studocu

Apuntes, todos los temas

Procesamiento Digital De Señales (Instituto Politécnico Nacional)

Escanea para abrir en Studocu

Studocu no está patrocinado ni avalado por ningún colegio o universidad.
Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. Miércoles 30 de Enero del 2013

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

CAPITULOS

I.- Conceptos Básicos de las Funciones Discretas en Tiempo
Transformada Z

II.- Análisis en Frecuencia de las Funciones Discretas en Tiempo.
- componentes armónicos → rangos de frecuencia.
Transformada de Fourier.
Transformada discreta de Fourier DFT Algoritmos - herramientas para construir sistemas
Fast Fourier Transform FFT

III.- Diseños de Filtros Digitales para el Procesamiento Digital de Señales.

Bibliografía

Procesamiento de Señales Analógicas y Digitales
Ambardar / Ashok
Edit. Thompson Learning.

Digital Signal Processing (Señales y sistemas digitales)
Oppenhim / Schafter
Edit. Mc Graw Hill

Introduction to Digital Signal Processing
Proakis / Manolakis
Edit Prentice Hall

Digital Signal Processing
Stanley / William D.
Edit Reston

Evaluación final. $\frac{EvP_1 + EvP_2}{2}$

EvP = Examen + Tareas + Participación en clase + Trabajos + Problemas + Exposiciones etc.

Función continua en Tiempo
Función Analógica
Función Discreta en Tiempo
Función Digital

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES.

SEÑAL DIGITAL

Impulsos Discreta en Tiempo Discreta en Amplitud

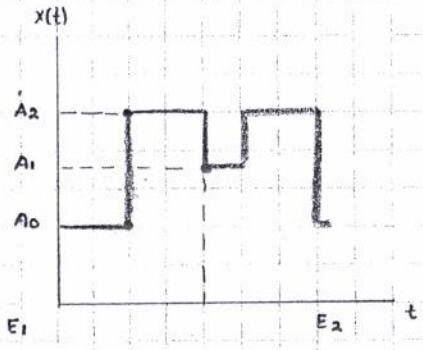
SEÑAL ANALÓGICA

Continua en tiempo y Amplitud.

Sistema Electrónico → Señales y Sistemas → Funciones del Tiempo → Variable

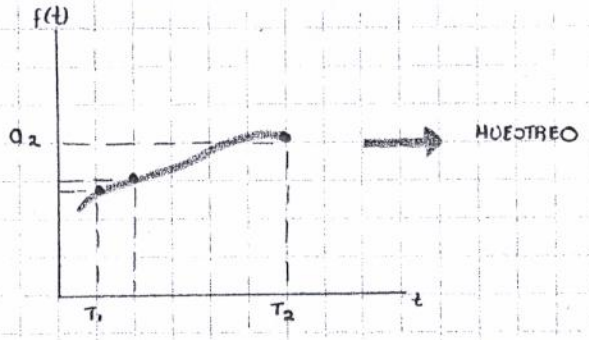
Variables independiente tiempo Continua.

Variable dependiente en tiempo Discreta.

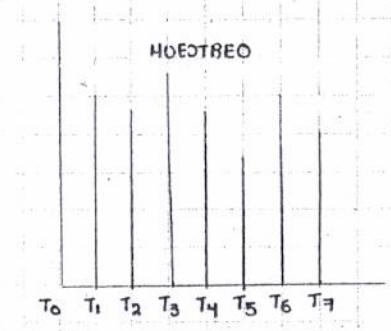


Función Continua en Tiempo

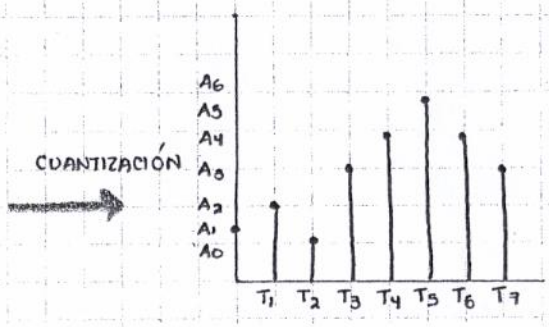
(rango, continuo finito en tiempo)



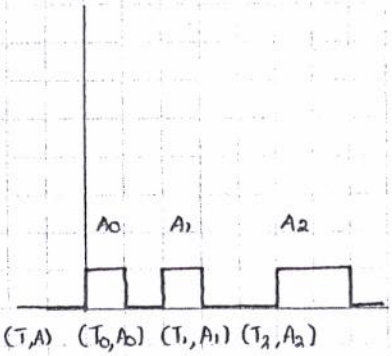
Función Analógica continua en Tiempo y Amplitud.



Función Discreta en Tiempo.



Digital



Los Pares Ordenados

Función para un Tiempo específico se asocia también una Amplitud específica

El Teorema de Muestreo

hace que se parezca lo digital a lo Analógico haciendo que los niveles de Amplitud y Tiempo se asemejen.

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Cuantización
la poca información la modifica

En conclusión

Un sistema Digital es más confiable ya que tienen la capacidad de sensar información, y un Sistema Analógico son más precisos y con mayor exactitud ya que nuestro mundo es Analógico

Representación en Tiempo de las Funciones Discretas
Sistemas Discretos Lineales e invariantes en Tiempo

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

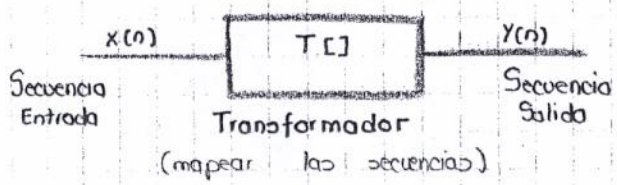
PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. Jueves 7 de Febrero del 2013.

SISTEMAS DISCRETOS LINEALES E INVARIANTES EN TIEMPO SDLIT

SISTEMA

Arreglo que recibe una señal de entrada y una señal de salida. (integrar señales)
(los sistemas hacen el proceso de las mismas señales)

SISTEMA DISCRETO



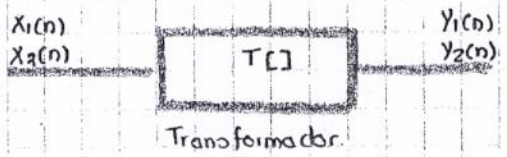
operador matemático

$y(n) = T\,[x(n)]$

SISTEMA DISCRETO LINEAL

→ Principio de Superposición y Proporcionalidad → cumplimiento

Si al sistema se le aplica una entrada eso propicia una salida.
(sumar las entradas, salidas).



$a x_1(n) + b x_2(n)$ lineal $a y_1(n) + b y_2(n)$

Arreglo lineal de 2 secuencias

$y(n) = T[x(n)] = T[a x_1(n) + b x_2(n)]$

para Sistemas Discretos Lineales
Suma de las NO TRANSFORMACIONES

$Y(n) = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$

$Y(n) = a y_1(n) + b y_2(n)$

Forma general de una Secuencia

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k)$$

This document is available on studocu

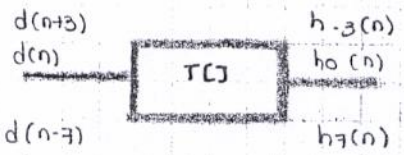
Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Si el Sistema Discreto es Lineal, entonces:

$$y(n) = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, d(n-k)\right]$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\; T[d(n-k)]$$ // muestras unitarias desplazadas.

Si denominamos



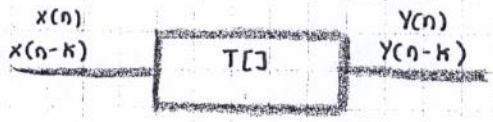
$\Rightarrow \quad h_k(n) = T\,[d(n-k)]$

entonces:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h_k(n)$$

Sistema Invariante en Tiempo Discreto

La forma de la señal de Salida es la misma que la señal de entrada
No cambian sus condiciones de Procesamiento.



Invarancia en Tiempo (reflejará el tiempo de aplicación)

$\delta(n) \qquad h(n)$

$\delta(n-k) \qquad h(n-k)$

Por lo tanto un Sistema Discreto Lineal e Invarante en Tiempo (SDLIT) se cumple que:

secuencia entrada.

$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k)$$

Respuesta impulso

donde:

$x(n) + h(n)$ Sumatoria convolución

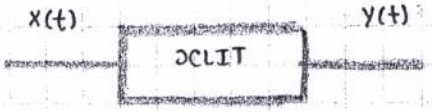
$h(n) = T\,[d(n)]$ Respuesta Impulso.

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Caso continuo Convolución

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\, y(t-\lambda)\, d\lambda \qquad \therefore \; -\infty < t < \infty$$

En resumen utilizamos los SCLIT.



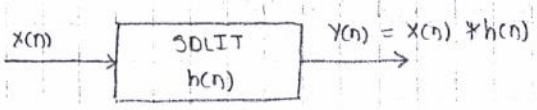
1:- Ecuaciones integrodiferenciales
2:- Ecuaciones diferenciales
3:- Transformadas de Laplace $\rightarrow \mathcal{L}(t)$
4:- Función Transferencia $\rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = H(s)$
5:- Convolución $\rightarrow Y(s) = H(s)\, X(s) \rightarrow h(t) * x(t) = Y(t)$

Convolución:

Si $x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(s) = 1 \quad \therefore \quad Y(s) = H(s)$

$$Y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$$

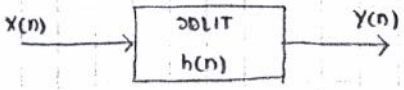
$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) \rightarrow \text{respuesta impulso} \qquad -\infty < t < \infty$$

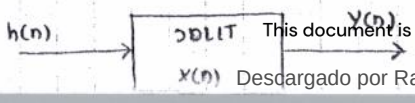


Propiedades de la Convolución

a) Conmutativa

$$Y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$



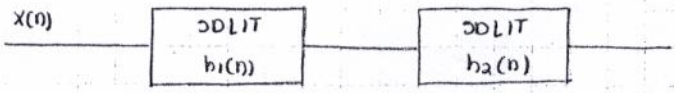


This document is available on studocu
Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Asociativa

$Y(n) = X(n) * h(n) = h(n) * X(n)$

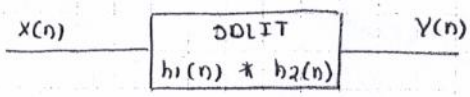
Arreglos en cascada o en serie



$\omega(n) = X(n) + h_1(n)$ $\qquad$ $y(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n)$

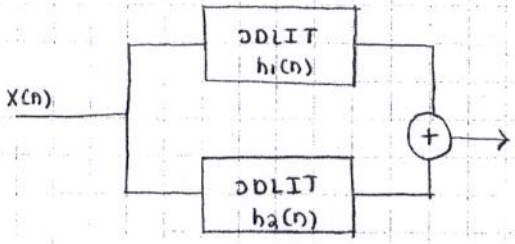
$y(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$

Solución:

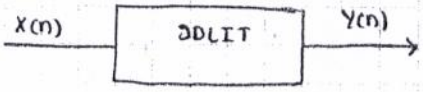


DISTRIBUTIVA

Arreglos en Paralelo // respuesta a impulso



$Y(n) = X(n) * h_1(n) + X(n) * h_2(n)$



$Y(n) = X(n) * [h_1(n) + h_2(n)]$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

EJEMPLO:

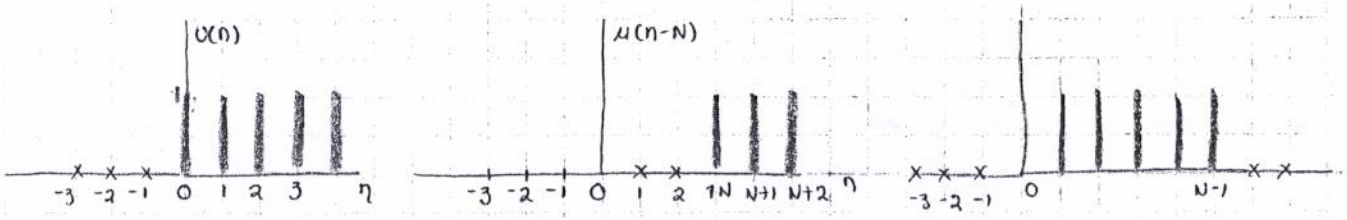
Un sistema DLIT está descrito por la Respuesta Impulso

$$h(n) = a^n \mu(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Obtener la respuesta del sistema a una entrada

$\mu(n-N)$

$$x(n) = \mu(n) - \mu(n-N) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



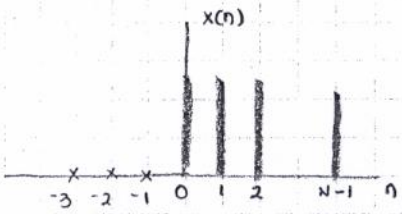
Solución

Forma Analítica.

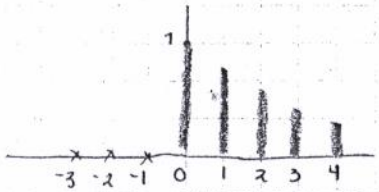
Sabemos que:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k) \qquad \text{para} \quad -\infty < n < \infty$$

donde:

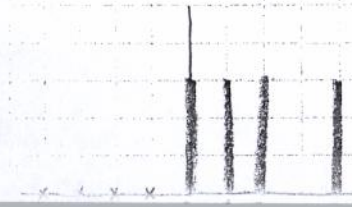


$0 \leq a \leq 0$



por ende

$$x(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

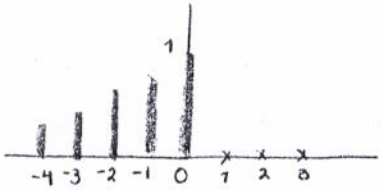


y $h(n-k) = \begin{cases} a^{n-k} & n-k \geq 0 \\ 0 & n-k < 0 \end{cases}$

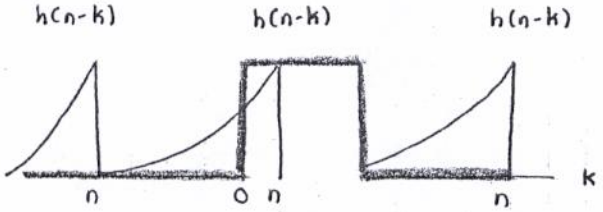
This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Si $n=0$



$$h(0-k) = h(-k) = \begin{cases} a^{-k} & k \leq 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$$



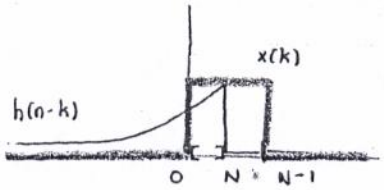
Casos Especiales

1: Si $n<0$

// va de n a $N-1$ (# variado de muestras).
// el producto muestra por muestra es cero disjuntas en tiempo.

$x(k)$ y $h(n-k)$ son disjuntas en tiempo (cuando una tiene valores diferentes de cero cuando la otra vale cero y viceversa).
Por lo tanto. $y(n)=0$

2: Si $0 \leq n \leq N-1$



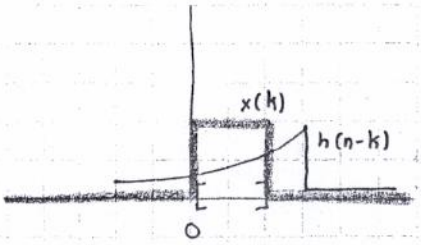
$$Y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)\, h(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (1)\, a^{n-k} = a^{n} \sum_{k=0}^{n} a^{-k}$$

$$= y(n) = a^{n} \left[\frac{1 - a^{-n-1}}{1 - a^{-1}} \right]$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

3: Si $n > N-1$ $(n \geq N)$



$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, h(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (1)\, a^{n-k} = a^{n} \sum^{n-1} a^{-k}$$

$$= y(n) = a^{-n} \left[\frac{1-a^{-k}}{1-a^{-1}}\right]$$

EN RESÚMEN:

$$y(n) \begin{cases} 0 & n \leq -1 \\ a^{n} \left[\frac{1-a^{-n-1}}{1-a^{-1}}\right] & 0 \leq n \leq N-1 \\ a^{n} \left[\frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}\right] & n \geq N \end{cases}$$

Salida del sistema caracterizado.

Solución

b) Numérica

Para aplicar ésta solución se requiere de conocer los valores que asumen $x(n)$ y $h(n)$. Para este caso se pueden conocer si se establecen los valores de a y N

Proponiendo (pueden ser otros) que:

$a = 0.1$ $\quad x(n) = \mu(n) - \mu(n-N) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ $\quad h(n) = a^{n}\mu(n) \begin{cases} a^{n} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

$N = 3$

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad h(n) = \begin{cases} (0.1)^{n} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Entonces:

n	$n \leq -1$	0	1	2	3	4	$n \geq 5$
$x(n)$	0	1	1	1	0	0	0
$h(n)$	0	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	$(0.1)^{n}$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Sabemos que:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\ h(n-k) \qquad -\infty < n < \infty$$

dado que $x(n)$ solo tiene valores diferentes de cero de $0 \le n \le 2$ podemos reescribir la sumatoria como:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{2} x(k)\ h(n-k)$$

$$\underset{n=-1}{X(k)\ h(n-k)}$$

Para $n = -1$

$$y(-1) = \sum_{k=0}^{2} x(k)\ h(-1-k) = \underset{k=0}{x(0)\ h(-1)} + \underset{k=1}{x(1)\ h(-2)} + \underset{k=2}{x(2)\ h(-3)} = 1(0) + 1(0) + 1(0) = 0$$

Para $n = 0$

$$y(0) = \sum_{k=0}^{2} x(k)\ h(0-k) = x(0)\ h(0) + x(1)\ h(-1) + x(2)\ h(-2) = 1(1) + 1(0) + 1(0) = 1$$

Para $n = 1$

$$y(1) = \sum_{k=0}^{2} x(k)\ h(1-k) = \underset{\substack{h=0.1}}{x(0)\ h(1)} + \underset{\substack{k=1\\n=1}}{x(1)\ h(0)} + \underset{\substack{k=2\\n=1}}{x(2)\ h(-1)} = 1(0.1) + 1(1) + 1(0) = 1.1$$

Para $n = 2$

$$y(2) = \sum_{k=0}^{2} x(k)\ h(2-k) = \underset{h=0.01}{x(0)\ h(2)} + \underset{h=0.1}{x(1)\ h(1)} + \underset{h=1}{x(2)\ h(0)} = 1(0.01) + 1(0.1) + 1(1) = 1.11$$

Para $n = 3$

$$y(3) = \sum_{k=0}^{2} x(k)\ h(3-k) = \underset{h=0.001}{x(0)\ h(3)} + \underset{h=0.01}{x(1)\ h(2)} + \underset{h=0.1}{x(2)\ h(1)} = 1(0.001) + (0.01) + 1(0.1) = 0.111$$

Para $n = 4$

$$y(4) = \sum_{k=0}^{2} x(k)\ h(4-k) = \underset{h=0.0001}{x(0)\ h(4)} + \underset{h=0.001}{x(1)\ h(3)} + \underset{h=0.01}{x(2)\ h(2)} = 1(0.0001) + 1(0.001) + (0.01) = 0.0111$$

COMPROBACIÓN:

Calculamos $y(n)$ de -1 a 4 con la solucion Analitica para $a = 0.1$ y $N = 3$.

$$y(n) = \begin{cases} 0 & n \le -1 \\ (0.1)^n \left[\dfrac{1-(0.1)^{-n-1}}{1-(0.1)^{-1}}\right. & 0 \le n \le 2 \\ (0.1)^n \left[\dfrac{}{1-(0.1)^{-3}}\right. & n \ge 3 \end{cases}$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES.

Para $n=-1$ $\quad y(-1)=0$

Para $n=0$

$$y(0) = (0.1)^0 \left[\frac{1-(0.1)^{-0-1}}{1-(0.1)^{-1}}\right] = (1)\left[\frac{1-(0.1)^{-1}}{1-(0.1)^{-1}}\right] = 1$$

Para $n=1$

$$y(1) = (0.1)^1 \left[\frac{1-(0.1)^{-1-1}}{1-(0.1)^{-1}}\right] = 0.1\left[\frac{1-(0.1)^{-2}}{1-(0.1)^{-1}}\right] = 0.1\left[\frac{1-100}{1-10}\right] = 0.1\left[\frac{-99}{-9}\right] = 1.1$$

Para $n=2$

$$y(2) = (0.1)^2 \left[\frac{1-(0.1)^{-2-1}}{1-(0.1)^{-1}}\right] = 0.01\left[\frac{1-1000}{1-10}\right] = 0.01\left[\frac{-999}{-9}\right] = 1.11$$

Para $n=3$

$$Y(3) = (0.1)^3 \left[\frac{1-(0.1)^{-3}}{1-(0.1)^{-1}}\right] = 0.001\left[\frac{-999}{9}\right] = 0.111$$

Para $n=4$

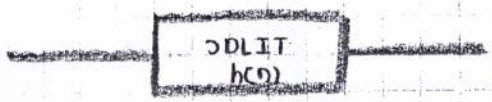
$$Y(4) = (0.1)^4 \left[\frac{1-(0.1)^{-3}}{1-(0.1)^{-1}}\right] = 0.0001\left[\frac{-999}{-9}\right] = 0.0111$$

Miércoles 13 de Febrero del 2013

ESTABILIDAD

Si existen entradas finitas, acotadas o convergentes, existen Salidas finitas Acotadas o Convergentes.

Un Sistema estable nos permite "controlarlo" si no es estable no lo podemos controlar.



Si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = S_i < \infty$ la Salida es $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = S_2 < \infty$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

NOTA:

La Respuesta Impulso si se puede averiguar si mi sistema es estable.

Convolución

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k)$$

Un SDLIT es estable si se cumple lo siguiente.

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = S < \infty}$$

EJEMPLO:

Si un Sistema SDLIT está descrito por

$$h(n) = a^n \mu(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

¿El sistema es Estable?

R= depende el valor de a.

CAUSALIDAD.

consecuencia, causa.

Nos da una Salida si aplicamos una Entrada.

Ejemplo:

" Los Sistemas con energía Almacenada no son causales ya que solo dan una Salida "

Causal

$x(n) = 0$, $n < n_0$ → SDLIT → $y(n) = 0$, $n < n_0$

Entrada → SDLIT → Salida.

La Respuesta Impulso

Si $x(n) = \delta(n)$ entonces.

$$\delta n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$y(n) = h(n) = 0$ para $n < 0$

Un SDLIT es causal si

$$\boxed{h(n) = 0 \quad \text{para } n < 0}$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

EJEMPLO:

Si un Sistema DLIT está descrito por:

$$h(n) = a^n \mu(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

¿El Sistema es o no Estable?

R= depende del valor de a

Solución:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4$$

- Si $|a| < 1$ la sumatoria converge a $\frac{1}{1-a} < \infty$ por lo tanto DLIT es: ESTABLE

- Si $|a| \geq 1$ la sumatoria no converge y por lo tanto DLIT es NO ESTABLE

EJEMPLO:

Causalidad. Si un sistema DLIT está descrito por:

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

¿El Sistema es causal o no causal?

Solución

Como $h(n) = 0$ para $n < 0$ el DLIT es causal.

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Ecuaciones de Diferencia de orden N con coeficientes constantes.

Tiene una estructura genérica de este tipo:

$$\sum_{k=0}^{N} b_k\, y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} a_m\, x(n-m)$$

// objetivo: desplazar constantes y obtener la secuencia de Salida

$$b_0\, y(n) + b_1 (y(n-1) + b_2\, y(n-2) + \dots + b_N\, y(n-N) = a_0\, x(n) + a_1 x(n-1) + a_2\, x(n-2) + \dots a_M\, x(n-M)$$

despejando $y(n)$ obtenemos:

$$y(n) = \frac{a_0}{b_0} x(n) + \frac{a_1}{b_0} x(n-1) + \frac{a_2}{b_0} x(n-2) + \dots + \frac{a_M}{b_0} x(n-M) - \frac{b_1}{b_0} y(n-1) - \frac{b_2}{b_0} y(n-2 \dots \frac{b_M}{b_0} y(n-M)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N} \frac{a_m}{b_0} x(n-m) - \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{b_0} y(n-k)$$

Ejemplo:

Un SDLIT está descrito por la Ecuación de diferencia

$y(n) - a y(n-1) = x(n)$

Con $a = cte \in \mathbb{R}$

Determine la Respuesta impulso $h(n)$ considerando que el sistema

a) Causal

b) No causal.

Además Determine para cada caso si el sistema es o no Estable.

Solución

Para un SDLIT causal $\boxed{h(n) = 0 \text{ para } n < 0}$ de la ecuación de diferencia

$y(n) = x(n) + a y(n-1)$

Para $x(n) = d(n)$ entonces $y(n)$ por lo tanto:

$$\boxed{h(n) = d(n) + a h(n-1)}$$

Por inducción:

Para $n < 0$ $\quad h(n) = 0$

Para $n = 0$ $\quad h(0) = d(0) + a h(-1) = 1 + a(0) = 1$

Para $n = 1$ $\quad h(1) = d(1) + a h(0) = 0 + a(1) = a$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Para $n=2$ $\quad d(2)+ah(1) = 0 + a(a) = a^2$

Para $n=3$ $\quad d(3)+ah(2) = 0 + a(a^2) = a^3$

Para $n \geq 0$ $\quad h(n) = a^n$

En RESUMEN:

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ a & n < 0 \end{cases} \quad a^n \mu(n) \quad \text{SDLIT causal}$$

a) Si $|a|<1$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} < \infty$

y por lo tanto el SDLIT causal es estable.

b) Si $|a| \geq 1$ la sumatoria NO CONVERGE y por lo tanto, el SDLIT Causal es NO ESTABLE

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES — Jueves 14 de Febrero del 2013.

EJEMPLO:

Un SDLIT está descrito por la ecuación de diferencia

$$y(n) - a y(n-1) = x(n) \qquad a \in \mathbb{R}$$

Determine su respuesta impulso $h(n)$ considerando al sistema como
a) causal
b) NO causal

Además determine en cada caso; si el sistema es o no ESTABLE

Solución:

A) Para un SDLIT CAUSAL:

$h(n) = 0$ para $n < 0$

de la ecuación de diferencia

$y(n) = x(n) + a y(n-1)$

Si $x(n) = d(n)$ entonces $y(n) = h(n)$ por lo tanto: $\boxed{h(n) = d(n) + a h(n-1)}$

$h(n) = d(n) + a h(n-1)$

por inducción:

para $n < 0$ $\quad h(n) = 0$

$n = 0$ $\quad h(0) = d(0) + a h(-1) = 1 + a(0) = 1$

$n = 1$ $\quad h(1) = d(1) + a h(0) = 0 + a(1) = a$

$n = 2$ $\quad h(2) = d(2) + a h(1) = 0 + a(a) = a^2$

$n = 3$ $\quad h(3) = d(3) + a h(2) = 0 + a(a^2) = a^3$

para $n \geq 0$ $\quad h(n) = a^n$

En resumen:

$$h(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & n < 0 \\ a^n & n \geq 0 \end{array} \right\} a^n \mu(n) \qquad \text{SDLIT causal}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots$$

Si $|a| < 1$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} < \infty$ $\quad \therefore$ el SDLIT causal es NO-ESTABLE

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Solución:

b) Para un SDLIT NO-CAUSAL se cumple: $h(n) \neq 0$ para $n<0$

Entonces podemos considerar que:

$h(n) = 0$ para $n<0$

Resolver la ecuación de diferencia por inducción regresiva (de ∞ a $-\infty$)

Para éste propósito definimos.

$$y(n-1) = \frac{1}{a}\left[y(n) - x(n)\right] \rightarrow (*)$$

$(*)$ $n' = n-1 \Rightarrow n = n'+1$

$$y(n') = \frac{1}{a}\left[y(n'+1) - x(n'+1)\right]$$

Si $x(n) = d(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$

$$\boxed{h(n) = \frac{1}{a}\left[h(n+1) - d(n+1)\right]}$$

Por inducción

para $n>0$ $\quad h(n) = 0$

para $n=0$ $\quad h(0) = \frac{1}{a}\left[h(1) - d(1)\right] = \frac{1}{a}\left[0-0\right] = 0$

para $n=-1$ $\quad h(-1) = \frac{1}{a}\left[h(0) - d(0)\right] = \frac{1}{a}\left[0-1\right] = -\frac{1}{a} = -a^{-1}$

para $n=-2$ $\quad h(-2) = \frac{1}{a}\left[h(-1) - d(-1)\right] = \frac{1}{a}\left[-\frac{1}{a} - 0\right] = -\frac{1}{a^2} = -a^{-2}$

para $n=-3$ $\quad h(-3) = \frac{1}{a}\left[h(-2) - d(-2)\right] = \frac{1}{a}\left[-\frac{1}{a^2} - 0\right] = -\frac{1}{a^3} = -a^{-3}$

$\vdots$

para $n \leq -1$ $\quad h(n) = -a^n$

$(n<0)$

En Resumen:

$$h(n) = \begin{cases} -a^n & n<0 \quad (n \leq -1) \\ 0 & n \geq 0 \end{cases} = -a^n \mu(-n-1) \quad \text{SDLIT NO CAUSAL}$$

$$\mu(-n-1) = \begin{cases} 1 & -n-1 \geq 0; \quad n \leq 1 \\ 0 & -n-1 < 0; \quad n > -1 \ (n \geq 0) \end{cases}$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} -a^n = -a^{-1} - a^{-2} - a^{-3} - a^{-4} \ldots = -\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4}$$

$\therefore$ El SDLIT No causal es ESTABLE

Si $|a| > 1$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{-\infty} -a^n = \frac{-a^{-1}}{1-a^{-1}} < \infty$

El SDLIT No causal es No estable

Si $|a| \leq 1$, la sumatoria no converge.

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

EJEMPLO:

2: Un SDLIT está descrito por la ecuación de diferencia

$$\boxed{y(n) - ay(n-1) = x(n)} \qquad a \in \mathbb{R}$$

- Resolviendo la ecuación de diferencia

$$\boxed{y(n) = x(n) + ay(n-1)} \quad \text{para} \quad x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y $a = 0.1$ considerando el sistema causal

Si $x(n) = 0$ para $n < 0 \Rightarrow y(n) = 0 \quad n < 0$

$$y(n) = x(n) + a y(n-1)$$

Para $n < 0 \quad y(n) = 0$

$n = 0 \quad y(0) = x(0) + (0.1)\, y(-1) = 1 + (0.1)(0) = 1$

$n = 1 \quad y(1) = x(1) + (0.1)\, y(0) = 1 + 0.1(1) = 1.1$

$n = 2 \quad y(2) = x(2) + (0.1)\, y(1) = 1 + (0.1)(1.1) = 1.11$

$n = 3 \quad y(3) = x(3) + (0.1)\, y(2) = 0 + 0.1(1.11) = 0.111$

$n = 4 \quad y(4) = x(4) + (0.1)\, y(3) = 0 + 0.1(0.111) = 0.0111$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} \frac{a_m}{b_0} x(n-m) - \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{b_0} y(n-k)$$

$\boxed{\text{Si } N = 0}$ → sistema sin retroalimentación

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} \frac{a_m}{b_0} x(n-m)$$

Sabemos que: $y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, x(n-k)$$

Por comparación:

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_0} & 0 \le n \le M \\ 0 & \text{en otro caso} \quad (n < 0 \quad n > M) \end{cases}$$

SISTEMAS EN ORDEN CERO

No recursivos (sin retroalimentación)

Siempre son ESTABLES.

Siempre son CAUSALES.

Son de Respuesta Impulso Finita.

SISTEMAS 1ER ORDEN O MAYORES.

Recursivos (con retroalimentación)

Pueden ser o no ESTABLES

Pueden ser o no CAUSALES

Son de Respuesta Impulso Infinita

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

SISTEMAS O FILTROS DE RESPUESTA IMPULSO FINITA (FIR)
(Sin Retroalimentación).
Finite
Impulse
Response.

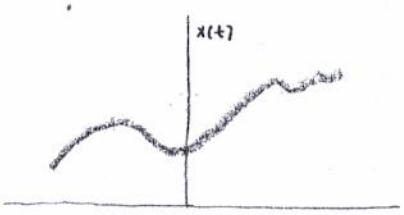
SISTEMAS O FILTROS DE RESPUESTA IMPULSO INFINITA. IIR = I^2R
(Retroalimentación)
I - infinite
I - impulse
R - Response.

Ecuaciones de diferencia nos permite generar los valores del Filtro que deseamos utilizar

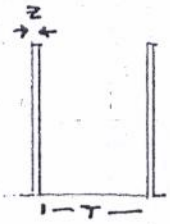
Martes 19 de Febrero del 2013

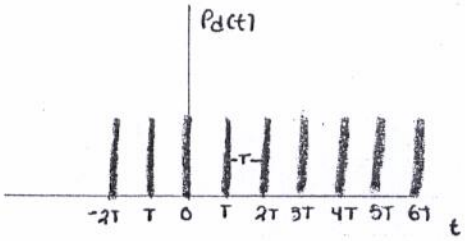
MUESTREO DE SEÑALES ANALÓGICAS (Funciones discretas en Tiempo)

(Gravitación de Funciones Discretas en Tiempo).



