UNIVERSITE CADI AYYAD MARRAKECH جامعة القاضي عياض مراكش

المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
ENSA Safi

Département Génie Informatique,
Réseaux et Télécommunications

Cours

Mathématiques pour l'ingénieur

a.elallaoui@uca.ma

Niveau : **Tronc Commun**

Prof. Abdelati El Allaoui

2022-2023

Table des matières

Chapitre 0

Rappels de calcul matriciel

Dans ce chapitre, on va rappeler quelques propriétés de base sur les matrices.

0.1 Définitions et propriétés

Définition 1 *Une matrice de format* (m, n) *à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) est un tableau de* $m \times n$ *éléments de* $\mathbb{K}$ *organisés en* m *lignes et* n *colonnes. Chaque élément de la matrice est repéré par deux indices, le premier est l'indice de la ligne, le second est l'indice de la colonne.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notations :

- La matrice précédente est notée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.
- a_{ij} est le terme, l'élément ou encore le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.
- Une matrice de format $(n, 1)$ est **une matrice-colonne** d'ordre n,
- Une matrice de format $(1, n)$ est **une matrice-ligne** d'ordre n.
- Une matrice de format (n, n) est **une matrice carrée d'ordre** n.
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de format (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Définition 2 – *Si $a_{ij} = 0$ pour tous i et j tels que $i > j$, la matrice est alors appelée* ***triangulaire supérieure****.*

- *Si $a_{ij} = 0$ pour tous i et j tels que $i < j$, la matrice est alors appelée* ***triangulaire inférieure****.*
- ***Une matrice diagonale*** *d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n qui est simultanément triangulaire supérieure et triangulaire inférieure. C'est donc une matrice A carrée d'ordre n dont les termes non diagonaux sont nuls : $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.*
- *Une matrice carrée est dite* ***symétrique*** *si $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = 1, \cdots, n$.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale

Définition 3 *Une matrice carrée A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$, où I est la matrice identité.*
S'il en est ainsi, B est est appelée inverse de A et est notée A^{-1}.

Proposition 1 – *Soit A une matrice carrée inversible, son inverse A^{-1} est unique, et est une matrice carrée du même ordre.*

- *Une matrice carrée inversible A est* ***régulière*** *(i.e. $AB = AC \Rightarrow B = C$ et $BA = CA \Rightarrow B = C$), une matrice carrée non-inversible est dite* ***singulière****.*
- *Soient A et B deux matrices carrées inversibles de même ordre, alors la matrice produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Théorème 1 *(**Critère de Hadamard**) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :*

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} : |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \tag{1}$$

alors A est inversible.

Définition 4 *Une telle matrice A qui vérifie (1) est dite* ***à diagonale strictement dominante****.*

Exemple 1 *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

est une matrice à diagonale strictement dominante. Donc elle est inversible.

Remarque 1 *Le critère de Hadamard donne une condition suffisante mais qui n'est pas nécessaire.*

Exemple 2 *La matrice*

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice inversible qui n'est pas à diagonale strictement dominante.

Proposition 2 *Les coefficients diagonaux d'une matrice à diagonale strictement dominante sont non nuls.*

0.2 Matrices définies positives

Définition 5 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique est dite **définie positive** si :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x^t Ax \geq 0$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, *on a :* $x^t Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Proposition 3 *Si A une matrice carrée réelle inversible, alors $A^t A$ est une matrice symétrique définie positive.*

Proposition 4 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice définie positive, alors :* $\det(A) > 0$ *et* $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} : a_{ii} > 0$.

Remarque 2 *Une matrice définie positive est inversible, mais la réciproque n'est pas vraie.*

Définition 6 *(**Mineurs principaux**) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On appelle **mineurs principaux** de A les déterminants des matrices*

$$A_k := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

pour k entier compris entre 1 et n.

Théorème 2 *(**Critère de Sylvester**) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, il y a équivalence entre*

1. *A définie positive,*
2. *Tous les mineurs principaux sont strictement positifs.*

Exemple 3 *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 & 14 \\ 1 & 5 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

est une matrice symétrique définie positive.

Chapitre 1

Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

1.1 Position du problème

Le problème consiste à trouver la solution du système d'équations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

En notation matricielle le problème s'énonce comme suit :
On cherche à résoudre le système

$$Ax = b \tag{1.1}$$

avec :

- A matrice à coefficients réels de taille $n \times n$ et supposée inversible (i.e. $\det(A) \neq 0$).
- b vecteur de $\mathbb{R}^n$.
- x inconnue à chercher de $\mathbb{R}^n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Si $b = 0$ le système est dit **homogène**, donc il admet au moins une solution $x = 0$ qui est la solution nulle ou triviale.
L'hypothèse d'inversibilité de A assure l'existence et l'unicité de la solution du système.
L'idée générale de résolution d'un système linéaire :
Pour résoudre un système d'équations linéaires on cherche à remplacer le système (1.1) par un autre, plus simple, ayant la même solution, sachant que la résolution de système (1.1) est très simple lorsque :
- A diagonale ;
- A triangulaire supérieure ou inférieure ;
- A tridiagonale ;
- A orthogonale ($A^t A = I$) ;
- A creuse (en général).

