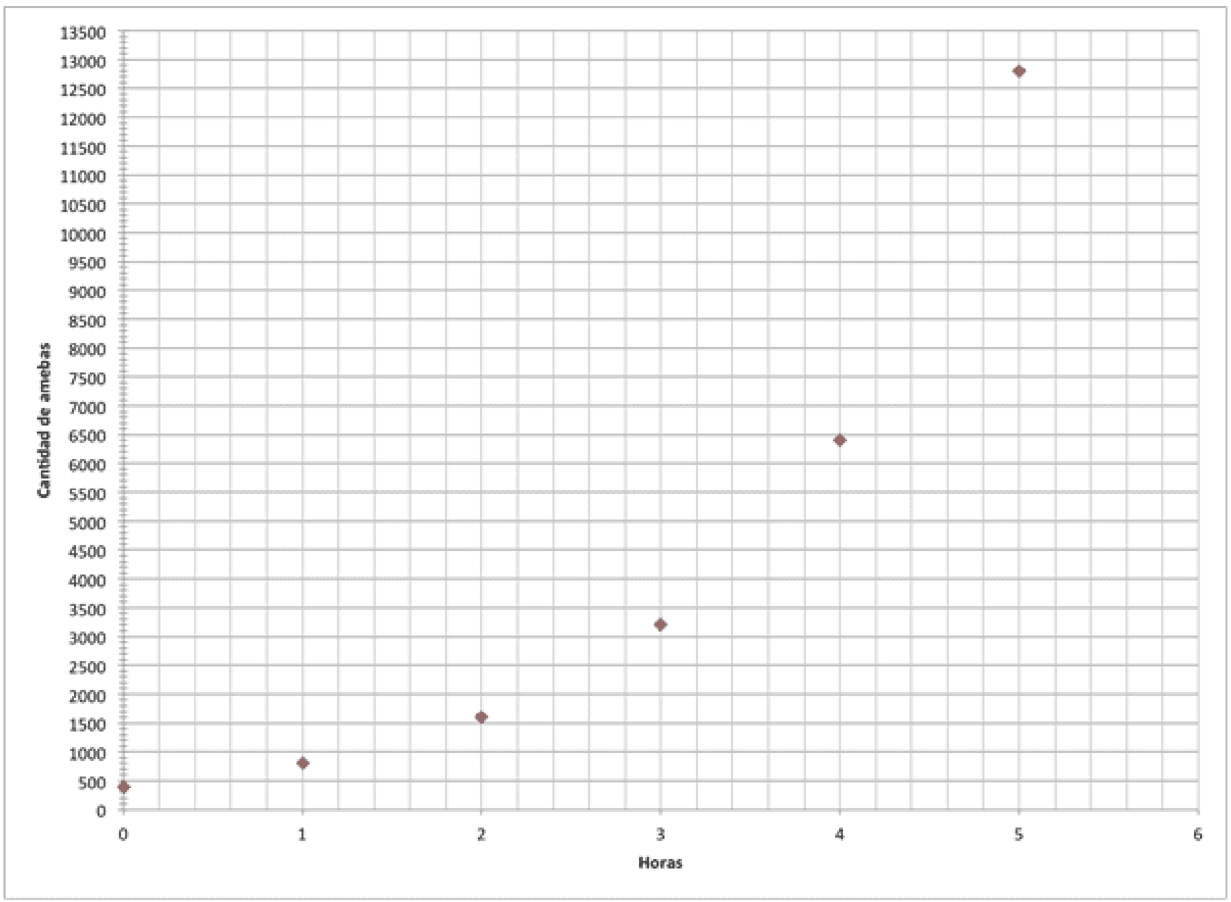
Tabla 4

Horas x	Cantidad de amebas $h(x) = 400 \ .\ 2^x$
0	$400 \ .\ 2^0 = 400$
1	$400 \ .\ 2^1 = 800$
2	$400 \ .\ 2^2 = 1.600$
3	$400.\ 2^3 = 3.200$

4	$400 . 2^4 = 6.400$
5	$400 . 2^5 = 12.800$

Fuente: elaboración propia.

Figura 6



Fuente: elaboración propia.

Nuevamente observamos el rápido crecimiento de esta función. A medida que los valores de x crecen, los valores de la función h crecen de manera mucho más veloz. Si unís los puntos de las tres gráficas que hicimos hasta ahora, ¿observás la apariencia o forma que toman? ¿Dirías que las funciones se asemejan a la recta celeste o a la curva roja que se muestra a continuación?

Figura 7

Fuente: elaboración propia.

Otro muy buen ejemplo de aplicación práctica de crecimiento exponencial es el de la ganancia de dinero por interés compuesto. Suponte que hoy depositas $ 1.000 en un banco, al 8% de interés compuesto cada año. Al finalizar el año, el banco te va a añadir por intereses $80, esto es porque:

$$(1.000)\ (0{,}08) = 80$$

Recordá:

8% = 8/100 = 0,08
15% = 15/100 = 0,15
120% = 120/100 = 1,2

Por lo tanto, $ 1.000 + $ 80 = $ 1.080. De esta manera, al finalizar el primer año obtendrás una suma de $ 1.080. Si decidís dejar todo tu dinero por otro año más en el banco, ahora tu nuevo depósito será de $ 1.080.

Hagamos una tabla de valores que muestre el crecimiento de tu dinero en el banco a lo largo de algunos años.

Tabla 5

Año	Dinero obtenido en pesos
0	1.000
1	1.000 + 1.000 (0,08) = 1.080
2	1.080 + 1.080 (0,08) = 1.166,4
3	1.166,4 + 1.166,4 (0,08) = 1.259,71

Fuente: elaboración propia.

Volvamos al cálculo que hicimos para averiguar el dinero que ibas a obtener el primer año:

$$\underbrace{1.000}_{\text{Dinero que depositaste.}} + \underbrace{(1.000)\ (0,08)}_{\text{Cálculo del 8\% de tu dinero.}} = \underbrace{1.080}_{\text{Dinero que vas a recibir al finalizar el año.}}$$

Vamos a reescribir el cálculo anterior (un pequeño truco para que comprendas con mayor facilidad los siguientes pasos).

$$(1.000)\ (1) + (1.000)\ (0,08) = 1.080$$

Lo que hicimos en el primer término fue multiplicar a 1.000 por 1 (esto significa que no hicimos ningún cambio, por lo que este término aún es 1.000). Ahora, se ve que 1.000 es un factor común en cada uno de los dos términos, lo vamos a reescribir de esta manera:

$$1.000\ (1 + 0,08) = 1.000\ (1,08) = 1.080$$

Esto pudimos hacerlo por la **propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.**

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma:

$$a(b + c) = a.b + a.c$$

Ejemplo:

$2(3 + 5) = 2.3 + 2.5$
$2 \,.\, 8 = 6 + 10$
$16 = 16$

¿Podría la fórmula exponencial $y = 1.000\ (1,08)x$, donde x representa el tiempo, servirte para ver cómo crece tu dinero en el banco a través de los años? Probémoslo.

Tabla 6

Años x	**Dinero $f(x) = 1.000 \,.\, (1,08)^{x}$**
0	$1.000 \,.\, (1,08)^{0} = 1.000$
1	$1.000 \,.\, (1,08)^{1} = 1.080$
2	$1.000 \,.\, (1,08)^{2} = 1.166,40$
3	$1.000 \,.\, (1,08)^{3} = 1.259,71$
4	$1.000 \,.\, (1,08)^{4} = 1.360,49$

5	1.000 . $(1,08)^5$ = 1.469,33

Fuente: elaboración propia.