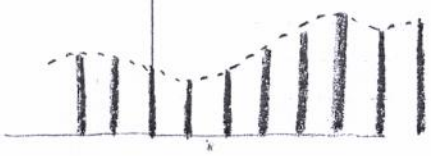
$T = 20$ o $50z$
$T >> z0$





T = tiempo de Muestreo
$\frac{1}{T} = f_0$ = frecuencia de muestreo

$x(t) = x(t)\, Pd(t)$ → Función de datos Muestreados



DISCRETA EN TIEMPO.

donde:

$$Pd(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(t - nT)$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

entonces.

$$x^*(t) = x(t)\, P_d(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(t-nT) \quad \ldots\ldots \quad A$$

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, d(t-NT) \quad \ldots\ldots \quad B$$

ANALIZANDO (A)

De (A), dado que $P_d(t)$ es una función periódica con periodo T, puede ser representada por una serie exponencial de Fourier, del tipo:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t-mT) \qquad f_0 = \frac{1}{T}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m\, e^{j2\pi m f_0 t} \qquad \text{Transformada inversa} \quad *$$

y

$$C_m = \frac{1}{T}\int \tilde{x}(t)\, e^{-j2\pi f_0 t}\, dt \qquad \text{Transformada directa.} \quad *$$

Para $P_d(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m\, e^{j2\pi m f_0 t}$

como $\frac{1}{T} = f_0$

donde: $C_m = \frac{1}{T}\int_T P_d(t)\, e^{-j2\pi m f_0 T}\, dt$

recordando que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(t-t_0)\, f(t)\, dt = f(t_0) = e^{j2\pi m f_0 t_0}$$

donde: $t_0 = nT$ $\quad e^{j2\pi m \frac{1}{T} nT} = e^{j2\pi m n} = \underbrace{\cos(mn2\pi)}_{=1} + j\,\underbrace{\operatorname{sen}(mn2\pi)}_{=0} = 1$

por lo Tanto: $\boxed{C_M = \frac{1}{T}}$

$$\therefore P_d(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{j2\pi m f_0 t} \quad \Rightarrow \quad x^*(t) = x(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{j2\pi m f_0 t}$$

esto es: $x^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j2\pi m f_0 t}$

This document is available on studocu

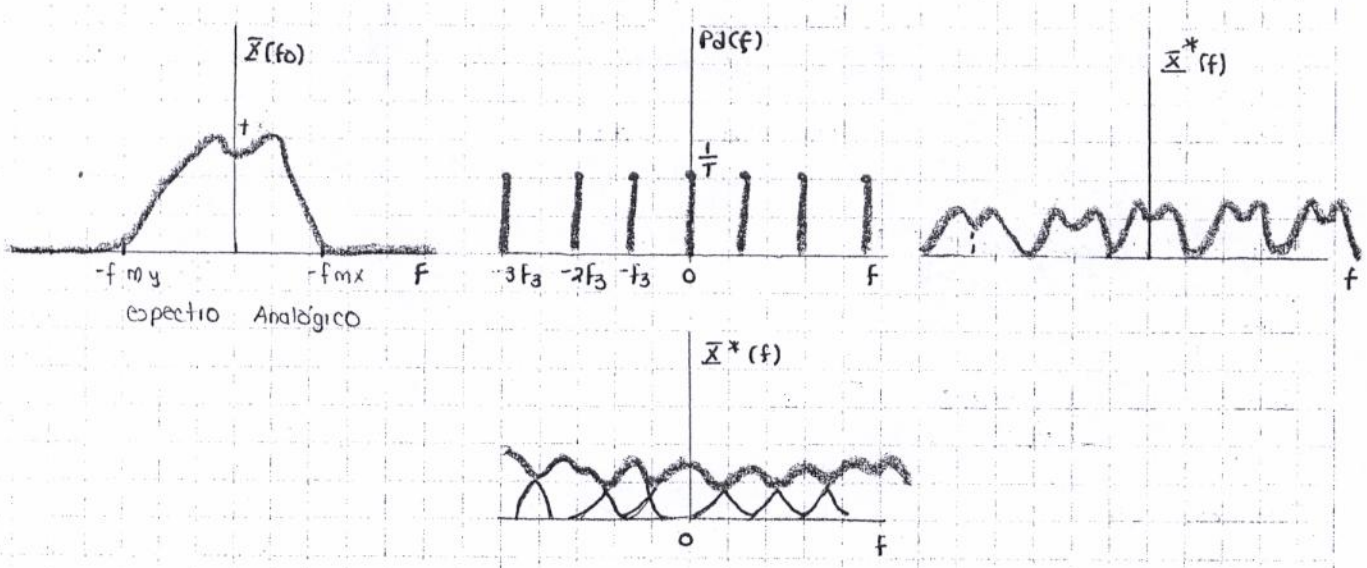
Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Aplicando la Transformada de Fourier a $x^*(t)$ recordando que.

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{i=0}^{M} x_i(t)\right\} = \sum_{i=0}^{M} \mathcal{F}(x_i(t) = \sum_{i=0}^{M} \bar{x}_i(f) \quad y \quad \mathcal{F}\left\{x(t)\, e^{j2\pi}\right\} = \bar{X}(f - f_0)$$

Tenemos:

$$\boxed{\bar{X}^*(f) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{X}(f - mf_s)}$$



Analizando (B)

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, \delta(t - nT)$$

Aplicando la Transformada de Laplace, recordando que: // una suma de Terminos es igual a la suma de Todos sus terminos, es una suma lineal.

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{M} x_i(t)\right\} = \sum_{i=0}^{M} \mathcal{L}\left\{x_i(t)\right\} = \sum_{i=0}^{M} \bar{X}_i(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = 1 \quad y \quad \mathcal{L}\left\{x(t - t_0)\right\} = \bar{X}(s)\, e^{-st_0}$$

Por lo tanto: $\mathcal{L}\left\{x^*(t)\right\} = \bar{X}^*(s) = \sum^{\infty} x(nT)\, e^{-snT}$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Martes 26 de Febrero del 2013.

Por lo tanto

$$\mathcal{L}\left\{x^*(t)\right\} = \underline{X}^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\, e^{-snT}$$

$$\underline{X}^*(s) = x(0) + x(T)\, e^{-sT} + x(2T)\, e^{-2sT} + x(3T)\, e^{-3sT} + \ldots\ldots$$ // no es recomendable

Por lo tanto utilizaremos la Transformada Z, ya que la Transformada de Laplace no nos satisface mediante ciertas características

$$\underline{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

TRANSFORMADA Z

$$\underline{X}\ \mathcal{Z}\left\{x(n)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \qquad z = e^{sT} \qquad s = \frac{1}{T}\ln z$$

NOTA:

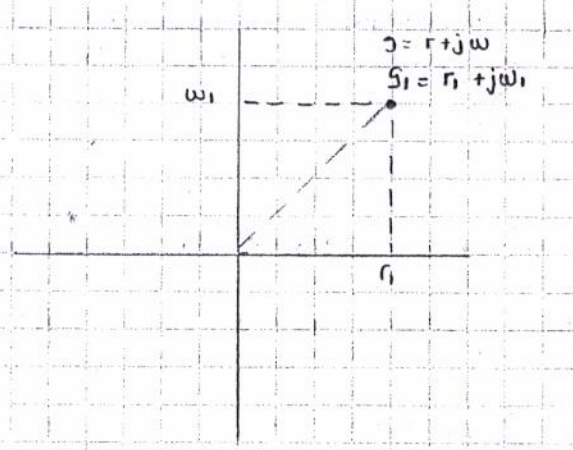
La "Forma de representación es la única diferencia entre la Transformada de Laplace y la Transformada Z ya que son variables imaginarias.

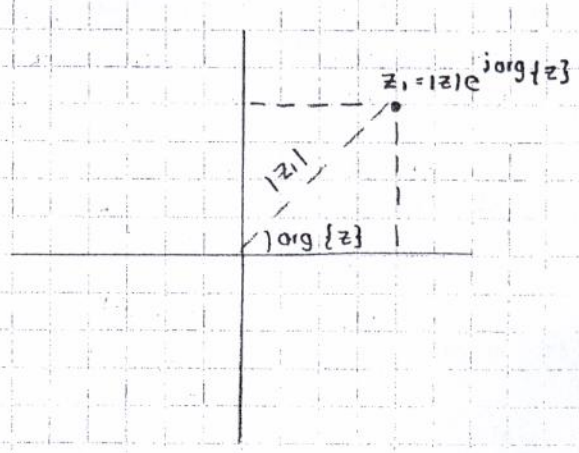
Considerando que:

$$x(nT) = x(n)$$

Comparando las sumatorias:

$$\underline{X}(z) = \underline{X}^*(s)\Big|_{e^{sT} = z}$$

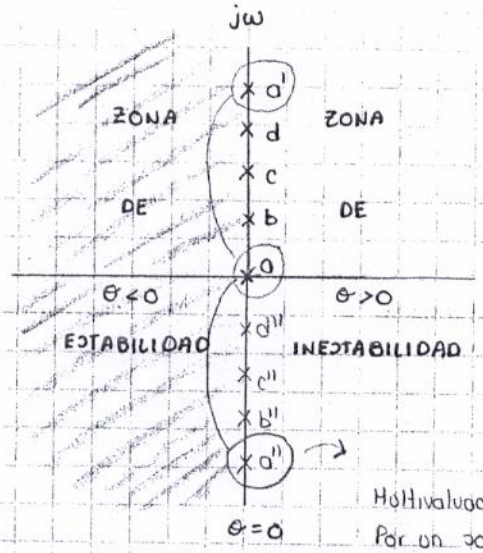




Transformada de Laplace
Representación en forma cartesiana

Transformada Z
Representación : Forma Polar (magnitud y Fase).

This document is available on studocu
Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)



Multivaluación
Por un solo punto, en la zona de Estabilidad de la Circunferencia

Si $\sigma=0 \Rightarrow s=j\omega$

$$\bar{X}(s)\Big|_{s=j\omega} = \bar{X}(j\omega) = \bar{X}(f)$$ // La Transformada de Laplace nos llevo a la Transformada de Fourier

como $s=\sigma+j\omega$ por lo tanto:

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z| e^{j\arg\{z\}}$$

Entonces:

$$|z| = e^{\sigma T}$$

$$\arg\{z\} = \omega T$$

NOTA:
La Transformada z es una cantidad compleja Multivaluada esto quiere decir que muchos puntos estan representados por un solo punto z en base a la Fase $\arg\{z\} = \omega T$

Considerando:

1: Si $\sigma<0 \Rightarrow |z| = e^{\sigma T} < 1$ cualquier exponencial negativo da un valor menor a 1

2: Si $\sigma>0 \Rightarrow |z| = e^{\sigma T} > 1$ cualquier exponencial positivo da un valor mayor a 1

3: Si $\sigma=0 \Rightarrow |z| = e^{0} = 1$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Punto a $\quad \omega T = 0 \quad \Rightarrow \omega = 0$

Punto b $\quad \omega T = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2T}$

Punto c $\quad \omega T = \pi \quad \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{T}$

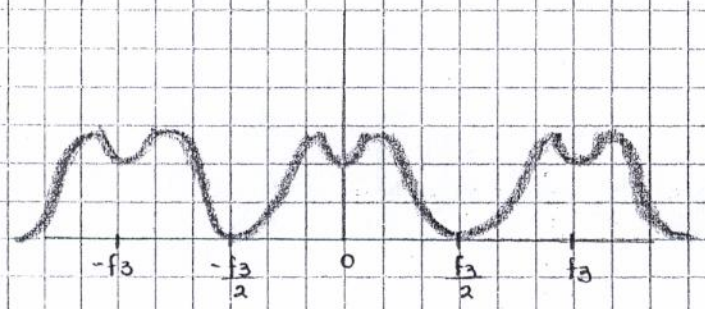
Punto d $\quad \omega T = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \omega = \frac{3\pi}{2T}$

Punto a $\quad \omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

$0 \leq \omega T \leq 2\pi \qquad -\pi \leq \omega T \leq \pi$

$0 \leq 2\pi f T \leq 2\pi \qquad -\pi \leq 2\pi f T \leq \pi$

$0 \leq f \leq \frac{1}{T} = f_s \qquad -\frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T} = f$



El comportamiento en frecuencia se representa cada intervalo de una función

Métodos de Obtencion de la Transformada Z

a) Por Definición

b) Por Integral de Contorno.

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

a) POR DEFINICIÓN

$$\bar{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \mathcal{Z}\{x(n)\}$$

PASOS

1:- Definir las condiciones de convergencia de la sumatoria o los valores de z para los cuales la sumatoria converge. denominada: Región de Convergencia (ROC)

2:- Obtener el valor de convergencia o la Transformada Z

b) INTEGRAL DE CONTORNO

basado en:

$$\bar{X}^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\bar{X}(p)}{1-e^{sT} e^{-pT}} \, dp$$ // integrales de contorno

donde:

$$\bar{X}(p) = \bar{X}(s)\Big|_{s=p} = \mathcal{L}\{x(t)\}\Big|_{s=p}$$

x(t) es la función continua en tiempo através de la cual obtenemos

$$x^*(t) = x(t)\Big|_{t=nT}$$

como:

$$\bar{X}(z) = \bar{X}^*(s)\Big|_{z=e^{sT}} \quad \therefore \quad \boxed{\bar{X}(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{\bar{X}(p)}{1-z^{-1} e^{pT}} \, dp}$$

Por el Método de Residuos de Cauchy

$$\bar{X}(z) = \sum_m \text{Res}\left[\frac{\bar{X}(p)}{1-z^{-1} e^{pT}}\right]_{p=p_m}$$

donde:

$$\text{Res}\left[G(s)\right] = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[\mathcal{G}(s)(s-p_m)^k\right]_{s=p_m}$$

Para un Polo de 1er orden

$$\text{Res}\left[\mathcal{G}(s)\right]_{s=p_m} = \mathcal{G}(s)(s-p_m)\Big|_{s=p_m}$$

(1er orden)

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. Miércoles 27 de Febrero del 2013.

EJEMPLO 1:

Obtener la Transformada Z de la siguiente función

$$x(n) = \mu(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Por:

a) Definición

b) Integral de Contorno.

Solución:

a) Por Definición

Sabemos que: $\mathcal{Z}\{x(n)\} = \mathcal{Z}\{\mu(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} (1) z^{-n} = \bar{X}(z)$

$$\bar{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-1} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \ldots\ldots = S < \infty$$

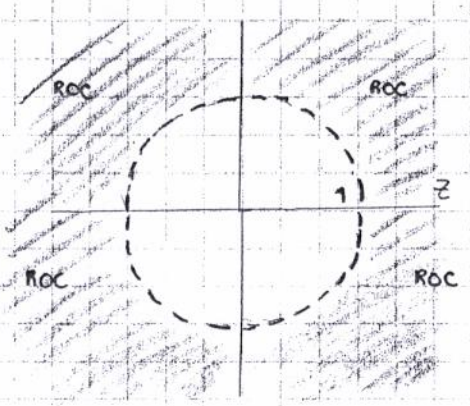
$$= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \ldots$$

$$z^{-1} S = z^{-1}$$

$$S - z^{-1} S = 1 = S = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Si $|z| > 1$ la sumatoria converge (sus terminos tienden a cero)

la Region de Convergencia es $|z| > 1$ ROC



y el valor de Convergencia es:

$$\boxed{\bar{X}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}}$$ para $|z| > 1$ ROC

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

b) Por Integral de Contorno

$$\bar{X}(z) = \sum_m \text{Res} \left[\frac{\bar{X}(P)}{1 - z^{-1} e^{PT}} \right]_{P = p_m}$$

donde:

$$\bar{X}(P) = \bar{X}(s)\Big|_{s=P} \quad y \quad \bar{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \quad y \quad x(n) = x(nT) = x(t)\Big|_{t=nT}$$

Para este caso:

$$x(n) = \mu(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$x(t) = \mu(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

donde:

$$\bar{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

entonces:

$$\bar{X}(P) = \frac{1}{s}\Big|_{s=P} = \frac{1}{P}$$ que tiene un polo de 1er orden en $P=0$

Sigue que:

$$\bar{X}(z) = \text{Res} \left[\frac{\bar{X}(P)}{1 - z^{-1} e^{PT}} \right]_{P=0} \quad (1^{er} \text{ orden})$$

$$\bar{X}(z) = \left[\frac{\frac{1}{P}}{1 - z^{-1} e^{PT}} \right] (P - 0)\Big|_{P=0}$$

$$\bar{X}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} e^{PT}}\Bigg|_{P=0} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\therefore \boxed{\bar{X}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}}$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$x(n)$	$\bar{X}(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$	$\bar{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$
$\delta(n)$	1	1
1 ó $\mu(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{s}$
nT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-n\alpha T}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$\frac{1}{s-\frac{\ln a}{T}}$
$\operatorname{Sen} n\alpha T$	$\frac{z \operatorname{sen}\alpha T}{z^2-2z\cos\alpha T+1}$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
$\operatorname{Cos} n\alpha T$	$\frac{z^2-z\cos\alpha T}{z^2-2z\cos\alpha T+1}$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$

// 1er ejemplo

// 2º ejemplo

TABLA: PARES TRANSFORMADOS Z

EJEMPLO 2:

Obtener la Transformada Z de la función

$x(n) = \operatorname{sen} n\alpha T$

$\frac{z}{z-0.5}$ z

Por:

a) Definición

b) Integral de Contorno

Solución

a) Definición

Por Definición sabemos que:

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \mathcal{Z}\{\operatorname{sen} n\alpha T\} = \bar{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{sen} n\alpha T)\, z^{-n}$$

Por la Formula de Euler:

$$\operatorname{Sen} n\alpha T = \frac{e^{jn\alpha T} - e^{-jn\alpha T}}{2j}$$

Entonces:

$$\bar{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{jn\alpha T} - e^{-jn\alpha T}}{2j}\right] z^{-n}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$\bar{X}(z) = \frac{1}{2j}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-j\alpha T}z)^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty}(e^{j\alpha T}z)^{-n}\right]$$

la primer sumatoria converge si $|e^{-j\alpha T}z| > 1$

osea $\underset{ROC_1}{|z|} > \frac{1}{|e^{-j\alpha T}|} = 1$ y el valor de convergencia $= \frac{1}{1-(e^{j\alpha T}z)^{-1}} = \frac{1}{1-e^{j\alpha T}z^{-1}}$

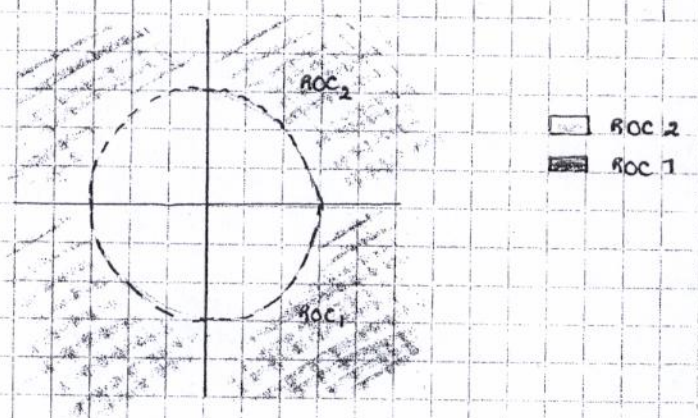
la Segunda sumatoria converge si $|e^{j\alpha T}z| > 1$

osea $\underset{ROC_2}{|z|} > \frac{1}{|e^{j\alpha T}|} = 1$ y el valor de convergencia $= \frac{1}{1-(e^{j\alpha T}z)^{-1}} = \frac{1}{1-e^{-j\alpha T}z^{-1}}$

Esto es:

$$\bar{X}(z) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-e^{j\alpha T}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\alpha T}z^{-1}}\right]$$

Para $|z| > 1$



Por Algebra:

$$\bar{X}(z) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1-e^{-j\alpha T}z^{-1} - 1+e^{j\alpha T}z^{-1}}{-e^{-j\alpha T}z^{-1} - e^{j\alpha T}z^{-1} + z^{-2}}\right] = \bar{X}(z) = \frac{1}{2j}\left[\frac{(e^{j\alpha T}+e^{-j\alpha T})z^{-1}}{1-(e^{-j\alpha T}+e^{j\alpha T})z^{-1}+z^{-2}}\right]$$

$$\boxed{\bar{X}(z) = \frac{z^{-1}\operatorname{sen}\alpha T}{1-2z^{-1}\cos\alpha T + z^{-2}} = \frac{z\operatorname{sen}\alpha T}{z^2-2z\cos\alpha T+1}}$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Solución B

Si $x(n) = \operatorname{sen} n\alpha T$

Entonces: $x(t) = \operatorname{sen} \alpha t$

sigue que: $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} \alpha t\} = \dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2} = \overline{X}(s)$

Entonces:

$$\overline{X}(p) = \overline{X}(s)\Big|_{s=p} = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2} = \frac{\alpha}{(p-j\alpha)(p+j\alpha)}$$

$p^2+\alpha^2 = 0$ $\Rightarrow$ tiene dos polos de 1er orden

$p^2 = -\alpha^2$ en $p_0 = j\alpha$ y $p_1 = -j\alpha$

$\therefore p_{01} = \pm j\alpha$

Por lo tanto:

$$\overline{X}(z) = \sum_m \operatorname{Res}\left[\frac{\frac{\alpha}{(p-j\alpha)(p+j\alpha)}}{1-z^{-1}e^{pT}}\right]_{p=p_m}$$

$$\overline{X}(z) = \operatorname{Res}\left[\frac{\frac{\alpha}{(p-j\alpha)(p+j\alpha)}}{1-z^{-1}e^{pT}}\right]_{\substack{p=j\alpha \\ (1^{er}\text{ orden})}} + \operatorname{Res}\left[\frac{\frac{\alpha}{(p-j\alpha)(p+j\alpha)}}{1-z^{-1}e^{pT}}\right]_{\substack{p=-j\alpha \\ 1^{er}\text{ orden}}}$$

$$\overline{X}(z) = \left[\frac{\frac{\alpha}{(p-j\alpha)(p+j\alpha)}(p-j\alpha)}{1-z^{-1}e^{pT}}\right]_{p=j\alpha} + \left[\frac{\frac{\alpha}{(p-j\alpha)(p+j\alpha)}(p+j\alpha)}{1-z^{-1}e^{pT}}\right]_{p=-j\alpha}$$

$$\overline{X}(z) = \frac{\frac{\alpha}{2j\alpha}}{1-z^{-1}e^{j\alpha T}} + \frac{\frac{\alpha}{-2j\alpha}}{1-z^{-1}e^{-j\alpha T}} = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-e^{j\alpha T}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\alpha T}z^{-1}}\right]$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\overline{X}(z) = \frac{z \operatorname{sen} \alpha T}{z^2 - 2z\cos\alpha T + 1}}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. Jueves 28 de Febrero del 2013.

$x(n)$	$\bar{X}(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$	
$a x_1(n) + b x_2(n)$	$a\bar{X}_1(z) + b\bar{X}_2(z)$	linealidad
$x(n-m)$		
1: Si $x(n-m)=0$ para $n<m$	$z^{-m}\bar{X}(z)$	
2: Si $x(n-m)\neq 0$ para $n<m$	$z^{-m}\bar{X}(z) + \sum_{i=1}^{m} x(-i)\, z^{i-m}$	
$e^{-n\alpha T} x(n)$	$\bar{X}(e^{\alpha T} z)$	
$a^n x(n)$	$\bar{X}(az)$	
$n^{\ell} x(n)$	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^{\ell}\bar{X}(z)$	
$x(n)\ h(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{\bar{X}(\bar{z})H(z/\bar{z})\,d\bar{z}}{z}$	
$\sum^{m} x(m)\,h(n-m)$	$\bar{X}(z)\ H(z)$	

PROPIEDADES TRANSFORMADA Z

EJEMPLO 1:

Obtener la Transformada Z de la secuencia

$x(n) = a\,x_1(n) + b\,x_2(n)$

Solución:

a) Por definición

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \bar{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

$$\bar{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a\,x_1(n) + b\,x_2(n)\right] z^{-n}$$

$$\bar{X}(z) = \underbrace{a\sum_{n=0}^{\infty} x_1(n)\, z^{-n}}_{\substack{\bar{X}_1(z) \\ \text{ROC } 1}} + \underbrace{b\sum_{n=0}^{\infty} x_2(n)\, z^{-n}}_{\substack{\bar{X}_2(z) \\ \text{ROC } 2}}$$

$$\boxed{\therefore\ \bar{X}(z) = a\bar{X}_1(z) + b\,\bar{X}_2(z)}$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

EJEMPLO 2:

Obtener la Transformada Z de la Secuencia

$x_1(n) = x(n-m)$

Considerando que

a):- $x(n-m) = 0$ para $n < m$

b):- $x(n-m) \neq 0$ para $n < m$

Solución:

A) Por Definición

$$\mathcal{Z}\{x_1(n)\} = \bar{X}_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n) z^{-n}$$

$$\bar{X}_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m) z^{-n}$$ esto es: $$\bar{X}_1(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{m-1} x(n-m) z^{-n}}_{\text{seccionando}} + \sum_{n=m}^{\infty} x(n-m) z^{-n}$$

- Si $x(n-m)=0$ para $n<m$, la primera sumatoria vale cero y por lo tanto:

$$\bar{X}_1(z) = \sum_{n=m}^{\infty} x(n-m) z^{-n}$$

Si $n' = m$, Si $n' = n-m \Rightarrow n = n' + m$

cuando $n = m \Rightarrow n' = 0$

$n = \infty \Rightarrow n' = \infty$

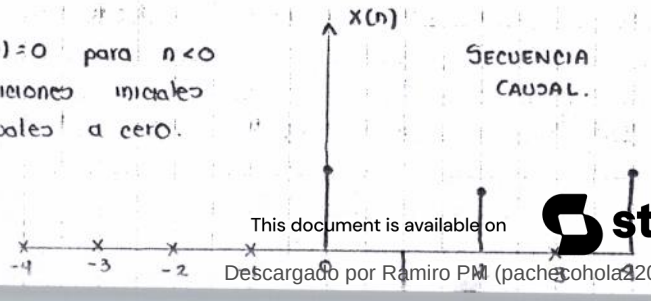
$$\bar{X}_1(z) = \underbrace{\sum_{n'=0}^{\infty} x(n') z^{-n'-m}}_{\bar{X}(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}}$$

Por lo tanto.

$$\boxed{\bar{X}_1(z) = \mathcal{Z}\{x(n-m)\} = z^{-m} \bar{X}(z)}$$

$x(n) = 0$ para $n < 0$

Condiciones iniciales iguales a cero.

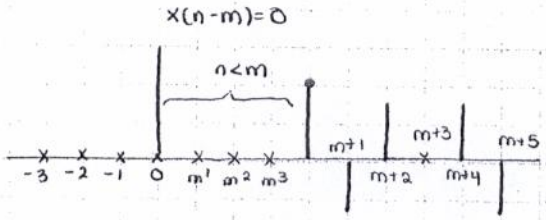


SECUENCIA CAUSAL.

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecoholas20403@gmail.com)

$x(n-m) = 0$ para $n-m<0 \Rightarrow n<m$.



- Si $x(n-m) \neq 0$ para $n<m$, la primera sumatoria no es igual a cero y entonces.

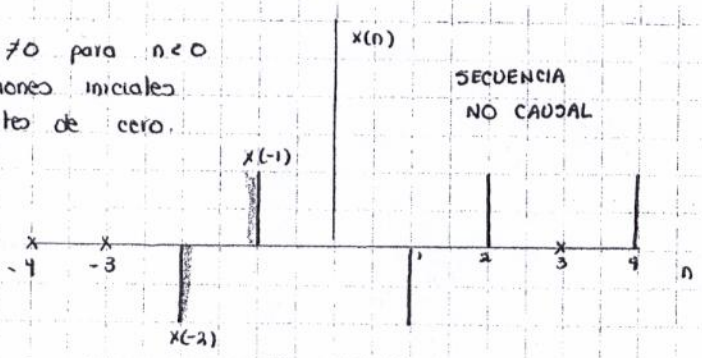
$$\underline{X}_1(z) = \sum_{n=0}^{m-1} x(n-m)\, z^{-n} + z^{-m}\, \underline{X}(z)$$

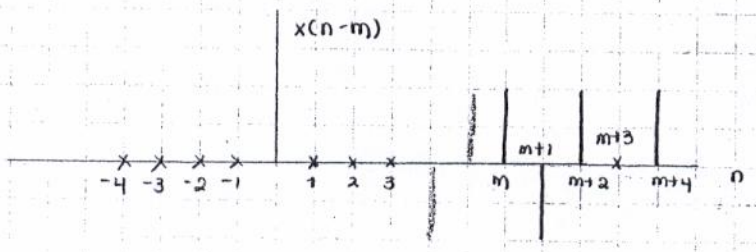
o bien:

$$\boxed{\underline{X}_1(z) = z^{-m}\, \underline{X}(z) + \sum_{i=1}^{m} x(-i)\, z^{i-m}}$$

// condiciones $i=1$ hasta m.

$x(n) \neq 0$ para $n<0$
Condiciones iniciales diferentes de cero.





Sabemos que los SDLIT están descritos por ecuaciones de diferencia de orden N del tipo:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} a_m\, x(n-m) - \sum_{k=1}^{N} b_k\, y(n-k)$$ con a's y b's valores cte.

$$Y(n) = a_0\, x(n) + a_1\, x(n-1) + a_2\, x(n-2) + \dots + a_M\, x(n-M) - b_1\, y(n-1) - b_2\, (n-2) \dots b_N\, y(n-N)$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Considerando las condiciones iniciales de $x(n)$ y $y(n)$ son iguales a cero podemos aplicar la Transformada Z a la ecuación de diferencia y entonces:

$$Y(z) = a_0 \bar{X}(z) + a_1 z^{-1} \bar{X}(z) + a_2 z^{-2} \bar{X}(z) + \dots + a_N z^{-N} \bar{X}(z) - b_1 z^{-1} Y(z) - b_2 z^{-2} Y(z) \dots$$

$$Y(z) = \left[1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}\right] = \bar{X}(z)\left[a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}\right]$$

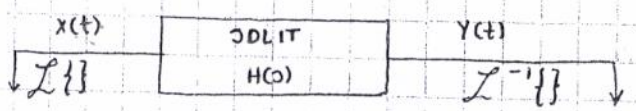
Por lo tanto obtenemos:

$$\frac{Y(z)}{\bar{X}(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots b_N z^{-N}}$$

Transformada Z señal Salida
Transformada Z señal Entrada

Función de Transferencia

$$H(s) = \frac{A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \dots + A_N s^N}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + \dots + B_N s^N} = \frac{Y(s)}{\bar{X}(s)}$$



$Y(s) = H(s)\,\bar{X}(s)$

Si $x(t) = \delta(t) \rightarrow \bar{X}(s) = 1$
$Y(s) = H(s)$

$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}\{H(s)\} = h(t)$ // Respuesta impulso

$Y(t) = x(t) * h(t)$

Polos y Ceros // Estabilidad

$$H(s) = \frac{A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \dots A_N s^N}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + \dots B_N s^N} = \frac{Y(s)}{\bar{X}(s)}$$

$$H(s) = \frac{A_N (s - S_0)(s - S_1)(s - S_2) \dots (s - S_N)}{B_N (s - P_0)(s - P_1)(s - P_2) \dots (s - P_N)}$$

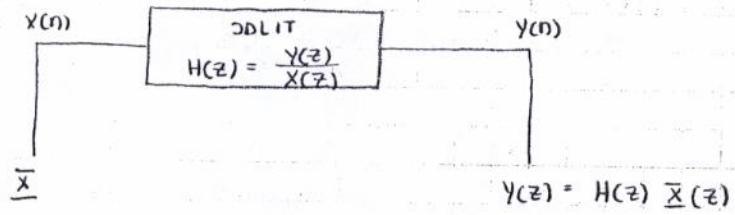
$$H(z) = \frac{a_N (1 - z_0 z^{-1})(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \dots (1 - z_N z^{-1})}{b_N (1 - P_0 z^{-1})(1 - P_1 z^{-1})(1 - P_2 z^{-1}) \dots (1 - P_N z^{-1})}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Si $N = M$ y multiplicamos y dividimos por z^N

$$H(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \quad + a_N}{z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \quad + b_N} = \frac{a_0 (z-z_0)(z-z_1)(z-z_0)\ldots(z-z_N)}{(z-P_0)(z-P_1)(z-P_2)\ldots(z-P_N)}$$



Si $x(n) = \delta(n) \Rightarrow \bar{X}(z) = 1$

Entonces $Y(z) = H(z)$

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = h(n) \quad \rightarrow \quad y(n) = x(n) * h(n)$$

METODOS DE LA TRANSFORMADA Z

1.- Expansión en Serie de Potencias
2.- Expansión en Fracciones y Uso de Tablas
3.- Integral de Inversión.

EXPANSION EN SERIE DE POTENCIAS.