Méthodes de résolution : Il existe deux types de méthodes de résolution :

1. **Les méthodes directes** qui permettent d'obtenir la solution en un nombre fini d'opérations soit par triangularisation ou soit par décomposition de la matrice A.
   Les principales méthodes sont :
   - L'élimination de **Gauss**,
   - La décomposition **LU**,
   - La décomposition de **Cholesky**.
2. **Les méthodes itératives** qui consistent à construire une suite $(x_n)_n$ qui converge vers la solution.
   Les principales méthodes sont :
   - Méthode de **Jacobi**,
   - Méthode de **Gauss-Seidel**,
   - Méthode du **relaxation**.

1.2 Résolution d'un système triangulaire

Un cas particulier parmi les systèmes linéaires est la résolution des systèmes triangulaires : la matrice A est soit triangulaire inférieure, soit triangulaire supérieure. La résolution est alors simple.

1.2.1 Système triangulaire supérieur

Soit le système triangulaire supérieur suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

Il existe une unique solution ssi $\det(A) \neq 0$, c'est-à-dire si $\prod_i a_{ii} \neq 0$.

La résolution passe par une "**une remontée** " du système d'équations. On obtient trivialement les relations suivantes :

- $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$
- $x_{n-1} = \dfrac{1}{a_{n-1n-1}} (b_{n-1} - a_{n-1n} x_n)$

  $\vdots$
- $x_2 = \dfrac{1}{a_{22}} \left(b_2 - \sum_{j=3}^{n} a_{2j} x_j \right)$
- $x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j \right)$

Algorithme de la remontée :

En généralisant, les formules précédentes, on obtient que l'algorithme de résolution pour un système triangulaire supérieur est le suivant.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}}; \\ x_i &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right), \quad i = n-1, \ldots, 1. \end{aligned}$$

1.2.2 Système triangulaire inférieur

Soit le système triangulaire inférieur suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, la résolution passe par une "**une descente** " du système d'équations. On obtient trivialement les relations suivantes :

- $x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$
- $x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1)$

  $\vdots$
- $x_{n-1} = \dfrac{1}{a_{n-1n-1}}\left(b_{n-1} - \sum_{j=1}^{n-2} a_{n-1j}x_j\right)$
- $x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j\right)$

Algorithme de la descente :

On obtient l'algorithme suivant.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}}; \\ x_i &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right), \quad i = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Remarque 3 *Si le système (1.1) est diagonal, la solution dans ce cas est donnée par*

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

1.3 Résolution d'un système linéaire quelconque

1.3.1 Opérations élémentaires sur les lignes

Revenons au système (1.1) et voyons comment on peut le transformer sans en modifier la solution. La réponse est toute simple. On peut toujours multiplier (à gauche de chaque côté) les termes de cette relation par une matrice E inversible ; la solution n'est pas modifiée puisque l'on peut remultiplier par E^{-1} pour revenir au système de départ.
Ainsi :

$$EAx = Eb \tag{1.2}$$

possède la même solution que le système (1.1) (il suffit de multiplier par E^{-1}).

Remarque 4
1. *Le résultat précédent n'est plus vrai si la matrice E n'est pas inversible. On ne peut plus en effet revenir en arrière si la matrice E^{-1} n'existe pas.*
2. *Si E est inversible, on dit dans ce cas que les deux systèmes (1.1) et (1.2 sont **équivalents** (i.e ils ont la même solution).*

Pour résoudre un système linéaire, certaines opérations sont possibles qui ne modifient bien sûr pas les solutions :

1. Changer l'ordre des équations (en termes de matrices, échanger des lignes $l_i \leftrightarrow l_j$) ;
2. Multiplier une équation par un scalaire non nul (en termes de matrices, multiplier une ligne par un scalaire λ non nul $l_i \leftarrow \lambda l_i$) ;
3. Modifier une équation par une combinaison linéaire de celle-ci avec d'autres équations (en termes de matrices, remplacer la ligne i par la ligne i plus un multiple de la ligne j, $l_i \leftarrow l_i + \lambda l_j$) ;
4. Changer l'ordre des inconnues (en termes de matrices, échanger des colonnes $c_i \leftrightarrow c_j$).

Les trois premières opérations élémentaires équivalent à multiplier le système (1.1) par une matrice inversible.

Permutation de deux lignes : Échange de lignes $l_i \leftrightarrow l_j$

L'opération élémentaire qui consiste à intervertir deux lignes ($l_i \leftrightarrow l_j$) est également connue sous le nom de **permutation de lignes**. Cette opération est équivalente à la multiplication du système (1.1) par une matrice inversible $E = P(l_i \leftrightarrow l_j)$, obtenue en permutant les lignes i et j de la matrice identité.

Exemple 4 *Considérons le système suivant :*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix}$$

dont la solution est $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t$.
Si l'on souhaite intervertir la ligne 2 *et la ligne* 3*, cela revient à multiplier le système par la matrice :*

$$P\left(l_2 \leftarrow l_3\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et l'on obtient :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

La solution de ce nouveau système reste la même que celle du système de départ.

