MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI
TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

MTH 1234

CHIZIQLI ALGEBRA

MAVZU

KVADRATIK FORMA VA UNI KANONIK KO‘RINISHGA KELTIRISH

SADADDINOVA SANOBAR SABIROVNA, DOTSENT

OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI

Kvadratik forma va
uni kanonik ko‘rinishga keltirish

Reja

1. Kvadratik formaning ta’rifi
2. Kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi
3. Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirish

1. Kvadratik formaning ta’rifi

n ta $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma’lumning $f(x)$ **kvadratik formasi** deb, har bir hadi bu no‘malumlarning kvadrati yoki ikkita noma’lumning ko‘paytmasidan iborat bo‘lgan yig‘indiga aytiladi: $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$

Kvadratik formaning matritsasi:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bunda *A* matritsaning barcha xos sonlari haqiqiy bo‘lishi uchun $a_{ij} = a_{ji}$ deb faraz qilinadi (Simmetrik matritsa).

A matritsaning rangi kvadratik **formaning rangi** bo‘ladi.

Kvadratik formaning koeffitsiyentlari haqiqiy sonlar bo‘lsa, **haqiqiy kvadratik forma,** kompleks sonlar bo‘lsa, **kompleks kvadratik forma** deyiladi.

Kvadratik formaning matritsaviy ko‘rinishi

$$f = X^T A X$$

Bu yerda X va X^T o‘zaro transponirlangan matritsalar: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Ikki noma’lumli kvadratik forma: $f = X^T A X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$f = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \quad (a_{12} = a_{21})$$

Uch noma’lumli kvadratik forma: $f = X^T A X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \quad (a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32})$$

Kvadratik forma ustida chiziqli almashtirish bajarish

1-teorema. *A* matritsali *n* noma’lumli kvadratik forma ustida *C* matritsali chiziqli almashtirish bajarilgandan so‘ng u $C^T AC$ matritsali *n* noma’lumli kvadratik formaga aylanadi: $f = Y^T (C^T AC) Y$

1-misol. $f = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$ kvadratik forma ustida $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$ almashtirish bajarilgandan so‘ng hosil bo‘lgan yangi kvadratik formani toping.

Yechilishi: Kvadratik formaning matritsasi: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Chiziqli almashtirish matritsasi: $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^* = C^T AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -17 & 3 \end{pmatrix}$$

Bundan quyidagi kvadratik formani hosil qilamiz:

$$L = 13y_1^2 - 34y_1y_2 + 3y_2^2$$

2. Kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi

Agar kvadratik formada turli noma’lumlarning ko‘paytmalari oldidagi barcha koeffitsiyentlar nolga teng bo‘lsa, bu ifoda kvadratik formaning **kanonik ko‘rinishi** deyiladi:

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_n y_n^2$$

Kanonik ko‘rinishdagi noldan farqli koeffitsiyentlar soni kvadratik formaning rangiga teng bo‘lishi kerak.

2-teorema. Har qanday kvadratik formani biror xosmas chiziqli almashtirish orqali kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin.

Berilgan kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi bir qiymatli aniqlangan emas, ya’ni kvadratik formani turli usullar bilan turli ko‘rinishdagi kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin.

Kvadratik formaning turli ko'rinishdagi kanonik shakllari

Misol uchun $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1$ kvadratik formani

a) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + 3t_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_2 - t_3, \\ x_3 = t_3. \end{cases}$ xosmas chiziqli almashtirish yordamida $f = \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 + 6t_3^2$

b) $\begin{cases} x_1 = t_1 + 3t_2 + 2t_3, \\ x_2 = t_1 - t_2 - 2t_3, \\ x_3 = t_2. \end{cases}$ xosmas chiziqli almashtirish yordamida kanonik shaklga keltirish mumkin. $f = 2t_1^2 + 6t_2^2 - 8t_3^2$

3. Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirish

2-misol. $f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$ kvadratik formani kanonik shaklga keltiring.

Yechilishi: 1) Kvadratik formaning matritsasini tuzamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Uning xarakteristik ko‘phadini tuzamiz:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

A matritsaning uchta karrali xos soni: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$

va bitta oddiy xos soni mavjud: $\lambda_4=-3$

Demak, bu kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi quyidagicha: $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$

Kanonik ko‘rinishga keltiruvchi almashtirishlar

Ba’zi hollarda faqat kanonik ko‘rinishni emas, balki bu ko‘rinishga keltiruvchi almashtirishni ham bilish kerak bo‘ladi.