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \bar{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + x(4)z^{-4} + \ldots$$

n	0	1	2	3	4
x(n)	x(0)	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)

EJEMPLO:

Obtener la Transformada Z de $\bar{X}(z) = \frac{z}{z-1}$

Solución:

Realizando el cociente tenemos

suma de términos

$$\begin{array}{r|l} & 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} \\ \hline z-1 & z \\ & -z+1 \\ \hline & +1 \\ & -1 + z^{-1} \\ \hline & z^{-1} \\ & -z^{-1} + z^{-2} \end{array}$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

EJEMPLO 2:

Obtener la Transformada Inversa Z de $Y(z) = 3.27 - 0.25z^{-1} + 2.35z^{-2} + 1.2z^{-4} + 0.02z^{-5} - 0.7z^{-7}$

Solución:

Comparando los coeficientes.

n	0	1	2	3	4	5	7
Y(n)	3.27	-0.25	2.35	0	1.2	0.02	-0.7

o bien

$$Y(n) = 3.27\,\delta(n) - 0.25\,\delta(n-1) + 2.35\,\delta(n-2) + 1.2\,\delta(n-4) + 0.02\,\delta(n-5) - 0.7\,\delta(n-7)$$

EXPANDIÓN EN FRACCIONES PARCIALES Y USO DE TABLAS.

$$Y(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_n}{z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \dots + b_N}$$

Obteniendo sus raices (ceros y polos).

$$Y(z) = \frac{a_0 (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_N)}{(z - P_0)(z - P_1)(z - P_2) \dots (z - P_N)}$$

por expansión en Fracciones parciales

$$(z - P_0)\,Y(z) = \frac{A_0}{z - P_0} + \frac{A_1}{z - P_1} \dots + \frac{A_K}{z - P_K} + \dots + \frac{A_N}{z - P_N}$$

Para Polos de 1er orden: // Tambien existe el de "polos de orden Multiple"

$$A_K = Y(z)(z - P_K)\Big|_{z = P_K}$$

Por Tablas:

$$\frac{A_K}{z - P_K} \rightarrow \text{NO HAY}$$

$$\frac{A_K z}{z - P_K} \rightarrow A_K (P_K)^n$$

Para la Transformada Inversa Z la expansión en fracciones parciales se hace $\frac{Y(z)}{(z)}$, esto es:

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A_0}{z-P_0} + \frac{A_1}{z-P_1} + \cdots\cdots + \frac{A_K}{z-P_K} + \cdots\cdots + \frac{A_K}{z-P_N}$$

Para Polos de 1er orden:

$$A_K = \frac{Y(z)}{z}(z-P_K)\Big|_{z=P_K}$$

Finalmente:

$$Y(z) = \frac{A_0 z}{z-P_0} + \frac{A_1 z}{z-P_1} + \cdots\cdots + \frac{A_K z}{z-P_K} + \cdots\cdots + \frac{A_N z}{z-P_K}$$

Por Tablas:

$$Y(n) = A_0(P_0)^n + A_1(P_1)^n + \cdots\cdots + A_K(P_K)^n + \cdots\cdots + A_N(P_N)^n$$

$$Y(n) = A_0(P_0)^n + A_1(P_1)^n + \cdots\cdots + A_K(P_K)^n + \cdots\cdots A_N(P_N)^n$$

Si los coeficientes de $Y(z)$ son todos reales y existe un Polo Complejo P_K siempre existirá un polo complejo conjugado P_K^* y además los coeficientes de la expansión en Fracciones parciales correspondientes a éstos términos son también Complejos conjugados entre sí, esto es:

$$\frac{A_K z}{z-P_K} + \frac{A_K^* z}{z-P}$$

Por Tablas.

$$A_K(P_K)^n + A_K^*(P_K^*)^n$$

Pero:

$$A_K = |A_K|e^{j\phi_K} \quad ; \quad A_K^* = |A_K|e^{-j\phi_K}$$

$$P_K = |P_K|e^{j\theta_K} \quad ; \quad P_K^* = |P_K|e^{-j\theta_K}$$

$$= |A_K|e^{j\phi_K}\,|P_K|^n e^{jn\theta_K} + |A_K|e^{-j\phi_K}|P_K|^n e^{-jn\theta_K}$$

$$= |A_K|\,|P_K|^n\left[e^{j(n\theta_K+\phi_K)} + e^{-j(n\theta_K+\phi_K)}\right]$$

$$= 2|A_K|\,|P_K|^n \cos(n\theta_K + \phi_K)$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

EJEMPLO:

Obtener la Transformada z de $Y(z) = \dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$ z^2

Solución:

Multiplicando y Dividiendo

$1 - \frac{0.5}{z} - \frac{1}{z} + \frac{0.5}{z^2}$

$z^2 - 1.5z + 0.5$

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

Por la expansión en Fracciones Parciales

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A_0}{z-1} + \frac{A_1}{z-0.5}$$

donde:

$$A_0 = \frac{Y(z)}{z}(z-1)\Big|_{z=1} = \frac{z(z-1)}{(z-1)(z-0.5)}\Big|_{z=1} = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$A_1 = \frac{Y(z)}{z}(z-0.5)\Big|_{z=0.5} = \frac{z(z-0.5)}{(z-1)(z-0.5)}\Big|_{z=0.5} = \frac{0.5}{-0.5} = -1$$

Entonces:

$$Y(z) = \frac{2z}{z-1} + \frac{(-1)(z)}{z-0.5}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$

Comprobando:

$$Y(z) = \frac{2z^2 - z - z^2 + z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

Por Tablas:

$Y(n) = 2\mu(n) - (0.5)^n$ // Solución más compleja

n	0	1	2	3	∞
$Y(n)$	1	1.5	1.75	1.875	2

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Solución:

Por Expansión en serie de Potencias

$$Y(z) = \frac{1}{1-1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 + 1.5z^{-1} + 1.75z^{-2} + 1.87z^{-3} \\
\hline
1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2} & 1 \\
 & -1 + 1.5z^{-1} - 0.5z^{-2} \\
 & \quad 1.5z^{-1} - 0.5z^{-2} \\
 & \quad -1.5z^{-1} + 2.25z^{-2} - 0.75z^{-3} \\
 & \qquad\qquad 1.75z^{-2} - 0.75z^{-3} \\
 & \qquad\qquad -1.75z^{-2} + 2.625z^{-3} - 0.875z^{-4} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 1.875z^{-3}
\end{array}
$$

$$Y(z) = 1 + 1.5z^{-1} + 1.75z^{-2} + 1.87z^{-3}$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

SISTEMA ESTABLE

$h(n) = 3.1622\ (0.7071)^n \cos(n45^\circ - 71.57^\circ)$ Respuesta impulso.

$\cos(n45^\circ - 71.57^\circ)$

$n = 8 \quad 8 \times 45 = 360 \quad \therefore$ cada 8 muestras se repite el ciclo.

Solución c

Sabemos que $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) = H(z)X(z)$

y $\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = y(n)$

como $x(n) = \mu(n) \rightarrow X(z) = \dfrac{z}{z-1}$

Entonces:

$$Y(z) = \left[\frac{z(z+1)}{(z-0.5-j0.5)(z-0.5+j0.5)}\right]\left[\frac{z}{z-1}\right]$$

$$Y(z) = \frac{z^2(z+1)}{(z-0.5-j0.5)(z-0.5+j0.5)(z-1)}$$

Por expansión en fracciones parciales: obtener $\dfrac{Y(z)}{z}$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z(z+1)}{(z-0.5-j0.5)(z-0.5+j0.5)(z-1)}$$ // 3 coeficientes

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A_0}{z-0.5-j0.5} + \frac{A_1}{z-0.5+j0.5} + \frac{A_2}{z-1}$$

donde:

$$A_0 = \frac{Y(z)}{z}(z-0.5-j0.5)\Bigg|_{z=0.5+j0.5} = \frac{z(z+1)}{(z-0.5+j0.5)(z-1)}\Bigg|_{z=0.5+j0.5}$$

$$A_0 = \frac{(0.5+j0.5)(1.5+j0.5)}{(j)(0.5+j0.5)} = \frac{(0.7071\,e^{j45^\circ})(1.5811\,e^{j18.43^\circ})}{(e^{j90^\circ})(0.7071\,e^{j45^\circ})}$$

$180 - 18.43^\circ = 161.57$

$A_0 = 1.5811\,e^{j161.57}$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$A_1 = \frac{Y(z)}{z} = (z - 0.5 + j0.5)\Big|_{z=0.5-j0.5} = \frac{z(z+1)}{(z-0.5-j0.5)(z-1)}\Bigg|_{z=0.5-j0.5}$$

$$A_1 = \frac{(0.5-j0.5)(1.5-j0.5)}{(-j)(0.5-j0.5)} = \frac{(0.7071\, e^{-j45^\circ})(1.5811\, e^{-j18.43^\circ})}{(e^{-j90^\circ})(0.7071\, e^{-j135^\circ})}$$

$$A_1 = 1.5811\, e^{j16.57^\circ} = A_0^*$$

$$A_2 = \frac{Y(z)}{z}(z-1)\Bigg|_{z=1} \frac{z(z+1)}{(z-0.5-j0.5)(z-0.5+j0.5)}\Bigg|_{z=1} = \frac{z(z+1)}{z^2-z+0.5}\Bigg|_{z=1}$$

$$A_2 = \frac{1(2)}{1-1+0.5} = \frac{2}{0.5} = 4$$

Entonces

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

atras

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. Huitoo 12 de Marzo del 2013.

EJEMPLO 2:

La Ecuación de diferencia que describe la relación de Entrada - Salida de un sistema SDLIT inicialmente relajado, está dado por:

$$y(n) - y(n-1) + 0.5\, y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

Encuentre:

a) la Función de Transferencia $H(z)$

b) la Respuesta Impulso $h(n)$

c) la Secuencia de salida, cuando la secuencia de entrada es un escalón unitario $x(n) = \mu(n)$

Solución a):-

Sabemos que $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$

Aplicando la Transformada Z a la ecuación de diferencia, tenemos

$$Y(z) - z^{-1}\, Y(z) + 0.5\, z^{-2}\, Y(z) = X(z) + z^{-1}\, X(z)$$

$$Y(z) - z^{-1}\, Y(z) + 0.5 z^{-2}\, Y(z) = X(z) + z^{-1}\, X(z)$$

$$Y(z)\left[1 - z^{-1} + 0.5 z^{-2}\right] = X(z)\left[1 + z^{-1}\right]$$

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right) z^2 = z^2 + z$$

$$\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{0.5}{z^2}\right) z^2$$

Entonces:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5 z^{-2}} = \frac{z^2 + z}{z^2 - z + 0.5}$$

Solución b):-

Sabemos que $h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$

Obteniendo las raíces (ceros y polos) de $H(z)$

CEROS : $z^2 + z = 0 \Rightarrow z(z+1) = 0$

$$\boxed{z_0 = 0 \quad y \quad z_1 = -1}$$

POLOS : $z^2 - z + 0.5 = 0$

$$z^2 - z + 0.25 - 0.25 + 0.5 = 0$$

$$(z - 0.5)^2 + 0.25 = 0$$

$$(z - 0.5)^2 = -0.25$$

$$z - 0.5 = \pm j0.5$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_0 &= 0.5 + j0.5 = 0.7071\, e^{j45^\circ} \\ P_1 &= 0.5 - j0.5 = 0.7071\, e^{-j45^\circ} \end{aligned}}$$

$$P_{01} = 0.5 \pm j0.5$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Entonces:

$$H(z) = \frac{z(z+1)}{(z-0.5-j0.5)(z-0.5+j0.5)}$$

Aplicando la expansión en fracciones parciales:

$$\frac{H(z)}{(z)} = \frac{z+1}{(z-0.5-j0.5)\,(z-0.5+j0.5)} = \frac{A_0}{z-0.5-j0.5} + \frac{A_1}{z-0.5+j0.5}$$

donde:

$$A_0 = \frac{H(z)}{z}\,(z-0.5-j0.5)\Big|_{z=0.5+j0.5} = \frac{z+1}{z-0.5+j0.5}\Bigg|_{z=0.5+j0.5}$$

$$\boxed{A_0 = \frac{(1.5+j0.5)\,(-j)}{(j)\,(-j)}} = \frac{0.5-j1.5}{1} = 0.5-j1.5 = \boxed{1.5811\,e^{-j71.57^\circ}}$$

conjugado

conjugado

$$P_0 = 0.5+j0.5 = 0.7071\,e^{j45^\circ}$$
$$P_1 = 0.5-j0.5 = 0.7071\,e^{-j45^\circ}$$

$$A_1 = \frac{H(z)}{z} = (z-0.5+j0.5)\Big|_{z=0.5-j0.5} = \frac{z+1}{z-0.5-j0.5}\Bigg|_{z=0.5-j0.5}$$

$$A_1 = \frac{(1.5-j0.5)\,(j)}{(-j)\,(j)} = \frac{0.5+j1.5}{1} = 1.5811\,e^{j71.57^\circ}$$

Por lo tanto:

$$H(z) = \frac{1.5811\,e^{-j71.57^\circ}}{z-0.7071\,e^{j45^\circ}} + \frac{1.5811\,e^{j71.57^\circ}}{z-0.7071\,e^{-j45^\circ}}$$

Por uso de Tablas:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = h(n) = 1.5811\,e^{-j71.57^\circ}\,(0.7071)^n e^{jn45^\circ} + 1.5811\,e^{-j71.57^\circ}\,(0.7071)^n e^{-jn45^\circ}$$

Factorizamos Magnitudes

$$h(n) = 1.5811\,(0.7071)^n\left[e^{j(n45^\circ-71.57^\circ)} + e^{-j(n45^\circ-71.57^\circ)}\right]$$

$$h(n) = 3.1622\,(0.7071)^n \cos(n45^\circ-71.57^\circ)$$ Respuesta Impulso

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. Miercoles 13 de Marzo del 2013.

INTEGRAL DE INVERSIÓN

$$y(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint Y(z)\, z^{n-1}\, dz$$

por el Método de Residuos de Cauchy

$$y(n) = \sum_{m} \operatorname{Res} \left[Y(z)\, z^{n-1} \right]_{z = P_m}$$ // Análisis Práctico

n = variable de tiempo

Cualquier $Y(z)$ puede representarse como:

$$Y(z) = Y'(z)\, z^{r}$$

donde:

$Y'(z)$ = es una función LIBRE de ceros y polos en el origen $(z=0)$

z^{r} = representa los ceros o polos en el origen $(z=0)$

Entonces:

$$Y(z)\, z^{n-1} = Y'(z)\, z^{r+n-1}$$

1.- Si $r+n-1 \geq 0$ para valores de $n \geq 0$, no habrá polos en el origen $(z=0)$ porque el término z^{r+n-1} representar ceros en esa posición $(z=0)$ y esto ocurre.

Si $r \geq 1$ entonces no existen POLOS en el origen $(z=0)$ a considerar en el cálculo de los residuos para ningún valor de $n \geq 0$ y solo se toman en cuenta los polos $Y'(z)$

2.- Si $r+n-1 < 0$, existen polos en el origen para ciertos valores de $n \geq 0$ que se irán decrementando en su orden conforme n aumente y esto ocurre:

Si $r \leq 0$ existen polos en el origen $(z=0)$ a considerar en el cálculo de los residuos para algunos valores de n $(0 \leq n \leq -r+1)$, además de los polos $Y'(z)$

EJEMPLO:

Obtener por integral de inversión la Transformada inversa Z de:

$$Y(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

Solución:

Multiplicar y dividir z^2

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

por integral de inversión sabemos que:

$$y(n) = \sum_m \text{Res}\left[\frac{z^2\ z^{n-1}}{(z-1)(z-0.5)}\right]_{z=P_m}$$

$$Y(n) = \sum_m \text{Res}\left[\frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)}\right]_{z=P_m}$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)} \quad \therefore \quad Y(z) = \underbrace{\left[\frac{1}{(z-1)(z-0.5)}\right]}_{Y'(z)} \underbrace{z^2}_{z^r}$$

Como $r=2>1$ No existen polos en el origen para ningún valor de $n \geq 0$ a considerar en cálculo de los residuos y solo se consideran los $Y'(z)$, $P_0=1$ y $P_1=0.5$

Entonces:

$$Y(n) = \text{Res}\left[\frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)}\right]_{z=1} + \text{Res}\left[\frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)}\right]_{z=0.5}$$

(1er orden) (1er orden)

esto es:

$$y(n) = \left.\frac{z^{n+1}\ (z-1)}{(z-1)(z-0.5)}\right|_{z=1} + \left.\frac{z^{n+1}\ (z-0.5)}{(z-1)(z-0.5)}\right|_{z=0.5}$$

$$y(n) = \frac{(1)^n(1)}{0.5} + \frac{(0.5)^n(0.5)}{(-0.5)} = 2-(0.5)^n$$

Por lo tanto:

$$\boxed{y(n) = 2\mu(n) - (0.5)^n}$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

EJEMPLO 2:

Obtener la Transformada inversa z de: $Y(z) = \dfrac{1+2z^{-1}+z^{-3}}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$

Solución:

Multiplicar y dividir por z^3

$$Y(z) = \frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)\,z}$$

Por el Método de Integral de inversión sabemos:

$$Y(n) = \sum_m \text{Res}\left[\frac{(z^3+2z^2+1)}{(z-1)(z-0.5)}\,z^{n-1}\right]_{z=P_m}$$

$$Y(n) = \sum_m \text{Res}\left[\frac{(z^3+2z^2+1)}{(z-1)(z-0.5)}\,z^{n-2}\right]_{z=P_m}$$

$$Y(z) = \frac{(z^3+2z^2+1)}{(z-1)(z-0.5)\,z} = \underbrace{\left[\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)}\right]}_{Y'(z)}\underbrace{z^{-1}}_{z^r}$$

Como $r=-1<0$ Existen Polos en el origen $(z=0)$ a considerar en el Calculo de los Residuos para Algunos Valores de n $(0\le n\le 1)$, además de los Polos de $Y'(z)$, $P_0=1$ y $P_1=0.5$.

Entonces:

$$Y(0) = \sum_m \text{Res}\left[\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)\,z^2}\right]_{z=P_m} = \underset{(1^{er}\text{ orden})}{\text{Res}\,[\;]_{z=1}} + \underset{(1^{er}\text{ orden})}{\text{Res}\,[\;]_{z=0.5}} + \underset{(2^{o}\text{ orden})}{\boxed{\text{Res}\,[\;]_{z=0}}}$$

$$Y(1) = \sum_m \text{Res}\left[\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)\,z}\right]_{z=P_m} = \underset{(1^{er}\text{ orden})}{\text{Res}\,[\;]_{z=1}} + \underset{(1^{o}\text{ orden})}{\text{Res}\,[\;]_{z=0.5}} + \underset{(1^{o}\text{ orden})}{\boxed{\text{Res}\,[\;]_{z=0}}}$$

$$Y(n\ge 2) = \sum_m \text{Res}\left[\frac{(z^3+2z^2+1)\,z^{n-2}}{(z-1)(z-0.5)}\right]_{z=P_m} = \boxed{\underset{(1^{er}\text{ orden})}{\text{Res}\,[\;]_{z=1}} + \underset{(1^{er}\text{ orden})}{\text{Res}\,[\;]_{z=0.5}}}$$

$$Y(0) = \underset{1^{er}\text{ orden}}{\text{Res}\left[\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)\,z^2}\right]} + \underset{1^{er}\text{ orden}}{\text{Res}\left[\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)\,z^2}\right]} + \underset{2^{o}\text{ orden}}{\text{Res}\left[\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)\,z^2}\right]_{z=0}}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$Y(0) = \left.\frac{z^3+2z^2+1}{(z-0.5)z^2}\right|_{z=1} + \left.\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)z^2}\right|_{z=0.5} + \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[\frac{(z^3+2z^2+1)(z-0)^2}{(z-1)(z-0.5)z^2}\right]_{z=0}$$

$$Y(0) = \frac{1+2+1}{(0.5)(1)} + \frac{0.125+0.5+1}{(-0.5)(0.25)} + (3z^2+4z)(z-1)(z-0.5)^0 - \left[\overbrace{(z-0.5)+(z-1)}^{-1.5}\right]\left[\overbrace{z^3+2z^2+1}^{r}\right]\Big|_{z=0}$$

$$\boxed{Y(0) = \frac{4}{0.5} + \frac{1.625}{-0.125} + \frac{1.5}{0.25} = 8-13+6 = 1}$$

$$Y(1) = \underset{\substack{z=1\\ \text{1er orden}}}{\mathrm{Res}}\left[\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)z}\right] + \underset{\substack{z=0.5\\ \text{1er orden.}}}{\mathrm{Res}}\left[\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)z}\right] + \underset{\substack{z=0\\ \text{1er orden}}}{\mathrm{Res}}\left[\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)z}\right]$$

$$Y(1) = \left.\frac{z^3+2z^2+1}{(z-0.5)z}\right|_{z=1} + \left.\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)z}\right|_{z=0.5} + \left.\frac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)}\right|_{z=0} = \frac{1+2+1}{(0.5)(1)} + \frac{0.125+0.5+1}{(-0.5)(0.5)} + \frac{1}{0.5}$$

$$\boxed{Y(1) = 8-6.5+2 = 3.5}$$

$$Y(n\geq 2) = \underset{\substack{z=1\\ \text{(1er orden)}}}{\mathrm{Res}}\left[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.5)}\right] + \underset{\substack{z=0.5\\ \text{1er orden}}}{\mathrm{Res}}\left[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.5)}\right]$$

$$Y(n\geq 2) = (z^3+2z^2+1)z^{n-2}\Big|_{z=1} + \left.\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)}\right|_{z=0.5}$$

$$Y(n\geq 2) = \frac{4(1)^n}{(0.5)(1)^2} + \frac{(0.125+0.5+1)(0.5)^n}{(-0.5)(0.5)^2} = 8-13(0.5)^n$$

En Resúmen:

$$Y(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 3.5 & n=1 \\ 8-13(0.5)^n & n\geq 2 \end{cases} = 6\delta(n) + 2\delta(n-1) + 8-13(0.5)^n$$

$$Y(0) = 6\delta(0) + 2\delta(-1) + 8-13(0.5)^0 = 6+0+8-13 = 1$$
$$Y(1) = 6\delta(1) + 2\delta(0) + 8-13(0.5) = 0+2+8-6.5 = 3.5$$
$$Y(n\geq 2)\ 6\delta(n\geq 2) + 2\delta(n\geq 1) + 8-13(0.5)^n = 0+0+8-13(0.5)^n = 8-13(0.5)^n$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

FORMAS DE RESPUESTA Y ESTABILIDAD.

Como $Y(z) = H(z)\,\bar{X}(z)$ // Transformada Z inversa = Respuesta Natural

esto es:

$$Y(z) = \frac{(z-z_{H0})(z-z_{H1})\ldots(z-z_{HN})(z-z_{X0})(z-z_{X1})\ldots(z-z_{\bar{X}N})}{(z-P_{H0})(z-P_{H1})\ldots(z-P_{HN})(z-P_{\bar{X}0})(z-P_{\bar{X}1})\ldots(z-P_{\bar{X}M})}$$

como $y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ Respuesta del SDLIT

$$y(n) = \underbrace{y_{H0}(n) + y_{H1}(n) + \ldots + y_{HN}(n)}_{Y_H(n)\ \text{Respuesta Natural.}} + \underbrace{y_{\bar{X}0}(n) + y_{\bar{X}1}(n) + \ldots + y_{\bar{X}N}(n)}_{Y_{\bar{X}}(n)\ \text{Respuesta Forzada.}}$$ Respuesta Total

Por lo tanto:

$$y(n) = y_H(n) + y_{\bar{X}}(n)$$

Como $h(n)$ y $y_H(n)$ provienen de los mismos polos tendrán un mismo comportamiento.
y $x(n)$ y $y_{\bar{X}}(n)$ provienen de los mismos polos, tendrán el mismo comportamiento.

NOTA
Salvo que un polo de $H(z)$ se cancele con un cero de $\bar{X}(z)$ ó un polo de $\bar{X}(z)$ se cancele con un cero de $H(z)$.

Sabemos que un SDLIT es estable si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = S < \infty$ y esto procede si $\lim_{n\to\infty} h(n) = 0$.

por lo tanto para un SDLIT ESTABLE

$\lim_{n\to\infty} y_H(n) = 0$ Respuesta Transitoria. $y_{tran}(n)$

y

$\lim_{n\to\infty} y(n) = y_{\bar{X}}(n)$ Respuesta en Estado Estacionario $y_{ee}(n)$

Dado que la Respuesta Impulso $h(n)$ y la Respuesta Natural $y_H(n)$ tienen el mismo comportamiento (provienen de los mismos polos)Z, entonces podemos determinar el grado de Estabilidad de un SDLIT a través de ambas funciones, clasificando a los casos posibles de la siguiente forma:

- SDLIT ESTABLE
  Es Aquel cuya $h(n)$ tiende a cero (se desvanece) Después de un cierto tiempo.

This document is available on studocu
Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Por determinar inicial de cada

- SDLIT INESTABLE

Es aquel cuya $h(n)$ crece sin límite, después de un cierto tiempo.

- SDLIT MARGINALMENTE ESTABLE

Es aquel cuya $h(n)$ permanece como una constante diferente de cero o una oscilación de Amplitud Constante después de un cierto tiempo.

Para cada polo de $H(z)$ se genera un término de $h(n)$ y $y_H(n)$ por respuesta del tipo:

$$y_K(n) = A_K \, n^r \, P_K^n$$

donde:

$r=0$ para polos de 1er orden

$r>0$ para polos de orden multiple

$$n^\ell x(n) \Longleftrightarrow \left(-z\frac{d}{dz}\right)^\ell X(z)$$

EJEMPLO:

$$nT \longrightarrow \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$nT = nT\mu(n) \qquad T\left(-z\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$= -Tz\left[\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2}\right] = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

y la Constante $A_K = |A_K|e^{j\theta_K}$; $P_K = |P_K|e^{j\theta_K}$

por lo tanto:

$$y_K(n) = |A_K|e^{j\theta_K} \, n^r \, |P_K|^n e^{j\theta_K n}$$

- Si $|P_K| < 1$ $\quad \lim_{n\to\infty} y_K(n) = 0$ Término Estable. ①

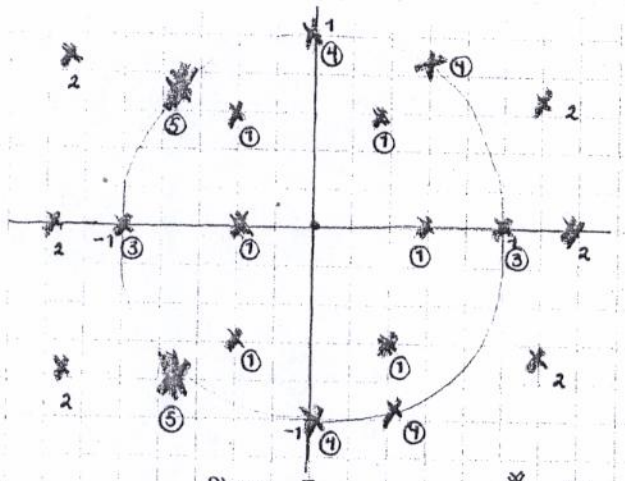
- Si $|P_K| > 1$ $\quad y_K(n)$ crece sin límite Termino Inestable. ②

- Si $|P_K| = 1$ $\quad$ Polo de 1er orden = Si $\theta_K = 0$ o $m\pi$ $\quad y_K(n) = \pm A_K$ Termino Marginalmente Estable ③

Si $\theta_K \neq 0$ o $m\pi$ $\quad y_K(n) = A_K e^{j\theta_K}$ Termino Marginalmente Estable ④

Polo de orden Multiple = $y_K(n)$ crece sin límite. Término Inestable. ⑤

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)



Plano Z ✱ Polos de orden Multiple.

En Resumen:

a): Los polos de H(z) dentro del circulo unitario de radio unitario representan terminos Estables sin importar su orden o grado.

b): Los polos de H(z) fuera dentro del circulo de radio unitario representan terminos Estables sin importar su orden (ó grado).

c): Los polos de 1er orden sobre la circunferencia de radio unitario representan término Marginalmente estables, pero si son de orden multiple bajo las mismas circunstancias Terminos inestables.

d): El grado de estabilidad de un sistema lo determina el polo más alejado del origen $z=0$. Por lo tanto un sistema Estable tiene todos sus polos dentro del circulo de radio unitario.

e): En general, los ceros pueden estar en cualquier parte del plano Z.

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

EJEMPLO:

Un SDLIT inicialmente en reposo está descrito por la ecuación de diferencia:

$$y(n) + 0.1\, y(n-1) - 0.2\, y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

a): Determine la Función de Transferencia $H(z)$ y el grado de estabilidad del Sistema.

b): Determine su respuesta impulso $h(n)$ y compruebe el resultado del inciso a.

c): Determine la respuesta del sistema debido a una secuencia de Entrada $x(n) = \mu(n)$

SOLUCIÓN:

a): Sabemos que: $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$, Aplicamos la Transformada Z a la ecuación de diferencia con condiciones iniciales iguales a cero:

$$Y(z) + 0.1\, z^{-1} Y(z) - 0.2\, z^{-2} Y(z) = X(z) + z^{-1} X(z)$$
$$Y(z)\left[1 + 0.1 z^{-1} - 0.2 z^{-2}\right] = X(z)\left[1 + z^{-1}\right]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.1 z^{-1} - 0.2 z^{-2}} = H(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 + 0.1 z - 0.2}$$

Obteniendo las Raíces (ceros y polos) de $H(z)$

Para los CEROS: $z^2 + z = 0 \rightarrow z(z+1) = 0$

$$\boxed{z_0 = 0 \quad ; \quad z_1 = -1}$$

$X_1 = \frac{2}{5}$ $\quad X_2 = -\frac{1}{2}$

Para los POLOS: $z^2 + 0.1z - 0.2 = 0$

$$z^2 + 0.1z + 0.0025 - 0.0025 - 0.2 = 0$$
$$(z + 0.05)^2 - 0.2025 = 0$$
$$(z + 0.05)^2 = 0.2025$$
$$z + 0.05 = \pm 0.45$$

$$P_{0\,11} = -0.05 \pm 0.45 \qquad \boxed{\begin{array}{l} P_0 = 0.4 \\ P_1 = -0.5 \end{array}} \qquad \begin{array}{l} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{2} \end{array}$$

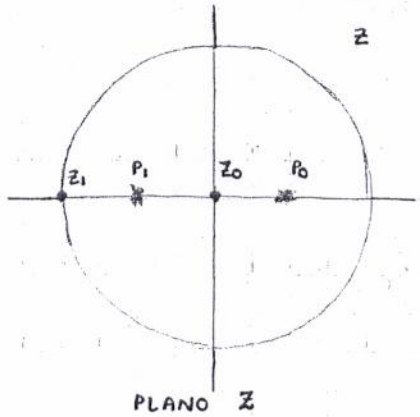
Entonces:

$$H(z) = \frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.5)}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

// Para encontrar el grado de Estabilidad ....
Ubicando los ceros y los polos en el Plazo Z.



Dado que ambos polos están dentro DEL CIRCULO DE RADIO UNITARIO
(el más alejado del origen $-P_1 = -0.5$ está dentro del circulo de radio unitario)
el SPLIT es Estable.

Solución b):

Sabemos que: $h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ Aplicando la Transformada Z a H(z) por Integral de Inversión:

$$H(z) = \frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.5)}$$

$$h(n) = \sum_m \text{Res}\left[H(z)\, z^{n-1}\right]_{z=P_m}$$

Para este caso:

$$h(n) = \sum_m \text{Res}\left[\frac{(z+1)\, z^n}{(z-0.4)(z+0.5)}\right]_{z=P_m}$$

Sabemos que:

$$H(z) = \underbrace{\left[\frac{z+1}{(z-0.4)(z+0.5)}\right]}_{H'(z)} \underbrace{z}_{z^r}$$

Como $r=1$ No existen polos en el origen. $(z=0)$ para ningun valor de $n \geq 0$ a considerar en el cálculo de los residuos, solo se tomarán en cuenta los polos de $H'(z)$ esto es:

$P_0 = 0.4$
$P_1 = -0.5$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Entonces:

$$h(n) = \underset{\substack{z=0.4 \\ \text{1er orden}}}{\text{Res}}\left[\frac{(z+1)\,z^n}{(z-0.4)(z+0.5)}\right] + \underset{\substack{z=-0.5 \\ \text{1er orden}}}{\text{Res}}\left[\frac{(z+1)\,z^n}{(z-0.4)(z+0.5)}\right]$$

$$h(n) = \left.\frac{(z+1)\,z^n}{(z+0.5)}\right|_{z=0.4} + \left.\frac{(z+1)\,z^n}{(z-0.4)}\right|_{z=-0.5}$$

$$h(n) = \frac{1.4\,(0.4)^n}{0.9} + \frac{(0.5)(-0.5)^n}{-0.9}$$

Por lo tanto la Respuesta impulso es la siguiente:

$$\boxed{h(n) = \frac{14}{9}(0.4)^n - \frac{5}{9}(-0.5)^n}$$ // Respuesta impulso.

Se observa que:

$$\lim_{n\to\infty} h(n) = 0 \quad \therefore \sum_{n=0}^{\infty} h(n) = S < \infty$$

Por lo tanto el SDLIT es ESTABLE.