Remarque 5

- *La matrice* $P\left(l_i \leftrightarrow l_j\right)$ *est inversible. Son inverse est donc la matrice* $P\left(l_i \leftrightarrow l_j\right)$ *elle-même, c'est-à-dire :*

$$P^{-1}\left(l_i \leftrightarrow l_j\right) = P\left(l_i \leftrightarrow l_j\right)$$

- *On montre assez facilement que le déterminant de* $P\left(l_i \leftrightarrow l_j\right)$ *est* -1*. Lorsque l'on permute deux lignes, le déterminant du système de départ change de signe.*

Multiplication d'une ligne par un scalaire

Remplacer la ligne i par un multiple d'elle-même ($l_i \leftarrow \lambda l_i$) revient à multiplier le système linéaire (1.1) par une matrice diagonale inversible $E = M(l_i \leftarrow \lambda l_i)$, dont tous les éléments diagonaux sont 1, sauf m_{ii}, qui vaut λ. Tous les autres termes sont nuls. Cette matrice a pour effet de multiplier la ligne i par le scalaire λ.

Exemple 5 *Considérons le système de l'exemple précédent. On veut multiplier la ligne* 3 *par un facteur* 2*, cela revient à multiplier le système par la matrice :*

$$M\left(l_3 \leftarrow 2l_3\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

et l'on obtient :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 10 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Remarque 6 – *Le déterminant de la matrice diagonale $M(l_i \leftarrow \lambda l_i)$ est λ. La matrice est donc inversible si $\lambda \neq 0$.*

– *La matrice inverse de $M(l_i \leftarrow \lambda l_i)$ est simplement $M\left(l_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} l_i\right)$, c'est-à-dire :*

$$M^{-1}(l_i \leftarrow \lambda l_i) = M\left(l_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} l_i\right)$$

Il suffit donc de remplacer λ par $\frac{1}{\lambda}$ pour inverser la matrice.

L'opération $l_i \leftarrow l_i + \lambda l_j$

Cette opération consiste à remplacer la ligne i par la ligne i plus un multiple de la ligne j $(l_i \leftarrow l_i + \lambda l_j)$. Cela est encore une fois équivalent à multiplier le système de départ par une matrice inversible $E = T(l_i \leftarrow l_i + \lambda l_j)$ qui vaut 1 sur toute la diagonale et 0 partout ailleurs, sauf t_{ij}, qui vaut λ.

Exemple 6 *On considère toujours le système de l'exemple 4, on souhaite remplacer la première ligne par la première ligne (l_1) plus 4 fois ($\lambda = 4$) la deuxième ligne (l_2). Il suffit alors de multiplier le système par :*

$$T(l_1 \leftarrow l_1 + 4l_2) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} 27 & 17 & 6 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Remarque 7 – *La matrice $T(l_i \leftarrow l_i + \lambda l_j)$ est inversible. Pour obtenir son inverse, il suffit de remplacer λ par $-\lambda$, c'est-à-dire :*

$$T^{-1}(l_i \leftarrow l_i + \lambda l_j) = T(l_i \leftarrow l_i - \lambda l_j)$$

C'est-à-dire, pour revenir en arrière il suffit de soustraire la ligne que l'on vient d'ajouter.

– *On peut montrer facilement que le déterminant de $T(l_i \leftarrow l_i + \lambda l_j)$ est* 1*.*

1.3.2 Méthode d'élimination de Gauss

Comme les systèmes triangulaires sont faciles à résoudre, l'objectif est de transformer tout système linéaire en système triangulaire équivalent. Cette méthode consiste à déterminer une matrice M inversible telle que la matrice MA soit triangulaire supérieure. Alors

$$AX = b \Leftrightarrow (MA)X = Mb,$$

ensuite résoudre le système triangulaire supérieur $(MA)X = Mb$ par l'algorithme de remontée.

Remarque 8 *En pratique on ne calcule pas M d'une façon explicite, mais par des transformations équivalentes (opérations élémentaires) on ramène le système de départ en un système à matrice triangulaire supérieure. Autrement dit*

$$(A, b) \overset{\textit{transformation}}{\longrightarrow} \left(A^{(n)}, b^{(n)}\right),$$

où $A^{(n)}$ est une matrice triangulaire supérieure, puis on résout le système triangulaire.

$$A^{(n)}x = b^{(n)}$$

Nous introduisons maintenant la notion de matrice augmentée :

Définition 7 ***La matrice augmentée*** *du système linéaire (1.1) est la matrice de dimension $n \times (n+1)$ que l'on obtient en ajoutant le membre de droite b à la matrice A c'est-à-dire :*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \qquad \textit{ou} \qquad \left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] \tag{1.3}$$

Cette notation est très utile puisque les opérations élémentaires doivent être effectuées à la fois sur les lignes de la matrice A et sur celles du vecteur b.