Buning uchun berilgan *A* **simmetrik matritsani diagonal ko‘rinishga keltiruvchi** *Q* ortogonal matritsani yoki uning teskari matritsasini topish va *A* matritsaning xos sonlaridan foydalanib tuzilgan $(A-\lambda_0 E)X=0$ sistemaning fundamental yechimlarini topib, ortonormallash kerak.

Kanonik ko‘rinishga keltiruvchi almashtirishlarni topish

2-misoldagi $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiruvchi xosmas almashtirishni toping.

Yechilishi: Bu kvadratik formaning matritsasi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_0 E)X = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_4 = -3$$

$\lambda_0 = 1$ bo‘lsin. U holda quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemaning rangi 1 ga teng. Demak, uning 3 ta chiziqli erkli yechimini topish mumkin. Masalan, ushbu vektorlar - sistemaning chiziqli erkli yechimlari bo‘ladi:

$$b_1 = (1,1,0,0),$$
$$b_2 = (1,0,1,0),$$
$$b_3 = (-1,0,0,1)$$

Bu vektorlar sistemasini Shmidt formulalaridan foydalanib, ortogonallaymiz va vektorlar sistemasini hosil qilamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_1=(1,1,0,0),\quad b_2=(1,0,1,0),\quad b_3=(-1,0,0,1)$$

$$\longrightarrow$$

$$c_1=b_1=(1,1,0,0),$$

$$c_2=-\frac{1}{2}c_1+b_2=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right),$$

$$c_3=\frac{1}{3}c_1+\frac{1}{3}c_2+b_3=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)$$

$\lambda_0=-3$ bo‘lsin. U holda quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1+3x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+3x_3+x_4=0, \\ -x_1+x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

Bu sistemaning rangi 3 ga teng. Uning noldan farqli yechimi $c_4=(1,-1,-1,1)$ ko‘rinishda bo‘ladi.

$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$ vektorlar ortogonal sistemani tashkil etadi. Ularni normallashtiramiz:

Ularni normallashtiramiz:

$$c_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right),$$

$$c_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right),$$

$$c_3' = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$c_4' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

ortonormallangan vektorlar sistemasini hosil qilamiz. Shunday qilib, berilgan kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiruvchi almashtirishlardan biri quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_2, \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} x_1 - \dfrac{1}{\sqrt{6}} x_2 + \sqrt{\dfrac{2}{3}} x_3, \\ y_3 = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}} x_1 + \dfrac{1}{2\sqrt{3}} x_2 + \dfrac{1}{2\sqrt{3}} x_3 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} x_4, \\ y_4 = \dfrac{1}{2} x_1 - \dfrac{1}{2} x_2 - \dfrac{1}{2} x_3 + \dfrac{1}{2} x_4 \end{cases}$$

Kvadratik formaning normal ko‘rinishi

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots. + b_n y_n^2$$

Agar kvadratik formaning kanonik ko‘rinishida $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$ bo‘lsa, unga **kvadratik formaning normal ko‘rinishi** deyiladi: $f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$

Agar haqiqiy kvadratik forma qaralayotgan bo‘lsa, uni normal ko‘rinishga keltirish ancha murakkab masala hisoblanadi. Chunki, bunda manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarish talab qilinishi mumkin.

3-teorema. Haqiqiy koeffitsiyentli kvadratik formani haqiqiy xosmas chiziqli almashtirish yordamida hosil qilingan normal ko‘rinishida musbat kvadratlar soni va manfiy kvadratlar soni bu almashtirishning tanlab olinishiga bo‘g‘liq emas.

Kvadratik formaning signaturasi

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_n y_n^2$$

Berilgan kvadratik formaning keltirilgan kanonik ko‘rinishidagi musbat ishorali kvadratlar soni bu forma **inversiyasining musbat indeksi**, manfiy ishorali kvadratlar soni esa **inversiyaning manfiy indeksi**, musbat va manfiy indekslar ayirmasi esa kvadratik formaning **signaturasi** deyiladi.

4-teorema. *n* ta noma’lumning haqiqiy koeffitsiyentli ikkita kvadratik formasi bir xil rangga va bir xil signaturaga ega bo‘lgandagina va faqat shundagina, ular xosmas chiziqli almashtirish orqali bir-biriga o‘tkaziladi.

5-teorema. Agar kvadratik formada o‘zgaruvchining kvadrati ishtirok etmasa, u holda chiziqli almashtirish yordamida uni hech bo‘lmaganda bitta o‘zgaruvchining kvadrati qatnashgan kvadratik formaga keltirish mumkin.