Simbólicamente hicimos lo siguiente:

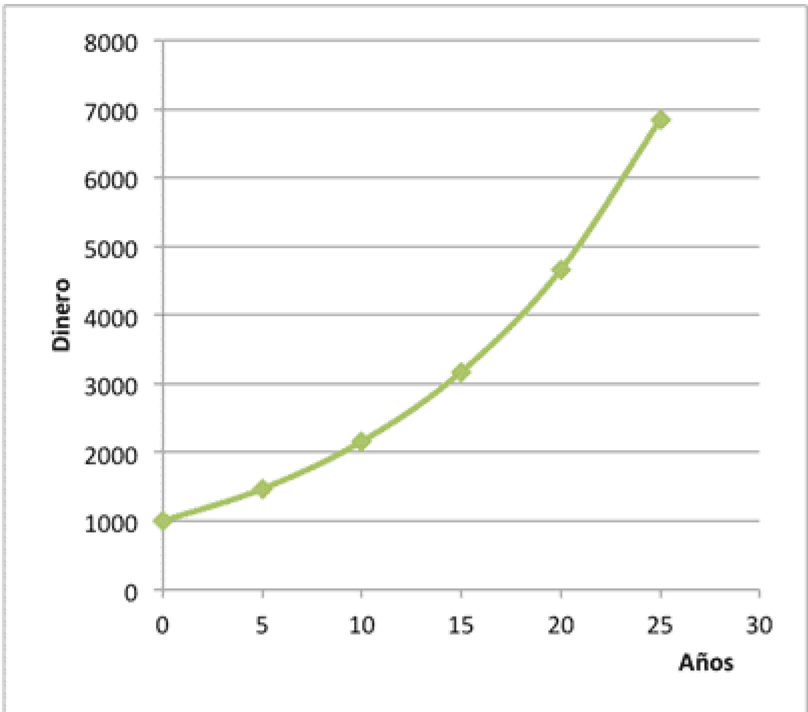
$$(*)\qquad \boxed{f(x) = \underbrace{f(0)}_{\text{Valor inicial}}\ \underbrace{(1 + r)}_{\text{1 + razón (escrita como decimal)}}{}^{\overbrace{x}^{\text{Tiempo}}}}$$

A esta fórmula la llamaremos **fórmula de crecimiento.**

A continuación, podés observar el gráfico de la función f(x) = 1.000 . $(1,08)^x$ en la figura 7. Este permite observar cómo evolucionará tu capital si dejaras tu dinero en el banco durante muchos años. ¿Después de cuántos años duplicarías tu capital inicial? ¿A qué valor te acercarías después de 25 años de tener depositado tu dinero en el banco?

El **crecimiento** de tu dinero a través de los años es **exponencial.**

Figura 8



Fuente: elaboración propia.

Ahora, pensemos en la **población mundial**. Su número aumenta constantemente y veremos que también crece exponencialmente. “En 2018, alcanzó los **7.594 millones** de habitantes en nuestro planeta con una **tasa de crecimiento del 1.1%**” (Datos Mundial, 2018,https://www.datosmundial.com/crecimiento-poblacional.php).

Si partimos del año 2018 como año cero, y usamos la tasa de crecimiento anual, podemos calcular la población en los dos siguientes años.

Tabla 7

	Año	Población
2.018	0	7.594.000.000

2.019	1	7.594.000.000 + (7.594.000.000. 0,011) = 7.677.534.000
2.020	2	7.677.534.000+ (7.677.534.000. 0,011) = 7.761.986.874

Fuente: elaboración propia.

Recordá:

1% = 1/100 = 0,01
1,1% = 1,1/100 = 0,011

Observá que el procedimiento empleado fue igual al del cálculo del dinero depositado en el banco.

Vamos a utilizar la misma **fórmula de crecimiento** (*) y llamaremos a esta nueva función **p**.

$$\boxed{p(x) = p(0)\ (1 + r)^{x}} \rightarrow \text{Tiempo}$$

Valor inicial

(1 + razón escrita como decimal)

$$p(x) = 7.594.000.000\ .\ (1 + 0{,}011)^{x}$$

$$= 7.594.000.000\ .\ (1{,}011)^{x}$$

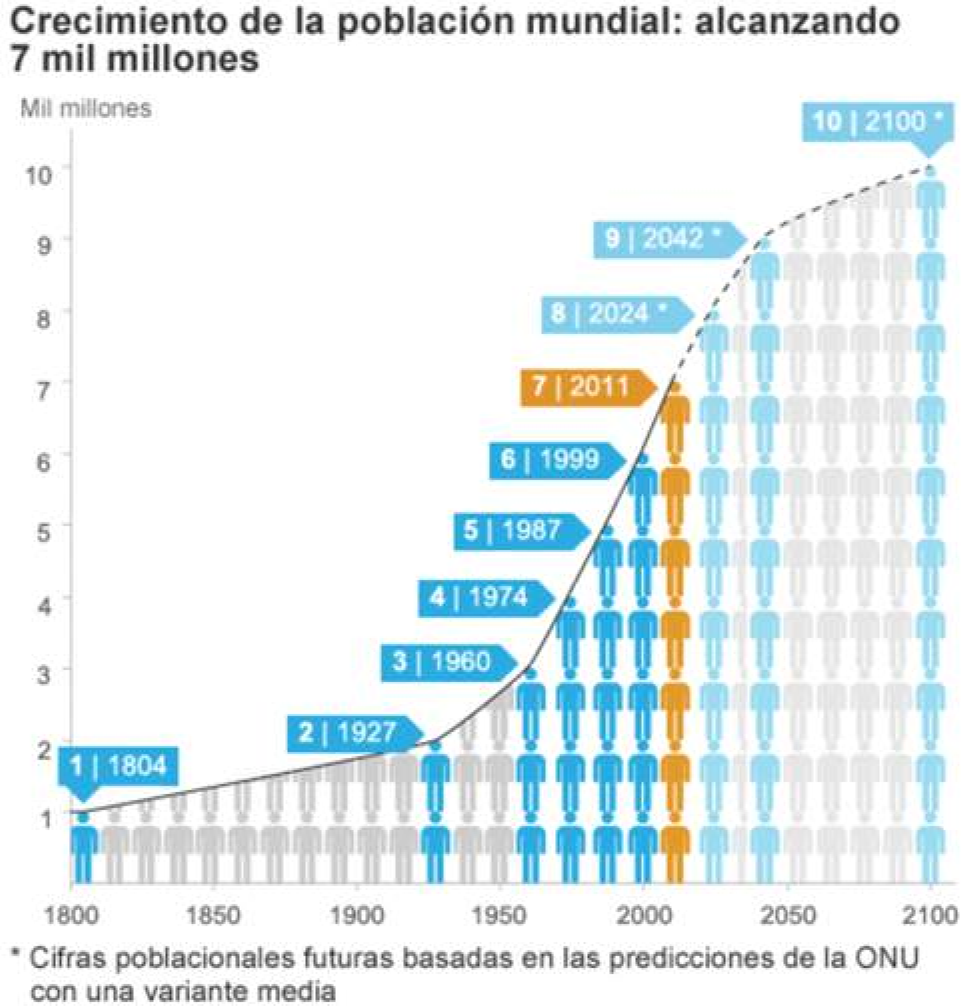
Probemos que esta fórmula funciona y estimemos la población mundial para los próximos años.

Tabla 8

	Años x	Población p(x) = = 7.594.000.000 . (1,011) ^{x}
2.018	0	7.594.000.000 . $(1,011)^{0}$ = 7.594.000.000
2.019	1	7.594.000.000 . $(1,011)^{1}$ = 7.677.534.000
2.020	2	7.594.000.000 . (1,011)2 = 7.761.986.874
2.030	12	7.594.000.000 . $(1,011)^{12}$ = 8.659.333.376
2.040	22	7.594.000.000 . $(1,011)^{22}$ = 9.660.420.165
2.050	32	7.594.000.000 . $(1,011)^{32}$ = 10.777.240.431

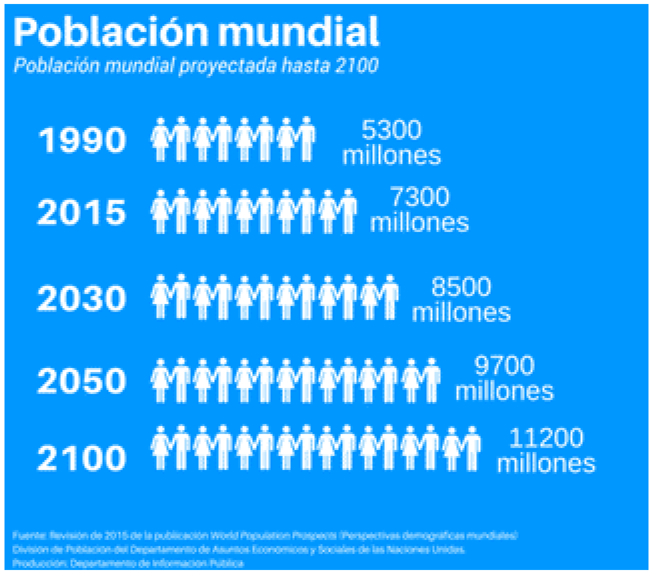
Fuente: elaboración propia.