Description de la méthode par un exemple

Exemple 7 *Soit à résoudre le système de l'exemple 4 par la méthode d'élimination de Gauss*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix}$$

La matrice augmentée du système est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 11 \\ 5 & 4 & 1 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ T_1\,(l_2 \leftarrow l_2 - (6/3)l_1) \\ T_2\,(l_3 \leftarrow l_3 - (5/3)l_1) \end{array}$$

Il faut creuser la matrice A pour la rendre triangulaire supérieure en effectuant les transformations citées ci-dessus.
On a indiqué ci-dessous la matrice augmentée de même que les opérations élémentaires pour éliminer les termes non nuls sous la diagonale de la $1^{\text{ère}}$ *colonne. Il est à noter que l'on divise par 3 (a_{11}) le coefficient qui multiplie la ligne 1.*
on dit que 3 est le pivot et l_1 est la ligne de pivot.
On obtient en effectuant les opérations indiquées les résultats suivants :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 7/3 & -7/3 & 0 \end{array}\right] \; T_3\,(l_3 \leftarrow l_3 - ((7/3)/2)l_2)$$

Pour produire une matrice triangulaire supérieure, il suffit d'introduire maintenant des zéros sous la diagonale de la deuxième colonne. L'opération est indiquée ci-dessous, le pivot est 2 (a_{22}) et la ligne de pivot est l_2. On obtient donc

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 7/6 & 7/6 \end{array}\right] \tag{1.4}$$

Il reste ensuite à appliquer une remontée triangulaire pour déterminer la solution, on aura :

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

À partir de cet exemple, on en déduit l'algorithme d'élimination de Gauss, en pseudo-code :

- *Pour chaque colonne i de 1 à $n-1$,*
- *Pour chaque ligne j de i à n,*
- *Opération élémentaire :* $l_j \leftarrow l_j - \dfrac{a_{ji}}{a_{ii}} l_i$*, c'est-à-dire, pour chaque terme k de i à n,* $a_{jk} = a_{jk} - \dfrac{a_{ji}}{a_{ii}} \times a_{ik}$
- $b_j = b_j - \dfrac{a_{ji}}{a_{ii}} \times b_i$
- *Remontée*

Remarque 9 *1. Il faut en même temps que l'on réalise les opérations sur la matrice, réaliser les opérations sur le second membre.*

2. La division par a_{ii} impose qu'il ne doit pas y avoir de pivot nul pour réaliser l'algorithme. On verra plus loin comment traiter ces cas.

Cas des pivots nuls :

L'algorithme ci-dessus passe par la division par le pivot. Si le pivot est nul alors le calcul numérique deviendra faux. Dans ce cas, il faut réaliser une permutation sur les lignes en dessous.

Exemple 8 *Considérons le système $Ax = b$, avec*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matrice augmentée associée est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \textit{le pivot est -2} \\ T_1(l_2 \leftarrow l_2 + 1/2 l_1) \\ T_2(l_3 \leftarrow l_3 + 1/2 l_1) \end{array}$$

Par les transformations T_1 et T_2, on obtient

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5/2 & 5/2 \\ 0 & 3 & 1/2 & 7/2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \textit{le pivot est nul} \\ P_1(l_2 \leftrightarrow l_3) \end{array}$$

Ainsi, nous devons appliquer la remarque précédente, la permutation P_1. Ce qui donne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 5/2 & 5/2 \end{array}\right]$$

Par l'application d'une remontée, la solution est donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Algorithme d'élimination de Gauss généralisé :

$$\left[A^{(1)}|b^{(1)}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right] \begin{array}{c} l_1^{(1)} \\ l_2^{(1)} \\ \vdots \\ l_n^{(1)} \end{array}$$

– **A la** $1^{\text{ère}}$ **étape** : Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ (sinon on fait une permutation de lignes) on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} l_1^{(2)} \longleftarrow l_1^{(1)} \\ l_i^{(2)} \longleftarrow l_i^{(1)} - \alpha_{i1} l_1^{(1)} \text{ où } \alpha_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\left[A^{(2)}|b^{(2)}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right] \begin{array}{c} l_1^{(2)} \\ l_2^{(2)} \\ \vdots \\ l_n^{(2)} \end{array}$$

où

$$\begin{cases} a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}, 1 \leq j \leq n; \quad b_1^{(2)} = b_1^{(2)} \\ a_{i1}^{(2)} = 0, \quad 2 \leq i \leq n; \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \alpha_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad 2 \leq i, j \leq n \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \alpha_{i1} b_1^{(1)}, \quad 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

– **A la** k^{ieme} **étape** $(1 \leq k \leq n-1)$: Si $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ (sinon on fait une permutation de lignes) on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} l_i^{(k+1)} \longleftarrow l_i^{(k)}, 1 \leq i \leq k \\ l_i^{(k+1)} \longleftarrow l_i^{(k)} - \alpha_{ik} l_k^{(k)} \quad \text{ où } \alpha_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\left[A^{(k+1)}|b^{(k+1)}\right] = \left[\begin{array}{ccccccc|c} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(k)} & b_1^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(k)} & b_2^{(k)} \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ \vdots & & & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} & b_{k+1}^{(k+1)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{n,n}^{(k+1)} & b_n^{(k+1)} \end{array}\right] \begin{array}{c} l_1^{(k+1)} \\ l_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ l_k^{(k+1)} \\ l_{k+1}^{(k+1)} \\ \vdots \\ l_n^{(k+1)} \end{array}$$

où

$$\begin{cases} \text{Pour } 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq n & \begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} \end{cases} \\ \text{Pour } k+1 \leq i, j \leq n & \begin{cases} a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^{(k)} - \alpha_{ik} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{k+1} = b_i^{(k)} - \alpha_{ik} b_k^{(k)} \end{cases} \end{cases}$$

En réitérant $(n-1)$ fois l'opération on obtient :

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{(n)}x = b^{(n)}$$

avec

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad b^{(n)} = \begin{pmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$A^{(n)}$ étant une matrice triangulaire supérieure.