Kvadratik formalarning kanonik ko‘rinishlari klassifikatsiyasi

1) musbat aniqlangan;
2) manfiy aniqlangan;
3) ishorasi aniqlanmagan kvadratik forma;
4)ishorasi yarim aniqlangan kvadratik forma.

Agar *n* ta noma’lumning haqiqiy koeffitsiyentli kvadratik formasi *n* ta musbat (manfiy) kvadratdan iborat normal ko‘rinishga keltirilsa, bu **forma musbat (manfiy) aniqlangan** deyiladi: $\varphi_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ $\varphi_2(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-x_3^2$

Agar haqiqiy koeffitsiyentli kvadratik formaning normal ko‘rinishi ham musbat, ham manfiy kvadratlardan iborat bo‘lsa, unga **ishorasi aniqlanmagan forma** deyiladi: $\varphi_3(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2-x_3^2$

Agar haqiqiy koeffitsiyentli kvadratik formaning normal ko‘rinishi bir xil ishorali kvadratlardan iborat bo‘lsa, unga **ishorasi yarim aniqlangan forma** deyiladi: $\varphi_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$

Amaliyotda va iqtisodiyotda eng ko‘p uchraydigan kvadratik formalar bu – ishorasi aniqlangan kvadratik formalar

Koeffitsiyentlar asosida formaning musbat aniqlanganligini bilish uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz.

n ta noma’lumning matritsasi $A=(a_{ij})$ bo‘lgan kvadratik forma berilgan bo‘lsin. Bu matritsaning yuqori chap burchagiga joylashgan 1,2,3,...,*n* – tartibli minorlari kvadratik formaning **bosh minorlari** deyiladi:

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6-teorema. *n* ta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma’lumning haqiqiy koeffitsiyentli kvadratik formasi uning bosh minorlari qat’iy musbat bo‘lganda va faqat shundagina, musbat aniqlangan bo‘ladi.

$$f = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

kvadratik forma musbat aniqlangan, chunki uning bosh minorlari musbat:

$$5,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

$$f = 3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

kvadratik forma musbat aniqlangan emas, chunki uning 2-minori manfiy:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Ikki noma'lumli kvadratik formalar

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

tenglamaning koeffitsiyentlaridan quyidagi ikkita determinantni tuzamiz:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

Δ - 3-tartibli minor, tenglamaning diskriminanti,
δ – 2-tartibli minor, tenglamaning yuqori tartibli hadlarining diskriminanti deyiladi.

Ushbu **ikki noma'lumli 2- darajali tenglama** bilan aniqlanuvchi nuqtalarning geometrik o'rni

1) ellips $\Delta \neq 0,\ \delta > 0$
2) giperbola $\Delta \neq 0,\ \delta < 0$
3) parabola $\Delta \neq 0,\ \delta = 0$ bo'ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar:

1. n ta noma’lumning kvadratik formasi deb qanday ko‘phadga aytiladi?
2. Kvadratik formani matritsa ko‘rinishida qanday yoziladi?
3. Kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi qanday shaklda bo‘ladi?
4. Kvadratik forma matritsasini diagonal ko‘rinishga keltiruvchi ortogonal matritsa mavjudmi?
5. Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirish masalasi qanday yechiladi?
6. Kvadratik formaning xarakteristik sonlari deb nimaga aytiladi?
7. Kvadratik forma rangi deb nimaga aytiladi?
8. Musbat va manfiy aniqlangan kvadratik forma deganda nimani tushunasiz?
9. Kvadratik forma matritsasining bosh yoki burchak minorlari nima?
10. Kvadratik forma musbat va manfiy aniqlanganlik yetarli shartlari nimalardan iborat?

Adabiyotlar:

1. Raxматov R.R., Adizov A.A. “Chiziqli fazo va chiziqli operatorlar” O‘quv uslubiy qollanma. TATU, Toshkent 2019.

2. Соатов Ё.У. “Олий математика”, Т., Ўқитувчи нашриёти, 2-қисм, 1995.

3. Рябушко А.П. и др. “Сборник индивидуальных заданий по высшей математике”, Минск, Высшая школа, 3-часть, 1991.

E’TIBORINGIZ UCHUN RAHMAT!

SADADDINOVA
SANOBAR SABIROVNA,
DOTSENT
**OLIY MATEMATIKA
KAFEDRASI**