Figura 9



Fuente: Redacción BBC Mundo (2011). Recuperado de https://www.bbc.com/mundo/noticias/2011/10/111026_poblacion_informe_am

Figura 10



Fuente: Redacción BBC Mundo (2011). Recuperado de https://www.bbc.com/mundo/noticias/2011/10/111026_poblacion_informe_am

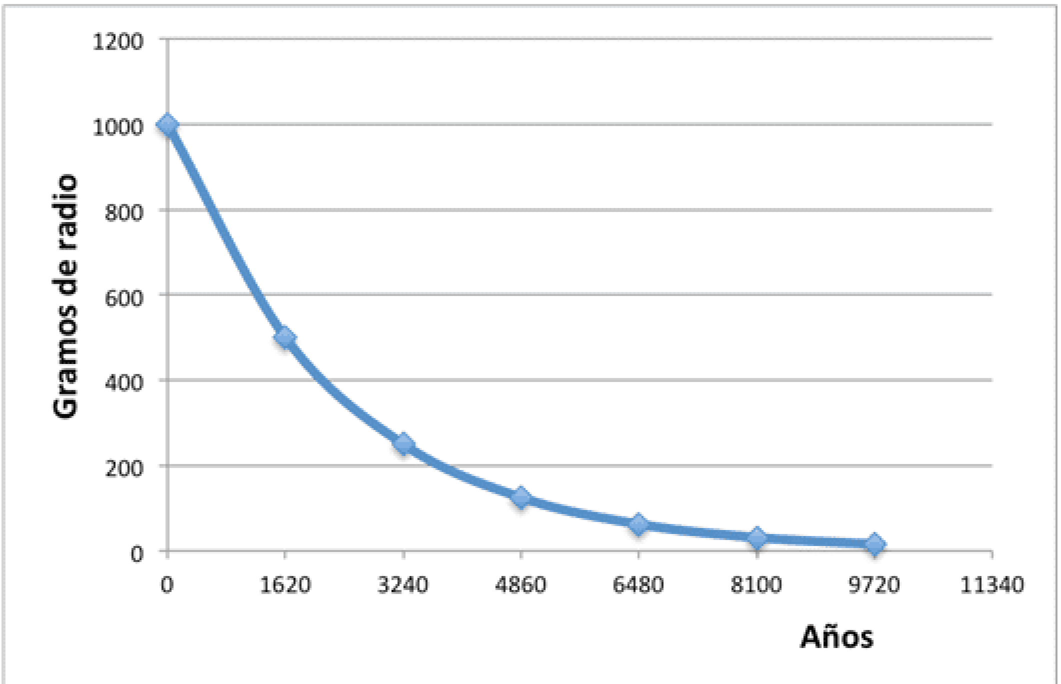
---

Decrecimiento exponencial

No todas las cosas crecen, algunas declinan o decaen. De hecho, las sustancias radioactivas decaen exponencialmente. Las sustancias radioactivas se desintegran, emiten radiaciones y se transforman en otras sustancias. La **vida media** de una sustancia radioactiva es el tiempo requerido para que la mitad de una sustancia desaparezca. Por ejemplo, el radio decae con una vida media de 1.620 años. Es decir que, si hoy se tienen 1.000 gramos de radio, dentro de 1.620 años tendremos 500 gramos, y dentro de 2(1.620) = 3.240 años habrá 250 gramos y así en adelante.

Veamos el comportamiento del radio a través de los años en el siguiente gráfico.

Figura 11



Fuente: elaboración propia.

Claramente puede observarse que la gráfica de esta función es **decreciente**. A medida que aumentan los valores del eje **x,** la función **y** toma valores cada vez más pequeños.

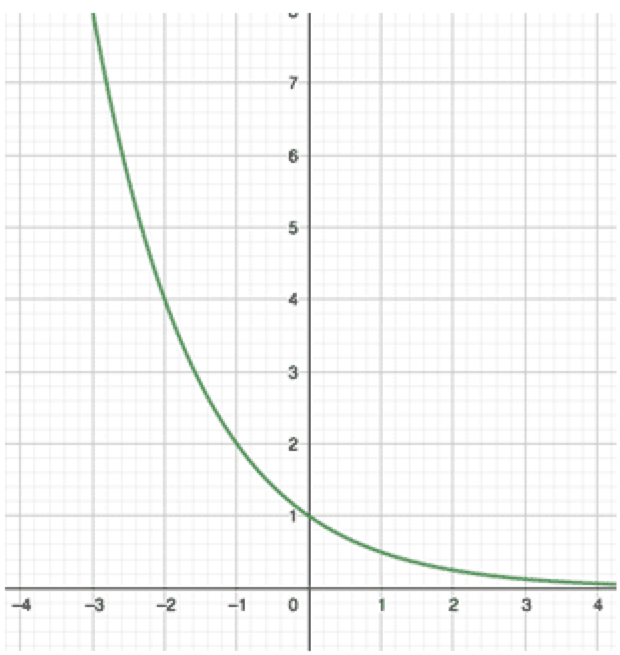
Realicemos la gráfica de la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Tabla 9

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$

Fuente: elaboración propia.

Figura 12



Fuente: elaboración propia.

Simbólicamente, la fórmula de las funciones exponenciales es de la forma:

$$f(x) = a^x$$

A continuación, veremos el efecto que produce el tamaño de **a** sobre la gráfica de $f(x) = a^x$.

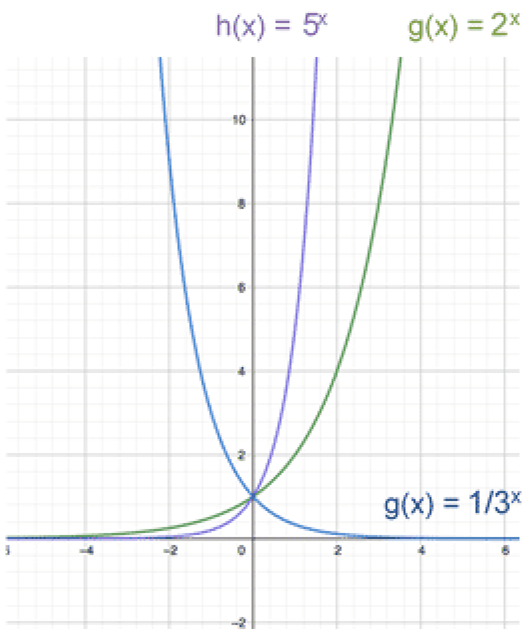
Sean a = 2, a = 5 y a = 1/3, graficaremos juntas las funciones $f(x) = 2^x$, $g(x) = 5^x$ y $h(x) = 1/3^x$

Tabla 10

x	2^x	5^x	$1/3^x$
-2	1/4	1/25	1/9
-1	1/2	1/5	3
0	1	1	1
1	2	5	1/3
2	4	25	1/9

Fuente: elaboración propia.

Figura 13



Fuente: elaboración propia.

La gráfica de g(x) = 5^x se parece mucho a la gráfica de f(x) = 2^x, aunque se eleva más rápidamente.

Estas **funciones** son **crecientes**, lo que significa que los valores de la función crecen a medida que crecen los valores de **x**.