– **Dernière étape** : Une remontée.

Remarque 10 *1. La méthode de Gauss sans permutation de lignes s'appelle "**Gauss***

ordinaire".

2. *La méthode de Gauss n'est jamais programmée sans au moins une stratégie de pivot partiel (permutation de lignes).*

Exemple 9 *Considérons le système $Ax = b$, avec*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par l'élimination de Gauss, on obtient

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la solution est

$$x = \begin{pmatrix} \frac{-6}{5} \\ \frac{-3}{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.3.3 La décomposition LU

Le principe de cette méthode est la décomposition de la matrice A de façon à la mettre sous la forme $A = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure. La résolution du système (1.1) devient

$$LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Donc la résolution du système revient à la résolution de deux systèmes triangulaires. On utilise d'abord une descente triangulaire sur la matrice L pour obtenir y et, par la suite, une remontée triangulaire sur la matrice U pour obtenir la solution recherchée x.

Exemple 10 *On considère le système de l'exemple 7 :*

Si on note

$$U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7/6 \end{pmatrix}$$

donnée dans le système (1.4).

les opérations effectuées pour obtenir $A^{(3)}$ sont équivalent à multiplier le système de départ par une suite de matrice inversibles. En fait, on a :

$$A^{(3)} = T_3 T_2 T_1 A$$

où les matrices T_i, $i = 1, 2, 3$ équivalent aux différentes opérations effectuées sur les lignes de la matrice. Plus explicitement, on a :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7/6 \end{pmatrix}}^{U=A^{(3)}} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7/6 & 1 \end{pmatrix}}^{T_3} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{T_2} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{T_1} \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}}^{A}$$

Puisque l'on sait inverser les matrices T_i on a aussi

$$\begin{aligned} \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}}^{A} &= \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{T_1^{-1}} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{T_2^{-1}} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7/6 & 1 \end{pmatrix}}^{T_3^{-1}} \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7/6 \end{pmatrix}}^{U} \\ &= \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6/3 & 1 & 0 \\ 5/3 & 7/6 & 1 \end{pmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7/6 \end{pmatrix}}^{U} \end{aligned}$$

est la décomposition LU de la matrice A.
Par une descente, la solution du système $Ly = b$ est :

$$y = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 7/6 \end{pmatrix}$$

Par une remontée, la solution du système $Ux = y$ est :

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui représente la solution du système de départ.

Construction des matrices L et U :

Les matrices L et U sont obtenues par l'algorithme du pivot de Gauss, dont chaque étape peut se ramener à une multiplication à gauche par une matrice.

Soit $A^{(1)} = A$ la matrice initiale.

- **La première étape** du pivot de Gauss peut être mise sous la forme

$$A^{(2)} = T^{(1)} A^{(1)} \text{ avec } T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_{31} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\alpha_{n1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  On retrouve pour chaque ligne $i \quad (i \geq 2)$ la relation

$$l_i \leftarrow l_i - \alpha_{i1} l_1$$

- **La $k^{ième}$ étape** du pivot de Gauss peut être mise sous la forme

$$A^{(k+1)} = T^{(k)} A^{(k)} \text{ avec } T^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & -\alpha_{k+1,k} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & -\alpha_{n,k} & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  On retrouve pour chaque ligne $i \quad (i \geq k+1)$ la relation

$$l_i \leftarrow l_i - \alpha_{ik} l_k$$

– Par récurrence simple, on obtient finalement la matrice triangulaire supérieure

$$U := A^{(n)} = T^{(n-1)}T^{(n-2)} \dots T^{(1)}A.$$

– Les matrices $T^{(k)}$ sont des matrices triangulaires inférieures. Or on peut montrer que le produit de 2 matrices triangulaires inférieures reste triangulaire inférieure. De même l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire inférieure.
En notant $L^{(k)}$ l'inverse de la matrice $T^{(k)}$, on obtient alors

$$A = \overbrace{L^{(1)}L^{(2)} \dots L^{(n-1)}}^{L} U = LU$$

– Les matrices $L^{(k)}$ s'obtiennent très simplement à partir des $T^{(k)}$ en mettant inversant les signes des termes extra-diagonaux :

$$L^{(k)} = \left(T^{(k)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & +\alpha_{k+1,k} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & +\alpha_{n,k} & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où la matrice L est donnée explicitement par :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_{2,1} & 1 & \ddots & \dots & \vdots \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit l'existence de la décomposition LU.

