Instituto Politécnico Nacional
ESCOM-IPN

1^{er} Examen Departamental Matemáticas Avanzadas Para la Ingeniería

Prof.: Luis M. Cervantes E

Nombre del alumno:..
Grupo: ______________Fecha:______________ Calificación:______________
Instrucciones: Resolver en forma clara y concisa c/u de los problemas, de acuerdo como se indica. *"No se permite el uso de Formulario"*;

1. Escriba el número complejo dado en forma polar y luego escribalo en la forma $z = x + iy$.
$$\frac{\left[8(cos\frac{3\pi}{8} + isin\frac{3\pi}{8})\right]^3}{\left[2(cos\frac{\pi}{16} + isin\frac{\pi}{16})\right]^{10}}.$$

2. Encontrar la raíz enésima principal del número complejo dado. Dibuja las raíces $w_0, w_1, \cdots, w_{n?1}$ en un círculo apropiado centrado en el origen.
$$\left[\frac{16i}{1+i}\right]^{\frac{1}{8}}$$

3. Aplique las ecuaciones de Cauchy-Riemman para

   a) Demostrar que la función $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ es armónica.

   b) Encontrar v talque $f(z) = u + iv$ sea analitica.

4. *a*) Exprese la función de Laplace $\nabla^2 F(x, y) = 0$ en coordenada polares.

   b) Sea $F(z)$ una función a ser analítica en una región R que contiene a z, Exprese a z en forma exponencial, usando las siguientes identidades;
$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = e^{i\theta}\frac{\partial F}{\partial z} \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = iz\frac{\partial F}{\partial z}.$$

   para mostrar que el inciso (a) se cumple en todo R.

Matemáticas avanzadas para la ingeniería
Primer examen parcial
Profesor: Ricardo Ceballos Sebastián
2CM14
13 de abril de 2021

Instrucciones: *Resuelva los ejercicios siguientes usando bolígrafo y hojas blancas. Cada ejercicio vale 2.5 puntos. Escanee su escrito. Solo debe subir un archivo PDF a la plataforma. Si el archivo no es legible se anulará, sin importar la causa.*

1. Sea n un entero positivo y sean $u_1, u_2, \ldots, u_n$ las raíces *n-ésimas* de la unidad. Pruebe que $\sum_{j=1}^{n} u_j = 0$. Sugerencia: Escriba cada u_j como una potencia de $e^{2\pi i/n}$.

2. Demuestre, a partir de las definiciones básicas, que

   a) $\cos^{-1} z = -i \log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)$,

   b) Utilice la ecuación anterior para determinar al menos un valor de w, tal que, $\cos w = 7i$.

3. Determine la derivada de $f(z) = \arccos z$ en cualquiera de sus ramas analíticas.

4. Sea $f(z) = e^{-z} + \overline{z}$,

   a) escriba f(z) en la forma $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$.

   b) Mediante las condiciones de diferenciabilidad, determine el dominio de analiticidad.

Instituto Politécnico Nacional
ESCOM-IPN

2^o Examen Matemáticas Avanzadas

Prof.: Luis M. Cervantes E

Nombre del alumno:..
Grupo: ______________ Fecha: ______________ Calificación: ______________

Instrucciones: Resolver en forma clara y concisa c/u de los problemas, de acuerdo como se indica. *"No se permite el uso de Formulario"*;

1. Evaluar la integral $\int_C (z^2 - z + 2)\, dz$ desde i a 1 a lo largo del contorno C dado por la figura.

2. Usando Teorema de Cauchy-Goursat, evaluar la integral de contorno siguiente, donde C es el círculo $|z-2| = 2$ (bosqueje la figura con z_0 y z_1.
$$\oint_C \frac{5z+7}{z^2-2z-3}\, dz \; .$$

3. Evaluar la integral dada a lo largo del contorno indicado en la figura.
$$\oint_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\, dz \; .$$
(Hint. use las fórmulas integrales de Cauchy)

4. Obtenga el desarrollo en serie de Taylor de la función;
$$f(z) = \frac{z-7}{z^2-2z-3} \; ,$$
alrededor de $z=0$. Escriba una expresión para el n-esimo coeficiente a_n y determine el radio de convergencia donde la serie es válida.