NOTA:

(*) Ambos sumandos tienden a cero conforme $n \geq 0$

Solución c):

Sabemos que $Y(z) = H(z)\,\bar{X}(z) \rightarrow y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$

para este caso $x(n) = \mu(n) = \bar{X}(z) = \frac{z}{z-1}$

Entonces:

Aplicando Transf. inversa

$$Y(z) = \frac{(z+1)\,z^2}{(z-0.4)(z+0.5)(z-1)}$$

Por integral de inversión // Aplicando la Transformada Z inversa.

$$y(n) = \sum_m \text{Res}\left[Y(z)\,z^{n-1}\right]_{z=P_m}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$Y(n) = \sum_{m} \text{Res}\left[\frac{(z+1)\,z^{n+1}}{(z-0.4)(z+0.5)(z-1)}\right]$$

Sabemos que:

$$Y(z) = \underbrace{\left[\frac{z+1}{(z-0.4)(z+0.5)(z-1)}\right]}_{Y'(z)} \underbrace{z^{2}}_{z^{r}}$$

Como $r=2>1$ No existen polos en el origen $(z=0)$ para ningun valor de $n\geq 0$ a considerar en el cálculo de los residuos, solo se tomarán en cuenta los polos $Y'(z)$, esto es, $P_0 = 0.4$, $P_1 = -0.5$ y $P_2 = 1$

Entonces:

$$Y(n) = \underset{\substack{z=0.4 \\ 1^{er}\text{ orden}}}{\text{Res}}\left[\frac{(z+1)z^{n+1}}{(z-0.4)(z+0.5)(z-1)}\right] + \underset{\substack{z=-0.5 \\ 1^{er}\text{ orden}}}{\text{Res}}\left[\frac{(z+1)z^{n+1}}{(z-0.4)(z+0.5)(z-1)}\right] + \underset{\substack{z=1 \\ 1^{er}\text{ orden.}}}{\text{Res}}\left[\frac{(z+1)z^{n+1}}{(z-0.4)(z+0.5)(z-1)}\right]$$

$$Y(n) = \left.\frac{(z+1)z^{n+1}}{(z+0.5)(z-1)}\right|_{z=0.4} + \left.\frac{(z+1)z^{n+1}}{(z-0.4)(z-1)}\right|_{z=-0.5} + \left.\frac{(z+1)z^{n+1}}{(z-0.4)(z+0.5)}\right|_{z=1}$$

$$Y(n) = \frac{(1.4)(0.4)^{n}(0.4)}{(0.9)(-0.6)} + \frac{(0.5)(-0.5)^{n}(-0.5)}{(-0.9)(-1.5)} + \frac{2(1)^{n}(1)}{(0.6)(1.5)}$$

$$\boxed{Y(n) = \frac{0.56}{-0.54}(0.4)^{n} - \frac{0.25}{1.35}(-0.5)^{n} + \frac{2}{0.9} = -\frac{28}{27}(0.4)^{n} - \frac{5}{27}(-0.5)^{n} + \frac{60}{27}\mu(n)}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Respuesta} \\ \text{Total}}}{Y(n)} = \frac{1}{27}\Big[\underbrace{-28(0.4)^{n} - 5(-0.5)^{n}}_{\substack{\text{Respuesta Natural} \\ Y_H(n)}} + \underbrace{60\mu(n)}_{\substack{\text{Respuesta Forzada} \\ Y_{\bar{x}}(n)}}\Big]$$

Como el SDLIT es ESTABLE

$\lim Y_H(n) = 0 = y(n)$ $\qquad$ $\lim y(n) = y_{\bar{x}}(n) = y(n)$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

EJEMPLO:

Un SDLIT inicialmente en reposo está descrito por la ecuación de diferencia:

$$y(n) + 0.1\, y(n-1) - 0.2\, y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

a)- Determine la Función de Transferencia $H(z)$ y el grado de estabilidad del Sistema.

b)- Determine su respuesta impulso $h(n)$ y compruebe el resultado del inciso a.

c)- Determine la respuesta del sistema debido a una secuencia de Entrada $x(n) = \mu(n)$

SOLUCIÓN:

a)- Sabemos que: $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$, Aplicamos la Transformada Z a la ecuación de diferencia con condiciones iniciales iguales a cero:

$$Y(z) + 0.1\, z^{-1} Y(z) - 0.2\, z^{-2} Y(z) = X(z) + z^{-1} X(z)$$

$$Y(z)\left[1 + 0.1 z^{-1} - 0.2 z^{-2}\right] = X(z)\left[1 + z^{-1}\right]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.1 z^{-1} - 0.2 z^{-2}} = H(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 + 0.1 z - 0.2}$$

Obteniendo las Raíces (ceros y polos) de $H(z)$

Para los CEROS: $z^2 + z = 0 \rightarrow z(z+1) = 0$

$$\boxed{z_0 = 0 \quad ; \quad z_1 = -1}$$

$X_1 = \frac{2}{5}$ $\quad X_2 = -\frac{1}{2}$

Para los POLOS: $z^2 + 0.1z - 0.2 = 0$

$$z^2 + 0.1z + 0.0025 - 0.0025 - 0.2 = 0$$

$$(z + 0.05)^2 - 0.2025 = 0$$

$$(z + 0.05)^2 = 0.2025$$

$$z + 0.05 = \pm 0.45$$

$$P_{0\,11} = -0.05 \pm 0.45 \qquad \boxed{\begin{matrix} P_0 = 0.4 \\ P_1 = -0.5 \end{matrix}} \qquad \begin{matrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

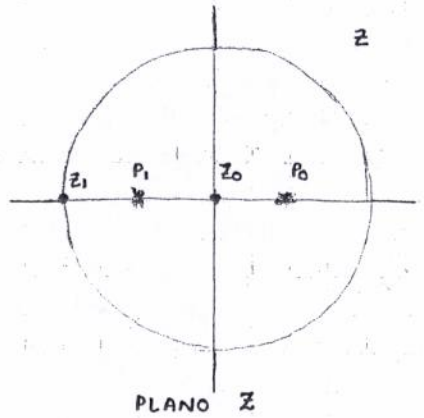
Entonces:

$$H(z) = \frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.5)}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

// Para encontrar el grado de Estabilidad ....
Ubicando los ceros y los polos en el Plano Z.



Dado que ambos polos están dentro DEL CIRCULO DE RADIO UNITARIO
(el más alejado del origen $-P_1 = -0.5$ está dentro del circulo de radio unitario)
el SPLIT es Estable.

Solución b):

Sabemos que: $h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ Aplicando la Transformada Z a H(z) por Integral de Inversión:

$$H(z) = \frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.5)}$$

$$h(n) = \sum_m \text{Res}\left[H(z)\, z^{n-1}\right]_{z=P_m}$$

Para este caso:

$$h(n) = \sum_m \text{Res}\left[\frac{(z+1)\, z^n}{(z-0.4)(z+0.5)}\right]_{z=P_m}$$

Sabemos que:

$$H(z) = \underbrace{\left[\frac{z+1}{(z-0.4)(z+0.5)}\right]}_{H'(z)} \underbrace{z}_{z^r}$$

Como $r=1$ No existen polos en el origen. $(z=0)$ para ningun valor de $n \geq 0$ a considerar en el cálculo de los residuos, solo se tomarán en cuenta los polos de $H'(z)$ esto es:

$P_0 = 0.4$
$P_1 = -0.5$

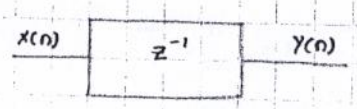
Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. Miércoles 20 de Marzo del 2013.

FORMAS DE REALIZACIÓN

OPERACIONES BÁSICAS:

- OPERACIÓN DE RETARDO UNITARIO



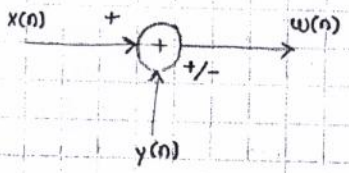
$y(n) = x(n-1)$

Aplicando la Transformada Z

$Y(z) = z^{-1}\, X(z)$

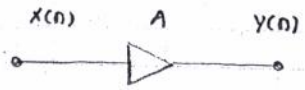
$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = z^{-1}$

- OPERACIÓN SUMADOR / SUSTRACTOR



$w(n) = x(n) \pm y(n)$

- OPERACIÓN DE MULTIPLICADOR POR CONSTANTE



$A \in \mathbb{R}$

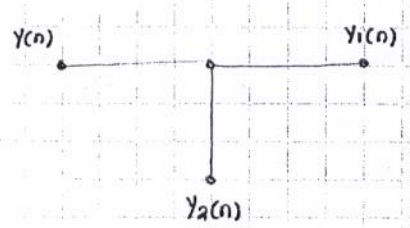
$y(n) = \underset{\text{constante}}{A}\ \underbrace{x(n)}_{\text{secuencia}}$

// Se puede construir Multiplexores, Compuertas AND Microprocesador, microcontrolador de manera lógica desde cualquier nivel de programación (ensamblador, lenguaje de programación)

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

- OPERACIÓN DE BIFORCACION (BRACHING)

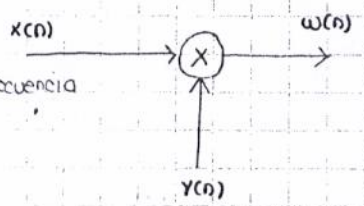


// Bifurcación
Consiste en que se divide la corriente en el proceso de la información.

Se puede agregar que la información que salga de una etapa llegue a una o más etapas.

$Y_1(n) = X(n)$
$Y_2(n) = X(n)$

- OPERACIÓN DE MULTIPLICACIÓN DE SECUENCIAS.



$W(n) = X(n)\ Y(n)$

NOTA:

1: La Finalidad de estas Operaciones es el que se pueden representar la Funcionalidad de cualquier Sistema Discreto.

2: Las Formas de Realización se utilizan con la finalidad de saber como interconectar estas Operaciones Básicas que están siendo caracterizadas por una Función de Transferencia.

FORMAS BÁSICAS DE REALIZACIÓN

Se tienen 2 formas:

1:- FORMA DIRECTA 1 o I — Forma Directa
2:- FORMA DIRECTA 2 o II — Forma Canónica (Formas Básicas)

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

1.- FORMA DIRECTA 1 o I (Forma Directa)

$$H(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_N}{z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \dots + b_N}$$

$$\boxed{H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}} = \frac{Y(z)}{X(z)}}$$

$$Y(z) + b_1 z^{-1} Y(z) + b_2 z^{-2} Y(z) + \dots + b_N z^{-N} (Y(z) = a_0 X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + a_2 z^{-2} X(z) + \dots + a_N z^{-N} X(z)$$

Aplicando la Transformada Z

$$Y(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) + \dots + b_N Y(n-N) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \dots + a_N x(n-N)$$

o bien:

$$Y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \dots + a_N X(n-N) - b_1 Y(n-1) - b_2 Y(n-2) - \dots - b_N Y(n-N)$$

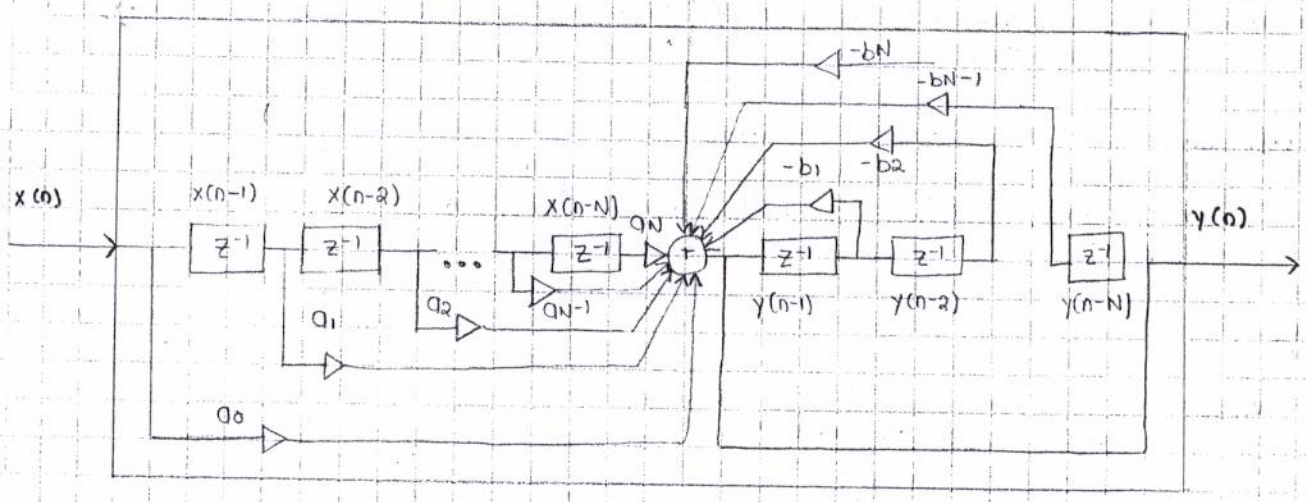


Diagrama de Realización
Forma Directa

NOTA:

Presenta un Retardo
No tiene una Respuesta inmediata (Por esta razón existe la forma Directa 2)
Su unica ventaja, tiene que ver con la forma de Realización Física (Bifurcación)

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Forma Directa 2 o II (Forma Canónica)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}$$

Es decir:

Polinomio del Numerador $\quad N(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}$

Polinomio del Denominador $\quad D(z) = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}$

dado que: $\quad \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{N(z)}{D(z)}$

Entonces: $\quad \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} \Rightarrow Y(z) = N(z)\left[\frac{X(z)}{D(z)}\right]$

Definiendo: $\quad \boxed{W(z) = \frac{X(z)}{D(z)}}$ (A)

Entonces $\quad \boxed{Y(z) = N(z)\, W(z)}$ (B)

De (A)

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}$$

$$W(z) + b_1 z^{-1} W(z) + b_2 z^{-2} W(z) + \dots + b_N z^{-N} W(z) = X(z)$$

Aplicando la Transformada inversa z

$$w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2) + \dots + b_N w(n-N) = x(n)$$

o bien

$$\boxed{w(n) = x(n) - b_1 w(n-1) - b_2 w(n-2) - \dots - b_N w(n-N)}$$

Ecuación de Diferencia 1

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

De (B)

$$Y(z) = a_0\, W(z) + a_1 z^{-1} w(z) + a_2 z^{-2} W(z) + \ldots\ldots + a_N\, w(n-N)$$

Aplicando la Transformada inversa z

$$y(n) = a_0\, w(n) + a_1\, w(n-1) + a_2\, w(n-2) + \ldots\ldots + a_N\, w(n-N)$$

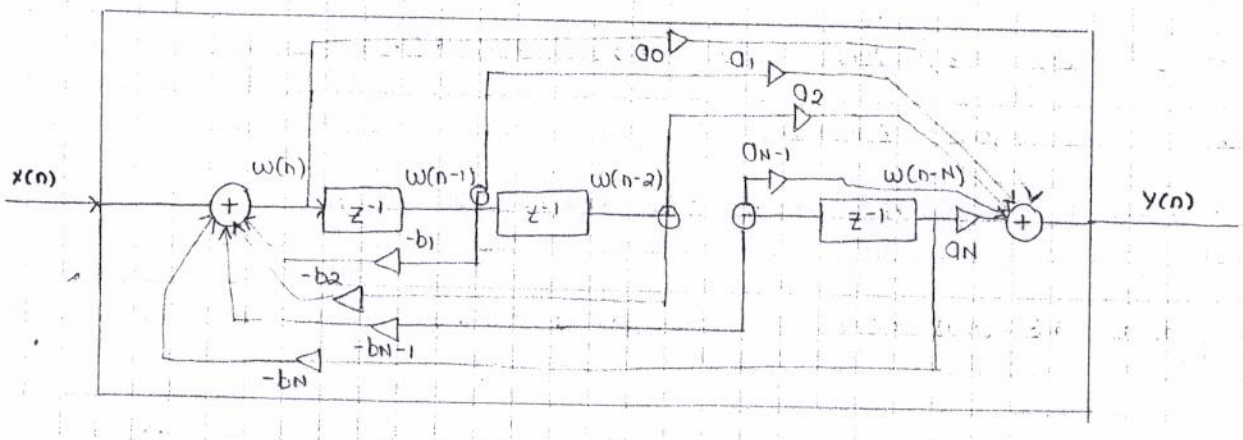


Diagrama de Realización
Forma Directa 2 o II

NOTA:

Presenta solo un Retardo
Mas eficiente
La información fluye, se esparce y se va a tener el valor de $Y(n)$

EJERCICIO:

Desarrolle los diagramas de Realización del SDLIT descrito por la Función de Transferencia:

$$H(z) = \frac{3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

→ este coeficiente tratar de que sea siempre 1

Para:

a) Forma Directa I
b) Forma Directa II

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Solución: a):

a) Forma Directa I

Sabemos que:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

$$Y(z) + 0.1z^{-1}\ Y(z) - 0.2z^{-2}\ Y(z) = 3X(z) + 3.6z^{-1}X(z) + 0.6z^{-2}X(z)$$

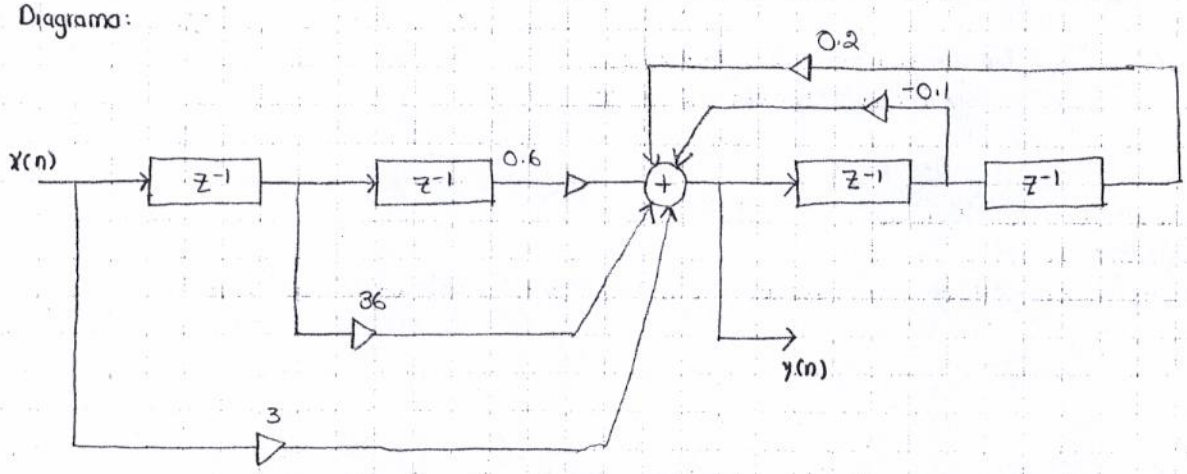
Aplicando la Transformada Z inversa:

$$y(n) + 0.1\ y(n-1) - 0.2\ y(n-2) = 3x(n) + 3.6\ x(n-1) + 0.6\ x(n-2)$$

o bien:

$$\boxed{y(n) = 3x(n) + 3.6\ x(n-1) + 0.6\ x(n-2) - 0.1\ y(n-1) + 0.2\ y(n-2)}$$

Diagrama:



Forma Directa I

Solución b):

b) Forma Directa II

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

Entonces:

$$N(z) = 3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}$$
$$D(z) = 1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Dado que:

$$\frac{Y(z)}{\bar{X}(z)} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Entonces: $Y(z) = N(z)\left[\frac{X(z)}{D(z)}\right]$

Definimos: $\boxed{W(z) = \frac{\bar{X}(z)}{D(z)}}$ (A) y $\boxed{Y(z) = N(z)\,W(z)}$ (B)

De (A)

$$W(z) = \frac{\bar{X}(z)}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

$W(z) + 0.1z^{-1}\,W(z) - 0.2z^{-2}\,W(z) = \bar{X}(z)$

Aplicando la Transformada inversa Z

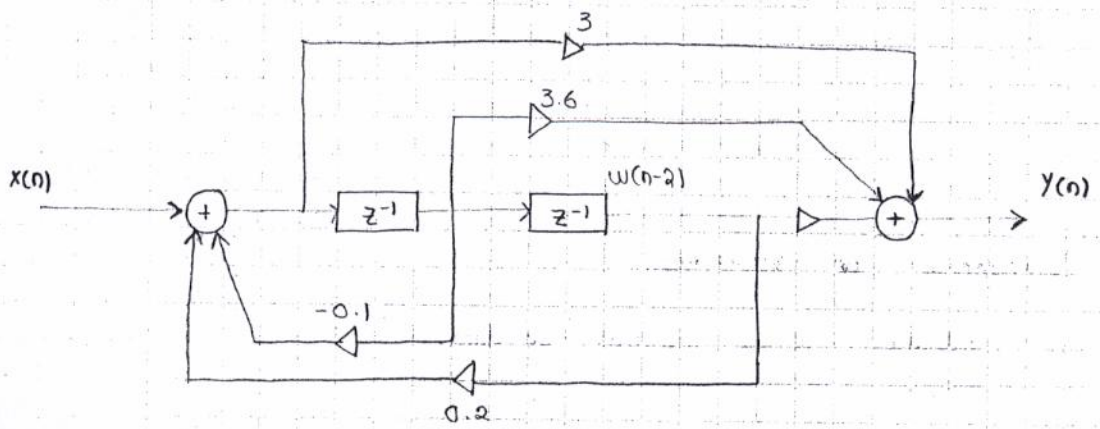
$W(n) + 0.1\,W(n-1) - 0.2\,W(n-2) = X(n)$ o bien $\boxed{W(n) = X(n) - 0.1W(n-1) + 0.2\,W(n-2)}$ (1)

De (B)

$Y(z) = 3W(z) + 3.6z^{-1}\,W(z) + 0.6z^{-2}\,W(z)$

Aplicando la Transformada Z inversa:

$\boxed{Y(n) = 3W(n) + 3.6\,W(n-1) + 0.6\,W(n-2)}$ .... (2)



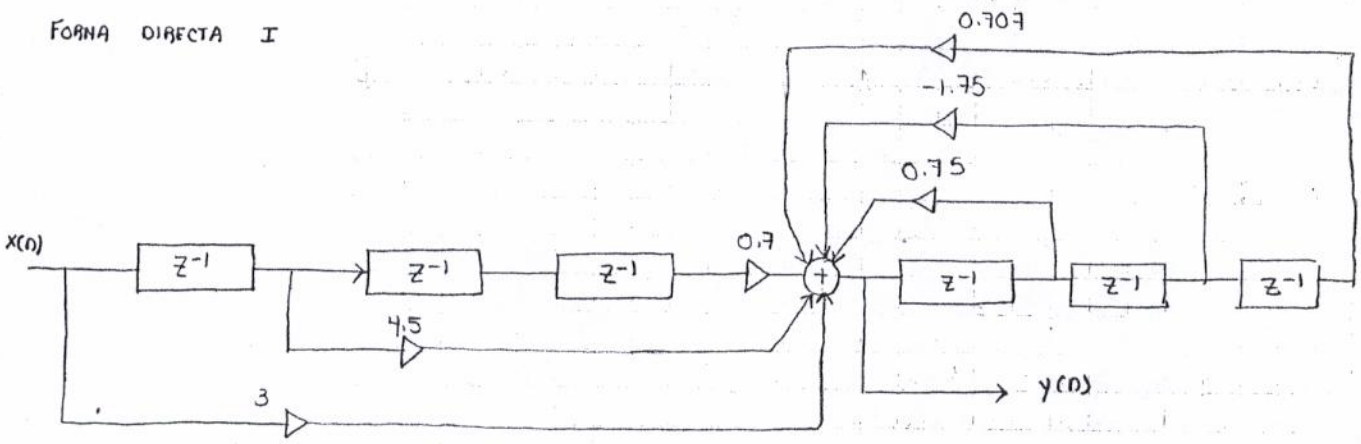
This document is available on studocu

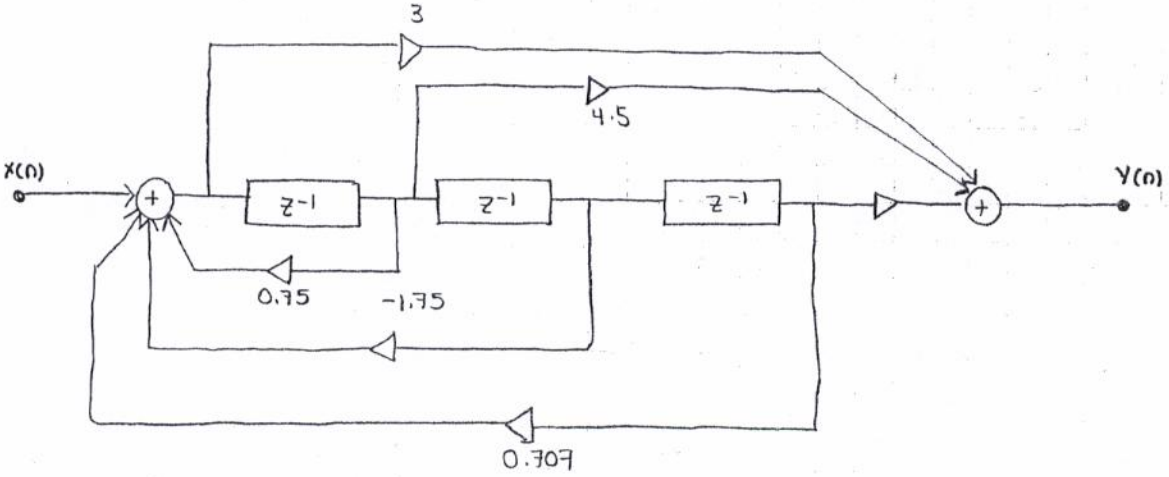
Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Otras Maneras más simples

$$H(z) = \frac{3 + 4.5z^{-1} + 0.7z^{-3}}{1 - 0.75z^{-1} + 1.75z^{-2} - 0.707z^{-3}}$$

FORMA DIRECTA I





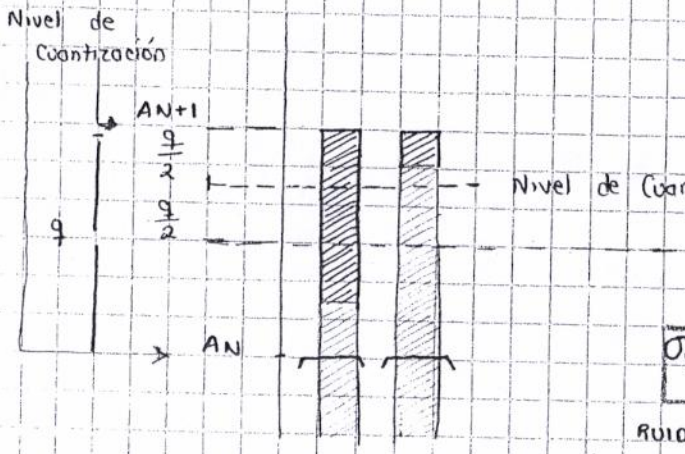
EFECTOS DE CUANTIZACIÓN DE PARÁMETROS.

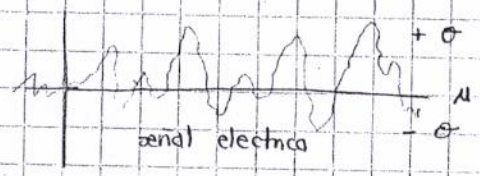
Cuantización → redondeo de las muestras de datos
redondear valores bajo ciertos rangos.

Error promedio → ruido de Cuantización

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

CUANTIZACIÓN (redondeo de las muestras de datos).



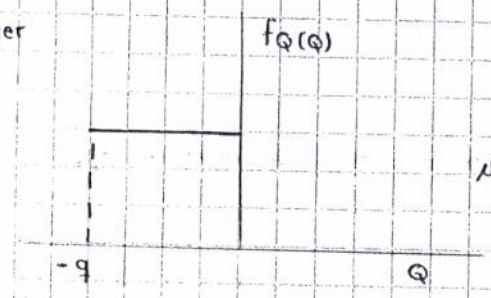


$$\boxed{\sigma_q = \frac{q}{2\sqrt{3}}}$$

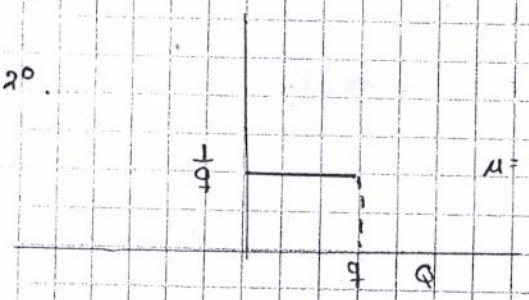
RUIDO DE CUANTIZACIÓN.

Minimo efecto de cuantizacion reducir el nivel de q

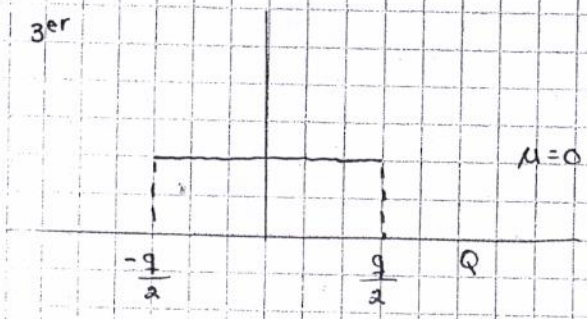
1er



2º.



3er



$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (Q-\mu)^2 \, f_Q(Q) \, dQ$$

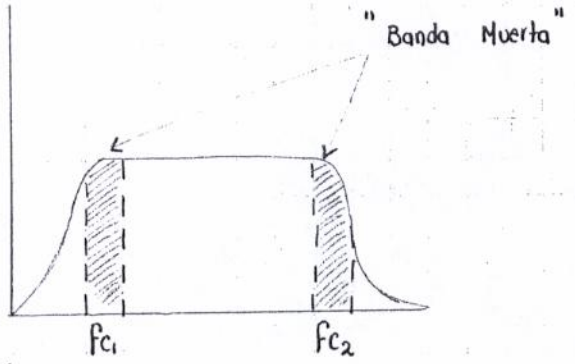
$$\sigma^2 = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} Q^2 \left(\frac{1}{q}\right) dQ$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

ACUMULACION DE ERRORES DE REDONDEO POR LAS OPERACIONES EN EL SISTEMA.

DATO = 0.5 → × 0.85 ← 0.8
CTE = 1.7 → 0.9



LA LONGITUD FINITA DE LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA (a's y b's)

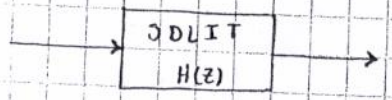
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ . . . $\frac{1}{3}$ valores racionales.

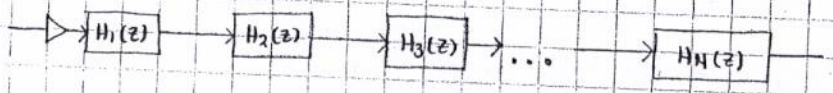
Más crítico conforme el orden del Sistema es Mayor (se incrementa).

FORMA SERIE O CASCADA.
FORMA PARALELO.