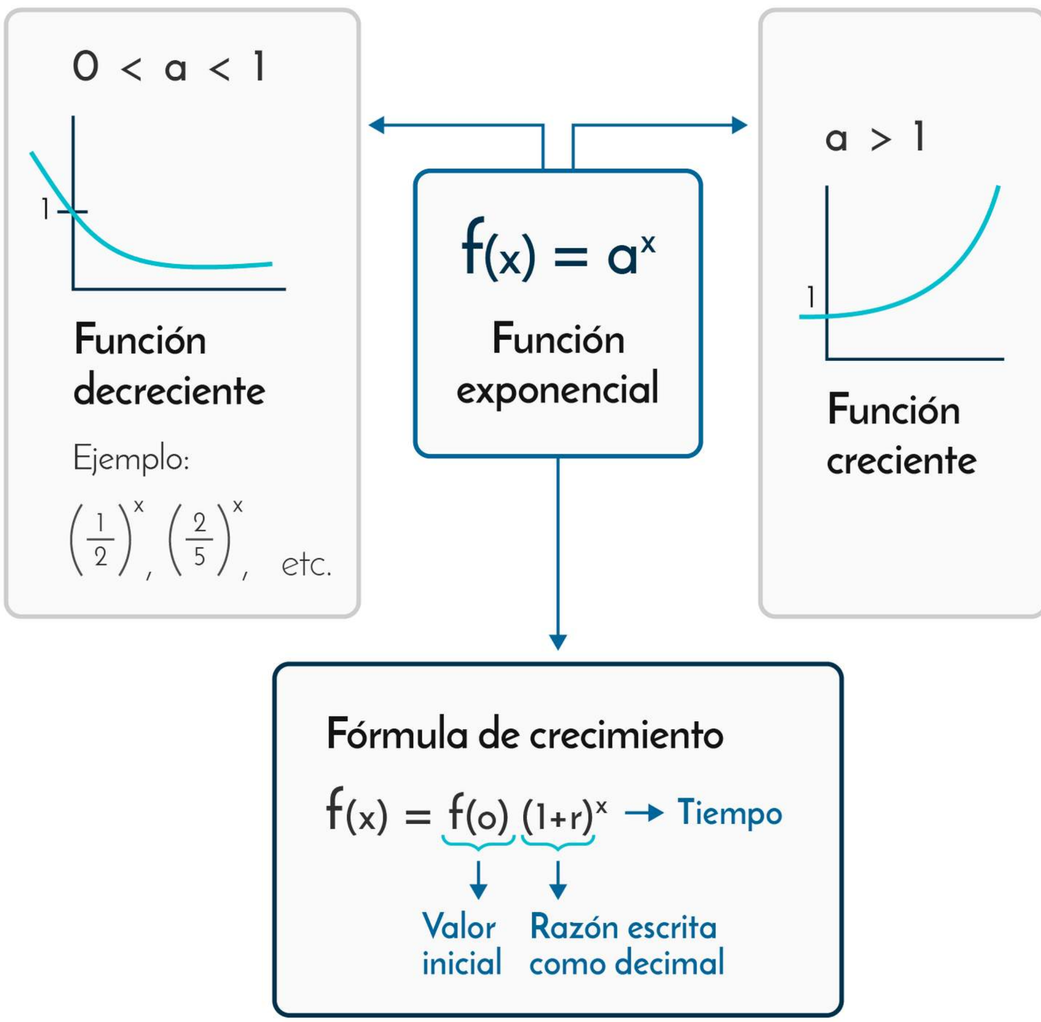
Por otro lado, la función h(x) = $1/3^x$ es una **función decreciente**, la función toma valores cada vez más pequeños a medida que crecen los valores de ^{x}. Muchos dicen que la gráfica de una función exponencial se parece a un palo de hockey.

En síntesis:

Si $a > 1$, $f(x) = ax$ es una función creciente.

Si $0 < a < 1$, $f(x) = ax$ es una función decreciente.

Figura 14: Resumen



Fuente: elaboración propia.

3.1.2. Función logarítmica

¿Qué son los logaritmos?

$$\boxed{\log_b(a) = x \quad \text{sí y solo sí} \quad b^x = a}$$

Se lee “logaritmo en base b de a”

Veamos algunos ejemplos:

$\log_2(8) = 3$ porque $2^3 = 8$

$\log_3(81) = 4$ porque $3^4 = 81$

$\log_5(25) = 2$ porque $5^2 = 25$

$\log_2(1) = 0$ porque $2^0 = 1$

Por lo tanto, si tenemos que averiguar $\log_4(16)$ debemos pensar a qué número tenemos que elevar a 4 para que sea igual a 16.

$\log_4(16) = x$ sí y solo sí $4^x = 16$

Sabemos que $4^2 = 16$, entonces $\log_4(16) = 2$

Uso de la calculadora: cambio de base

Figura 15

Fuente: adaptado de CASIO (2020).

Las calculadoras científicas calculan dos logaritmos:

- La tecla **log** calcula logaritmos en **base 10** ($\log_{10}$).

- La tecla **ln** (logartimo neperiano o natural) cuya **base** es el número **e**.

Nota: el número e (o número de Euler) es un número irracional equivalente a 2,718281828…

Entonces, la pregunta es ¿cómo averiguar **$\log_2$(64)** con las teclas **log** o **ln** de la **calculadora**? Lo que tendremos que hacer es un **cambio de base**.

El procedimiento es el siguiente:

$$\log_b (a) = \frac{\log a}{\log b} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

Calculemos $\log_2$ (64) con la calculadora. Para ello, primero haremos el **cambio de base:**

$$\log_2 (64) = \frac{\log 64}{\log 2} = \frac{\ln 64}{\ln 2}$$

Con la calculadora, usemos primero la tecla **log**:

log 64/ log 2 = 6

Ahora, hagamos lo mismo con la tecla **ln**:

ln 64/ln 2 = 6

Efectivamente $2^6 = 64$

3.1.3 Ecuaciones exponenciales

¿Qué nos permitirán hacer los **logaritmos**? Permitirán **resolver ecuaciones exponenciales**. Por ejemplo, tenemos que averiguar cuál es el exponente al que está elevado 5 para que el resultado de esta potencia sea 625.

$5^x = 625$

Sabemos que por la definición de logaritmo:

$5^x = 625$ -----------> $\log_5 (625) = x$

Para conocer el valor de x, debemos averiguar $\log_5 (625)$.

$$\log_5 (625) = \frac{\log 625}{\log 5} = 4$$ Por cambio de base.

$$\boxed{x = 4}$$

Ejemplo 2

$6^x = 216$

$6^x = 216$ -----------> $\log_6 (216) = x$ Por la definición de logaritmo.

$\log_6 (216) = \frac{\log 216}{\log 6} = 3$ Por cambio de base.

$\boxed{x = 6}$

Ejemplo 3

$2 . 6^x = 236$

$6^x = 236 : 2 = 118$ Dividimos ambos miembros por 2.

$\log_6 (118) = x$ Por la definición de logaritmo.

$\log_6 (118) = \frac{\log 118}{\log 6} \approx 2,66$ Por cambio de base.

$\boxed{x \approx 2,66}$

Ejemplo 4

$5 \, . \, 3^x = 20$

$3^x = 20 : 5 = 4$ Dividimos ambos miembros por 5.

$\log_3 (4) = x$ Por la definición de logaritmo.

$\log_3 (4) = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1{,}26$ Por cambio de base.

$\boxed{x \approx 1{,}26}$

Ejemplo 5

$6 \, . \, 10^{2x} = 48$

$10^{2x} = 48 : 6 = 8$ Dividimos ambos miembros por 6.

$\log_{10} (8) = \log(8) = 2x$ Por la definición de logaritmo $\log_{10} (8) = \log(8)$.

$\frac{\log 8}{2} \approx 0{,}45$ Dividimos ambos miembros por 2.

$\boxed{x \approx 0{,}45}$

Ejemplo 6

$- 2 \cdot 3^{0,2x} = - 400$

$3^{0,2x} = - 400 : - 2 = 200$ Dividimos ambos miembros por -2.

$\log_3 (200) = 0,2x$ Por la definición de logaritmo.

$\frac{\log 200}{\log 3} = 0,2x$ Por cambio de base.

$\frac{\log 200}{\log 3} : 0,2 = x$ Dividimos ambos miembros por 0,2.

$\boxed{x \approx 24,11}$

Ejemplo 7

$\log_5 (x - 2) = 0$

$5^0 = x - 2$ Por la definición de logaritmo.

$1 = x - 2$

$x = 1 + 2 = 3$ Sumamos 2 en ambos miembros.

$\boxed{x = 3}$

3.1.4 Ecuaciones logarítmicas

$\log_6 (x + 3) = 1$

$6^1 = x + 3$ Por la definición de logaritmo.

$6 = x + 3$

$x = 6 – 3 = 3$ Restamos 3 en ambos miembros.

$\boxed{x = 3}$

$\log_2 (2x) = 4$

$2^4 = 2x$ Por la definición de logaritmo

$16 = 2x$

$x = 16 : 2 = 8$ Dividimos ambos miembros por 2

Propiedades de los logaritmos

1. $\log_b (m \cdot n) = \log_b (m) + \log_b (n)$

2. $\log_b (m : n) = \log_b (m) - \log_b (n)$

3. $\log_b (m^n) = n \cdot \log_b (m)$

Ejercicios aplicando propiedades

Escribir cada una de las siguientes expresiones como un único logaritmo.

$\log (2) + \log (4)$

$\log (2) + \log (4) = \log (2 \cdot 4) = \log (8)$ Por la propiedad 1.

$\log_5 (2y) + \log_5 (8)$

$\log_5 (2y \cdot 8) = \log_5 (16y)$ Por la propiedad 1.