Remarque 11 *La décomposition LU n'étant pas unique, il faut faire au préalable des choix arbitraires. Le choix le plus courant consiste à imposer que la matrice U est unitaire (des 1 sur sa diagonale), c'est ce qu'on appelle **décomposition de Crout**.*

Décomposition LU de crout :
Cette décomposition consiste à déterminer L et U par identification. On connaissant la ma-

trice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, on écrit l'égalité $A = LU$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & \dots & l_{n,n-1} & l_{n,n} \end{pmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{U}$$

L contient $\dfrac{n(n+1)}{2}$ éléments et U contient $\dfrac{n(n-1)}{2}$ éléments. Par identification on obtient un système linéaire de n^2 inconnues. On constate que la détermination des éléments de L et U cherchés se fait suivant l'algorithme général :

Algorithme de la décomposition LU de Crout (sans permutation de lignes) :

- **Par l'identification de la $1^{\text{ère}}$ colonne de A avec celle de LU**, on obtient

$$l_{i,1} = a_{i,1}, \qquad i = 1, \dots, n \quad (1^{\text{ère}}\,\text{colonne de}\,L)$$

- **Par l'identification de la $1^{\text{ère}}$ ligne de A avec celle de LU**, on obtient

$$u_{1,j} = \frac{a_{1,j}}{l_{1,1}}, \qquad j = 2, \dots, n \quad (1^{\text{ère}}\,\text{ligne de}\,U\,\text{si}\,l_{1,1} \neq 0)$$

- **Par l'identification de la $k^{\text{ème}}$ colonne de A avec celle de LU**, on obtient

$$\begin{aligned} l_{k,k} &= a_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{k,j}u_{j,k} \\ l_{i,k} &= a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j}u_{j,k}, \qquad i = k+1, \dots, n \quad (k^{\text{ème}}\,\text{colonne de}\,L) \end{aligned}$$

- **Par l'identification de la $k^{\text{ème}}$ ligne de A avec celle de LU**, on obtient

$$u_{k,j} = \frac{1}{l_{k,k}}\left(a_{k,j} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{k,i}u_{i,j}\right), \qquad i = k+1, \dots, n \quad (k^{\text{ème}}\,\text{ligne de}\,U\,\text{si}\,l_{k,k} \neq 0)$$

- **Calcul de $l_{n,n}$** :

$$l_{n,n} = a_{n,n} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{n,k}u_{k,n}$$

- **Descente et remontée triangulaires** :

– Descente triangulaire pour résoudre $Ly = b$:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}} \\ y_i = \dfrac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \right), \qquad i = 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

– Remontée triangulaire pour résoudre $Ux = y$:

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_i = y_i - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1. \end{cases}$$

Exemple 11 *Considérons le système de l'exemple 7. On veut déterminer la solution de ce système par la méthode de Crout :*
Selon cette méthode la décomposition LU est donnée sous cette forme :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & 1 & u_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– ***Par l'identification de la*** $1^{\text{ère}}$ ***colonne de*** A ***avec celle de*** LU*, on obtient*

$$\begin{aligned} l_{1,1} &= a_{1,1} = 3 \\ l_{2,1} &= a_{2,1} = 6 \\ l_{3,1} &= a_{3,1} = 5, \end{aligned}$$

– ***Par l'identification de la*** $1^{\text{ère}}$ ***ligne de*** A ***avec celle de*** LU*, on obtient*

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= \frac{1}{3} \\ u_{1,3} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

– ***Par l'identification de la*** $2^{\text{ème}}$ ***colonne de*** A ***avec celle de*** LU*, on obtient*

$$\begin{aligned} l_{2,2} &= 2 \\ l_{3,2} &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

– ***Par l'identification de la*** $2^{\text{ème}}$ ***ligne de*** A ***avec celle de*** LU, *on obtient*

$$u_{2,3} = \frac{-3}{2}$$

– ***Calcul de*** $l_{3,3}$ *:*

$$l_{3,3} = \frac{7}{6}$$

– *La résolution du système* $Ly = b$ *par une descente nous donne :*

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 \\ y_2 &= \frac{-1}{2} \\ y_3 &= 1 \end{aligned}$$

– *La résolution du système* $Ux = y$ *par une remontée nous donne :*

$$x_3 = 1$$
$$x_2 = 1$$
$$x_1 = 1$$

Exemple 12 *La décomposition* LU *n'est pas unique :*

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6/3 & 1 & 0 \\ 5/3 & 7/6 & 1 \end{pmatrix}}^{L_1} \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7/6 \end{pmatrix}}^{U_1}$$
$$= \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & \frac{7}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}}^{L_2} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{U_2}$$

Décomposition LU de Doolitle :

Cette décomposition consiste à factoriser la matrice A comme produit de deux matrices L et U, telles que, L est une matrice triangulaire inférieure unitaire et U est une matrice triangulaire supérieure. On connaissant la matrice $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, on écrit l'égalité

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & u_{n,n} \end{pmatrix}}^{U}$$

On peut déterminer facilement les coefficients de L et U par identification et avec la même procédure de l'algorithme de Crout.

Théorème 3 *(Condition suffisante de la factorisation LU) Soit A une matrice carrée d'ordre n dont tous les mineurs principaux sont non nuls. Il existe un unique couple de matrices (L, U), avec U triangulaire supérieure, et L triangulaire inférieure à diagonale unité (i.e. $l_{i,i} = 1$), tel que $A = LU$.*

Théorème 4 *Si A une matrice à diagonale strictement dominante alors elle admet une factorisation LU.*

Pratiquement, Si au cours de l'élimination de Gauss sur la matrice A, les pivots sont non nuls, alors il existe une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U, telle que : $A = LU$.
Si de plus on impose à L d'avoir les éléments diagonaux égaux à un alors la factorisation est unique. Sinon, on parle de la décomposition PLU.