5. Obtenga el desarrollo en serie de Laurent de la función;
$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)^3} \; .$$
desarrollado en el dominio $0 < |z-1| < 1$. Calcule el n-ésimo coeficiente a_n

Matemáticas avanzadas para la ingeniería
Segundo examen parcial
Profesor: Ricardo Ceballos Sebastián
2CM14

Instrucciones: *Resuelva los ejercicios siguientes usando bolígrafo y hojas blancas. Cada ejercicio vale 2.5 puntos. Incluya el enunciado del problema y a continuación su solución, en caso contrario no se revisarán. Escanee su escrito. Solo debe subir un archivo PDF a la plataforma. Si el archivo no es legible será anulado, sin importar la causa.*

1. Determine una expansión en serie de Laurent, de la función $f(z)$, donde
$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}.$$
El desarrollo debe contener potencias de $(z-2i)$ y ser válida para $z=0$. Determine el anillo de convergencia y realice una representación gráfica del mismo.

2. Evalúe la siguiente integral. De ser necesario utilice las propiedades de periodicidad o de simetría del integrando, a fin de convertir la expresión en una integral sobre un intervalo de longitud 2π. Posteriormente utilice integración compleja sobre la circunferencia unitaria.
$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{2-\cos\theta}\, d\theta.$$

3. Compruebe que si a, b y c son reales y $b^2 - 4ac < 0$, la siguiente expresión es válida. (Utilice cálculo de residuos)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

4. Determine el valor principal de Cauchy para la integral impropia siguiente. Utilice una trayectoria sangrada.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x(x^2+4)} dx.$$

3^{er} Examen Departamental De Ecuaciones Diferenciales

Prof.: Luis M. Cervantes E

Tipo D

Nombre del alumno:..

Grupo: ______________ Fecha: ______________ Calificación: ______________

Instrucciones: Resolver en forma clara y concisa c/u de los problemas, de acuerdo como se indica. *"No se permite el uso de Formulario"*; valor de cada problema 2.5 pts.

1. Determine la transformada de Laplace de $2u(t-1) - u(t-2) + 2u(t-3)$

2. La corriente en un circuito RLC en serie está regida por el problema de valor inicial

$$I''(t) + 4I(t) = g(t); \quad I(0) = 1, \quad I'(0) = 3$$

donde ;

$$g(t) = \begin{cases} 3\sin t; & 0 < t < 2\pi \\ 0; & t > 2\pi \end{cases} \tag{4}$$

Determine la corriente en función del tiempo.

3. Resuelva el problema de valor inicial utilizando el método de transformada de Laplace. Trace la gráfica de la solución.

$$y'' - y = u(t-1) - u(t-2) + u(t-3) - u(t-4), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

.

ESCOM-IPN

Tercer Examen
Matematicas Avanzadas para la Ingeniería

Prof.: Luis M. Cervantes E

Nombre del alumno:..
Grupo: ____________ Fecha: ____________ Calificación: ____________

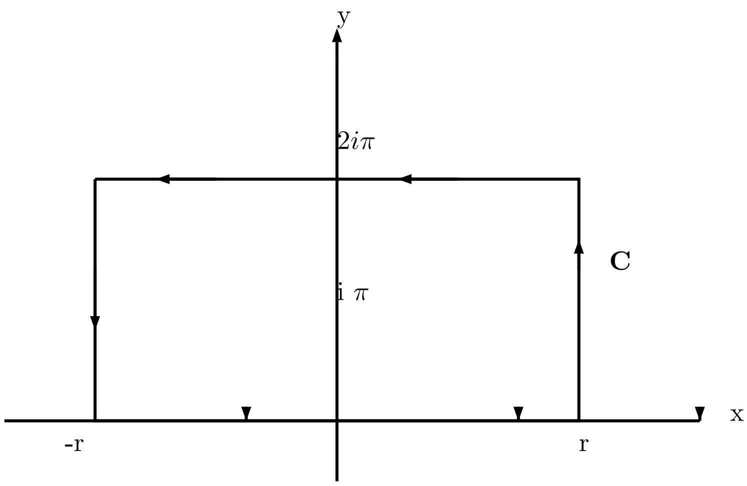
Instrucciones: Resolver en forma clara y concisa c/u de los problemas, de acuerdo como se indica. *"No Se permite el uso de Formulario "*; valor de cada problema 2.5 pts.