$\log_5 (2y) + \log_5 (8) = \log_5 (16y)$

$6\log (y)$

$6\log (y) = \log (y^6)$ Por la propiedad 3.

$\log (10) - \log(2)$

$\log(10) - \log(2) = \log(10 : 2) = \log(5)$ Por la propiedad 2.

3 log (5)

$3 \log(5) = \log(5^3) = \log(125)$ Por la propiedad 3.

La gráfica de la función logarítmica

La función $f(x) = \log_b(x)$ se llama la función logarítmica en base b.

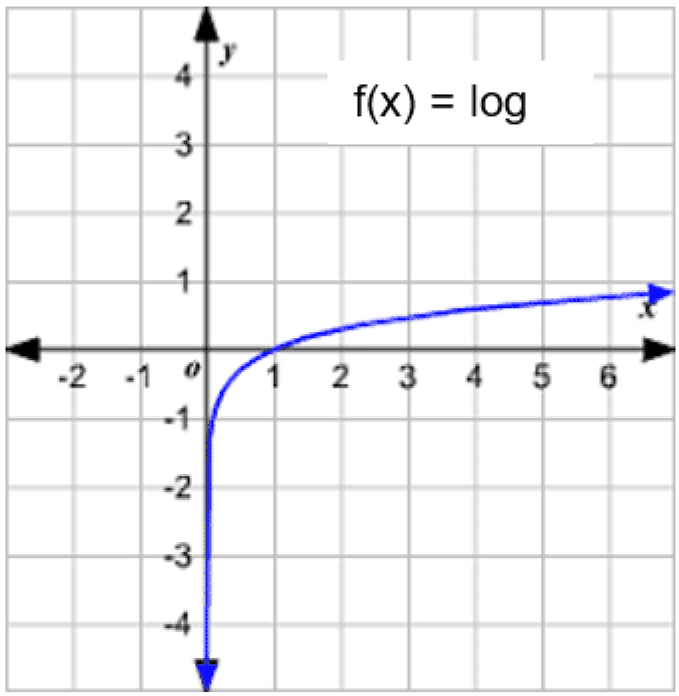
Trazaremos la gráfica de la función en base 10. Muchas de las propiedades de la función log (x) las veremos en la gráfica.

Tabla 11

x	f(x) = log (x)
0,25	- 0,6
0,5	- 0,3
1	0
2	0,3
3	0,5
4	0,6
8	0,9

Fuente: elaboración propia.

Figura 16



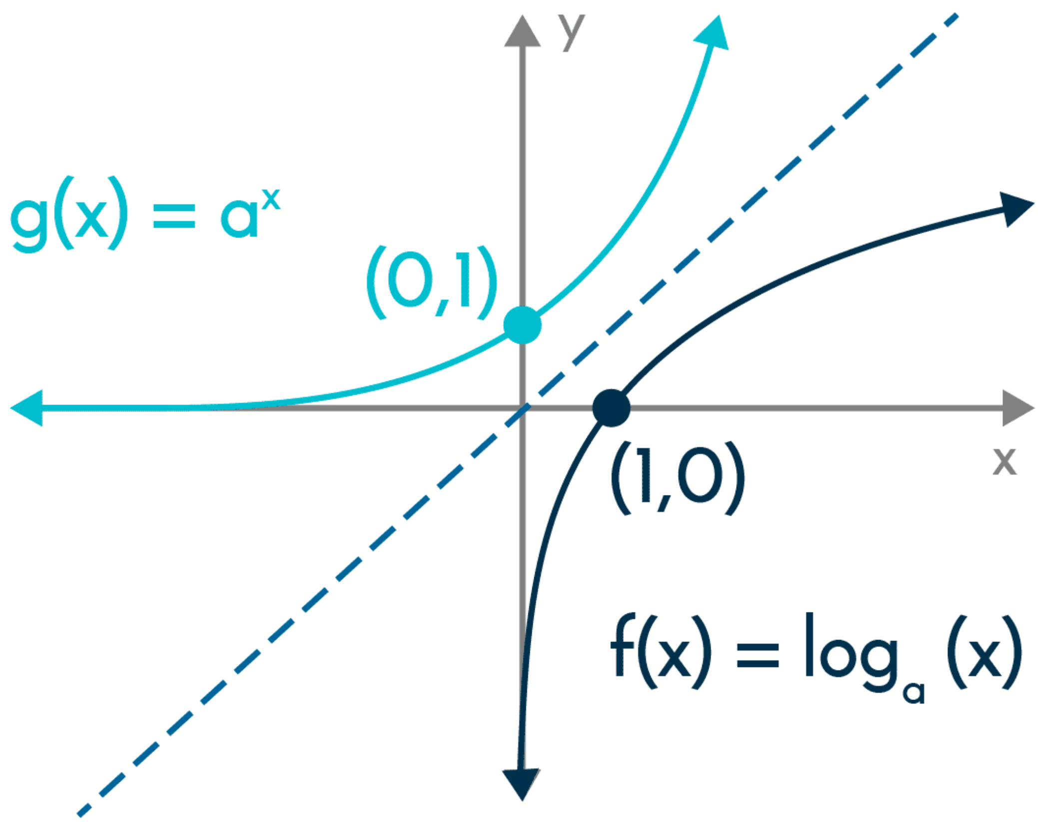
Fuente: elaboración propia.

- La tabla de valores de **x** está conformada por valores **mayores a 0.**
- Para los valores de **x entre 0 y 1**, la función toma **valores negativos.**
- **f(1) = 0.** Esto tiene sentido ya que todo número elevado a la cero es igual 1.
- Para los valores de **x mayores a 1**, la función toma **valores positivos**.
- Los números **negativos** y el **cero no tienen logaritmos.**

La función crece para valores de x mayores a 1, pero de manera muy lenta. De hecho, cuando x vale 50 la función toma un valor aproximado de 1,7. Cuando x vale 1.000.000 la función recién vale 6.

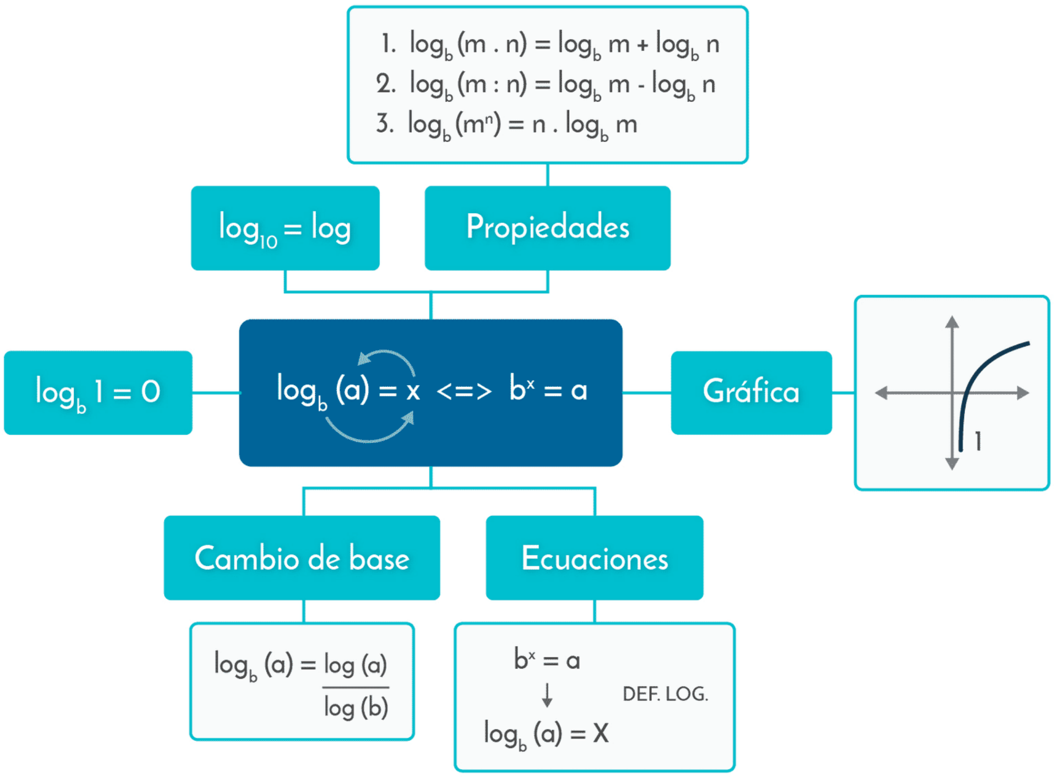
En este sentido, la **función logaritmo** se comporta de manera opuesta a la **función exponencial,** que crece más y más rápido a medida que crece **x**. Hay una buena razón para este comportamiento ya que las funciones **son opuestas entre sí.**

Figura 17



Fuente: elaboración propia.