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

FORMA DE REALIZACIÓN SERIE O CASCADA.





$$H(z) = A H_1(z) \; H_2(z) \; \ldots \; H_N(z)$$

$$H(z) = A \prod_{i=1}^{N} H_i(z)$$

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_N z^{-N}}$$

$$H(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \ldots + a_N}{z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \ldots + b_N}$$

Obteniendo sus raíces:

$$H(z) = \frac{a_0 (z-z_0)(z-z_1)(z-z_2) \ldots (z-z_N)}{(z-p_0)(z-p_1)(z-p_2) \ldots (z-p_N)}$$

donde:

$A = A_0$

$$H_i(z) = \frac{z - z_i}{z - p_i} = \frac{1 - z_i z^{-1}}{1 - p_i z^{-1}} = \frac{1 + a_{i_1} z^{-1}}{1 + b_{i_1} z^{-1}}$$

donde: $a_i, \; b_i \in \mathbb{R}$

como:

$a_{i_1} = -z_i$ y $b_{i_1} = -p_i$

SECCIÓN DE PRIMER ORDEN CASCADA O SERIE. (Con Cero Real y un Polo Real).

$$H_i(z) = \frac{1 + a_{i_1} z^{-1}}{1 + b_i z^{-1}}$$

con $a_{i_1} = -z_i$ y $b_{i_1} = -p_i$ $\quad (z_i \;\&\; p_i \in \mathbb{R})$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Si los coeficientes a's y b's de la H(z) original son reales, sabemos que si existe un cero y/o polo complejo siempre existirá su cero y/o polo complejo conjugado:

Entonces:

$$H_i(z) = \frac{(z-z_i)(z-z_i^*)}{(z-p_i)(z-p_i^*)} = \frac{z^2 - z_i^* z - z_i z + z_i z_i^*}{z^2 - p_i^* z - p_i z + p_i p_i^*}$$

$$H_i(z) = \frac{z^2 - (z_i^* + z_i) z + z_i z_i^*}{z^2 - (p_i^* + p_i) z + p_i p_i^*} = \frac{z^2 - 2\,Re\{z_i\} + |z_i|^2}{z^2 - 2\,Re\{p_i\} + |p_i|^2}$$

$$H_i(z) = \frac{1 - 2\,Re\{z_i\} z^{-1} + |z_i|^2 z^{-2}}{1 - 2\,Re\{p_i\} z^{-1} + |p_i|^2 z^{-2}} = \frac{1 + a_{i1} z^{-1} + a_{i2} z^{-2}}{1 + b_{i1} z^{-1} + b_{i2} z^{-2}}$$

Sección de 2º orden cascada o serie

(Dos ceros complejos conjugados y/o dos polos complejos conjugados).

$$H_i(z) = \frac{1 + a_{i1} z^{-1} + a_{i2} z^{-2}}{1 + b_{i1} z^{-1} + b_{i2} z^{-2}}$$

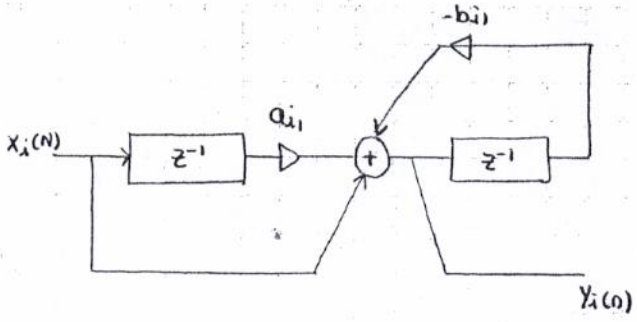
con

$$a_{i1} = -2\,Re\{z_i\}$$
$$a_{i2} = |z_i|^2$$

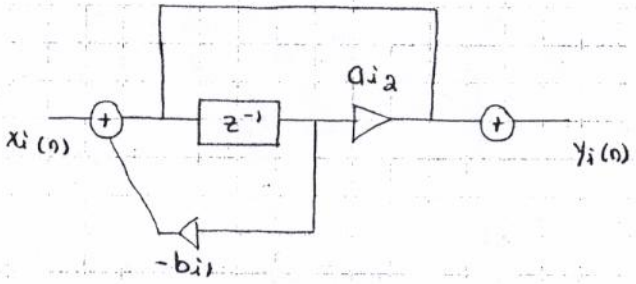
$$b_{i1} = -2\,Re\{p_i\}$$
$$b_{i2} = |p_i|^2$$

→ Seccion de 1er orden cascada.

$$H_i(z) = \frac{1 + a_{i1} z^{-1}}{1 + b_i z^{-1}}$$



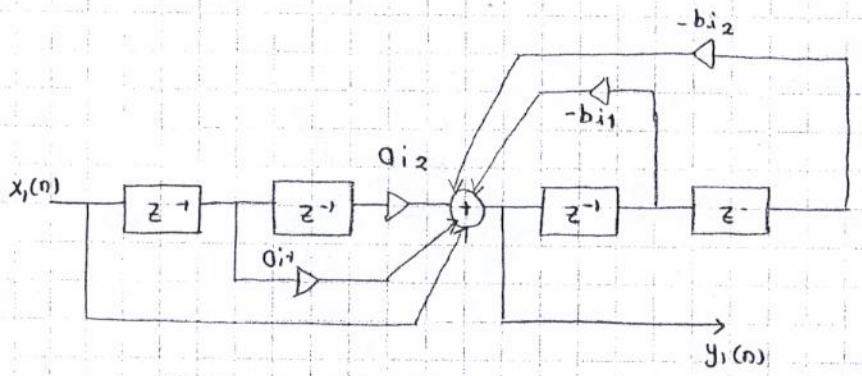
Forma directa 1



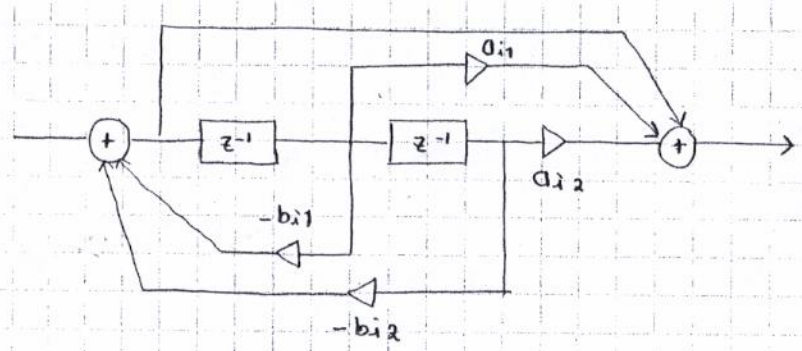
Forma directa 2.

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Sección de 2° orden Cascada



Forma directa uno



Forma directa dos

Ejemplo 1

Obtener la Forma de Realización cascada o serie del SDLIT definido por:

$$H(z) = \frac{3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

Solución:

// pasamos a dos raíces positivas

Multiplicamos y Dividimos z^2

$$H(z) = \frac{3z^2 + 3.6z + 0.6}{z^2 + 0.1z - 0.2}$$

Obteniendo

- ceros dos raíces (ceros y polos)

// Nota siempre sacar el término y considerarlo Ej. 3 que es el coeficiente "A" de la Forma original

- ceros: $3z^2 + 3.6z + 0.6 = 0$

$$3(z^2 + 1.2z + 0.2) = 0$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$3(z^2 + 1.2 + 0.2) = 0$

$z^2 + 1.2z + 0.2 = 0$

$z^2 + 1.2z + 0.36 - 0.36 + 0.2 = 0$

$(z + 0.6)^2 - 0.16 = 0$

$(z + 0.6)^2 = 0.16$

$z + 0.6 = \pm 0.4$

$$\boxed{\begin{array}{l} z_0 = -0.2 \\ z_0 = -1 \end{array}}$$

- Polos : $z^2 + 0.1z - 0.2 = 0$

$z^2 + 0.1z + 0.00025 - 0.00025 - 0.2 = 0$

$(z + 0.05)^2 - 0.2025 = 0$

$(z + 0.05)^2 = 0.2025$

$z + 0.05 = \pm 0.45$

$P_{0_1} = -0.05 \pm 0.45$ | $\boxed{\begin{array}{l} P_0 = 0.4 \\ P_1 = -0.5 \end{array}}$

Entonces

$$H(z) = \frac{3(z+0.2)(z+1)}{(z-0.4)(z+0.5)}$$

donde:

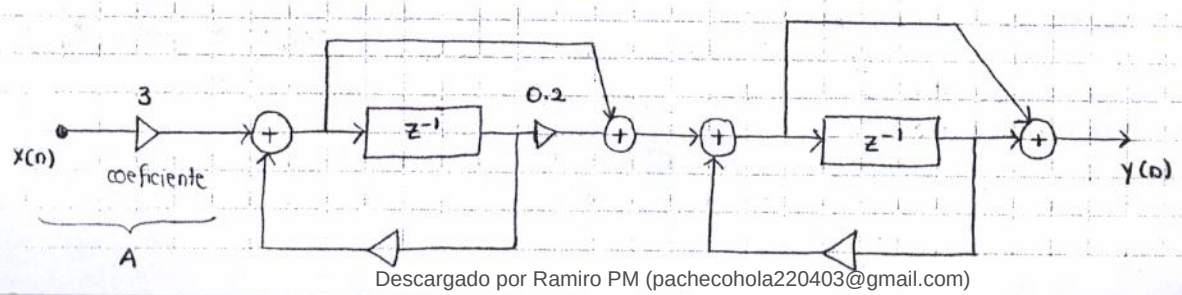
$H(z) = A H_1(z) \cdot H_2(z)$

esto es:

$A = 3$

$$H_1(z) = \frac{z+0.2}{z+0.5} = \frac{1+0.2z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{z+1}{z-0.4} = \frac{1+z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}$$



Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. Jueves 4 de Abril del 2013.

EJEMPLO 2:

La forma parcialmente factorizada de una cierta función de Transferencia esta dada por:

$$H(z) = \frac{2(z-1)(z^2+1.4142136z+1)}{(z+0.5)(z^2-0.9z+0.81)}.$$

Desarrolle la forma de realización en CASCADA del SDLIT usando las secciones del menor orden posible:

SOLUCIÓN:

Dado que el sistema es de 3er orden, el arreglo en cascada con secciones de 1er ORDEN contendrá 3 secciones sí, solo sí los terminos cuadráticos del numerador y del denominador tienen raíces reales.

Para desarrollarlos Calculamos sus raíces (ceros y polos del Sistema)

- CEROS

$z-1=0 \Rightarrow z_0=1$

$z^2+\sqrt{2}z+1=0$

$z^2+\sqrt{2}z+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0$

$(z+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}=0$

$(z+\frac{\sqrt{2}}{2})^2=-\frac{1}{2}$

$(z+\frac{\sqrt{2}}{2})=\pm j\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_{1,2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}=e^{j135^\circ} \\ z_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}=e^{-j135^\circ} \end{aligned}}$$

- POLOS

$z+0.5=0 \Rightarrow P_0=-0.5$

$z^2-0.9z+0.81=0$

$z^2-0.9z+0.2025-0.2025+0.81=0$

$(z-0.45)^2+0.6075=0$

$(z-0.45)^2=-0.6075=-3(0.2025)$

$(z-0.45)=\pm j0.45\sqrt{3}$

$P_{1,2}=0.45\pm j0.45\sqrt{3}$

$$\boxed{\begin{aligned} P_1 &= 0.45+j0.45\sqrt{3}=0.9e^{j60^\circ} \\ P_2 &= 0.45-j0.45\sqrt{3}=0.9e^{-j60^\circ} \end{aligned}}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$H(z) = \frac{2(z-1)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{(z+0.5)(z-0.45-j0.45\sqrt{3})(z-0.45+j0.45\sqrt{3})}$$

$$H(z) = \frac{2(z-1)(z-e^{j135^\circ})(z-e^{-j135^\circ})}{(z+0.5)(z-0.9e^{j60^\circ})(z-0.9e^{-j90^\circ})}$$

Dado que las raíces de ambos terminos cuadráticos son complejos (conjugados) no es posible representarlas como dos secciones de 1er orden
Por lo tanto el arreglo en cascada con las secciones de menor orden posible será de una sección de 1er orden y una sección de segundo orden, esto es:

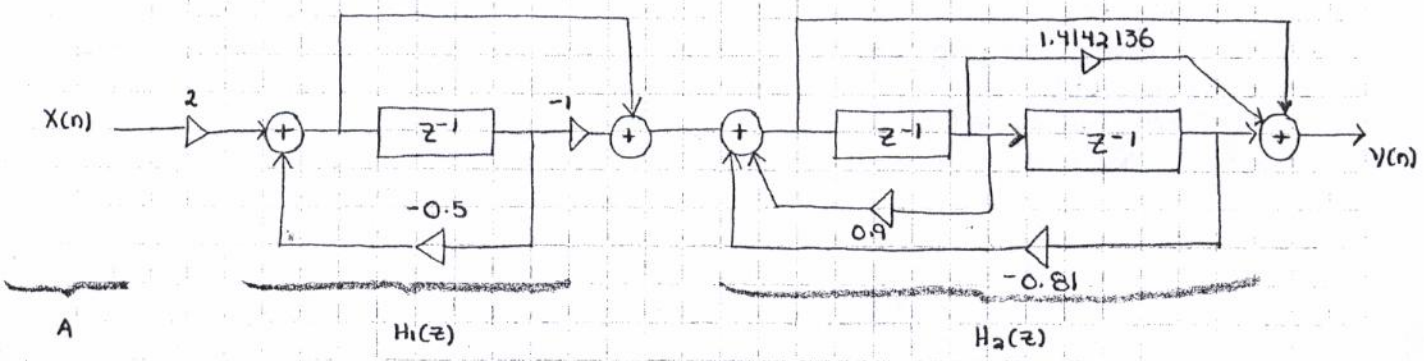
$$H(z) = \frac{2(z-1)(z^2+1.4142136z+1)}{(z+0.5)(z^2-0.9z+0.81)}$$

donde:

$A=2 \qquad H_1(z) = \frac{z-1}{z+0.5} = \frac{1-z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$

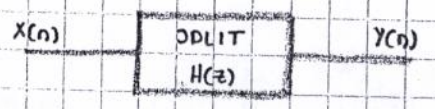
y

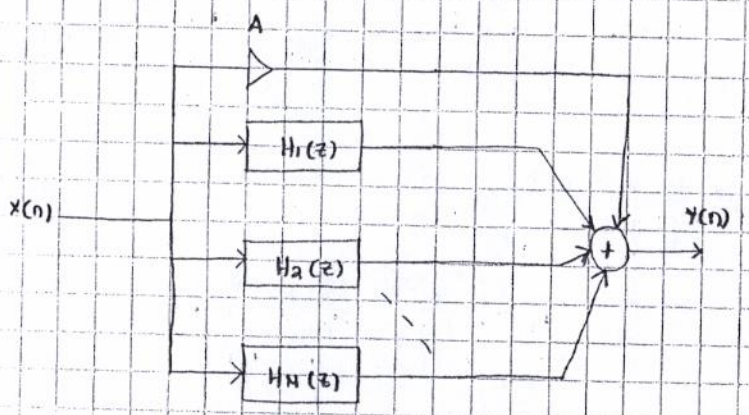
$$H_2(z) = \frac{z^2+1.4142136+1}{z^2-0.9z+0.81} = \frac{1+1.4142136z^{-1}+z^{-2}}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}$$



Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Forma de Realizacion en Paralelo





$$H(z) = A + H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_N(z)$$

$$H(z) = A + \sum_{i=1}^{N} H_i(z)$$

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}$$

Multiplicando y Dividiendo por z^N

$$H(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_N}{z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \dots + b_N}$$

Obteniendo sus raíces (ceros y polos)

$$H(z) = \frac{a_0 (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_N)}{(z - P_0)(z - P_1)(z - P_2) \dots (z - P_N)}$$

Por la expansión en fracciones parciales

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{z} + \frac{A_0}{z - P_0} + \frac{A_1}{z - P_1} + \frac{A_2}{z - P_2} + \dots + \frac{A_N z}{z - P_N}$$

donde:

$$H_i(z) = \frac{A_i z}{z - P_i} = \frac{A_i}{1 - P_i z^{-1}} = \frac{A_{i0}}{1 + b_{i1} z^{-1}}$$

donde:

a_{i0} y $b_{i1} \in \mathbb{R}$ $\qquad a_{i0} = A_i$ y $B_i b_i = -P_i$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Seccion de 1er orden Paralelo un polo real.

$$H_i(z) = \frac{a_{i0}}{1+b_{i1}z^{-1}} \left| \begin{array}{l} a_{i0} = A_i \\ b_{i1} = -P_i \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

Si los coeficientes a's y b's de H(z) son TODOS REALES cuando existe un polo complejo P_i, siempre existirá su polo complejo conjugado P_i^* y además los coeficientes de la expansión en fracciones parciales correspondientes a otros terminos son también complejos conjugados entre sí, entonces:

$$H_i(z) = \frac{A_i z}{z-P_i} + \frac{A_i^* z}{z-P_i^*} = \frac{A_i z^2 - A_i P_i^* z + A_i^* z - A_i^* P_i z}{z^2 - P_i^* z - P_i z + P_i P_i^*}$$

$$H_i(z) = \frac{(A_i + A_i^*)z^2 - (A_i P_i^* + A_i^* P_i)z}{z^2 - (P_i + P_i^*)z + P_i P_i^*} = \frac{2\,Re\{A_i\}z^2 - 2Re\{A_i P_i^*\}z}{z^2 - 2Re\{P_i\}z + |P_i|^2}$$

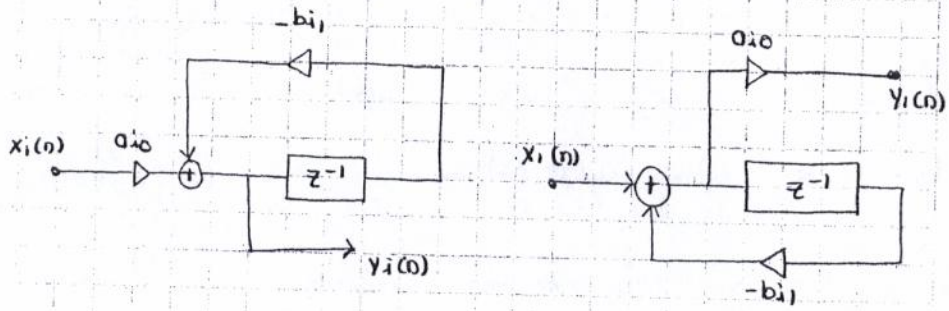
$$H_i(z) = \frac{2\,Re\{A_i\} - 2Re\{A_i P_i^*\}z^{-1}}{1 - 2\,Re\{P_i\}z^{-1} + |P_i|^2 z^{-2}} = \frac{A_{i0} + A_{i1}z^{-1}}{1 + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2}}$$

Sección de 2º orden Paralelo dos polos complejos conjugados.

$$H_i(z) = \frac{a_{i0} + a_{i0}z^{-1}}{1 + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2}} \qquad \left.\begin{array}{l} a_{i0} = 2Re\{A_i\}; \\ a_{i1} = -2Re\{A_i P_i^*\} \\ b_{i1} = -2Re\{P_i\} \\ b_{i2} = |P_i|^2 \end{array}\right\} \in \mathbb{R}$$

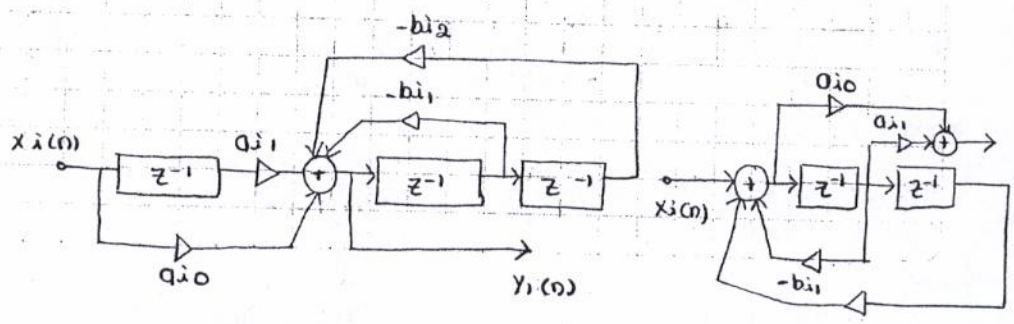
Seccion de 1er orden Paralelo

$$H_i(z) = \frac{a_{i0}}{1+b_{i1}z^{-1}}$$



Sección de 2º orden Paralelo

$$H_i(z) = \frac{a_{i0} + a_{i1}z^{-1}}{1 + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2}}$$



Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Martes 9 de Abril del 2013.

EJEMPLO 1:-

Obtener la Forma de Realizacion en Paralelo del SDLIT descrito por:

$$H(z) = \frac{3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

SOLUCIÓN:

De un ejemplo anterior sabemos

$$H(z) = \frac{3(z+1)(z+0.2)}{(z-0.4)(z+0.5)}$$

Aplicando la expansión en fracciones parciales

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{3(z+1)(z+0.2)}{z(z-0.4)(z+0.5)} = \frac{A}{z} + \frac{A_0}{z-0.4} + \frac{A_1}{z+0.5}$$

donde:

$$A = \frac{H(z)}{z}(z-0)\Big|_{z=0} = \frac{3(z+1)(z+0.2)}{(z-0.4)(z+0.5)}\Big|_{z=0} = \frac{3(1)(0.2)}{(-0.4)(0.5)} = -3$$

$$A_0 = \frac{H(z)}{z}(z-0.4)\Big|_{z=0.4} = \frac{3(z+1)(z+0.2)}{z(z+0.5)}\Big|_{z=0.4} = \frac{3(1.4)(0.6)}{0.4(0.9)} = 7$$

$$A_1 = \frac{H(z)}{z}(z+0.5)\Big|_{z=-0.5} = \frac{3(z+1)(z+0.2)}{z(z-0.4)}\Big|_{z=-0.5} = \frac{3(0.5)(-0.3)}{(-0.5)(-0.9)} = -1$$

Entonces:

$$H(z) = -3 + \frac{7z}{z-0.4} + \frac{(-z)}{z+0.5}$$

o bien:

$$H(z) = -3 + \frac{7}{1-0.4z^{-1}} + \frac{(-1)}{1+0.5z^{-1}}$$

$$H(z) = A + H_1(z) + H_2(z)$$

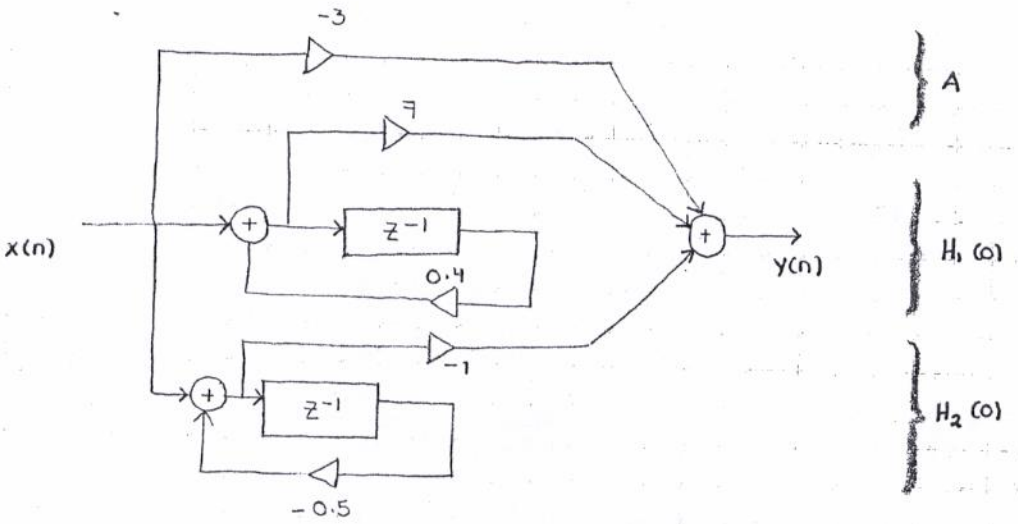
con:

$A = -3$

$$H_1(z) = \frac{7}{1-0.4z^{-1}} \qquad H_2(z) = \frac{-1}{1+0.5z^{-1}}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)



EJEMPLO 2

Obtener la Forma Paralelo del SDLIT descrito por:

$$H(z) = \frac{2(z)^{-1}\,(z^2 + 1.4142136\,z + 1)}{(z+0.5)\,(z^2 - 0.9z + 0.81)}$$

SOLUCIÓN:

De un Ejemplo anterior sabemos que:

$$H(z) = \frac{2(z-1)(z^2 + 1.4142136z + 1)}{(z+0.5)(z^2 - 0.9z + 0.81)} = \frac{2(z-1)\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{(z+0.5)(z - 0.45 - j0.45\sqrt{3})(z - 0.45 + j0.45\sqrt{3})}$$

$$H(z) = \frac{2(z-1)(z - e^{j135^\circ})(z - e^{j135^\circ})}{(z+0.5)(z - 0.9e^{j60^\circ})(z - 0.9e^{j60^\circ})}$$

Por la expansión de Fracciones parciales

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{2(z-1)\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{z(z+0.5)(z - 0.45 - j0.45\sqrt{3})(z - 0.45 + j0.45\sqrt{3})} = \frac{A}{z} + \frac{A_0}{z+0.5} + \frac{A_1}{z - 0.45 - j0.45\sqrt{3}} + \frac{A_2}{z - 0.45 + j0.45\sqrt{3}}$$

donde.

$$\boxed{A = \frac{H(z)}{z}(z-0)\Big|_{z=0} = \frac{2(z-1)(z^2 + 1.4142136\,z + 1)}{(z+0.5)(z^2 - 0.9z + 0.81)}\Bigg|_{z=0} = \frac{2(-1)}{(0.5)(0.81)} = -4.9382716}$$

$$A_0 = \frac{H(z)}{z}\Bigg|_{z=-0.5} = \frac{2(z-1)(z^2 + 1.4142136\,z + 1)}{z(z^2 - 0.9z + 0.81)}\Bigg|_{z=-0.5} = \frac{2(-1.5)(0.25 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1)}{(-0.5)(0.25 + 0.45 + 0.81)}$$

$$\boxed{A_0 = 2.1571916}$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$A_1 = \frac{H(z)}{z}(z-0.45-j0.45\sqrt{3})\Big|_{z=0.45+j0.45\sqrt{3}} = \frac{2(z-1)(z+\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2})(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2})}{z(z+0.5)(z-0.45+j0.45\sqrt{3})}\Bigg|_{z=0.45+j0.45\sqrt{3}}$$

$$A_1 = \frac{2(-0.55+j0.45\sqrt{3})\left[(0.45+\frac{\sqrt{2}}{2})+j(0.45\sqrt{3})-\frac{\sqrt{2}}{2})\right]\left[(0.45+\frac{\sqrt{2}}{2})+j(0.45)\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2})\right]}{(0.45+j0.45\sqrt{3})(0.95+j0.45\sqrt{3})(j0.9\sqrt{3})}$$

$$A_1 = \frac{2(-0.9539392\, e^{j125^\circ})(1.1593644\, e^{j36^\circ})(1.8837905\, e^{j52.1^\circ})}{(0.9e^{j60^\circ})(1.2288206\, e^{j39.4^\circ})(1.5588457\, e^{j90^\circ})}$$

$$\boxed{A_1 = 2.4169582\, e^{-j8.5^\circ}}$$

$$A_2 = \frac{H(z)}{z}(z-0.45+j0.45\sqrt{3})\Big|_{z=0.45-j0.45\sqrt{3}} = \frac{2(z-1)(z+\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2})(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2})}{z(z+0.5)(z-0.45-j0.45\sqrt{3})}\Bigg|_{z=0.45-j0.45\sqrt{3}}$$

$$A_2 = \frac{2(-0.53-j0.45\sqrt{3})\left[(0.45+\frac{\sqrt{2}}{2})-j(0.45\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2})\right]\left[(0.45+\frac{\sqrt{2}}{2})-j(0.45\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2})\right]}{(0.45-j0.45\sqrt{3})(0.95-j0.45\sqrt{3})(-j0.9\sqrt{3})}$$

$$\boxed{A_2 = 2.4169582\, e^{j8.5}}$$

NOTA:

Si todos son complejos conjugados el resultado es el mismo que el anterior (A_1)

Entonces:

$$H(z) = -4.9382716 + \frac{2.1571916\,z}{z+0.5} + \frac{2.4169582\, e^{-j8.5^\circ}}{z-0.9e^{j60^\circ}} + \frac{2.4169582\, e^{j8.5}}{z-0.9\, e^{-j60^\circ}}$$

$$-4.9382716 + \frac{2.1571916\,z}{z+0.5} + \frac{2.4169582e^{-j8.5^\circ}z^2 - 2.4169582\cdot 0.9\, e^{-j68.5}z + 2.4169582e^{j8.5}z^2 - 2.4169(0.9)e^{j68.5}}{z^2 - 0.9e^{-j60^\circ}z - 0.9e^{j60^\circ}z + 0.81}$$

$$-4.9382716 + \frac{2.1571916z}{z+0.5} + \frac{(2.4169582e^{-j8.5^\circ} + 2.4169582e^{j8.5^\circ})z^2 - [(2.4169582)(0.9)e^{-j68.5^\circ} + 2.4169(0.9)e^{j68.5^\circ}z}{z^2 - (0.9\, e^{-j60^\circ} + 0.9\, e^{j60^\circ})z + 0.81}$$

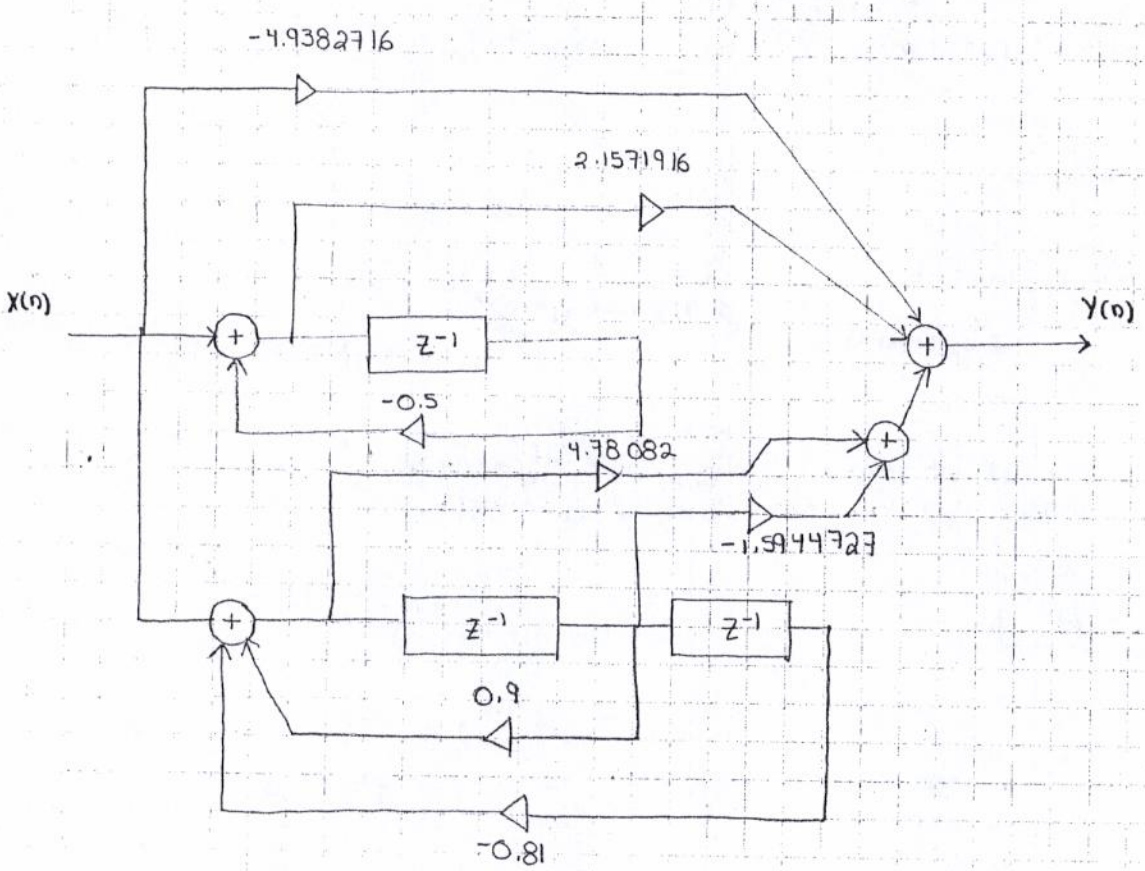
$$H(z) = -4.9382716 + \frac{2.157196\,z}{z+0.5} + \frac{4.7808\,z^2 - 1.5944727\,z}{z^2 - 0.9z + 0.81}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$H(z) = -4.9382716 + \frac{2.1571916}{1+0.5z^{-1}} + \frac{4.78082 - 1.5944727\,z^{-1}}{1-0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

$$H(z) = A + H_1(z) + H_2(z)$$



Checar Respuesta en Estado Estacionario

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. Miercoles 10 de Abril del 2013

RESPUESTA EN ESTADO ESTACIONARIO. "Respuesta en Frecuencia."

$$y(n) = \underset{\text{Respuesta Natural}}{y_H(n)} + \underset{\text{Respuesta Forzada}}{y_{\bar{x}}(n)} \qquad \text{Respuesta Total.}$$

$y_H(n)$ tiene el mismo comportamiento que $h(n)$
$y_{\bar{x}}(n)$ tiene el mismo comportamiento que $x(n)$

Para los SDLIT ESTABLES.

$$\lim_{n\to\infty} h(n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_H(n) = 0$$

$$y_H(n) = y_{\text{transitoria}}$$

Finalmente:

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = \underset{\text{estado estacionario}}{y_{\bar{x}}(n)} = y_{e.e}(n)$$

Para un SDLIT ESTABLE.
si la entrada es:

$$x(n) = \bar{x} e^{j(n\omega_0 T + \phi_x)}$$

entonces la salida en estado estacionario

$$y_{ee}(n) = \bar{y} e^{j(n\omega_0 T + \phi_y)}$$

Sabemos que:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow Y(z) = H(z)\,\bar{X}(z)$$

$$y \quad y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$$

para $x(n) = \bar{x} e^{j(n\omega_0 T + \phi_x)}$

Entonces: $$X(z) = \frac{\bar{x} e^{j\phi_x} z}{z - e^{j\omega_0 T}}$$

entonces.

$$Y(z) = \frac{H(z)\,\bar{x} e^{j\phi_x} z}{z - e^{j\omega_0 T}} \quad \text{o bien:} \quad Y(z) = \frac{(z-z_0)(z-z_{H1})\cdots(z-z_{HN})}{(z-p_{H0})(z-p_{H1})\cdots(z-p_{HN})} \frac{\bar{x} e^{j\phi_x} z}{(z-e^{j\omega_0 T})}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Por la expansión en Fracciones Parciales

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A_{H0}}{z - P_{H0}} + \frac{A_{H1}}{z - P_{H1}} + \dots\dots + \frac{A_{HN}}{z - P_{HN}} + \frac{A_{\bar{x}}}{z - e^{j\omega_0 T}}$$

y por Tablas:

$$Y(n) = \underbrace{A_{H0}\,(P_{H0})^n + A_{H1}\,(P_{H1})^n + \dots\dots + A_{HN}\,(P_{HN})^n}_{y_H(n) = y(n)\ \text{transitorio}} + \underbrace{\boxed{A_{\bar{x}}}\,e^{jn\omega_0 T}}_{y_{\bar{x}}(n) = y_{e.e}(n)}$$

donde:

$$A_{\bar{x}} = \frac{Y(z)}{z}\,(z - e^{j\omega_0 T})\Big|_{z = e^{j\omega_0 T}} = H(z)\,\bar{x}\,e^{j\phi x}\,(z - e^{j\omega_0 T})\Big|_{z = e^{j\omega_0 T}}$$

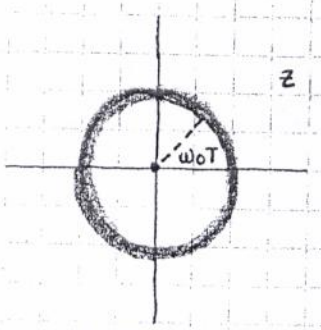
$$A_{\bar{x}} = H(e^{j\omega_0 T})\,\bar{x}\,e^{j\phi x}$$

$$y_{ee}(n) = H(e^{j\omega_0 T})\,\bar{x}\,e^{j\phi x}\,e^{jn\omega_0 T}$$

$$y_{ee}(n) = H(e^{j\omega_0 T})\,\bar{x}\,e^{j(n\omega_0 T + \phi x)}$$

$$\boxed{y_{ee}(n) = H(e^{j\omega_0 T})\,x(n)} \qquad \boxed{H(e^{j\omega_0 T}) = H(z)\Big|_{z = e^{j\omega_0 T}}} \rightarrow$$

FUNCIÓN TRANSFERENCIA en el plano z



PLANO Z

NOTA:

SISTEMA ESTABLE, establece que sus Polos están dentro del Radio Unitario

$$y_{ee}(n) = Y e^{j(n\omega_0 T + \phi y)} = H(e^{j\omega_0 T})\,\bar{x}\,e^{j(n\omega_0 T + \phi x)}$$

$$H(e^{j\omega_0 T}) = \frac{Y e^{j(n\omega_0 T + \phi y)}}{\bar{x}\,e^{j(n\omega_0 T + \phi x)}} = \frac{Y}{\bar{x}}\,e^{j(\phi y + \phi x)}$$

Generalizando para cualquier valor de ωT

$0 \leq \omega T \leq 2\pi$ ó $-\pi \leq \omega T \leq \pi$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$\boxed{H(e^{j\omega T}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}}}$$

$H(e^{j\omega T}) = \frac{Y}{X} e^{j(\phi_y - \phi_x)}$ → Respuesta en Frecuencia

$|H(e^{j\omega T})| = A_0(f) = \frac{Y}{X}$ → Respuesta en Amplitud o Magnitud

$\arg\{H(e^{j\omega T})\} = \beta_0(f) = \phi_y - \phi_x$ → Respuesta en Fase.