1. Use el Tma del Residuo de Cauchy para evaluar la integral a lo largo del contorno indicado;

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-1)^2(z^2+9)}\, dz\ ; \quad | z-1 |= 1.$$

2. Use el contorno de la figura mostrada para mostrar que;

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx \ = \frac{\pi}{\sin a\pi}\ .$$



3. Calcule la transformada de Fourier de;

$$f(x) = \begin{cases} 2K, & \text{si } |x| \leq 2; \\ 0, & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

Matemáticas avanzadas para la ingeniería
Tercer examen parcial
Profesor: Ricardo Ceballos Sebastián
22 de junio de 2021

Instrucciones: *Resuelva los ejercicios siguientes usando bolígrafo y hojas blancas. Cada ejercicio vale 2.5 puntos. Incluya el enunciado del problema y a continuación su solución, en caso contrario no se revisarán. Escanee su escrito. Solo debe subir un archivo PDF a la plataforma. Si el archivo no es legible se anulará, sin importar la causa.*

1. Sea $f(x)$ la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} \pi \operatorname{sen} x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encontrar la expansión de $f(x)$ en términos de cosenos.

2. Sea $f(x)$ la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Hallar la expansión en senos de la función $f(x)$.

3. Considérese la función periódica definida mediante

$$f(t) = \frac{A}{T}t, \quad t \in [0, T], \quad A > 0 \text{ y } T > 0,$$

y para puntos fuera del intervalo $f(t+nT) = f(t)$ donde n es un entero.

   a) Determine la serie trigonométrica de Fourier para $f(t)$.
   b) Determine la forma armónica de la serie de Fourier para $f(t)$.

4. Sean A y ω_0 números reales, y sea

$$f(t) = |A \operatorname{sen} \omega_0 t|.$$

   a) Determinar la serie de Fourier compleja para la función $f(t)$.
   b) Represente gráficamente el espectro de amplitud para $f(t)$.

Primer Examen de matematicas avanzadas

1. Calcular
$$(1 + cos\theta + isen\theta)^n$$

2. Hallar el complejo cuyo cuadrado sea igual a su conjugado

3. Considere el siguiente mapeo
$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$
encuentre en que convierte las lineas rectas que salen del origen y los circulos con centro en el origen

4. Calcular los valores de a, b, c y $d \in \mathbb{R}$, para que f sea derivable en $\mathbb{C}$
$f = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$

5. Sea $P(z) = a + bz$ donde ay b son constantes complejas si
$$\oint_{\mathscr{C}} \frac{P(z)}{z} dz = 2\pi i, \quad y \quad \oint_{\mathscr{C}} \frac{P(z)}{z-1} dz = 4\pi i$$
con $\mathscr{C} : z = 2e^{i\theta}$ recorrida en sentido positivo. Demostrar que $a = b = 1$

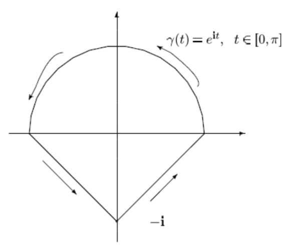
Segundo Examen de matematicas avanzadas

1. Calcular las integrales de trayectoria

$$\int_{\mathscr{C}} \overline{z}\,|z|^2\,dz$$

en el siguiente contorno

Figure 1: B



2. Calcular la siguente integral

$$\oint_{\mathscr{C}:|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^n\,(z^2+1)}$$

3. Calcular la serie de Laurent en $0 < |z-1| < 1$ para

$$zsin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

4. Calcular

$$\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^n \sin(n\theta)\,d\theta$$

5. Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{sinx}{x}\right)\frac{1}{x^2+b^2}dx$$

· MATEMÁTICAS AVANZADAS.

· PRIMER EXAMEN. ORAL.

APLICAR EL FENÓMENO DE GIBBS Y APLICARLO PARA LAS SIGUIENTES SEÑALES.

(1)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0 \\ \operatorname{sen} t, & 0 < t < \pi. \end{cases} \quad \text{con } T = 2\pi.$$

(2)

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \pi. \end{cases} \quad \text{si } T = 2\pi.$$

(3)

$f(t) = 2t$ con $-\pi < t < \pi$, con $T = 2\pi$.

(4)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < t < 0 \\ 1, & \text{si } 0 < t < \pi. \end{cases} \quad \text{con } T = 2\pi.$$

IGNACIO RÍOS DE LA TORRE.

[signature]

MATEMÁTICAS AVANZADAS.

· SEGUNDO EXAMEN. OMAL

(1)

1. Sea $u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$.

a) ¿U es armónica?

b) Hallar $v = v(x,y)$ conjugada de $u = u(x,y)$.