Théorème 5 *Si A est simplement supposée inversible, alors A peut s'écrire $A = PLU$, où P est une matrice de permutation.*

Décomposition $PA = LU$ (avec permutation de lignes) :
Cette décomposition consiste à exprimer A comme produit de trois matrices, P une matrice de permutation inversible, L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure.
Dans ce cas, le système (1.1) est équivalent au système suivant :

$$PAx = Pb \Leftrightarrow LUx = Pb.$$

Par la résolution des deux systèmes suivant :

$$\begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

Exemple 13 *On considère le système $Ax = b$ avec :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad et \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

La matrice augmentée associée est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ T_1\,(l_2 \leftarrow l_2 - l_1) \\ T_2\,(l_3 \leftarrow l_3 - 3l_1) \end{array}$$

On applique les transformations T_1 et T_2, on obtient

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ P_1\,(l_3 \leftarrow l_2) \end{array}$$

Le pivot est nul, on doit permuter les lignes l_2 et l_3 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

On pose

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad et \qquad b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Soient

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad et \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

On a

$$Ax = b \Leftrightarrow P_1 T_2 T_1 A x = Ux = b^{(3)}$$

et

$$P_1T_2T_1A = U \Leftrightarrow A = T_1^{(-1)}T_2^{(-1)}P_1^{(-1)}U$$

avec

$$L' := T_1^{(-1)}T_2^{(-1)}P_1^{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On applique la permutation P_1, on obtient alors

$$L := P_1L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est triangulaire inférieure.
Ainsi

$$A = L'U \Leftrightarrow A = P_1LU \Leftrightarrow P_1A = LU.$$

Alors, la solution de (1.5) est celle du système suivant :

$$LUx = P_1b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution du système $Ly = P_1b$ selon la méthode de descente est donnée par :

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et par la méthode de remontée, la solution du système $Ux = y$ est :

$$x = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

qui est la solution du (1.5).

1.3.4 Factorisation de Choleski

Dans beaucoup d'applications la matrice A est symétrique définie positive. Dans ce cas, on économise de l'espace mémoire en ne stockant que $n(n+1)/2$ termes. On peut ensuite décomposer A sous la forme LL^t où L est encore ici une matrice triangulaire inférieure, dite **factorisation de Choleski**. La matrice triangulaire supérieure U de la décomposition LU est ainsi remplacée par la matrice transposée de L, réduisant ainsi l'espace mémoire nécessaire. La résolution du système (1.1) se fait en deux étapes. On résout d'abord le système triangulaire inférieur $Ly = b$ et ensuite le système triangulaire supérieur $L^t x = y$.

L'existence de cette décomposition est garantie par le théorème suivant :

Théorème 6 ***(Factorisation ou décomposition de Cholesky)*** *Soit A une matrice carrée symétrique définie positive. Alors il existe (au moins) une matrice réelle triangulaire inférieure L telle que $A = LL^t$.*
De plus, on peut imposer que les éléments diagonaux de la matrice L soient strictement positifs, et la décomposition $A = LL^t$ correspondante est alors unique.

On refait donc le même raisonnement qui nous a mené à la décomposition LU générale mais cette fois en considérant une matrice A symétrique :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{1,n} & \dots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & \dots & l_{n,n-1} & l_{n,n} \end{pmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & \dots & l_{n,1} \\ 0 & l_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & l_{n,n-1} \\ 0 & \dots & 0 & l_{n,n} \end{pmatrix}}^{L^t}$$

Par identification, on construit l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}}; \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{l_{11}}, \quad 2 \leq i \leq n; \\ \text{ pour } 2 \leq j \leq n \\ l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}; \\ l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right), j+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Exemple 14 *Considérons le système $Ax = b$ avec :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 & 14 \\ 1 & 5 & 14 & 15 \end{pmatrix} \qquad et \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On peut montrer facilement que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution du système $Ly = b$ est :

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution du système $L^t x = y$ est :

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où la solution du système $Ax = b$.

Chapitre 2

Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

2.1 Principe des méthodes itératives

Dans le chapitre précédente, nous avons vu les méthodes appelées méthodes directes car elles fournissent des solutions exactes. Cependant, ces calculs peuvent être lourds pour de très grandes matrices. Une alternative consiste à faire converger des suites vers la solution. Nous perdrons alors l'exactitude de la solution, mais nous gagnerons en rapidité d'exécution dans l'approximation de la solution.

On considère le système linéaire (1.1) avec A inversible. Le principe général d'une méthode itérative pour résoudre (1.1) est de générer une suite de vecteurs qui converge vers la solution $A^{-1}b$. Pour ce faire l'idée est d'écrire le système (1.1) sous une forme équivalente permettant de voir la solution comme le point fixe d'une certaine fonction :

$$(1.1) \Longleftrightarrow Bx + c = x,$$

avec B une matrice carrée et $c \in \mathbb{K}^n$ bien choisis c'est-à-dire $I - B$ inversible et $c = (I - B)A^{-1}b$.
Par exemple, si $A = M - N$ pour deux matrices M et N avec M inversible, on peut choisir $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$.
Dans la suite on supposera toujours que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $c \in \mathbb{K}^n$ sont choisis tels que $I - B$ inversible et $c = (I - B)A^{-1}b$. On se donne alors un vecteur $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ et on construit une suite de vecteurs $x^{(k)} \in \mathbb{K}^n$ à l'aide du schéma itératif

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Si la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors elle converge vers la solution $A^{-1}b$ de (1.1). En effet, si elle existe, la limite x^* est un point fixe de la fonction $x \mapsto Bx + c$, i.e., vérifie $x^* = Bx^* + c$ qui est équivalent à $Ax^* = b$.