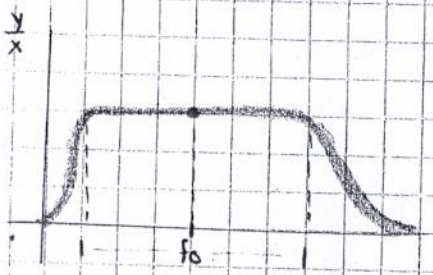
NOTA:

0.7071 valor eficaz de una señal.

Para los Sistemas Analógicos

Amplificador

$\beta_0(f) = x \text{ rad} = \phi_y - \phi_x$

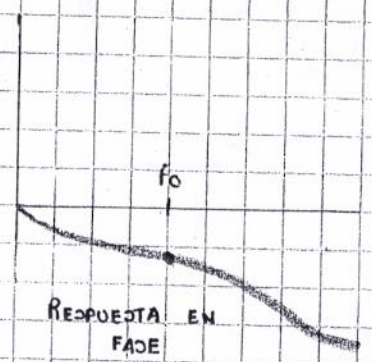


RESPUESTA EN AMPLITUD

$\beta_0(f) = x^\circ$ o rad

T_d — x° o x rad

$\frac{1}{f} = T$ — 360° o 2π rad

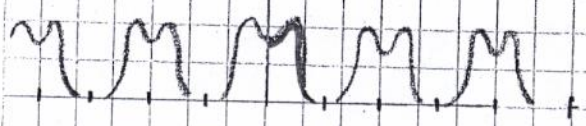


RESPUESTA EN FASE

$Y = A_0(f)\bar{X}$ $\quad \phi_y = \beta(f) + \phi_{\bar{X}}$

Cuando $H(z)$ tiene solo coeficientes (a's y b's) REALES la respuesta en Amplitud $A_0(f)$ tiene simetría PAR y la Respuesta en fase $\beta_0(f)$ tiene simetría IMPAR.

$A_0(f) = |H(e^{j\omega T})|$



$H(e^{j\omega T}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}}$

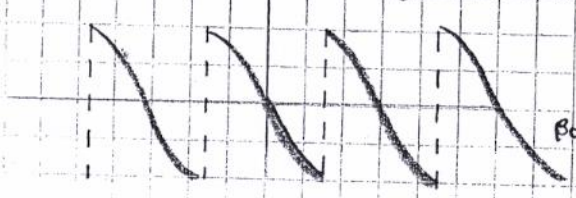
con:

$0 \le \omega T \le 2\pi \qquad -\pi \le \omega T \le \pi$

$0 \le 2\pi f \le 2\pi \qquad -\pi \le 2\pi f \le \pi$

$0 \le f \le \frac{1}{T} = f_s \qquad -\frac{f}{2} = -\frac{1}{2T} \le f \le \frac{1}{2T} = \frac{f_s}{2}$

$\beta_0(f) = \arg\{H(e^{j\omega T})\}$



$\beta_0(-f) = -\beta_0(f)$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Entonces el rango de valores inambiguos (unicos) de $A_0(f)$ y $\beta_0(f)$ están en $0 \le f \le \frac{f_s}{2}$

Se define a

$f_0 = \frac{f_s}{2}$ frecuencia de doblado (folding).

$\nu_1 = \frac{f_1}{f_0}$ frecuencia Normalizada

Entonces.

$f_0 = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T} \Rightarrow 2T \le \frac{1}{f_0}$

$\omega T = 2\pi f T = \pi \frac{f}{f_0} = \pi \nu$

$H(e^{j\omega T}) = H(e^{j\omega f_0}) = H(e^{j\pi\nu})$

$H(e^{j\omega T}) = H(e^{j\pi\nu}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\pi\nu}}$

Como:

$0 \le \omega T \le \pi$ Rango unico

$0 \le 2\pi f T \le \pi$

$0 \le \pi \frac{f}{f_0} \le \pi$

$0 \le \pi\nu \le \pi$

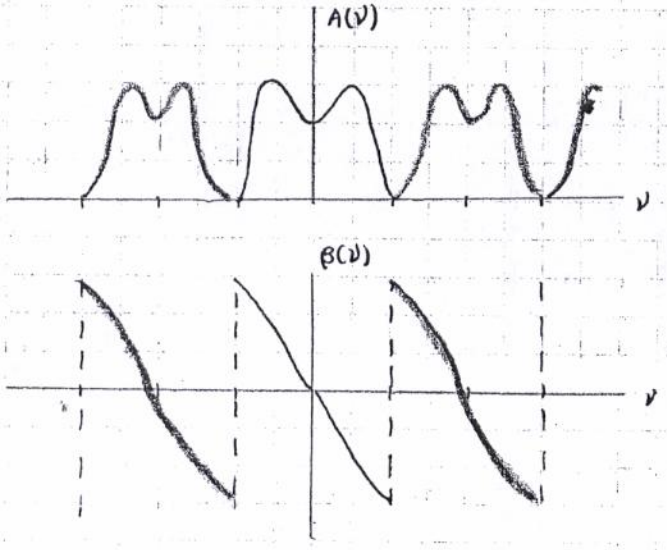
$\boxed{0 \le \nu \le 1}$

Jueves 11 de Abril del 2013

Además

$|H(e^{j\omega T})| = A_0(f) = |H(e^{j\pi\nu})| = A(\nu)$

$\arg\{H(e^{j\omega T})\} = \beta_0(f) = \arg\{H(e^{j\pi\nu})\} = \beta(\nu)$



Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Recorrer

$\nu_c = \frac{f_c}{f_0} \Rightarrow f_c = \nu_c f_0$

Si $f_s = 100\,Hz \rightarrow f_0 = 50\,Hz$

f_s = frecuencia de muestreo
f_0 = frecuencia folding.

con $\nu_c = 0.6 \Rightarrow \boxed{f_c = 0.6\,(50) = 30\,Hz}$

Si $f_s = 500\,Hz \Rightarrow f_0 = 250\,Hz$

con $\nu_c = 0.6 \Rightarrow \boxed{f_c = 0.6\,(250) = 150\,Hz}$

EJEMPLO 1:

Determine la Respuesta en frecuencia (Amplitud y Fase) para el SDLIT descrito por la ecuación de diferencia:

$$y(n) = 0.5\,y(n-1) + x(n) + x(n-1)$$

Además determine la salida en estado estacionario para una entrada senoidal de Amplitud 10 y frecuencia 100 Hz a una frecuencia de muestreo de 1 kHz

SOLUCIÓN:

Sabemos que:

$H(e^{j\pi\nu}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\pi\nu}}$ siempre que el sistema sea Estable.

Determinando el grado de estabilidad del sistema determinamos Funcion Transferencia, → Raices y Polos aplicando a la ecuación de diferencia, considerando al sistema inicialmente relajado.

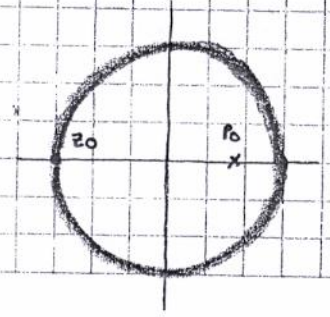
$Y(z) = 0.5z^{-1}\,Y(z) + X(z) + z^{-1}\,X(z)$

$Y(z)\left[1 - 0.5z^{-1}\right] = X(z)\left[1 + z^{-1}\right]$

$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} = \frac{z+1}{z-0.5}$ // sistema 1er orden (1 Polo y un cero)

Con $z_0 = -1$ y $P_0 = 0.5$

ubicando al cero y al polo en el plano z



PLANO Z

Dado que el polo está dentro del circulo de radio unitario el SDLIT es ESTABLE

Entonces:

$$H(e^{j\pi\nu}) = \frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\Bigg|_{z=e^{j\pi\nu}}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$H(e^{j\pi\nu}) = \frac{1+e^{-j\pi\nu}}{1-0.5e^{j\pi\nu}}$$

$$H(e^{j\pi\nu}) = \frac{1+\cos(\pi\nu) - j\,\text{sen}(\pi\nu)}{1-0.5\cos(\pi\nu) + j0.5\,\text{sen}(\pi\nu)}$$

$$H(e^{j\pi\nu}) = \frac{[1+\cos(\pi\nu)] - j\omega(\pi\nu)}{[1-0.5\cos(\pi\nu)] + j0.5\,\text{sen}(\pi\nu)}$$

$$|H(e^{j\pi\nu})| = A(\nu) = \left[\frac{[1+\cos(\pi\nu)]^2 + \text{Sen}^2(\pi\nu)}{[1-0.5\cos(\pi\nu)]^2 + 0.25\,\text{Sen}^2\pi\nu}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\arg|H(e^{j\omega\nu})| = \beta(\nu) = \tan^{-1}\left[\frac{-\text{sen}(\pi\nu)}{1+\cos(\pi\nu)}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{0.5\,\text{Sen}(\pi\nu)}{1-0.5\,\text{Sen}(\pi\nu)}\right]$$

o bien:

$$A(\nu) = \left[\frac{2+2\cos(\pi\nu)}{1.25-\cos(\pi\nu)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta(\nu) = -\tan^{-1}\left[3\tan\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)\right]$$

Si $f_s = 1000$ Hz $\Rightarrow$ $f_0 = 500$ Hz

a una entrada: $\bar{X}$

$$x(n) = A\,\text{sen}(n\omega_1 T)$$

Con $\bar{X}$ $A = 10$; $f_1 = 100$ Hz $\Rightarrow$ $\omega_1 = 2\pi(100) = 200\pi$ $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$

y $T = \frac{1}{1000} = 0.001$ seg.

$$x(n) = 10\,\text{Sen}\left[n\left(\frac{200\pi}{1000}\right)\right] = 10\,\text{Sen}(0.2\pi n)$$

o bien: $\bar{X}$

$$x(n) = A\,\text{Sen}(\pi\nu_1 n) = 10\,\text{Sen}(0.2\pi n)$$

donde:

$$\boxed{\nu_1 = \frac{f_1}{f_0} = \frac{100}{500} = 0.2}$$

Entonces:

$$y_{ee}(n) = Y\,\text{sen}(0.2\pi n + \phi_y)$$

donde:

$$A(\nu_1) = \frac{Y}{\bar{X}} \Rightarrow Y = A(\nu_1)\bar{X}$$

y $\beta(\nu_1) = \phi_y - \phi_x \Rightarrow \phi_y = \beta(\nu_1) + \phi_x$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Calculando

$A(\nu_1) = A(0.2) = 2.8643455$

$\beta(\nu_1) = \beta(0.2) = -0.7726171 \text{ rad} = -44.27°$

Sigue que:

$Y = 2.8643455\,(10) = 28.643455$

$\phi_y = -0.7726171 \text{ rad} = -44.27°$

Finalmente

$$\boxed{\begin{aligned} y_{ee}(n) &= 28.643455 \text{ Sen } (0.2\pi n - 0.7726171) \\ &= 28.643455 \text{ Sen } (36° n - 44.27°) \end{aligned}}$$

// Salida en Estado Estacionario

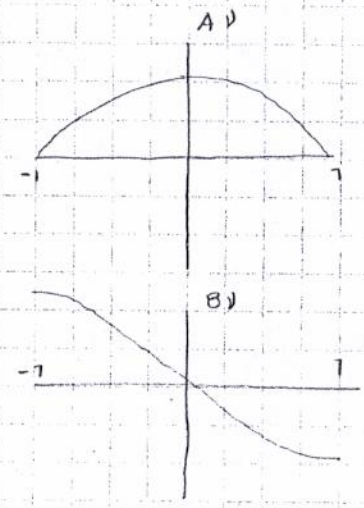
ADICIONAL

Si $f_2 = 200$ Hz $\rightarrow f_s = 1000$ Hz

$\nu_2 = \frac{200}{500} = 0.4$ $\quad x(n) = 10 \text{ Sen } (0.4\pi n)$

$A(0.4) = 1.668003$

$\beta(0.4) = -1.1406334 \text{ rad} = -65.35°$



Sigue que

$Y = 1.668003\,(10) = 16.68003$

$\phi_y = -1.1406534 \text{ rad} = -65.35°$

Finalmente

$y_{ee}(n) = 16.68003 \text{ Sen } (0.4\pi n - 1.1406534)$

$= 16.08003 \text{ Sen } (72° n - 65.35°)$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Ejemplo 2

Determine las expresiones generales de las respuestas en Amplitud y en fase del SDLIT descrito por

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}$$

Solución:

Sabemos que $H(e^{j\pi\nu}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\pi\nu}}$

Solo si el SDLIT es ESTABLE multiplicando y dividiendo por z^2

$$H(z) = \frac{z^2+z}{z^2+0.1z-0.2}$$

Obteniendo sus raíces (ceros y polos)

-CEROS

$z^2+z=0 \Rightarrow z(z+1)=0 \therefore \boxed{z_0=0 \; ; \; z_1=-1}$

-POLOS

$z^2+0.1z-0.2=0$

$z^2+0.1z+0.0025-0.0025-0.2=0$

$(z+0.05)^2-0.2025=0$

$(z+0.05)^2=0.2025$

$z+0.05=\pm 0.45$

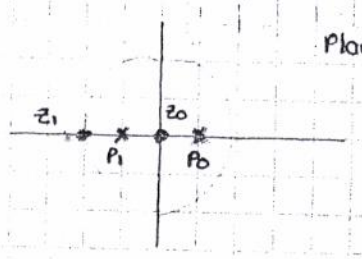
$P_{0,1}=-0.05\pm 0.45$

$$\boxed{\begin{array}{l} P_0=0.4 \\ P_1=-0.5 \end{array}}$$

Entonces:

$$H(z) = \frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.5)}$$

ubicando los ceros y polos en el plano z



Dado que ambos polos caen dentro del circulo de radio unitario El SDLIT es ESTABLE.

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Sigue que:

$$H(e^{j\pi\nu}) = \left.\frac{1+z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}\right|_{z=e^{j\pi\nu}}$$

$$H(e^{j\pi\nu}) = \frac{1+e^{-j\pi\nu}}{1+0.1e^{-j\pi\nu}-0.2e^{j2\pi\nu}}$$

o bien:

$$H(e^{j\pi\nu}) = \frac{1+\cos(\pi\nu)-j\,\mathrm{sen}(\pi\nu)}{1+0.1\cos(\pi\nu)-j0.1\,\mathrm{sen}(\pi\nu)-0.2\cos(2\pi\nu)+j\,0.2\,\mathrm{sen}(2\pi\nu)}$$

$$H(e^{j\pi\nu}) = \frac{\left[1+\cos(\pi\nu)\right]-j\,\mathrm{sen}(\pi\nu)}{\left[1+0.1\cos(\pi\nu)-0.2\cos(2\pi\nu)\right]-j\left(0.1\,\mathrm{sen}(\pi\nu)-0.2\,\mathrm{sen}(2\pi\nu)\right)}$$

$$A(\nu) = \left[\frac{\left[1+\cos(\pi\nu)\right]^2+\mathrm{sen}^2(\pi\nu)}{\left[1+0.1\cos(\pi\nu)-0.2\cos 2\pi\nu)\right]^2+\left[0.1\,\mathrm{sen}(\pi\nu)-0.2\,\mathrm{sen}(2\pi\nu)\right]^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta(\nu) = \tan^{-1}\left[\frac{-\mathrm{sen}(\pi\nu)}{1+\cos(\pi\nu)}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{-0.1\,\mathrm{sen}(\pi\nu)+0.2\,\mathrm{sen}(2\pi\nu)}{1+0.1\cos(\pi\nu)-0.2\cos(2\pi\nu)}\right]$$

de forma general:

$$H(e^{j\pi\nu}) = \frac{A_1+jA_2}{B_1+jB_2}$$

y

$$A(\nu) = \left[\frac{A_1^2+A_2^2}{B_1^2+B_2^2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \beta(\nu) = \tan^{-1}\left[\frac{A_2}{A_1}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{B_2}{B_1}\right]$$

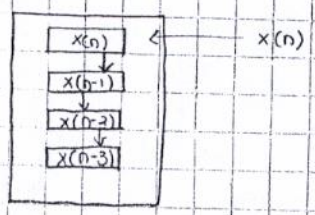
Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

EJEMPLO 3:

Una calculadora programable es usada para realizar un proceso de promediado sobre un conjunto de mediciones aleatorias $x(n)$. Conforme un valor medido es recibido, la calculadora ejecuta un promedio simple de 4 valores consistentes en la medición presente y las tres mediciones que le precedieron.

Calcule la Respuesta en Frecuencia correspondiente a esta operación.

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)}{4}$$



calculadora

Solución:

Sabemos que $H(e^{j\pi\nu}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\pi\nu}}$ siempre que el SDLIT sea ESTABLE

Aplicando la Transformada Z a la Ecuación de diferencia, considerando el SDLIT inicialmente relajado

$$y(n) = \frac{1}{4}\left[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)\right]$$

Tenemos:

$$Y(z) = \frac{1}{4}\left[X(z) + z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) + z^{-3}X(z)\right]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1}{4}\left[1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right]$$

$$H(z) = \frac{1}{4}\left[\frac{1-z^{-4}}{1-z^{-1}}\right]$$

$$1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} = S$$

$$z^{-1}S = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}$$

$$S - z^{-1}S = 1 - z^{-4}$$

$$S = \frac{1-z^{-4}}{1-z^{-1}}$$

En potencias positivas: $H(z) = \frac{1}{4}\left[\frac{z^4-1}{(z-1)z^3}\right]$

This document is available on studocu

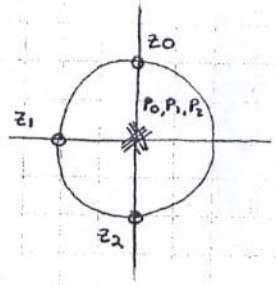
Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$H(z) = \frac{\cancel{(z-1)}(z+1)(z-e^{j\frac{\pi}{2}})(z-e^{-j\frac{\pi}{2}})}{\cancel{(z-1)}\, z^3}$$

El SDLIT está descrito por una ecuación de diferencia de orden cero, i.e es un SISTEMA DE RESPUESTA IMPULSO FINITA (FIR), sin retroalimentación, no recursivo, que SIEMPRE ES ESTABLE Y CAUSAL, comprobandose sus ceros y sus polos en el plano z.

NOTA

// Siempre checar si el sistema desde la Ecuación de entrada es Estable.



Plano z

Como los 3 polos (ó el plano de 3er orden) están (está) dentro del circulo de radio unitario, el SDLIT es ESTABLE

Por lo tanto:

$$H(e^{j\pi\nu}) = \frac{1}{4}\left[\frac{1+z^{-4}}{1-z^{-1}}\right]\Bigg|_{z=e^{j\pi\nu}}$$

considerando.

$$e^{jx} = \cos x + j\,\text{sen}\,x$$
$$e^{-jx} = \cos x - j\,\text{sen}\,x$$
$$e^{jx} - e^{-jx} = 2j\,\text{Sen}\,x$$

$$H(e^{j\pi\nu}) = \frac{1}{4}\left[\frac{1-e^{-j4\pi\nu}}{1-e^{-j\pi\nu}}\right] \Rightarrow H(e^{j\pi\nu}) = \frac{1}{4}\frac{(e^{j2\pi\nu}-e^{-j2\pi\nu})\,e^{-j2\pi\nu}}{(e^{j\frac{\pi}{2}\nu}-e^{-j\frac{\pi}{2}\nu})\,e^{-j\frac{\pi}{2}\nu}} \Rightarrow H(e^{j\pi\nu}) = \frac{1}{4}\left[\frac{2j\,\text{sen}(2\pi\nu)}{2j\,\text{sen}(\frac{\pi}{2}\nu)}\right]e^{-j\frac{3}{2}\nu}$$

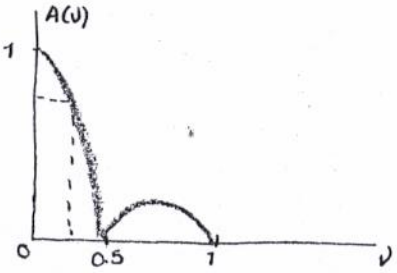
Por lo tanto:

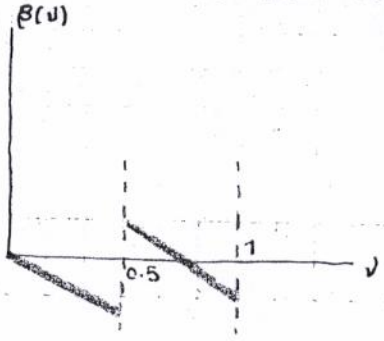
$$A(\nu) = \frac{1}{4}\left[\frac{\text{sen}(2\pi\nu)}{\text{sen}(\frac{\pi}{2}\nu)}\right]$$

NOTA:

Entre menos muestras el sistema es mas preciso

$$\beta(\nu) = -\frac{3}{2}\pi\nu$$





La Frecuencia va aumentando, se empieza a atenuar

FILTRO PASABAJOS.

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. Miercoles 17 de Abril del 2013

RESPUESTA EN AMPLITUD CUADRÁTICA $A^2(\nu)$

SDLIT estables.

$$H(e^{j\pi\nu}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\pi\nu}} \qquad \text{donde:} \qquad A(\nu) = |H(e^{j\pi\nu})|$$

Sabemos que:

$$H(e^{j\pi\nu})\ H^*(e^{j\pi\nu}) = \left|H(e^{j\pi\nu})\right|^2 = A^2(\nu)$$

Si los coeficientes de $H(e^{j\pi\nu})$ son reales (por que los coeficientes de $H(z)$ son reales) Entonces:

$$H^*(e^{j\pi\nu}) = H([e^{j\pi\nu}]^*) = H(e^{-j\pi\nu})$$

Por lo Tanto

$$A^2(\nu) = H(e^{j\pi\nu})\ H(e^{-j\pi\nu}) = H(z)\ H(z^{-1})\Big|_{z=e^{j\pi\nu}}$$

El producto $H(z)\ H(z^{-1})$ implica que:

$$H(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N+2} + \dots + a_N}{z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \dots + b_N}$$

y

$$H(z^{-1}) = \frac{a_0 z^{-N} + a_1 z^{-N+1} + a_2 z^{-N+2} + \dots + a_N}{z^{-N} + b_1 z^{-N+1} + b_2 z^{-N+2} + \dots + b_N}$$

donde:

$$H(z) = \frac{a_0 (z-z_0)(z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_N)}{(z-p_N)(z-p_1)(z-p_2) \dots (z-p_N)}$$

$$H(z^{-1}) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_N z^N}{1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots b_N z^N}$$

$$H(z^{-1}) = \frac{a_N (z-z_0')(z-z_1')(z-z_2') \dots (z-z_N')}{(z-p_0')(z-p_1')(z-p_2') \dots (z-p_N')}$$

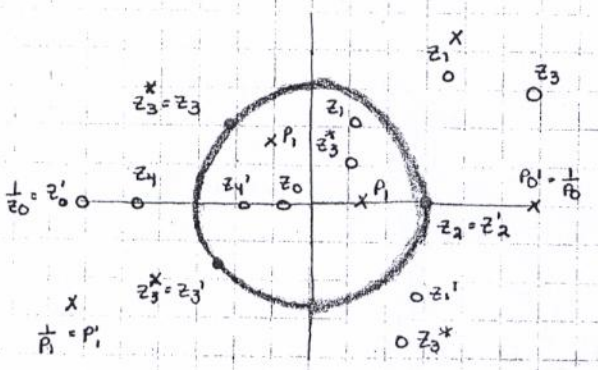
Entonces:

$$z_i' = \frac{1}{z_i} \quad , \quad p_i' = \frac{1}{p_i}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Ubicando los ceros y Polos de $H(z)\ H(z^{-1})$



Al multiplicar $H(z)\ H(z^{-1})$ el resultado en el numerador y denominador es:

$$(a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_{N-1} z + a_N)(a_0 z^{-N} + a_1 z^{-N+1} + a_2 z^{-N+2} + \dots + a_{N-1} z^{-1} + a_N)$$

$$(C_N z^{-N} + C_{N-1} z^{-N+1} + C_{N-2} z^{-N+2} + \dots + C_2 z^{-2} + C_1 z^{-1} + C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_{N-2} z^{N-2} + C_{N-1} z^{N-1} + C_N z^N)$$

POLINOMIO a IMAGEN DE ESPEJO.

$$P(z) = C_0 + C_1(z^{-1} + z) + C_2(z^{-2} + z^2) + \dots + C_{N-1}\left[z^{-(N-1)} + z^{N-1}\right] + C_N(z^{-N} + z^N)$$

$$P(z)\Big|_{z=e^{j\pi\nu}} = C_0 + C_1(e^{-j\pi\nu} + e^{j\pi\nu}) + C_2(e^{-j2\pi\nu} + e^{j2\pi\nu}) + \dots + C_{N-1}\left[e^{-j(N-1)\pi\nu} + e^{j(N-1)\pi\nu}\right] + C_N(e^{-jN\pi\nu} + e^{jN\pi\nu})$$

$$= C_0 + 2C_1 \cos(\pi\nu) + 2C_2 \cos(2\pi\nu) + \dots + 2C_{N-1} \cos\left[(N-1)\pi\nu\right] + 2C_N \cos(N\pi\nu)$$

Por lo tanto:

$$A^2(\nu) = H(z)\ H(z^{-1})\Big|_{z=e^{j\pi\nu}} = \frac{C_0 + 2C_1 \cos(\pi\nu) + 2C_2 \cos(2\pi\nu) + \dots + 2C_N \cos(N\pi\nu)}{d_0 + 2d_1 \cos(\pi\nu) + 2d_2 \cos(2\pi\nu) + \dots + 2d_N \cos(N\pi\nu)} = \frac{C_0 + 2\sum_{k=1}^{N} C_k}{d_0 + 2\sum_{m=1}^{N} d_m \cos(m\pi\nu)}$$

$$\text{Con } C_k = \sum_{i=0}^{N-k} a_i a_{i+k} \qquad d_m = \sum_{i=0}^{N-m} b_i b_{i+m}$$

Suponiendo que $N=4$:

$$\underset{z^{-4}}{(a_0 z^4} + \underset{z^{-3}}{a_1 z^3} + \underset{z^{-2}}{a_2 z^2} + \underset{z^{-1}}{a_3 z} + \underset{z^0}{a_4})\ (\underset{z}{a_0 z^{-4}} + \underset{z^2}{a_1 z^{-3}} + \underset{z^3}{a_2 z^{-2}} + \underset{z^4}{a_3 z^{-1}} + a_4)$$

a_0^2

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

z^{-4}	z^{-3}	z^{-2}	z^{-1}	z^{0}	z	z^{2}	z^{3}	z^{4}
				a_0^2	a_0a_1	a_0a_2	a_0a_3	a_0a_4
			a_0a_1	a_1^2	a_1a_2	a_1a_3	a_1a_4	
		a_0a_2	a_1a_2	a_2^2	a_2a_3	a_2a_4		
	a_0a_3	a_1a_3	a_2a_3	a_3^2	a_3a_4			
a_0a_4	a_1a_4	a_2a_4	a_3a_4	a_4^2				
C_4	C_3	C_2	C_1	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4

Polinomio a imagen Espejo

$$C_K = \sum_{i=0}^{N-K} a_i a_{i+K}$$

Para $N=4$

$$C_0 = \sum_{i=0}^{4-0=4} a_i a_{i+0} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_N^2$$

$$C_2 = \sum_{i=0}^{4-2=2} a_i a_{i+2} = a_0 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_4$$

EJEMPLO:

Obtener la Respuesta en Amplitud Cuadrática del SDLIT descrito por:

$$H(z) = \frac{z^2+1}{z^2-0.9z+0.81}$$

SOLUCIÓN:

(Vemos si la Función es ESTABLE).

Obteniendo sus raices (ceros y polos).

CEROS

$z^2+1=0$ $\quad z^2=-1$

$z_{0,1} = \pm j$

$z_0 = j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

$z = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

POLOS.

$z^2 - 0.9 + 0.81 = 0$

$z^2 - 0.9z + 0.2025 - 0.2025 + 0.81 = 0$

$(z-0.45)^2 + 0.6075 = 0$

$(z-0.45)^2 = -0.6075 = -3(0.2025)$

$z = +0.45 = \pm j\, 0.45\sqrt{3}$

$P_{0,1} = 0.45 \pm j\, 0.45\sqrt{3}$

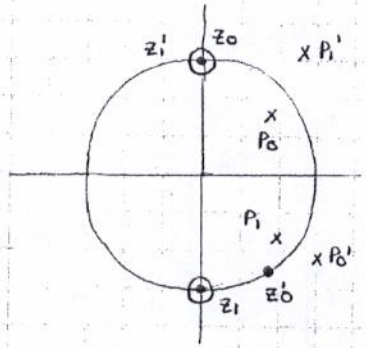
$P_0 = 0.45 + j\, 0.45\sqrt{3} = 0.9\, e^{j60^\circ}$

$P_1 = 0.45 - j\, 0.45\sqrt{3} = 0.9\, e^{-j60^\circ}$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Ubicando Ceros y Polos en el plano Z



PLANO Z

NOTA:
Ambos Polos están dentro del círculo de radio unitario ∴ el SDLIT es ESTABLE

Para $H(z^{-1})$

CEROS

$$z_0' = \frac{1}{z_0} = \frac{1}{e^{j\frac{\pi}{2}}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \qquad P_0' = \frac{1}{P_0} = \frac{1}{0.9e^{j60^\circ}} = 1.111\, e^{-j60^\circ}$$

$$z_1' = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{e^{-j\frac{\pi}{2}}} = e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad P_1' = \frac{1}{P_1} = \frac{1}{0.9e^{-j60^\circ}} = 1.111\, e^{j60^\circ}$$

Entonces:

$$A^2(\nu) = H(z)\, H(z^{-1})\Big|_{z=e^{j\pi\nu}} = \frac{(z^2+1)(z^2+1)}{(z^2-0.9z+0.81)(z^{-2}-0.9z^{-1}+0.81)}\Bigg|_{z=e^{j\pi\nu}}$$

$$A^2(\nu) = \frac{1+z^2+z^{-2}+1}{1-0.9z+0.81z^2-0.9z^{-1}+0.81-0.729z+0.81z^{-2}+0.656}\Bigg|_{z=e^{j\omega\nu}}$$

$$A^2(\nu) = \frac{2+(z^2+z^{-2})}{2.4661-1.629(z+z^{-1})+0.81(z^2)}$$

$$A^2(\nu) = \frac{2+(e^{j\pi\nu}+e^{-j2\pi\nu})}{2.4661-1.629(e^{j\pi\nu}+e^{-j\pi\nu})+0.81(e^{j2\pi\nu}+e^{-j2\pi\nu})} = \frac{2+2\cos(2\pi\nu)}{2.4661-3.258\cos(\pi\nu)+1.629\cos(2\pi\nu)}$$

o bien:

$$A^2(\nu) = \frac{C_0+2C_1\cos(\pi\nu)+2C_2\cos(2\pi\nu)}{d_0+2d_1\cos(\pi\nu)+2d_2\cos(2\pi\nu)}$$

donde:

$N=2$; $a_0=1$; $a_1=0$; $a_2=1$

$$C_0 = \sum_{i=0}^{2-0=2} a_i a_{i+0} = a_0^2+a_1^2+a_2^2 = 1+0+1=2$$

$$C_1 = \sum_{i=0}^{2-1=1} a_i a_{i+1} = a_0a_1+a_1a_2 = 0+0=0$$

$$C_2 = \sum_{i=0}^{2-2=0} a_i a_{i+2} = a_0a_2 = 1$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. Jueves 25 de Abril del 2013.