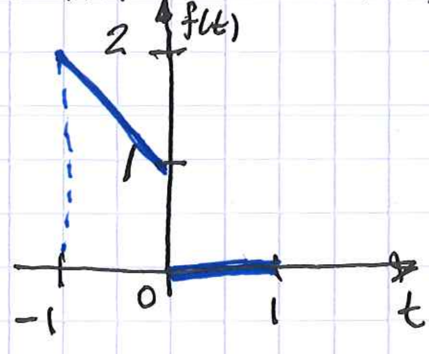
c) Expresar la función $f(z)$ en términos de la variable z.

2. Dada la recta $x + y = 1$ halle el mapeo bajo la transformación $w = z^2$.

3. Encontrar la serie de Fourier trigonométrica para:

$$f(t) = -t, \quad -\pi < t < \pi \quad \text{si } T = 2\pi.$$

4. De la gráfica siguiente halle la serie de Fourier trigonométrica.



5. Evalúe: $$I = \int_C \frac{5z-2}{z^2-z}\,dz \quad \text{si } C: |z| = 2.$$

⑥ DETERMINAR LA SERIE COMPLEJA O EXPONENCIAL (2) DE FOURIER PARA LA SEÑAL DIENTE DE SIERRA, DEFINIDA POR:

ⓐ $f(t)=\frac{A}{T}t,\ 0<t<T,\ f(t+T)=f(t).$

ⓑ REDUCIR EL RESULTADO ANTERIOR A LA FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LA SERIE DE FOURIER.

⑦ EVALÚE: $I=\int_C \frac{e^{z}}{z^4+5z^3}\,dz$ si $C: |z|=2.$

⑧ EVALUAR: $I=\int_C \frac{dz}{z^2+4z+13}$ con $C: |z-3i|=3.$

⑨ HALLAR: $I=\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}.$

⑩ DETERMINAR EL COEFICIENTE DE FOURIER b_n PARA UNA SERIE DE FOURIER EN TÉRMINOS DE SENO, PARA $f(t)$:

$$f(t)=\begin{cases} \frac{2K}{\ell}t & \text{si } 0<t<\frac{\ell}{2} \\ \frac{2K}{\ell}(\ell-t) & \text{si } \frac{\ell}{2}<t<\ell. \end{cases}$$

(11) DETERMINE LA SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN $\operatorname{sen} z = 5$, (3)

LA SOLUCIÓN EXPRESARLA EN TÉRMINOS DE $x+iy$.

(12) SEA $f(t) = e^{2t}$. DETERMINAR LA SERIE DE FOURIER EN COSENOS DE f EN $[0,1]$.

(13) SEA:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \\ \operatorname{sen} t, & t > 2\pi. \end{cases}$$

EXPRESAR $f(t)$ EN TÉRMINOS DE HEAVISIDE $H(t)$.

(14) DETERMINAR $\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{5}{2-\omega^2+3i\omega}\right]$.

(15) SI $u = u(x,y) = tg^{-1}\left[\dfrac{(y-b)}{(x-a)}\right]$; $a, b =$ CTES CON $a \neq x$.

¿u ES ARMÓNICA SI Ó NO? (JUSTIFICARLO).

(16) RESOLVER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE FOURIER PARA:

$$y'' + 7y' + 6y = \delta(t).$$

17. RESOLVER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE FOURIER SI:

$$y' - 4y = H(t)\,e^{-4t}.$$

18. RESOLVER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

$$y'' - 5y' - 6y = \delta(t).$$

19. DESCRIBA CON PALABRAS QUE FORMA DE GRÁFICO ES:

$$|2z+1| > 4 \quad \text{si } z = x+iy.$$

20. DETERMINAR LA TRANSFORMADA DE FOURIER PARA:

$$f(t) = \operatorname{sen} 2t, \quad 0 < t < \pi.$$

IGNACIO RÍOS DE LA TORRE.