L'idée est de déduire un schéma itératif de la décomposition de A sous la forme $A = M - N$ où M est une matrice inversible. En pratique on suppose que les systèmes de matrice M sont faciles à résoudre (par exemple M diagonale, triangulaire, ...). Le système (1.1) s'écrit alors $Mx = Nx + b$ c'est-à-dire $x = Bx + c$ avec $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$ et on considère le schéma itératif associé :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{K}^n, \quad \text{donnée} \\ Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b. \end{cases} \tag{2.1}$$

Définition 8 *On dit que la méthode itérative (2.1) converge s'il existe un vecteur $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\| = 0$$

pour tout vecteur initial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Nous allons maintenant considérer trois exemples classiques : **les méthodes de Jacobi**, **Gauss-Seidel** et **de relaxation**. Le point de départ de chacune de ces méthodes est l'unique décomposition de la matrice $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ sous la forme :

$$A = D - E - F = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix}$$

avec

1. $D = (d_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ diagonale, telle que $d_{i,i} = a_{i,i}$ et $d_{i,j} = 0$ pour $i \ne j$;
2. $E = (e_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ triangulaire inférieure stricte telle que $e_{i,j} = -a_{i,j}$ si $i > j$ et $e_{i,j} = 0$ si $i \le j$
3. $F = (f_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ triangulaire supérieure stricte telle que $f_{i,j} = -a_{i,j}$ si $i < j$ et $f_{i,j} = 0$ si $i \ge j$;

Exemple 15 *Considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La décomposition de A sous la forme $A = D - E - F$ décrite ci-dessus s'écrit alors

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{D} - \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{E} - \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{F}.$$

On supposera de plus que D est inversible et on distingue les trois méthodes suivantes :

- **Méthode de Jacobi** : $M = D$, $N = E + F$;
- **Méthode de Gauss-Seidel** : $M = D - E$, $N = F$;
- **Méthode de relaxation** : $M = \frac{1}{\omega}(D - \omega E)$, $N = \left(\frac{1-\omega}{\omega}\right) D + F$ avec ω un paramètre réel non nul.

Remarque 12 *On remarque que la méthode de Gauss-Seidel est un cas particulier de la méthode relaxation pour $\omega = 1$*

2.2 Méthode de Jacobi

On pose $A = M - N$ avec $M = D$ inversible et $N = E + F$. Le schéma itératif s'écrit alors

$$Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b \Longleftrightarrow x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b.$$

Définition 9 *La matrice $B_J = D^{-1}(E + F)$ s'appelle **la matrice de Jacobi** associée à A.*

Pour calculer $x^{(k+1)}$ à partir de $x^{(k)}$. On a $Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b$ donc pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\left(Dx^{(k+1)}\right)_i = \left((E + F)x^{(k)}\right)_i + b_i$$

c'est-à-dire

$$a_{i,i}x_i^{(k+1)} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)} + b_i \Longleftrightarrow x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left[\left(-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\right) + b_i\right]$$

On rappelle la notion suivante :

Définition 10 *Soit B une matrice carrée d'ordre n, on définit **le rayon spectral** de la matrice B, i.e., le plus grand module des valeurs propres de B, noté $\rho(B)$.*

Le résultat de convergence de cette méthode est donné dans le théorème suivant :

Théorème 7 *La méthode de Jacobi converge si et seulement si* $\rho(B_J) < 1$.

Exemple 16 *Pour la matrice* A *donnée dans l'exemple 15, on obtient :*

$$B_J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrices B_J *sont 0 et* $\pm\frac{i\sqrt{5}}{2}$. *On a donc* $\rho(B_J) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ *et la méthode de Jacobi diverge.*

Exemple 17 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

La méthode de Jacobi s'écrit dans ce cas par :

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^0, \quad x_2^0, \quad x_3^0)^t \qquad \text{donnée} \\ x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}\left(2 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{5}\left(17 - x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{-1}{6}\left(-18 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

Cela permet de remplir le tableau suivant à partir de $x^{(0)} = (0 \quad 0 \quad 0)$ *:*

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	$0,00000$	$0,00000$	$0,00000$
1	$0,66667$	3.40000	3.00000
2	0.53333	2.06667	2.65556
3	0.86296	2.23111	2.83333
4	0.86741	2.09407	2.91580
5	0.94057	2.06020	2.94012
6	0.95997	2.03583	2.97016
7	0.97811	2.01994	2.98069
8	0.98691	2.01210	2.98938
9	0.99242	2.00686	2.99362
10	0.99558	2.00407	2.99633

Les valeurs convergent vers la solution $(1 \quad 2 \quad 3)^t$ *avec une convergence assez lente.*