Ⓐ: $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ $\quad 0 \le n \le N-1$

$N =$ periodo

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = mN \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De Ⓐ multiplicando ambos miembros de la igualdad por $e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}$ y sumando respecto a n de 0 a N-1 Tenemos:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}\right]$$

donde

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n)} = \begin{cases} 1 & \text{Si } k = r + mN \Rightarrow k - r + mN = k = r \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = \tilde{X}(r)$$

o bien:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & 0 \le k \le N-1 \quad N = \text{periodo} & \text{Transformada Directa} \\ \tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk} & 0 \le n \le N-1 \quad N = \text{periodo} & \text{Transformada Inversa.} \end{array}}$$

donde
n = variable directa tiempo
k = variable directa frecuenc

SERIES DISCRETAS DE FOURIER
(Par Transformado).

$\tilde{X}(k) = \mathcal{F}\{x(n)\}$

y

$\tilde{x}(n) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{X}(k)\}$

Si definimos una secuencia finita (no periódica). Su representación en frecuencia se puede obtener:
si:

$$\bar{X}(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} = \bar{X}(e^{j\omega T}) \quad \text{con} \quad 0 \le \omega T \le 2\pi$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Si definimos una secuencia finita (no periódica) que cumple con:

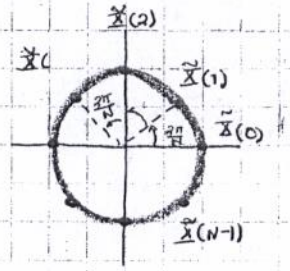
$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Entonces:

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \bar{X}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, z^{-n}$$

entonces:

$$\boxed{\tilde{X}(k) = \bar{X}(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \qquad 0 \le k \le N-1 \quad N = \text{periodo}}$$



Plano z

Para una secuencia finita (no-periódica)
Su representación en frecuencia se puede obtener si:

$$\bar{X}(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} = \bar{X}(e^{j\omega T}) \qquad \text{con} \qquad 0 \le \omega T \le 2\pi$$

Función Continua y periódica en frecuencia ($\omega = 2\pi f$)
(Transformada de Fourier de una Función Discreta en Tiempo)

Si Definimos $\boxed{W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$

Entonces:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\, W_N^{nk} \qquad 0 \le k \le N-1 \quad N = \text{Periodo}$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\, W_N^{-nk} \qquad 0 \le n \le N-1 \quad N = \text{periodo}$$

y

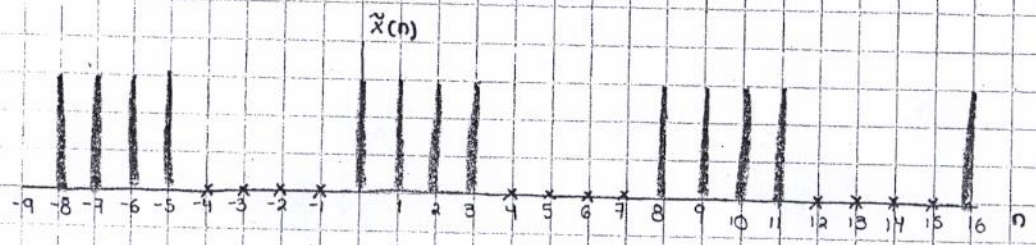
$$\boxed{\tilde{X}(k) = \bar{X}(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}}$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

EJEMPLO:

Obtener la Transformada de Fourier de una secuencia Periódica, con periodo N=8 descrita por

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 3 \\ 0 & 4 \le n \le 7 \end{cases}$$



SOLUCIÓN:

Sabemos que las Series Discretas de Fourier

$$F\{\tilde{x}(n)\} = \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \qquad 0 \le k \le N-1$$

N= periodo.

Para este caso:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{7} \tilde{x}(n) W_8^{nk} \qquad 0 \le k \le 7 \qquad \text{Periodo } 8$$

o bien:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{3} (1) W_8^{nk} + \cancel{\sum_{n=4}^{7} (0) W_8^{nk}}^{\,0}$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{3} W_8^{nk} = 1 + W_8^{k} + W_8^{2k} + W_8^{3k} = \frac{1 - W_8^{4k}}{1 - W_8^{k}}$$

$$1 + W_8^{k} + W_8^{2k} + W_8^{3k} = S \qquad W_8^{k} S = W_8^{k} + W_8^{2k} + W_8^{3k} + W_8^{4k}$$

$$S - W_8^{k} S = 1 - W_8^{4k} \Rightarrow S = \frac{1 - W_8^{4k}}{1 - W_8^{k}}$$

o bien:

$$\boxed{\tilde{X}(k) = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{8}(4k)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{8}k}} = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k}}}$$

para $0 \le k \le 7$
Periodo 8

Tambien:

$$\tilde{X}(k) = \frac{\left(e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right) e^{-j\frac{\pi}{2}k}}{\left(e^{j\frac{\pi}{8}k} - e^{-j\frac{\pi}{8}k}\right) e^{-j\frac{\pi}{8}k}} = \frac{2j \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{2j \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{8}k\right)} e^{-j\frac{3}{8}\pi k}$$

This document is available on studocu

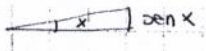
Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$\boxed{\tilde{X}(k) = \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{8}k\right)} e^{-j\frac{3}{8}\pi k}}$$

$$\boxed{|\tilde{X}(k)| = \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{8}k\right)} \qquad 0 \le k \le 7}$$

$$\boxed{\arg\left\{\tilde{X}(k)\right\} = -\frac{3}{8}\pi k}$$

$\rightarrow \lim_{x \to 0} \operatorname{Sen} x = x$



Para $k=0$

$$|\tilde{X}(0)| = \lim_{k \to 0} \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{8}k\right)} = \frac{\frac{\pi}{2}k}{\frac{\pi}{8}k} = 4 \qquad ; \arg\{\tilde{X}(0)\} = 0$$

Para $k=1$

$$|\tilde{X}(1)| = \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 2.6131 \qquad ; \arg\{\tilde{X}(1) = -\frac{3}{8}\pi$$

Para $k=2$

$$|\tilde{X}(2)| = \frac{\operatorname{Sen}(\pi)}{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 0 \qquad ; \arg\{\tilde{X}(2)\} = \text{indeterminada}$$

cambiamos de signo

Para $k=3$

$$|\tilde{X}(3)| = \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{\operatorname{Sen}\left(\frac{3}{8}\pi\right)} = \begin{matrix} -1.0824 \\ 1.0824 \end{matrix} \qquad ; \arg\{\tilde{X}(3)\} = -\frac{9}{8}\pi + \pi = -\frac{\pi}{8}$$

Para $k=4$

$$|\tilde{X}(4)| = \frac{\operatorname{Sen}(2\pi)}{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0 \qquad ; \arg\{\tilde{X}(4)\} = \text{indeterminada.}$$

cambiamos de signo

Para $k=5$

$$|\tilde{X}(5)| = \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{5}{2}\pi\right)}{\operatorname{Sen}\left(\frac{5}{8}\pi\right)} = 1.0824 \qquad ; \arg\{\tilde{X}(5)\} = -\frac{15}{8}\pi + \pi + \pi = \frac{\pi}{8}$$

Para $k=6$

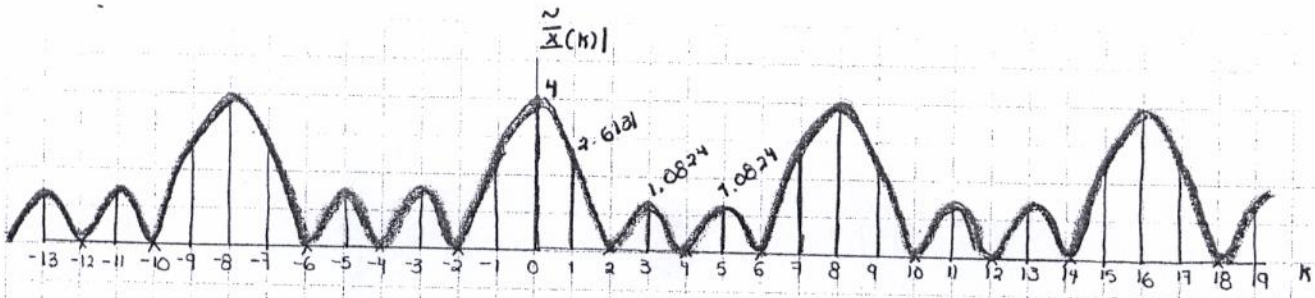
$$|\tilde{X}(6)| = \frac{\operatorname{Sen}(3\pi)}{\operatorname{Sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)} = 0 \qquad ; \arg\{\tilde{X}(6)\} = \text{indeterminada}$$

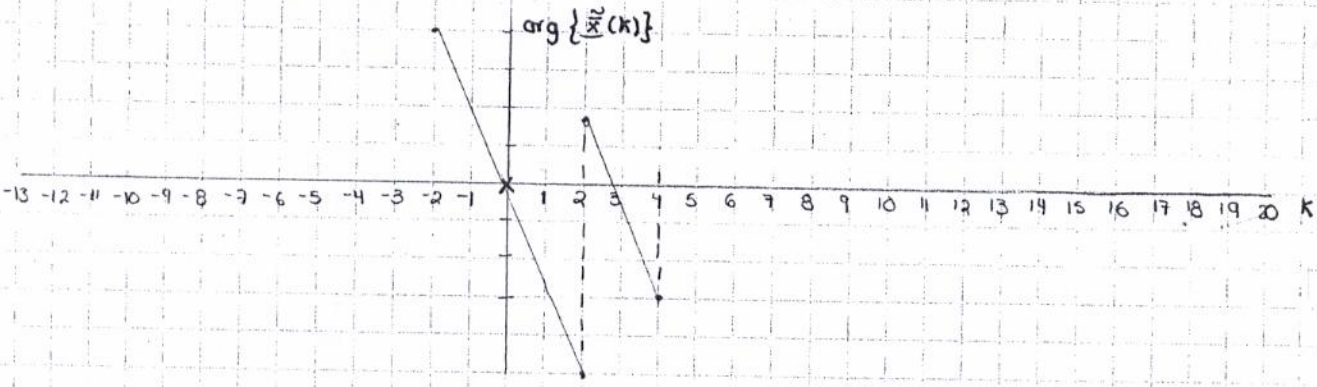
cambiamos signo.

Para $k=7$

$$|\tilde{X}(7)| = \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{7}{2}\pi\right)}{\operatorname{Sen}\left(\frac{7}{8}\pi\right)} = \begin{matrix} -2.6131 \\ 2.6131 \end{matrix} \qquad ; \arg\{\tilde{X}(7)\} = -\frac{21}{8}\pi + \pi + \pi + \pi = \frac{3}{8}\pi$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)





Solución B):

Definiendo una secuencia Finita (no periódica) Tal que:

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Para este caso:

$N=8$

$$x(n) = \left.\begin{cases} 1 & 0 \le n \le 3 \\ 0 & 4 \le n \le 7 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}\right\} = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 3 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde:

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \bar{X}(z) = \sum_{n=0}^{3} (1)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{3} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

esto es:

$$\bar{X}(z) = \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\tilde{X}(k) = \bar{X}(z)\Big|_{z=W_8} = \frac{1 - W_8^{4k}}{1 - W_8^{k}}} \quad y \quad \tilde{X}(k) = \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{8}k\right)}{\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{8}k\right)} e^{-j\frac{3}{8}\pi}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Muestreo en Frecuencia

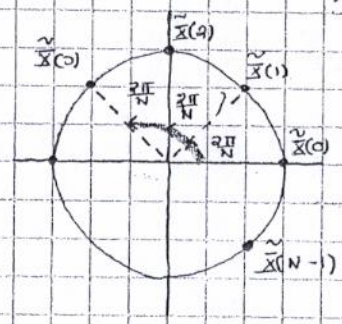
$$\tilde{\bar{X}}(k) = \bar{X}(z)\Big|_{z = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \qquad 0 \le k \le N-1$$

donde:

$$\tilde{\bar{X}}(k) = \mathcal{F}\{\tilde{x}(n)\}$$

$$\bar{X}(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$$

$$\boxed{x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}}$$



Plano z

$$\mathcal{F}\{x(n)\} = \bar{X}(z)\Big|_{z = e^{j\omega T}} \qquad 0 \le \omega T \le 2\pi$$

N = Duración de $x(n)$ de 0 a $N-1$

N_0 = # de puntos evaluados (muestras) que se obtienen sobre la circunferencia de radio unitario.

Usando la definición de la Transformada Z Bilateral dada por:

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \bar{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

como:

$$\tilde{\bar{X}}(k) = \bar{X}(z)\Big|_{z = W_N^{-k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(r) W_N^{rk} \qquad 0 \le k \le N-1$$

y

$$\tilde{x}(n) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\bar{X}}(k)\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\bar{X}}(k) W_N^{-nk}$$

o bien:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) W_N^{rk} W_N^{-nk}$$

esto es:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(r-n)k}\right]$$

donde:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(r-n)k} = \begin{cases} 1 & \text{si } r-n = mN \qquad r = n + mN \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

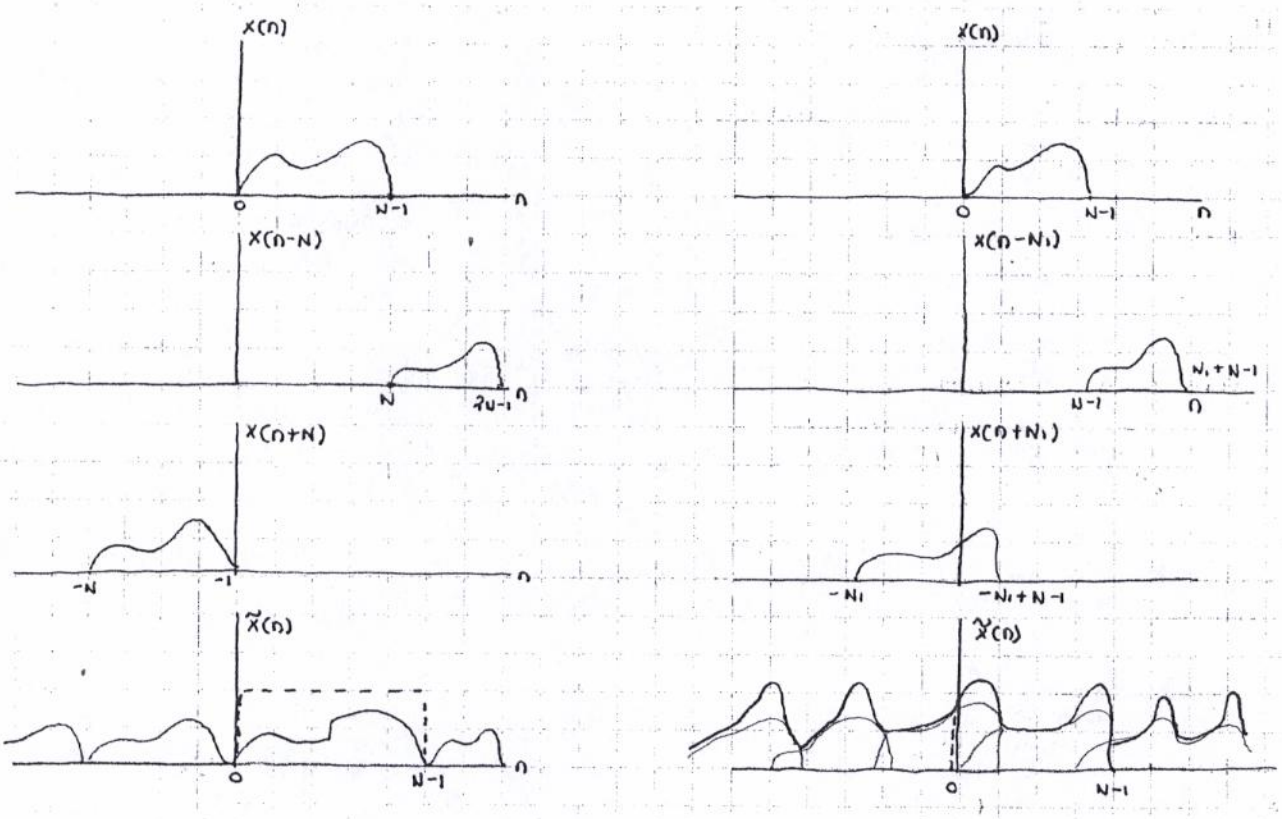
Finalmente:

$$\boxed{\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN_1)}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Si N_1 (# de muestras) $< N$ (duracion de $x(n)$)



Entonces la relación entre $x(n)$ y $\tilde{x}(n)$ se mantiene en "ambos sentidos", siempre que el número de muestras sobre la circunferencia de radio unitario (N_1) sea mayor o igual a la duración de $x(n)$ (N) de 0 a $N-1$."

Considerando que una secuencia penódica en tiempo $\tilde{x}(n)$ tiene una representación en frecuencia que es una secuencia penódica en frecuencia $\tilde{X}(k)$, además ambas en en el mismo periodo, es congruente pensar en que una secuencia finita no penódica (*)- "en tiempo"- $x(n)$ tenga una representación en frecuencia que sea una secuencia finita no-penódica en frecuencia $X(k)$ ambas con la misma duración N. de 0 a $N-1$.

NOTA:

* recordar que la representación en frecuencia de $x(n)$ ($X(e^{j\omega T})$) es continua y penódica.

Además las mismas relaciones entre $x(n)$ y $\tilde{x}(n)$ deberan de cumplirse entre $X(k)$ y $\tilde{X}(k)$ esto es:

Reconbiendo:

$$\boxed{x(n) = \tilde{x}(n)\, R_N(n)}$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

donde:

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$\boxed{\tilde{x}(n) = x(n \operatorname{Mod} N) = x((n))_N}$$

Entonces:

$$\boxed{\bar{x}_1(k) = \tilde{\bar{x}}(k)\, R_N(k)}$$

Donde:

$$R_N(k) = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$\boxed{\tilde{\bar{x}}(k) = \bar{x}((k))_N}$$

$$\bar{x}(k) = \begin{cases} \tilde{\bar{x}}(k) & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\bar{x}}(k) W_N^{-nk} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{x}(k) W_N^{-nk} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Transformada Discreta de Fourier.

$$\underline{X}(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Transformada Directa.

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \underline{X}(k)\, W_N^{-nk} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Transformada Inversa.

$\underline{X}(k) = DFT\,[x(n)]$ Directa

$x(n) = IDFT\,[\underline{X}(k)]$ Inversa.

Secuencias periódicas

$$\begin{tikzcd} x(n) \arrow[r, Leftrightarrow, "DFT"] \arrow[d, Leftrightarrow] & \underline{X}(k) \arrow[d, Leftrightarrow] \\ \tilde{x}(n) \arrow[r, Leftrightarrow, "DDF"'] & \tilde{\underline{X}}(k) \end{tikzcd}$$

LINEALIDAD

Sean $x_1(n)$ y $x_2(n)$ dos secuencias de duración N_1 y N_2, respectivamente en $\underline{X}_1(k)$ y $\underline{X}_2(k)$ como sus correspondientes DFT'S

Se define a:

$$x_3(n) = a x_1(n) + b x_2(n) \qquad 0 \le n \le N-1$$

Entonces:

$$\underline{X}_3(k) = a\underline{X}_1(k) + b\underline{X}_2(k) \qquad 0 \le k \le N-1 \qquad N = \max\,[N_1, N_2]$$

Ejemplo:

Si $N_2 > N_1$

$$x_3(n) = a x_1(n) + b x_2(n) \qquad 0 \le n \le N_2 - 1$$

y

$$\underline{X}_3(k) = a\underline{X}_1(k) + b\underline{X}_2(k) \qquad 0 \le k \le N_2 - 1$$

donde:

$$\underline{X}_1(k) = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1(n)\, W_{N_2}^{nk} \qquad 0 \le k \le N_2 - 1$$

y

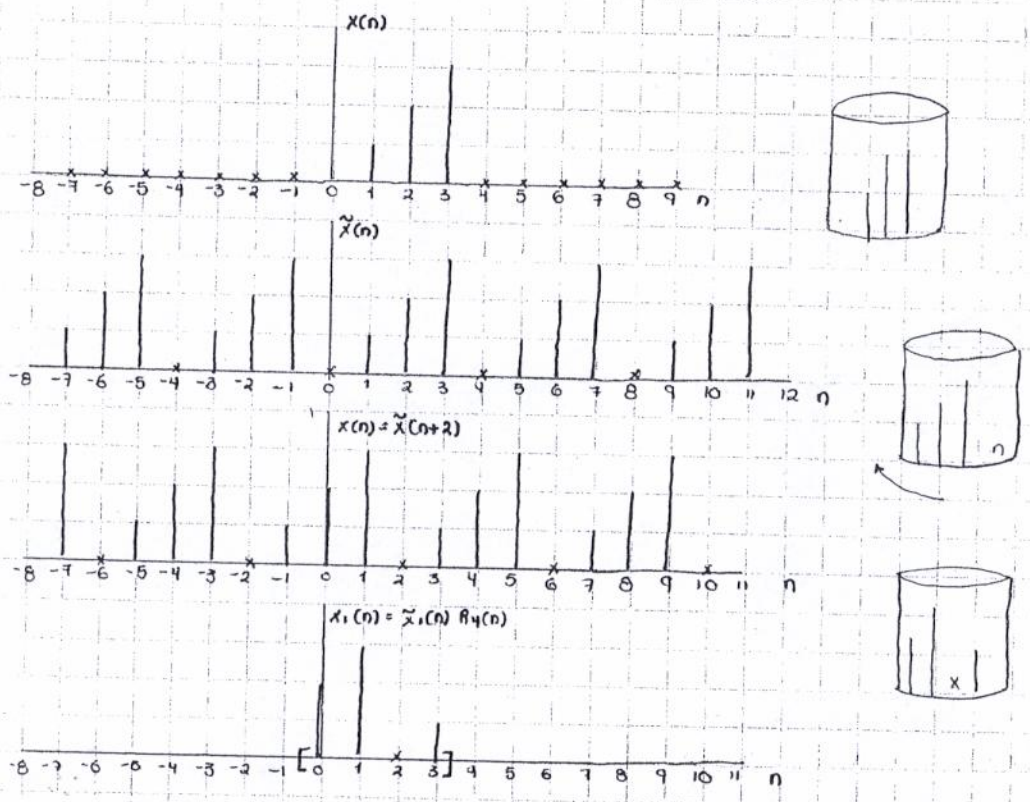
$$\underline{X}_2(k) = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2(n)\, W_{N_2}^{nk} \qquad 0 \le k \le N_2 - 1$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Miércoles 8 de Mayo del 2013.

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES.

DESPLAZAMIENTO CIRCULAR DE UNA SECUENCIA.



Matemáticamente:

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N$$

Si:

$$\tilde{x}_1(n) = \tilde{x}(n+m) \quad \text{con} \quad 0 \le m \le N-1$$

Entonces:

$$x_1(n) = \tilde{x}_1(n) R_N(n) = \tilde{x}(n+m) R_N(n)$$

o bien:

$$\boxed{x_1(n) = x((n+m))_N \; R_N(n) \quad \text{con} \quad 0 \le m \le N-1}$$

Corrimiento Circular en m muestras

EJEMPLO

Si $x(n) = n \quad 0 \le n \le 3 \quad (N=4)$

Definimos el corrimiento circular en 2 muestras a la izquierda de $x(n)$ como:

$$x_1(n) = x((n+2))_4 \, R_4(n)$$

$$x_1(0) = x((0+2))_4 = x(2) = 2$$
$$x_2(1) = x((1+2))_4 = x(3) = -3$$
$$x_3(2) = x((2+2))_4 = x(0) = 0$$
$$x_4(3) = x((3+2))_4 = x(1) = 1$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Sea $x(n)$ una secuencia finita (no periódica) descrita entre 0 y N-1 y $X(k)$ la correspondiente DFT se define:

$$\boxed{x_1(n) = x((n+m))_N \; R_N(n) \qquad 0 \le m \le N-1}$$

Recordando que:

$$\tilde{x}_1(n) = \tilde{x}(n+m) \iff \tilde{X}_1(k) = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$$

Entonces:

$$X_1(k) = \tilde{X}_1(k) \, R_N(k)$$

$$X_1(k) = W_N^{-mk} \underbrace{\tilde{X}(k) \, R_N(k)}_{X(k)}$$

Finalmente:

$$\boxed{X_1(k) = W_N^{-mk} X(k)}$$

Similarmente si:

$$\boxed{X_1(k) = X((k+l))_N \; R_N(k) \qquad 0 \le l \le N-1}$$

Entonces

$$\boxed{x_1(n) = W_N^{ln} x(n)}$$

Convolución Circular entre Secuencias.

Sabemos que:

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \, \tilde{x}_2(n-m) \qquad 0 \le n \le N-1 \quad \text{Periodo } N$$

$$x_3(n) = \tilde{x}_3(n) \, R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \, \tilde{x}_2(n-m) \qquad 0 \le n \le N-1$$

o bien:

$$\boxed{\begin{aligned} x_3(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N \; x_2((n-m))_N \qquad 0 \le n \le N-1 \\ x_3(n) &= x_1(n) \; N \; x_2(n) \end{aligned}}$$

Condolución circular en N muestras entre $x_1(n)$ con $x_2(n)$

$$x_4(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \, x_2(n-m)$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Sean $x_1(n)$ y $x_2(n)$ dos secuencias finitas (no - periódicas) de duración N_1 y N_2 respectivamente con $\bar{X}_1(k)$ y $\bar{X}_2(k)$ como sus correspondientes DFT's

Si definimos:

$$\boxed{x_3(n) = x_1(n) \; N \; x_2(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N \; x_2((n-m))_N\right] R_N(n) \qquad \text{con } N = \max\,[N_1, N_2]}$$

Recordando que:

$$\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k)\,\tilde{X}_2(k)$$

Entonces

$$\bar{X}_3(k) = \tilde{X}_3(k)\,R_N(k)$$
$$\bar{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k)\,\tilde{X}_2(k)\,R_N(k)$$

Finalmente:

$$\boxed{\bar{X}_3(k) = \bar{X}_1(k)\,\bar{X}_2(k)}$$

Similarmente si

$$\boxed{x_3(n) = x_1(n)\,x_2(n)}$$

Entonces:

$$\boxed{\bar{X}_3(k) = \bar{X}_1(k) \; \textcircled{N} \; \bar{X}_2(k) = \left[\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} \bar{X}_1((l))_N \; \bar{X}_2((l-l))_N\right] R_N(k) \qquad \text{con } N = \max\,[N_1, N_2]}$$

EJEMPLO 1:

Obtener la Convolución Circular en N muestras de $x_1(n)$, una secuencia finita descrita entre 0 y N-1 (duración N) y $x_2(n) = \delta(n - n_0)$ con $0 \le n_0 \le N-1$

SOLUCIÓN:

Sabemos que: $x_3(n) = x_1(n) \; \textcircled{N} \; x_2(n) \iff \bar{X}_3(k) = \bar{X}_1(k)\,\bar{X}_2(k)$

donde: $\bar{X}_1(k) = DFT\,[x_1(n)] \qquad 0 \le k \le N-1$

y

$$\bar{X}_2(k) = DFT\,[x_2(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)\,W_N^{nk} \qquad 0 \le k \le N-1$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n-n_0)\,W_N^{nk} = W_N^{n_0 k}$$

Entonces:

$$\bar{X}_3(k) = \bar{X}_1(k)\,W_N^{n_0 k} \qquad 0 \le k \le N-1$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Sabemos que:

$$\bar{X}_1(k) = \bar{X}_1(k)\, W_N^{-mk} \iff x_1(n) = x((n+m))_N\, R_N(n)$$

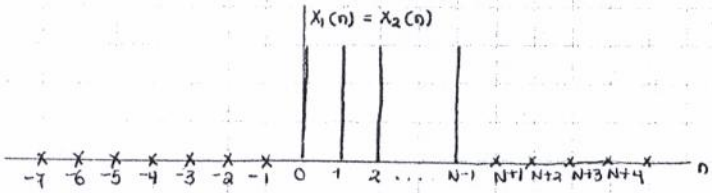
Finalmente:

$$x_3(n) = x_1((n-n_0))_N\, R_N(n) \qquad \text{Corrimiento Circular}$$

EJEMPLO 2.-

Obtener la Convolución Circular en N muestras de las secuencias Finitas $x_1(n)$ y $x_2(n)$, descritas por

$$x_1(n) = x_2(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



SOLUCIÓN:

Sabemos que

$$x_3(n) = x_1(n) \; (N) \; x_2(n) \iff \bar{X}_3(k) = \bar{X}_1(k)\, \bar{X}_2(k)$$

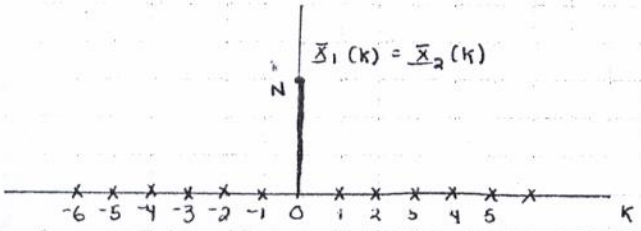
donde:

$$\bar{X}_1(k) = \bar{X}_2(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} (1)\, W_N^{nk} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Como

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \begin{cases} N \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\bar{X}_1(k) = \bar{X}_2(k) = \begin{cases} N & k = 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

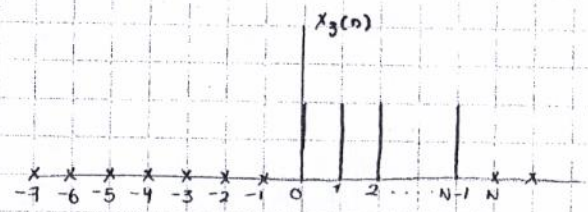
$$\bar{X}_3(k) = \bar{X}_1(k)\,\bar{X}_2(k) \begin{cases} N^2 & k=0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Sabemos que:

$$x_3(n) = \text{IDFT}\left[\bar{X}_3(k)\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}_3(k)\, W_N^{-nk} \qquad 0 \le n \le N-1$$

$$x_3(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} N^2\,\delta(k)\, W_N^{-nk} = \frac{1}{N}\left[N^2 W_N^0\right] = N \qquad 0 \le n \le N-1$$

$$x_3(n) = \begin{cases} N & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



Sean $x_1(n)$ y $x_2(n)$ dos secuencias finitas de duración N_1 y N_2 respectivamente. Se puede obtener la convolución lineal de ambas calculando la convolución circular entre ellas para $N_1 + N_2$ muestras.

$$x_4(n) = x_1(n) * x_2(n) = x_1(n) \; (N_1 + N_2) \; x_2(n)$$

EJEMPLO 3

Obtener la convolución lineal a través de la convolución circular de $x_1(n)$ con $x_2(n)$, descritas por:

$$x_1(n) = x_2(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$N = 3$

SOLUCIÓN

Para este caso $\quad x_4(n) = x_1(n) + x_2(n) = x_1(n) \;\; 6 \;\; x_2(n)$

$N + N = 2N$

$3 + 3 = 6$

Esto es:

$$x_4(n) = \sum_{m=0}^{5} x_1((m))_6 \; x_2((n-m))_6 \qquad 0 \le n \le 5$$

Calculando:

$$x_4(0) = \sum_{m=0}^{5} x_1((m))_6 \; x_2((0-m))_6 = x_1((0))_6 \; x_2((0))_6 + x_1((1))_6 \; x_2((-1))_6 + x_1((2))_6 \; x_2((-2))_6 + x_1((3))_6 \; x_2((-3))_6 + x_1((4))_6 \; x_2((-4))_6 + x_1((5))_6 \; x_2((-5))_6$$

$$x_4(0) = x_1(0)\,x_2(0) + x_1(1)\,x_2(5) + x_1(2)\,x_2(4) + x_1(3)\,x_2(3) + x_1(4)\,x_2(2) + x_1(5)\,x_2(1)$$
$$= 1(1) + 1(0) + 1(0) + 0(0) + 0(1) + 0(1) = 1$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$X_4(1) = \sum_{m=0}^{5} x_1((m))_6\, x_2((1-m))_6 = x_1(0)\,x_2(1) + x_1(1)\,x_2(0) + x_1(2)\,x_2(5) + x_1(3)\,x_2(4) + x_1(4) + x_1(4)\,x_2(3) + x_1(5)\,x_2(2)$$

$$= 1(1) + 1(1) + 1(0) + 0(0) + 0(0) + 0(1) = 2$$

$$X_4(2) = \sum_{m=0}^{5} x_1((m))_6\, x_2((2-m))_6 = x_1(0)\,x_2(2) + x_1(1)\,x_2(1) + x_1(2)\,x_2(0) + x_1(3)\,x_2(5) + x_1(4)\,x_2(4) + x_1(5)\,x_2(3)$$

$$= 1(1) + 1(1) + 1(1) + 0(0) + 0(0) + 0(0) = 3$$

$$X_4(3) = \sum_{m=0}^{6} x_1((m))_6\, x_2((3-m))_6 = x_1(0)\,x_2(3) + x_1(1)\,x_2(2) + x_1(2)\,x_2(1) + x_1(3)\,x_2(0) + x_1(4)\,x_2(5) + x_1(5)\,x_2(4)$$