Ignacio Ríos de la Torre

Primer examen de matemáticas avanzadas para la ingeniería 21-1

1. Hallar todos los valores de: $\sqrt[4]{(-2+2\sqrt{3}\,i)}$
2. Partiendo de i=tan(z) despejar z y separar la parte real y la imaginaria
3. Verificar si $u(x,y)=e^{y}\text{sen}\,(x)$ puede ser la parte real de una función analítica *f(z)=u(x,y)+i v(x,y)*, en caso afirmativo *calcular la derivada f'(z).*
4. Separar la parte real e imaginaria de $(-2-i)^{(-4-i)}$

Segundo examen de matemáticas avanzadas para la ingeniería 21-1

1. Resolver las siguientes integrales con métodos de variable compleja:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2-\cos(2\theta)}d\theta\,,\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(1-z)}dz,\oint_{|z|=1}\frac{e^{z}}{\text{senh}(z)}\text{dz},\oint_{|z-1|=1}\left(\frac{(z-1)\,\text{senh}(z)}{z^3-3z^2+3z-1}\right)\text{dz}$$

Tercer examen de matemáticas avanzadas para la ingeniería 21-1

1. a) Calcular la serie de Fourier de la función $f(t)=|\cos\,(t)|$
   b) Graficar la serie usando algunos términos, mediante algún software y anexar la gráfica
   c) Aplicar la fórmula de Parseval y despejar π del resultado obtenido.
2. a) Calcular la transformada de Fourier mediante la definición de transformada

$$f(t)=\begin{cases}|\cos(t)| & si\ |t|\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & si\ \frac{\pi}{2}<|t|\end{cases}$$

   b) Graficar con algún software la función $f(t)$ y el módulo de la transformada $|F(\omega)|$
3. Resolver la ecuación diferencial 2y''+12y'+18y=δ(x) aplicando la transformada de Fourier (sugerencia: encuentre la inversa mediante convolución)
4. Demostrar $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt\ =\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(w)|^2\ dw$, donde *F(w)* es la transformada de Fourier de *f(t)*.

Matemáticas avanzadas para la ingeniería
Examen extraordinario
Profesor: Ricardo Ceballos Sebastián
Grupos: 2CM14 y 2CM17
28 de junio de 2021

Instrucciones: *Resuelva los ejercicios siguientes usando bolígrafo y hojas blancas. Cada ejercicio vale 2.5 puntos. Escanee su escrito. Solo debe subir un archivo PDF a la plataforma. Si el archivo no es legible se anulará, sin importar la causa.*

1. Sea n un entero positivo y sean $u_1, u_2, \ldots, u_n$ las raíces *n-ésimas* de la unidad. Pruebe que $\sum_{j=1}^{n} u_j = 0$.
   Sugerencia: Escriba cada u_j como una potencia de $e^{2\pi i/n}$.

2. Sea $f(z) = e^{-z} + \overline{z}$,

   a) escriba $f(z)$ en la forma $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$.

   b) Mediante las condiciones de diferenciabilidad, determine el dominio de analiticidad.

3. Determine el valor principal de Cauchy para la integral impropia siguiente. Utilice una trayectoria sangrada.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(4x)}{(x+\pi)(x^2+16)} dx.$$

4. Considérese la función periódica $\mathrm{sig}(t)$ con período 2π definida mediante,

$$\mathrm{sig}(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi \leq t < 0, \\ 1, & \text{si } 0 < t \leq \pi, \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

   a) Determinar la forma armónica de la serie de Fourier para la función $f(t)$.

   b) Bosqueje el espectro de amplitud para $f(t)$.

Matemáticas avanzadas para la ingeniería
Examen extraordinario
Profesor: Ricardo Ceballos Sebastián
29 de junio de 2021

Instrucciones: *Resuelva los ejercicios siguientes usando bolígrafo y hojas blancas. Cada ejercicio vale 2.5 puntos. Escanee su escrito. Solo debe subir un archivo PDF a la plataforma. Si el archivo no es legible se anulará, sin importar la causa.*

1. Sea $f(z) = e^{-z} + iz^2$,
   a) escriba $f(z)$ en la forma $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$.
   b) Mediante las condiciones de diferenciabilidad, determine el dominio de analiticidad.
2. Demuestre, a partir de las definiciones básicas, que
   a) $\cos^{-1} z = -i \log\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right)$,
   b) Utilice la ecuación anterior para determinar al menos un valor de w, tal que,
   $$\cos w = 2 - i$$
   .
3. Determine el valor principal de Cauchy para la integral impropia siguiente. Utilice una trayectoria sangrada.
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(6x)}{(x+3)(x^2-2x+2)}dx.$$
4. Considérese la función periódica $\mathrm{sig}(t)$ con periodo 2π definida mediante,
   $$\mathrm{sig}(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi \leq t < 0, \\ 1, & \text{si } 0 < t \leq \pi, \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$
   a) Determinar **la forma compleja** de la serie de Fourier para la función $f(t)$.
   b) Bosqueje el espectro de amplitud para $f(t)$.