Figura 18: Resumen



Fuente: elaboración propia.

Unidad 3.2 Progresiones

Muchas veces escuchamos hablar de un crecimiento aritmético o geométrico y lo asociamos con un crecimiento lento o rápido, respectivamente. ¿Qué significan estos términos? Se dice que algo **crece o decrece aritméticamente**, si en cada etapa se le va **sumando** o **restando** una cantidad **constante**. Por ejemplo, si durante la semana pasada la temperatura creció un grado por día, podemos decir que creció aritméticamente. Si las reservas del Banco Central de la República Argentina suben 200 millones de dólares por semana, se habla de un crecimiento aritmético. Si el peso de una persona que realiza una dieta, reduce un kilogramo por mes, decimos que decrece en progresión aritmética.

Se dice que algo **crece o decrece geométricamente** si en cada etapa se **multiplica** por una **cantidad constante** mayor o menor que 1. Un ejemplo de crecimiento geométrico podría ser una población de bacterias con suficiente alimento que se multiplica 8 veces por hora. (Kisbye y Levstein, 2010, https://www.studocu.com/es-ar/document/universidad-nacional-de-lomas-de-zamora/matematica-financiera/resumenes/fundamentos-de-la-matematica-financiera-kisbye-and-levstein/4026400/view)

3.2.1 Progresiones aritméticas

Observemos las siguientes sucesiones numéricas. Al detectarse un patrón, completemos los espacios en blanco.

1. 5, 9, 13, 17, ..., ... ,…
2. 2, 2,5 , 3, 3,5, ..., ... ,…
3. 8, 5, 2, -1, ..., ... ,…

¿Qué tienen en común estas tres sucesiones? Simplemente esto, en cada caso se puede obtener un **término** al sumar un número fijo al anterior. Estas sucesiones se llaman **progresiones aritméticas**.

Una progresión aritmética es una sucesión de números a_1, a_2, . . ., a_n, . . . que tiene la propiedad de que la diferencia entre dos términos consecutivos es igual a una constante **r**, que llamaremos **razón** de la progresión.

En la progresión a) si tomamos dos términos consecutivos y realizamos una diferencia tenemos que, por ejemplo, 17 – 13 es 4. Por lo tanto, la razón de esta progresión aritmética es 4. En la progresión c) hacemos 2 – 5 = -3. Por lo tanto, la razón de esta progresión aritmética es -3.

El enésimo término de una progresión aritmética

Luego de considerar los ejemplos anteriores, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Cómo se calcula el enésimo término de una progresión aritmética a_1, a_2, …, a_n,… de razón r?

Aquí tenemos la fórmula:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1).r}$$

Ejemplos

Completar los espacios en blanco, determinar la razón y el término 30 de cada progresión.

1 1, 4, 7, 10, ..., ..., …

Determinamos la **razón** al calcular la diferencia entre dos términos consecutivos, por ejemplo, entre 10 y 7.

10 – 7 = 3

r = 3

Para calcular el término $\mathbf{a}_{30}$ reemplazamos en la fórmula: $a_n = a_1 + (n – 1).r$

$a_{30} = 1 + (30 – 1). 3$

$a_{30} = 1 + 29 . 3$

$a_{30} = 1 + 87$

$\mathbf{a_{30} = 88}$

Completamos la progresión aritmética:

1, 4, 7, 10, 13, 15…

2 2, 2,3, 2,6, 2,9, ..., ..., …

Determinamos la **razón** al calcular la diferencia entre dos términos consecutivos, por ejemplo, entre 2,9 y 2,6.

2,9 – 2,6 = 0,3

r = 0,3

Para calcular el término a_{30} reemplazamos en la fórmula: $a_n = a_1 + (n – 1).r$

$a_{30} = 2 + (30 – 1). 0,3$

$a_{30} = 2 + 29 . 0,3$

$a_{30} = 2 + 8,7$

$\mathbf{a_{30} = 10,7}$

Completamos la progresión aritmética:

2, 2,3, 2,6, 2,9, 3,2 , 3,5…

3 28, 24, 20, 16, ..., ..., …

Determinamos la razón al calcular la diferencia entre dos términos consecutivos, por ejemplo, entre 24 y 28.

$24 – 28 = -4$

$r = -4$

Para calcular el término a_{30} reemplazamos en la fórmula: $a_n = a_1 + (n – 1).r$

$a_{30} = 28 + (30 – 1). (-4)$

$a_{30} = 28 + 29 . (-4)$

$a_{30} = 28 + (-116)$

$a_{30} = -88$

Completamos la progresión aritmética:

28, 24, 20, 16, 12, 8, ….

A continuación, veamos algunos ejemplos y aplicaciones prácticas.

Ejemplo 1: el alquiler de bicicletas en la ciudad cuesta $500 en la primera hora y $200 más cada nueva hora. ¿Cuál es el precio total de alquiler de 5, 8, 10 y n horas?

$a_1 = 500$

$a_5 = 500 + (5 – 1) 200 = 500 + 4 . 200 = 500 + 800 = 1.300$

$a_8 = 500 + (8 – 1) 200 = 500 + 7 . 200 = 500 + 1.400 = 1.900$

$a_{10} = 500 + (10 – 1) 200 = 500 + 9 . 200 = 500 + 1.800 = 2.300$

$a_n = 500 + (n – 1) 200$

El costo de alquiler de una bicicleta será $ 1.300 por 5 horas, $1.900 por 8 horas y $ 2.300 por 10 horas. La fórmula general para el cálculo de n horas es $a_n = 500 + (n – 1) 200$

Ejemplo 2: en un rascacielos el primer piso se encuentra a 7,40 metros de altura, y la distancia cada dos pisos consecutivos es de 3,80 metros. ¿A qué altura están los pisos 3º y 5º piso?

$a_1 = 7,40$

$r = 3,80$

$a_3 = 7,40 + (3 – 1) 3,80 = 7,40 + 2 . 3,80 = 15$

$a_5 = 7,40 + (5 – 1) 3,80 = 7,40 + 4 . 3,80 = 22,60$

El piso 3º y 5º del rascacielos se encuentran a 15 y 22,60 metros.

Ejemplo 3: una pareja, al finalizar su primer día de vacaciones, hace el siguiente cálculo: “nos quedan $ 63.000 y gastaremos $ 5.000 por día”. ¿Cuánto dinero les quedará a medida que pasen los 5, 10,..., n días?

$a_1 = 63.000$

$r = - 5.000$

$a_5 = 63.000 - (5 – 1) 5.000 = 63.000 - 4 . 5.000 = 63.000 – 20.000 = 43.000$

$a_{10} = 63.000 - (10 – 1) 5.000 = 63.000 - 9 . 5.000 = 63.000 – 45.000 = 18.000$

La fórmula general para el cálculo de n días de vacaciones es:

a_n = 63.000 - (n – 1) 5.000

Si esta pareja deseara quedarse más tiempo, y tuvieran la posibilidad de obtener un crédito, tendríamos:

a_{25} = 63.000 - 24 . 5.000 = 63.000 – 120.000 = -57.000

Lo que significa que, a los 25 días de vacaciones, además de haber gastado todo su dinero, deberían $ 57.000.

Ecuaciones con progresiones aritméticas

Carolina piensa ahorrar 100 dólares esta semana, la próxima 120, la siguiente 140 y así sucesivamente. Esto piensa hacerlo durante 15 semanas. Esta semana ahorró 320 dólares, pero ha olvidado cuántas semanas lleva.

Veamos:

$a_1 = 100$

$r = 20$

$a_n = 320$

Por lo tanto, n es nuestra incógnita. Si reemplazamos en la fórmula, tenemos:

$$a_n = a_1 + (n – 1)r$$

320 = 100 + (n – 1) 20

$320 – 100 = (n – 1)\ 20$ Restamos 100 en ambos miembros.

$220 : 20 = n – 1$ Dividimos por 20 ambos miembros.

$11 + 1 = n$ Sumamos 1 en ambos miembros.

n = 12

Esta es la duodécima semana de ahorro de Carolina. Todavía le faltan tres semanas más.