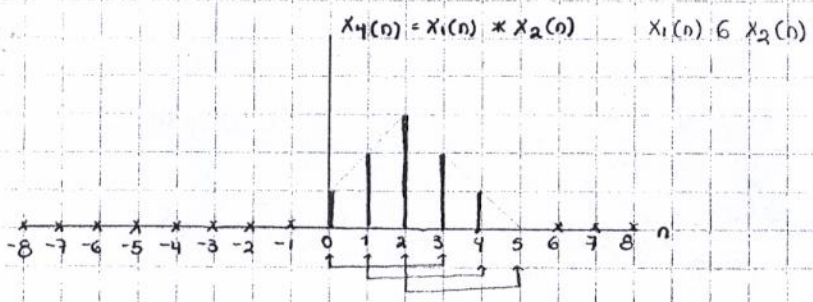
$$= 1(0) + 1(1) + 1(1) + 0(1) + 0(0) + 0(0) = 2$$

$$X_4(4) = \sum_{m=0}^{5} x_1((m))_6\, x_2((4-m))_6 = x_1(0)\,x_2(4) + x_1(1)\,x_2(3) + x_1(2)\,x_2(2) + x_1(3)\,x_2(1) + x_1(4)\,x_2(0) + x_1(5)\,x_2(5)$$

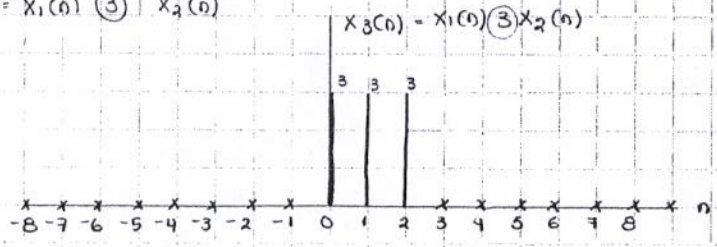
$$= 1(0) + 1(0) + 1(1) + 0(1) + 0(1) + 0(0) = 1$$

$$X_4(5) = \sum_{m=0}^{5} x_1((m))_6\, x_2((5-m))_6 = x_1(0)\,x_2(5) + x_1(1)\,x_2(4) + x_1(2)\,x_2(3) + x_1(3)\,x_2(2) + x_1(4)\,x_2(1) + x(5)\,x_2(0)$$

$$= 1(0) + 1(0) + 1(0) + 0(1) + 0(1) + 0(1) = 0$$



$X_3(n) = X_1(n)$ (3) $X_2(n)$



Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$\bar{X}(k) = DFT\left[x(n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk} \qquad 0 \le k \le N-1$$

$$\bar{X}(0) = x(0)\,W_N^0 + x(1)\,W_N^0 + x(2)\,W_N^0 + \dots + x(N-1)\,W_N^0$$

$$\bar{X}(1) = x(0)\,W_N^0 + x(1)\,W_N^1 + x(2)\,W_N^2 + \dots + x(N-1)\,W_N^{(N-1)}$$

$$\bar{X}(2) = x(0)\,W_N^0 + x(1)\,W_N^2 + x(2)\,W_N^4 + \dots + x(N-1)\,W_N^{2(N-1)}$$

$$x(N-1) = x(0)\,W_N^0 + x(1)\,W_N^{N-1} + x(2)\,W_N^{2(N-1)} + \dots + x(N-1)\,W_N^{(N-1)^2}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{X}(0) \\ \bar{X}(1) \\ \bar{X}(2) \\ \vdots \\ \bar{X}(N-1) \end{bmatrix}}_{\vec{\bar{X}}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}}_{\vec{W}_N} \underbrace{\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_{\vec{x}(n)}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Por ejemplo, para $N = 4$

$$\vec{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \qquad \vec{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{\pi}{2}} & e^{-j\pi} & e^{-j\frac{3}{2}\pi} \\ 1 & e^{-j\pi} & e^{-j2\pi} & e^{-j3\pi} \\ 1 & e^{-j\frac{3}{2}\pi} & e^{-j3\pi} & e^{-j\frac{9}{2}\pi} \end{bmatrix} \qquad W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

$$x(n) = IDFT\left[\bar{X}(k)\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k)\, W_N^{-nk} \qquad 0 \le n \le N-1$$

$$x(0) = \frac{1}{N}\left[\bar{X}(0)\,W_N^0 + \bar{X}(1)\,W_N^0 + \bar{X}(2)\,W_N^0 + \dots + \bar{X}(N-1)\,W_N^2\right]$$

$$x(1) = \frac{1}{N}\left[\bar{X}(0)\,W_N^0 + \bar{X}(1)\,W_N^{-1} + \bar{X}(2)\,W_N^{-2} + \dots + \bar{X}(N-1)\,W_N^{-(N-1)}\right]$$

$$x(2) = \frac{1}{N}\left[\bar{X}(0)\,W_N^0 + \bar{X}(1)\,W_N^{-2} + \bar{X}(2)\,W_N^{-4} + \dots + \bar{X}(N-1)\,W_N^{-2(N-1)}\right]$$

$$\vdots$$

$$x(N-1) = \frac{1}{N}\left[\bar{X}(0)\,W_N^0 + \bar{X}(1)\,W_N^{-(N-1)} + \bar{X}(2)\,W_N^{-2(N-1)} + \dots + \bar{X}(N-1)\,W_N^{-(N-1)^2}\right]$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}(0) \\ \bar{X}(1) \\ \bar{X}(2) \\ \vdots \\ \bar{X}(N-1) \end{bmatrix}$$

Para $N = 4$

$$\vec{W}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & W_N^{-3} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & W_N^{-6} \\ 1 & W_N^{-3} & W_N^{-6} & W_N^{-9} \end{bmatrix} \qquad \vec{W}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{\pi}{2}} & e^{j\pi} & e^{j\frac{3}{2}\pi} \\ 1 & e^{j\pi} & e^{j2\pi} & e^{j3\pi} \\ 1 & e^{j\frac{3}{2}\pi} & e^{j3\pi} & e^{j\frac{9}{2}\pi} \end{bmatrix} \qquad \vec{W}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

$$\vec{x(n)} = \frac{1}{N} \vec{W_N^{-1}} \vec{\bar{X}(k)}$$

EJEMPLO

Obtener la DFT de la Secuencia Finita

$$x(n) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$(N = 4)$

Solución:

Sabemos que: $\vec{\bar{X}(k)} = \vec{W_4}\, \vec{x(n)}$

$$\begin{bmatrix} \bar{X}(0) \\ \bar{X}(1) \\ \bar{X}(2) \\ \bar{X}(3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1+2+3 = 6 \\ 0-j-2+3j = -2+2j \\ 0-1+2+3 = -2 \\ 0+j-2-3j = -2-2j \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}(k) = \{6, -2+2j, -2, -2-2j\} = \{6, 2\sqrt{2}\, e^{j135^\circ}, 2e^{j90^\circ}, 2\sqrt{2}\, e^{-j135^\circ}\}$$

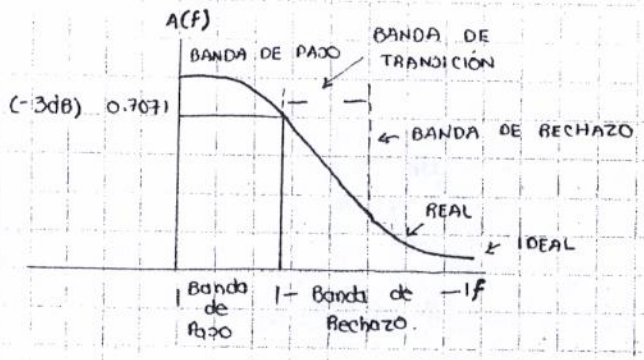
Comprobación $\vec{x(n)} = \frac{1}{4} \vec{W_4^{-1}} \vec{\bar{X}(k)}$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2+2j \\ -2 \\ -2-2j \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6-2+2j-2-2-2j = 0 \\ 6-2j-2+2+2j-2 = 4 \\ 6+2-2j-2+2+2j = 8 \\ 6+2j+2+2-2j+2 = 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

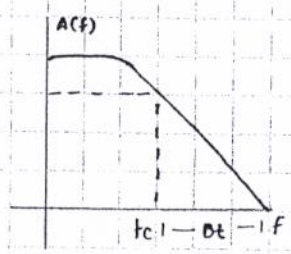
Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. Martes 14 de Mayo del 2013.

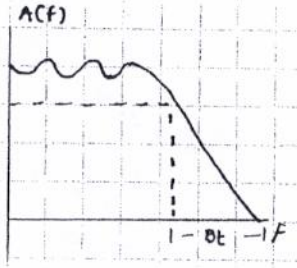
DISEÑO DE FILTROS DIGITALES



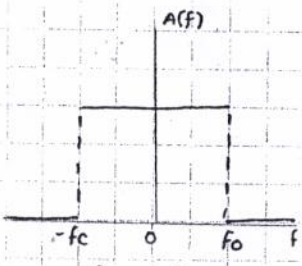
MODELOS DE FILTRAJE.



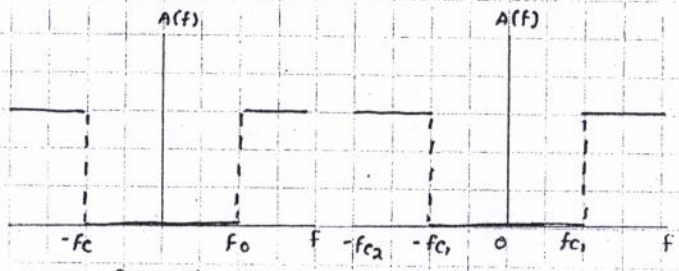
Butterwort



Chebyshev

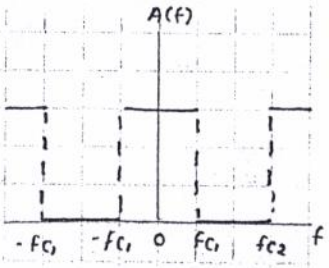


Paso bajos



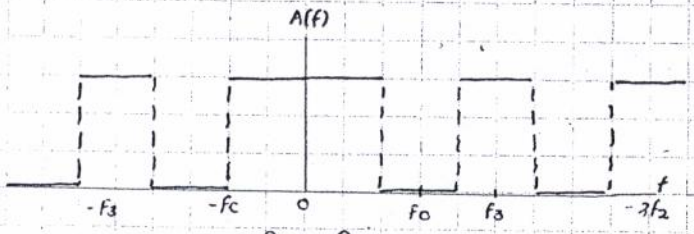
Paso Altos

Paso Banda

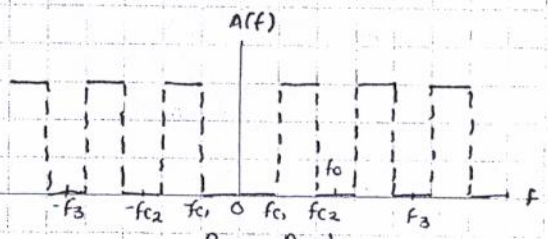


Rechazo de Banda.

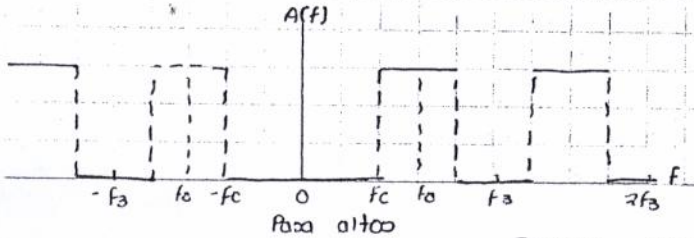
FILTROS ANALÓGICOS.



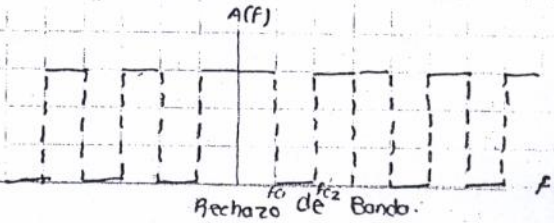
Paso Bajos



Paso Banda



Paso altos



Rechazo de Banda.

FILTROS DIGITALES

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Los Filtros Digitales se Clasifican:

POR RESPUESTA IMPULSO:

1: FILTROS IIR (I^2R)

Su salida $y(n)$ depende de la señal de entrada $x(n)$ actual y sus M valores anteriores y de los N valores anteriores de la propia salida $y(n)$.

2: FILTROS FIR

Su salida $y(n)$ solo depende de la señal de entrada $x(n)$ actual y sus M valores anteriores.

POR SU FORMA DE REALIZACIÓN:

1: FILTROS RECURSIVOS

Son Filtros con Retroalimentación

2: FILTROS NO RECURSIVOS

Son Filtros sin Retroalimentación

3: FILTROS IMPLEMENTADOS ATRAVÉS DE LA FFT (Fast Fourier Transform)

Se implementan mediante el uso de la DFT con algoritmos que simplifican y abrevian su cálculo.

MÉTODOS DE DISEÑO.

Filtros IIR

- Transformación Bilineal
- Invarancia Impulso
- Invarancia Escalón.

Filtros FIR

- Series de Fourier
- Ventanas (windows)

NOMENCLATURA

P - variable de Laplace correspondiente al sistema analógico

S - variable de Laplace correspondiente al sistema Digital

λ - la frecuencia Angular Relativa a P $(P = j\lambda)$

ω - la frecuencia Angular Relativa a S $(S = j\omega)$.

f - frecuencia cíclica correspondiente a ω $(\omega = 2\pi f)$

ν - frecuencia Normalizada respecto a la $f_0 = \frac{f_s}{2}$ $(\nu = \frac{f}{f_0})$

$G(P)$ - Función de Transferencia del prototipo Analógico.

$H(z)$ - Función de Transferencia del Diseño Digital.

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

TRANSFORMACIÓN BILINEAL

$$H(z) = G(p)\Big|_{p=\frac{c(1-z^{-1})}{1+z^{-1}}} \quad \text{con } c = cte.$$

Sabemos:

$$z = e^{sT}$$

Entonces:

$$p = \frac{c(1-e^{-sT})}{(1+e^{sT})} = \frac{c\,(e^{\frac{sT}{2}} - e^{-\frac{sT}{2}})e^{-\frac{sT}{2}}}{(e^{\frac{sT}{2}} + e^{-\frac{sT}{2}})e^{-\frac{sT}{2}}}$$

$$p = c\,\frac{\operatorname{Senh}\left(\frac{sT}{2}\right)}{\operatorname{Cosh}\left(\frac{sT}{2}\right)} = c\,\tanh\left(\frac{sT}{2}\right)$$

Para equiparar las Respuestas en Frecuencia Analógica y Digital, hacemos $p = j\lambda$ y $s = j\omega$

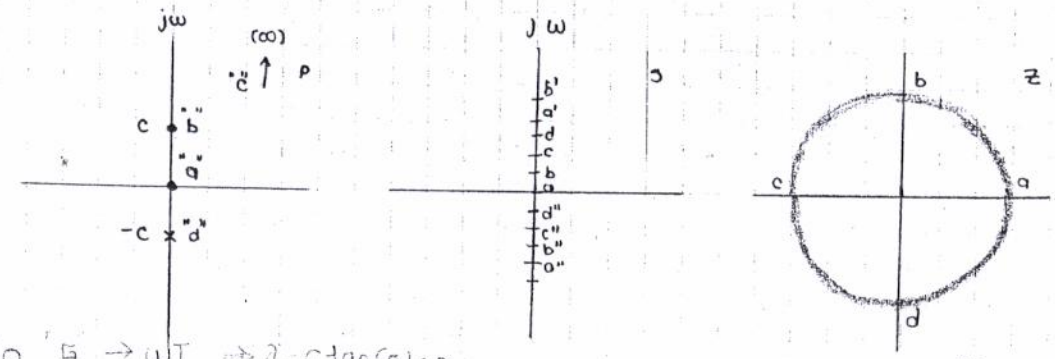
Recordando que la $\tanh jx = j\tan x$

Tenemos:

$$j\lambda = c\,\tanh\frac{j\omega T}{2} = jc\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

o bien:

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda &= c\,\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)\\ \lambda &= c\,\tan\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)\end{aligned}}$$



Punto "a" $\rightarrow \omega T \Rightarrow \lambda = c\tan(0) = 0$

Punto "b" $\rightarrow \omega T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda = c\,\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = c$

Punto "c" $\rightarrow \omega T = \pi \Rightarrow \lambda = c\,\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

Punto "d" $\rightarrow \omega T = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda = c\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -c$

Punto "e" $\rightarrow \omega T = -\pi \rightarrow \lambda = c\,\tan(\pi) = -\infty$

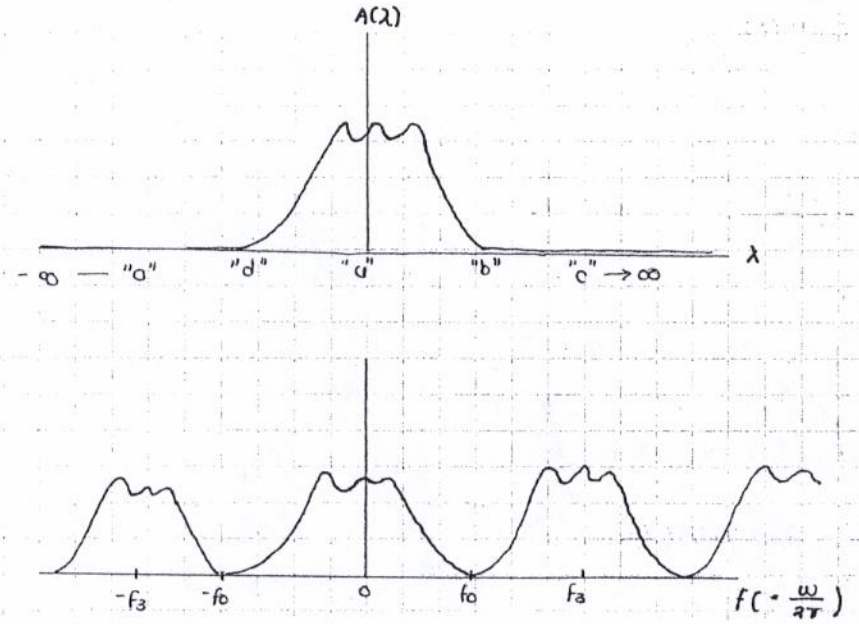
$0 \le \omega T \le 2\pi$

$0 \le 2\pi f \le 2\pi$

$0 \le f \le \frac{1}{T} = f_s$

This document is available on studocu

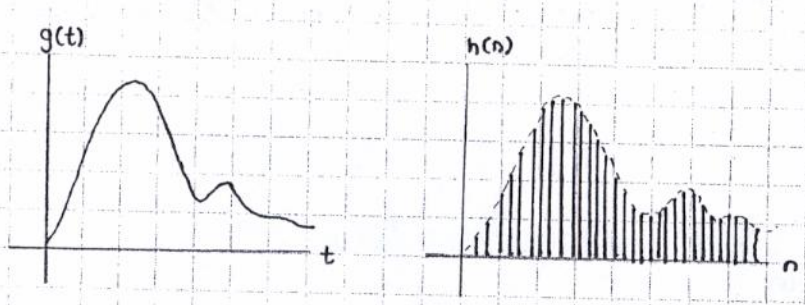
Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)



Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. Miércoles 22 de Mayo del 2013.

INVARIANZA IMPULSO



$$\boxed{h(n) = g(t)\Big|_{t=nT}}$$

Como $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(P)\}$ y $H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}$

Entonces: $\mathcal{Z}\{h(n)\} = \boxed{H(z) = T\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G(P)\}\Big|_{t=nT}\}}$

EJEMPLO 1:

Obtener por Invarianza Impulso el sistema Requerido en el ejemplo 1 de Transformación Bilineal.

Filtro Paso Bajo de 2° orden Tipo Butterworth con $f_c = 50$ Hz a $f_s = 500$ Hz

Solución:

Sabemos que un filtro Analógico Paso Bajo de 2° orden tipo Butterworth con $\lambda c = 1 \frac{rad}{seg}$ está descrito por (tabla 6-2)

$$G'(P) = \frac{1}{1 + 1.4142136P}$$

Como requerimos que el prototipo analógico corte a $\lambda c = 100\pi \frac{rad}{seg}$ ($f_c = 50$ Hz), escalamos el prototipo normalizado, esto es:

$$G(P) = G'\left(\frac{P}{100\pi}\right) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}\left(\frac{P}{100\pi}\right) + \left(\frac{P}{100\pi}\right)^2}$$

$$G(P) = \frac{(100\pi)^2}{(100\pi)^2 + \sqrt{2}(100\pi)P + P^2}$$

Como:

$$P^2 + \sqrt{2}(100\pi)P + (100\pi)^2 = P^2 + \sqrt{2}(100\pi)P + \frac{(100\pi)^2}{2} - \frac{(100\pi)^2}{2} + (100\pi)^2$$

$$\left[P + \frac{\sqrt{2}}{2}(100\pi)\right]^2 + \frac{(100\pi)^2}{2} = \left[P + \frac{\sqrt{2}}{2}(100\pi)\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(100\pi)\right]^2$$

$$G(P) = \frac{\left[\sqrt{2}(100\pi)\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(100\pi)\right]}{\left[P + \frac{\sqrt{2}}{2}(100\pi)\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(100\pi)\right]^2}$$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Aplicando la Transformada inversa de laplace recordando que:

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} \omega t\} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \quad y \quad \mathcal{L}\{e^{-\beta t} x(t)\} = \bar{x}(p+\beta)$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{-\beta t} \operatorname{sen} \omega t\} = \frac{\omega}{(p+\beta)^2+\omega^2}$$

con: $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}(100\pi)$ y $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}(100\pi)$

Sigue que:

$$g(t) = \sqrt{2}(100\pi)\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(100\pi)t} \operatorname{Sen}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(100\pi)t\right]$$

o bien:

$$\boxed{g(t) = 444.288\, e^{-222.144t} \operatorname{Sen}(222.144t)}$$ // Respuesta Analogica

Como $f_s = 500$ Hz $\Rightarrow T_s = \frac{1}{f_0} = 0.002$

$$\boxed{g(t)\Big|_{t=0.002n} = 444.288\, e^{-0.444288n} \operatorname{Sen}(0.444288n)}$$ // Respuesta Discreta impulso

Aplicando la Transformada Directa Z recordando que:

$$\mathcal{Z}\{\operatorname{Sen} \omega n\} = \frac{z \operatorname{sen}\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

$$\mathcal{Z}\{e^{-\beta n} x(n)\} = \bar{X}(e^{\beta} z)$$

Entonces

$$\mathcal{Z}\{e^{-\beta n} \operatorname{sen} \omega n\} = \frac{(e^{\beta} z)\operatorname{Sen}\omega}{(e^{\beta} z)^2 - 2(e^{\beta} z)\cos\omega + 1}$$

$$\mathcal{Z}\{e^{-\beta n} \operatorname{Sen} \omega n\} = \frac{e^{-\beta} z \operatorname{sen}\omega}{z^2 - 2e^{-\beta} z\cos\omega + e^{-2\beta}}$$

Con $\omega = 0.444288$ y $\beta = 0.444288$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

Tenemos:

$$\mathcal{Z}\{g(t)\}_{t=0.002n} = 444.288 \left[\frac{e^{-0.444288} z \operatorname{sen}(0.444288)}{z^2 - 2e^{-0.444288} z \cos(0.444288) + e^{-2(0.444288)}} \right]$$

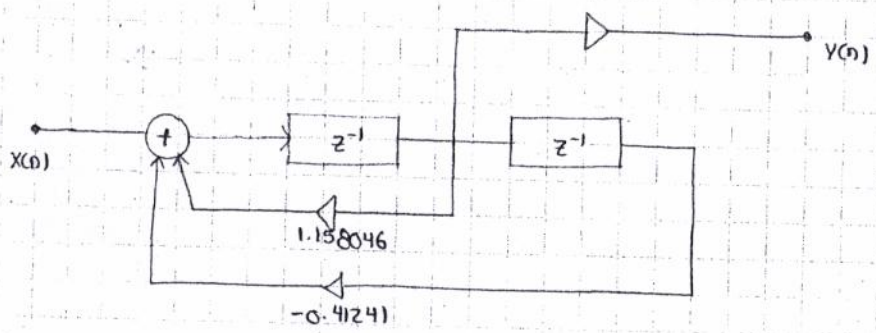
$$= 444.288 \left[\frac{0.275632\, z}{z^2 - 1.158046\, z + 0.411241} \right]$$

Finalmente multiplicando por $T = 0.002$

$$H(z) = T\mathcal{Z}\{g(t)\} = \left[\frac{0.244920\, z}{z^2 - 1.158046 z + 0.411241} \right]$$

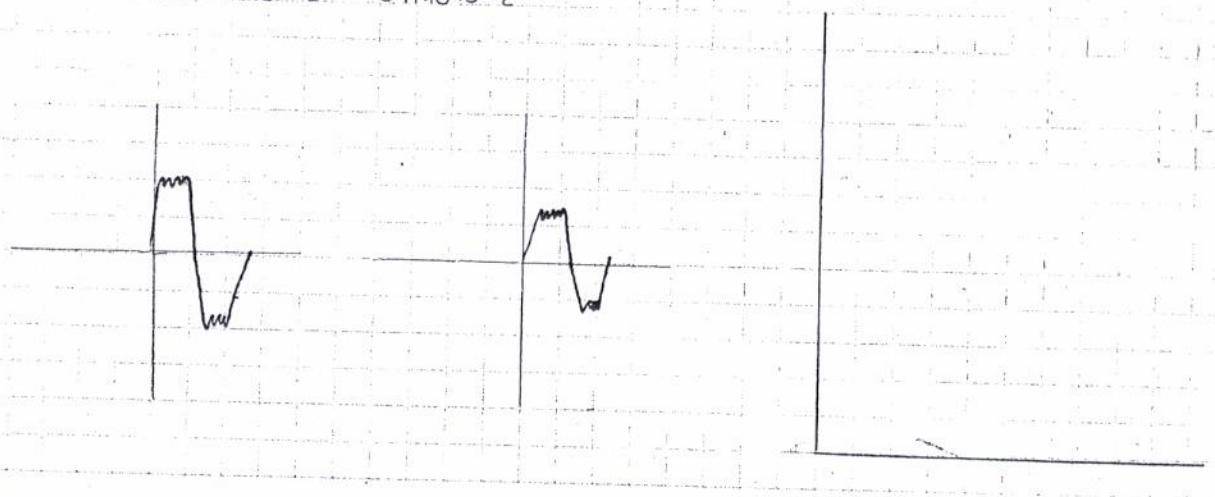
o bien:

$$\boxed{H(z) = \frac{0.24422\, z^{-1}}{1 - 1.158046\, z^{-1} + 0.411241\, z^{-2}}}$$



Por Transformación Bilineal

$$H(z) = \frac{0.067455\,(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.14298\, z^{-1} + 0.412843\, z^{-2}}$$



This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

EJEMPLO 2:

Obtener por Varianza Impulso el Sistema requerido en el ejemplo 3 de Transformación Bilineal.

Unidad de Control $G(P) = \dfrac{2}{(P+1)(P+2)}$ $f_o = 10\,Hz$

Solución:

Aplicando la Transformada Inversa de Laplace a $G(P)$ por expansión en fracciones parciales:

$$G(P) = \frac{2}{(P+1)(P+2)} = \frac{A}{P+1} + \frac{B}{P+2}$$

donde:

$$A = G(P)(P+1)\Big|_{P=-1} = \frac{2}{P+2}\Big|_{P=-1} = \frac{2}{1} = 2$$

y

$$B = G(P)(P+2)\Big|_{P=-2} = \frac{2}{P+1}\Big|_{P=-2} = \frac{2}{-1} = -2$$

Entonces

$$G(P) = \frac{2}{P+1} - \frac{2}{P+2}$$

Por Tablas:

$$\boxed{g(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}}$$

Como $f_o = 10\,Hz \Rightarrow T = \dfrac{1}{f_o} = 0.1$

$$g(t)\Big|_{t=0.1n} = 2e^{-0.1n} - 2e^{-0.2n}$$

Aplicando la Transformada directa Z

$$\mathcal{Z}\{g(t)\}_{t=0.1n} = \frac{2z}{z-e^{-0.1}} - \frac{2z}{z-e^{-0.2}} = \frac{2z^2 - 2ze^{-0.2} - 2z^2 + 2ze^{-0.1}}{z^2 - e^{-0.2}z - e^{-0.1}z + e^{-0.3}} = \frac{2(e^{-0.1} - e^{-0.2})z}{z^2 - (e^{-0.2}}$$

$$\mathcal{Z}\{g(t)\}_{t=0.1n} = \frac{0.172213\,z}{z^2 - 1.723568z + 0.740818}$$

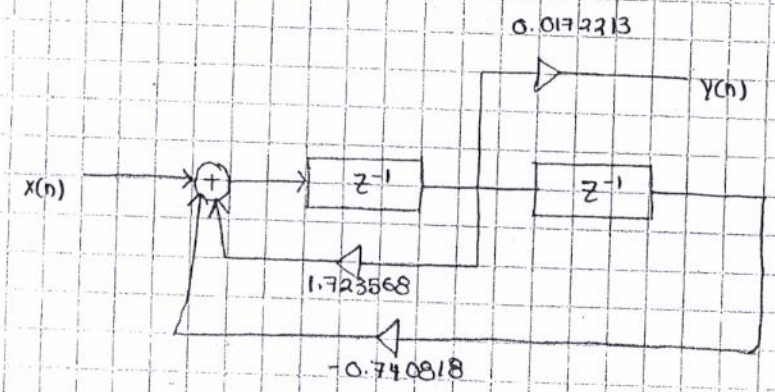
Finalmente multiplicando por $T = 0.1$

$$H(z) = T\mathcal{Z}\{g(t)\}_{t=0.1n} = \frac{0.0172213\,z}{z^2 - 1.723568z + 0.740818}$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

o bien

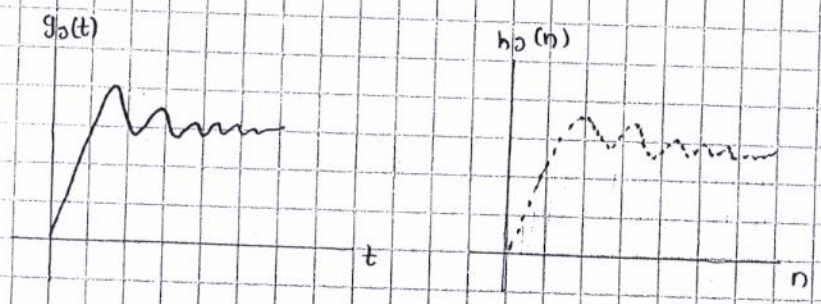
$$\boxed{H(z) = \frac{0.0172213\, z^{-1}}{1 - 1.723568\, z^{-1} + 0.740818\, z^{-2}}}$$



Por Transformación Bilineal.

$$H(z) = \frac{0.004329\,(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.722944\, z^{-1} + 0.740560\, z^{-2}}$$

Invarianza Escalón:



$$\boxed{h_0(n) = g_0(t)\Big|_{t=nT}}$$

$x(t) = \mu(t)$

$\mathcal{L}\{\}$ ↓ — $\boxed{\begin{matrix} x(t) \\ G(P) \end{matrix}}$ — $g_0(t)$ ↑ $\mathcal{L}^{-1}\{\}$

$\bar{X}(P) = \frac{1}{P}$

$G_0(P) = \frac{G(P)}{P}$

$x(n) = \mu(n)$

$\mathcal{Z}\{\}$ ↓ — $\boxed{\begin{matrix} x(nT) \\ H(z) \end{matrix}}$ — $h_0(n)$ ↑ $\mathcal{Z}^{-1}\{\}$

$\bar{X}(z) = \frac{z}{z-1}$

$H_0(z) = \frac{z}{(z-1)} H(z)$

This document is available on studocu

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)

como $H_0(z) = \frac{z}{(z-1)} H(z) \longrightarrow H(z) = \frac{(z-1)}{z} H_0(z)$

pero $H_0(z) = \mathcal{Z}\{h_0(n)\} = \mathcal{Z}\{g_0(t)\Big|_{t=nT}\} = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{\frac{G(p)}{p}\}\Big|_{t=nT}\}$

Finalmente:

$$\boxed{H(z) = \frac{(z^{-1})}{z} \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\} \frac{G(p)}{p}\Big]_{t=nT}}$$

$Y(z) = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$Y(z) = \mathcal{Z}\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\} - \mathcal{Z}\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\}$

$$\frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$$

Descargado por Ramiro PM (pachecohola220403@gmail.com)