Veamos otro ejemplo. Nicolás decide hacer algo parecido a Carolina. La primera semana ahorrará 100 dólares. Este ahorro aumentará cada semana una misma cantidad r. Ahorrará 15 semanas, pero, como maneja más dinero, la última semana ahorrará 800 dólares, que es lo máximo que puede ahorrar en una semana. Acaba de ahorrar los 100 dólares de la primera semana, pero no sabe cuánto tendrá que ahorrar en las próximas semanas.

Veamos:

$a_1 = 100$

$a_n = 800$

Por lo tanto, r es nuestra incógnita. Si reemplazamos en la fórmula:

$$a_n = a_1 + (n – 1)r$$

$800 = 100 + (15 – 1)\ r$

$800 – 100 = 14 . r$ Restamos 100 en ambos miembros.

$700 : 14 = r$ Dividimos por 14 ambos miembros.

r = 500

Cada semana Nicolás ahorrará 500 dólares más que la anterior.

3.2.2 Suma de n términos de una progresión aritmética

La siguiente fórmula permite sumar una progresión aritmética.

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

Si quisiéramos sumar los 100 términos de la progresión aritmética 1, 2, 3, 4, … Es decir, se quiere S_{100}. Aquí n = 100, a_1 = 1 y a_n = 100. Por lo tanto:

$$S_{100} = \frac{100}{2}(1 + 100) = 50 \,.\, 101 = 5.050$$

Como segundo ejemplo, sumemos los primeros 350 números impares de la progresión aritmética 1, 3, 5, 7, … Se quiere calcular el 350 número impar de la fórmula

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_{350} = 1 + (350 - 1)2$$

$$a_{350} = 1 + (349)2$$

$$a_{350} = 1 + 698$$

$$a_{350} = 699$$

Entonces, se utiliza la fórmula de la suma con n = 350

$$S_{350} = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots + 699$$

$$S_{350} = \frac{350}{2}(1 + 699) = 175 \,.\, 700 = 122.500$$

Ejemplos

Ejemplo 1: calculemos la suma 3 + 6 + 9 + … + 198

Antes de utilizar la fórmula de la suma, hay que averiguar el valor de n.

$a_n = a_1 + (n – 1)r$

$198 = 3 + (n – 1)3$

$198 – 3 = (n – 1)3$ Restamos 3 en ambos miembros.

$195 : 3 = n – 1$ Dividimos por 3 ambos miembros.

$65 + 1 = n$ Sumamos 1 en ambos miembros.

$n = 66$

Utilizamos la fórmula de la suma con $n = 66$.

$$S_{66} = 3 + 6 + 9 + ... + 198$$

$$S_{66} = \frac{66}{2}(3 + 198) = 33 \,.\, 201 = 6.633$$

La suma de los primeros 66 números de la progresión aritmética 3, 6, 9, …, 198, … es igual 6.633.

Ejemplo 2: si 3, a, b, c, d, 7,… es una progresión aritmética, encontrar a, b, c y d. Necesitamos averiguar el valor de la r para poder completar la progresión. Usamos la fórmula $a_n = a_1 + (n – 1)r$

$7 = 3 + (6 – 1)r$

$7 – 3 = 5r$ Restamos 3 en ambos miembros.

$4 : 5 = r$ Dividimos ambos miembros por 5.

$0,8 = r$

Completamos la progresión aritmética 3, 3,8, 4,6, 5,4, 6,2, 7, …

Ejemplo 3: el peldaño inferior de una escalera tiene 30 cm de ancho, mientras que el peldaño superior tiene 15 cm de ancho. Si hay 17 peldaños, ¿cuántos centímetros de material son necesarios para hacer la escalera (si suponemos que no hay desperdicio)?

$$S_{17} = \frac{17}{2}(15 + 30) = 8,5 \,.\, 45 = 382,5$$

Serán necesarios 382,5 cm de material para hacer la escalera.

Figura 19

Fuente: Prestigio (2020). Recuperado de https://www.prestigioweb.com/escalera-de-pintor-de-madera/p

---

3.2.3 Progresiones geométricas

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ que tiene la propiedad de que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante **r**, que llamaremos **razón** de la progresión.

$a_2 = a_1 \cdot r$ $\qquad a_3 = a_2 \cdot r$ $\qquad \dots \qquad a_n = a_{n-1} \cdot r$

Para averiguar si una sucesión es una progresión geométrica, se comprueba si el cociente entre cada dos términos consecutivos es constante.

$$\frac{a_2}{a_1} = r \; ; \; \frac{a_3}{a_2} = r \; ; \; \dots ; \qquad \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

(Unicam, s.f., https://www.lemat.unican.es/lemat/proyecto_lemat/sucesiones/nivel1/teoria/sucesiones15.htm)

El enésimo término de una progresión geométrica

¿Cómo se calcula el enésimo término de una progresión geométrica a_1, a_2, …, a_n,… de razón r?

Aquí tenemos la fórmula:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Ejemplos

Ejemplo 1: completar los espacios en blanco de la progresión.

8, 4, 2, 1, ..., ...,…

Determinamos la **razón** el cociente entre dos términos consecutivos, por ejemplo, entre 2 y 4.

2 : 4 = 0,5 = r

a_5 = 1 . 0,5 = 0,5

a_6 = 0,5 . 0,5 = 0,2

Completamos la progresión 8, 4, 2, 1, 0,5, 0,25…

Ejemplo 2: de una progresión geométrica se sabe que a2 = 6 y r = 2. Calculemos a1 y a5.

a_1 = a_2 : r = 6 : 2 = 3

Para calcular a_5 reemplazamos en la fórmula

a_5 = 3 . 25 – 1 = 3 . 24 = 3 . 16 = 48

Los cinco primeros términos de la progresión geométrica son 3, 6, 12, 24, 48…

3.2.4 Suma de n términos de una progresión geométrica

La siguiente fórmula permite sumar una progresión geométrica

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}}$$

Ejemplos

Ejemplo 1: ¿Cuánto vale la suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica en la que a5 = 324 y r = 3?

$a_5 = 324$

$a_4 = 324 : 3 = 108$

$a_3 = 108 : 3 = 36$

$a_2 = 36 : 3 = 12$

$a_1 = 12 : 3 = 4$

Usamos la fórmula de la suma de las progresiones geométricas.

$$S_5 = \frac{4(1-3^5)}{1-3} = \frac{4(1-243)}{-2} = \frac{4(-242)}{-2} = 484$$

La suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica es 484.

Ejemplo 2: si se te ofrece 1 centavo hoy, 2 centavos mañana, 4 centavos el tercer día y así en adelante, durante 20 días o un solo pago de $10.000, ¿qué eligirías?

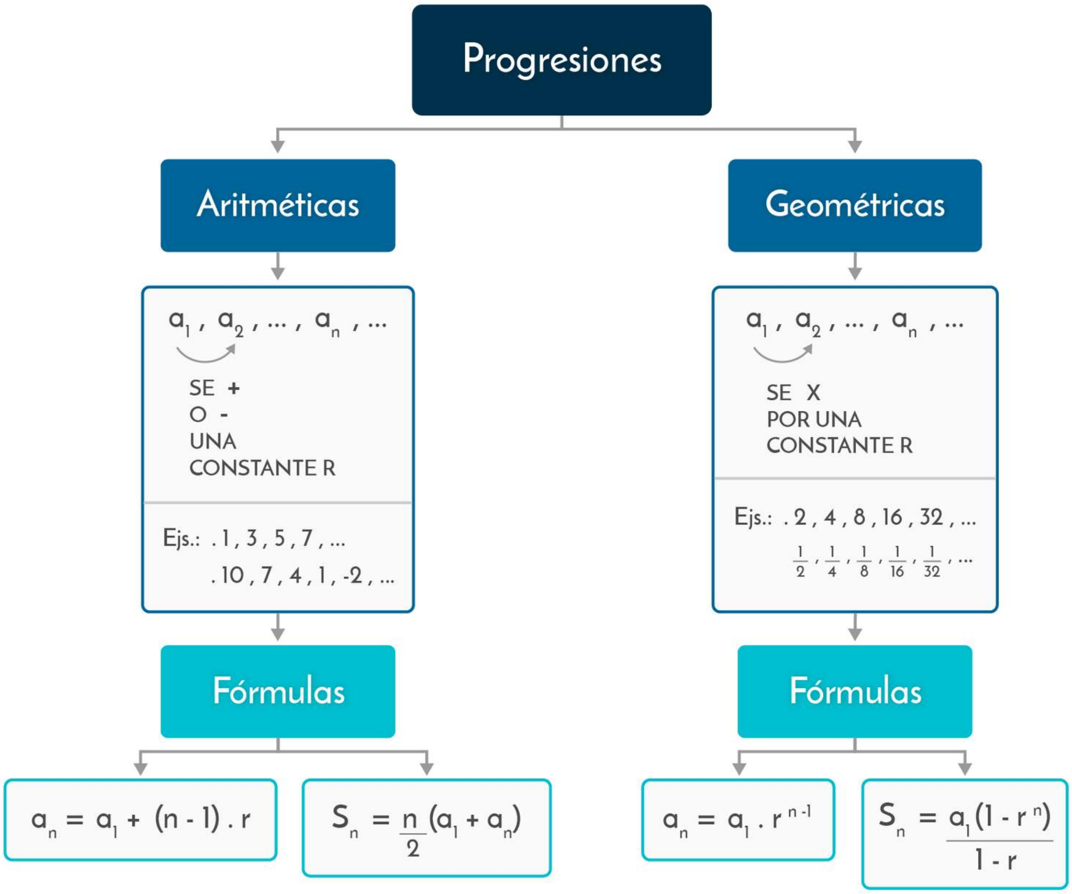
Tenemos la progresión geométrica 0,01, 0,02, 0,04, … La razón de esta progresión es 2. Deberíamos averiguar el término 20 para luego realizar la suma de los 20 términos de la progresión geométrica.

$$a_{20} = 0{,}01 \ . \ 2^{19} = 5.242{,}88$$

$$S_{20} = \frac{0{,}01\ (1 - 2^{20}\ )}{1 - 2} = -0{,}01\ (1 - 2^{20}\ ) = 10.485{,}75$$

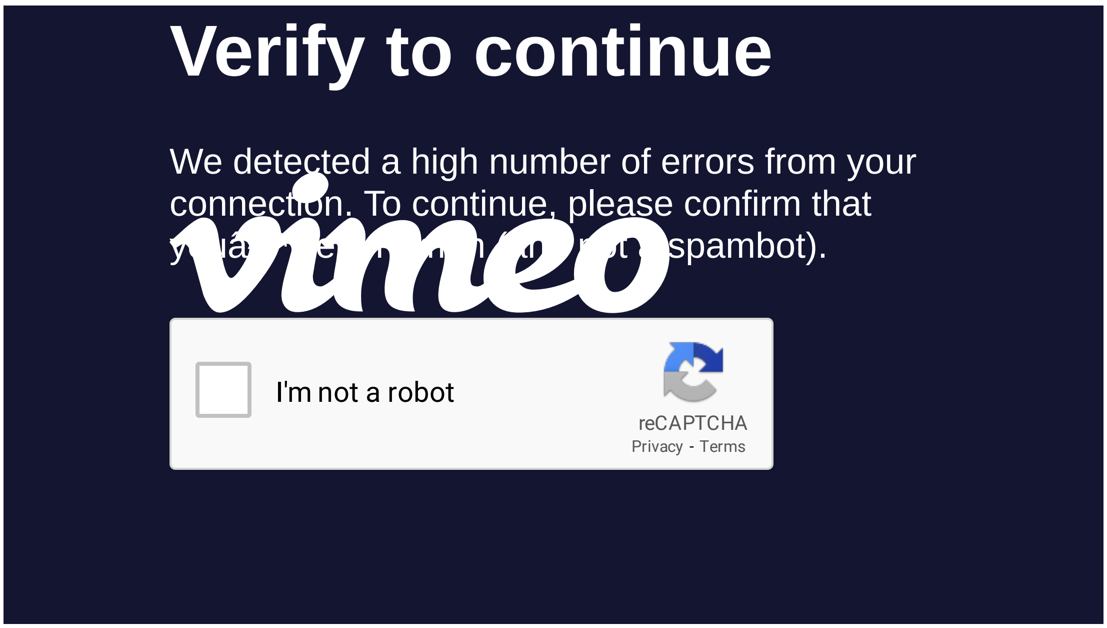
Claramente, te convendrá elegir la progresión geométrica en vez del pago de $10.000.

Figura 20: Resumen



Fuente: elaboración propia.

Video de habilidades



Para averiguar el valor de x en la ecuación $\log_7 x = 2$, por definición de logaritmo debemos hacer:

- $2^7 = x$
- $7^x = 2$

$7 . 7 = x$

$7 . 2 = x$

$7^2 = x$

SUBMIT

Para averiguar el valor de x en la ecuación $\log_2 (x+1) = 4$, por definición de logaritmo debemos hacer:

$4^2 = x + 1$

$4 . 2 = x + 1$

$2^4 = x + 1$

$2 . 4 = x$

$2^{x+1} = 4$

SUBMIT

El valor de x en la ecuación $\log_2 (x+1) = 4$, es:

- 10
- 7
- 20
- 15
- 5

SUBMIT

Para averiguar el valor de x en la ecuación $3^x = 2.187$, por definición de logaritmo debemos hacer:

- $\log_x 2.187 = 3$
- $\log_3 x = 2.187$

$\log_{2.187} x = 3$

$\log_x 3 = 2.187$

$\log_3 2.187 = x$

SUBMIT

Para calcular el valor de $\log_3 2.187 = x$ con la calculadora debemos hacer cambio de base, para ello haremos:

Opción A) $\log 2.187$

Opción B) $\log 3$

Opción C) $\dfrac{\log 3}{\log 2.187}$

Opción D) $\dfrac{\log 2.187}{\log 3}$

Opción E) $\log 3 \cdot \log 2.187$

Opción A.

- Opción B.
- Opción C.
- Opción D.
- Opción E.

SUBMIT

Cierre

Logaritmos

Por definición, el logaritmo en base *a* de un número N es el exponente al que hay que elevar la base para que dé dicho número: $Log_a N = x$, entonces $a^x = N$

Función logarítmica

La representación matemática es: $y = log_{10}x$

Ayuda memoria para calculadoras científicas

Siempre deberás tener en cuenta que calculan dos logaritmos:

- La tecla log calcula logaritmos en base 10 (log10).
- La tecla ln (logartimo neperiano o natural) cuya base es el número e.

Progresión aritmética

Una progresión aritmética es una sucesión de números a_1, a_2, . . ., a_n, . . . que tiene la propiedad de que la diferencia entre dos términos consecutivos es igual a una constante **r**, que llamaremos **razón** de la progresión.

Progresión geométrica

Una progresión geométrica es una sucesión de números a_1, a_2, . . . , a_n, . . . que tiene la propiedad de que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante **r**, que llamaremos **razón** de la progresión.

Referencias

Google Inc. (2020). Calculadora científica. Recuperado de https://www.google.com/search?q=claculadora+cient%c3%adfica

Capasso, D. (2020). Coronavirus: ¿Qué es un crecimiento exponencial? Recuperado de https://www.perfil.com/noticias/opinion/opinion-dario-capasso-coronavirus-que-es-un-crecimiento-exponencial.phtml

CASIO (2020). Calculadora científica. Recuperado de https://www.casio-intl.com/latin/es/calc/products/fx-991esplus-2/

Datos Mundial (2018). Crecimiento de la población por país. Recuperado de https://www.datosmundial.com/crecimiento-poblacional.php

Kisbye, P. y Levstein, F. (2010). Fundamentos De La Matematica Financiera Kisbye and Levstein. Recuperado de https://www.studocu.com/es-ar/document/universidad-nacional-de-lomas-de-zamora/matematica-financiera/resumenes/fundamentos-de-la-matematica-financiera-kisbye-and-levstein/4026400/view

Pomar Amillo, I. (2001). La función exponencial. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Funcion_exponencial_ipa/la_funcion_exponencial.htm

Prestigio (2020). Escalera de madera. Recuperado de https://www.prestigioweb.com/escalera-de-pintor-de-madera/p

Redacción BBC Mundo (2011). Somos 7.000 millones, ¿cuáles son los desafíos? Recuperado de https://www.bbc.com/mundo/noticias/2011/10/111026_poblacion_informe_am

Unicam (s.f.). Progresiones geométricas. Definición. Recuperado de https://www.lemat.unican.es/lemat/proyecto_lemat/sucesiones/nivel1/teoria/sucesiones15.htm