MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI
TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

MTH 1234

CHIZIQLI ALGEBRA

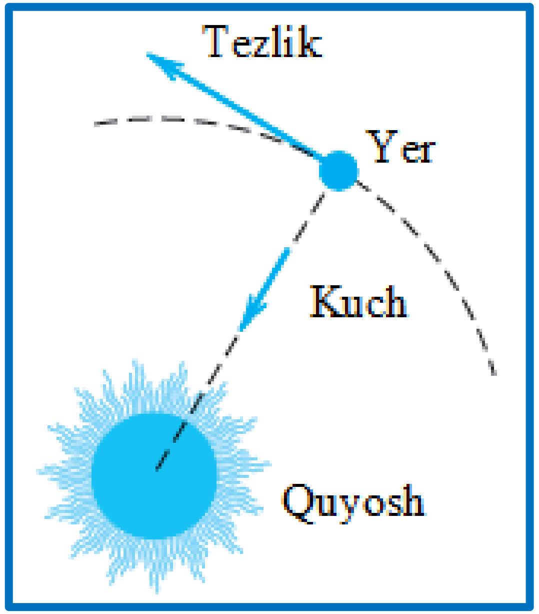
MAVZU

ARIFMETIK VEKTOR FAZO

SADADDINOVA
SANOBAR SABIROVNA,
DOTSENT

OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI

Arifmetik vektor fazo



1. *n* o‘lchovli vektorlar va ular ustida chiziqli amallar

2. *n* o‘lchovli arifmetik vektor fazo

3. *n* o‘lchovli vektorlar sistemasining rangi va bazisi

n o‘lchovli vektorlar

Yo‘nalishga ega bo‘lgan kesmaga **vektor** deyiladi.

n ta sonning tartiblangan tizimiga ***n* o‘lchovli vektor** deyiladi.

Vektorlar lotin alifbosining bosh harflari bilan A,B,…,X,Y,… belgilanadi va ustun matritsa ko‘rinishida yoziladi:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

n o‘lchovli vektorlar ustida chiziqli amallar xuddi matritsalardagi kabi aniqlanadi.

n o'lchovli vektorlar ustida chiziqli amallar

1) X va Y **vektorlarning yig'indisi**, deb shunday $C=X+Y$ vektorga aytiladiki, bu vektor quyidagicha aniqlanadi:

$$C = X + Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

2) X **vektorni skalyar songa ko'paytmasi** quyidagicha aniqlanadi:

$$\lambda X = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

n o'lchovli vektorlar ustida bajarilgan chiziqli amallar natijasida yana *n* o'lchovli vektor hosil bo'ladi. Shuning uchun *n* o'lchovli vektorlar to'plami kiritilgan bu amallarga nisbatan **yopiq to'plam** hosil qiladi deyiladi.

1-misol. Quyidagi vektorlar uchun $5A+7B-2A$ ifodani hisoblang.

$$A=\begin{pmatrix}2\\5\\3\\-4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-1\\5\\6\\7\end{pmatrix}.$$

Yechilishi:

$$5A+7B-2A=3A+7B=3\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\\-4\end{pmatrix}+7\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\\6\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\15\\9\\-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\35\\42\\49\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\50\\51\\37\end{pmatrix}$$

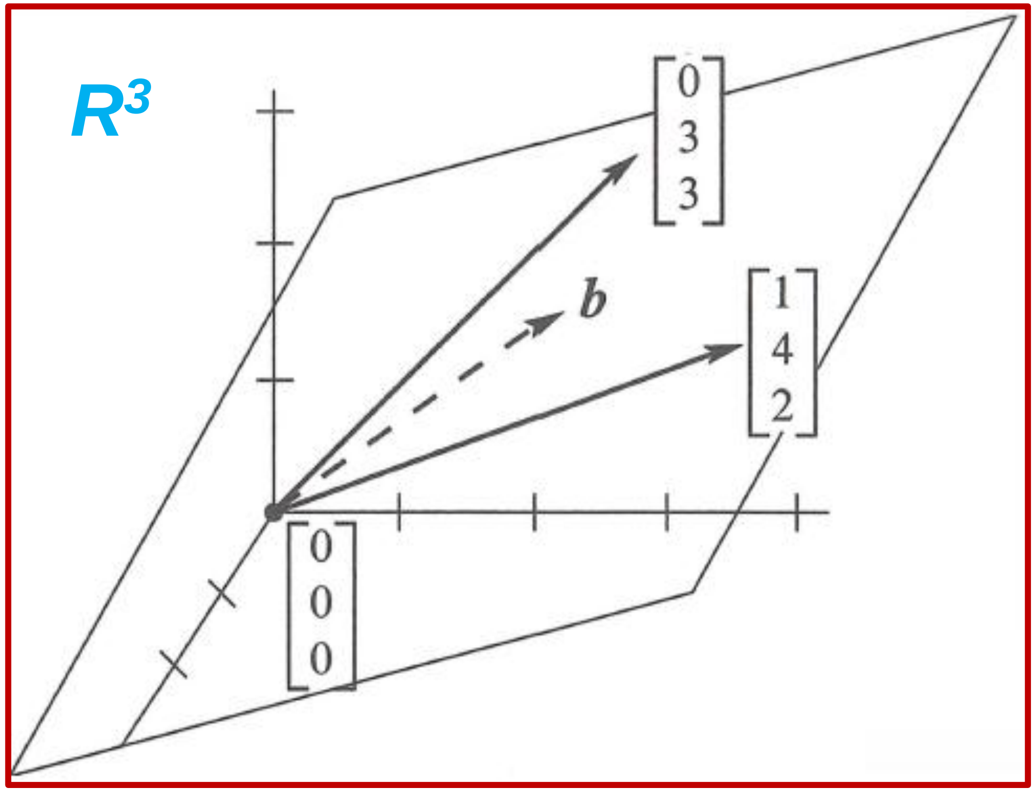
Vektorlar ustida chiziqli amallarning xossalari:

1. $X + Y = Y + X;$
2. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z;$
3. $X + \Theta = X$, bunda $\Theta = (0,0,\ldots,0)^T;$
4. $X + (-X) = \Theta;$
5. $1 \cdot X = X;$
6. $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X;$
7. $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y;$
8. $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X.$

Bu yerda α va β - ixtiyoriy noldan farqli sonlar;

X, Y va Z lar n o'lchovli vektorlar.

n o‘lchovli arifmetik vektor fazo



Barcha *n* o‘lchovli vektorlar to‘plami 8 ta xossaga ega bo‘lgan vektorlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari bilan birgalikda ***n* o‘lchovli arifmetik vektor fazo** deyiladi.

Agar vektorlarning komponentlari haqiqiy sonlardan iborat bo‘lsa, fazo **haqiqiy arifmetik vektor fazo:** R^n

Agar vektorlarning komponentlari kompleks sonlardan iborat bo‘lsa, fazo **kompleks arifmetik vektor fazo** deyiladi: C^n

Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi

Ikkita bir xil o‘lchovli $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ va $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ vektorlarning **skalyar ko‘paytmasi** deb, shu vektorlar mos koordinatalari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng songa aytiladi:

$$(X,Y)=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$$

Skalyar ko‘paytmani matritsalar ko‘paytmasi shaklida ifodalash mumkin (satr matritsani ustun matritsaga ko‘paytirish):

$$(X,Y)=X^TY=Y^TX$$

2-misol. Quyidagi vektorlarning skalyar ko‘paytmasini toping:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Yechilishi:

$$(X,Y) = X^T Y = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-1) + 5\cdot 5 + 3\cdot 6 + (-4)\cdot 7 = -2 + 25 + 18 - 28 = 13.$$

Skalyar ko‘paytma xossalari:

1. $(X, Y) = (Y, X)$;
2. $(X, Y+Z) = (X, Y) + (X, Z)$;
3. $(\lambda X, Y) = \lambda (X, Y)$
4. $(X, X) \geq 0; \quad (X, X) = 0 \iff X = \Theta$;

Bu yerda $\lambda \neq 0$ - ixtiyoriy son; X, Y va Z lar n o'lchovli vektorlar.

$|X| = \sqrt{(X, X)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ son **vektor uzunligi (moduli, normasi)**

Vektor uzunligi xossalari:

1. $|X| \geq 0$;
2. $|\lambda X| = |\lambda| \cdot |X|$;
3. $|X+Y| \leq |X| + |Y|$ (uchburchak tengsizligi);

Bu yerda $\lambda \neq 0$ - ixtiyoriy son; X va Y lar n o'lchovli vektorlar.

3- misol. Quyidagi vektorlarning uzunliklarini toping:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix};\quad 2)\ B=\begin{pmatrix}2\\5\\-2\\3\end{pmatrix};\quad 3)\ C=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-4\\-3\end{pmatrix}.$$

Yechilishi: $|X|=\sqrt{(X,X)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

$$1)\ |A|=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$2)\ |B|=\sqrt{2^2+5^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+25+4+9}=\sqrt{42}$$

$$3)\ |C|=\sqrt{1^2+2^2+3^2+(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{1+4+9+16+9}=\sqrt{39}.$$

Ortogonal vektorlar

Agar ikkita noldan farqli vektorlarning skalyar koʻpaytmasi nolga teng boʻlsa, ularga **ortogonal vektorlar** deyiladi: $(X,Y)=0$

4-misol. a parametrning qanday qiymatida quyidagi vektorlar ortogonal boʻladi?

$$X=\begin{pmatrix}3\\0\\a\\-1\end{pmatrix} \quad va \quad Y=\begin{pmatrix}-2\\5\\6\\0\end{pmatrix}.$$

Yechilishi: Bu vektorlarning skalyar koʻpaytmasini hisoblaymiz:

$$(X,Y)=3\cdot(-2)+0\cdot5+a\cdot6+(-1)\cdot0=6a-6.$$

$$6a-6=0 \Rightarrow a=1.$$

Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi

Teorema. R^n arifmetik fazoning ixtiyoriy X va Y vektorlari uchun ushbu tengsizlik o‘rinlidir:

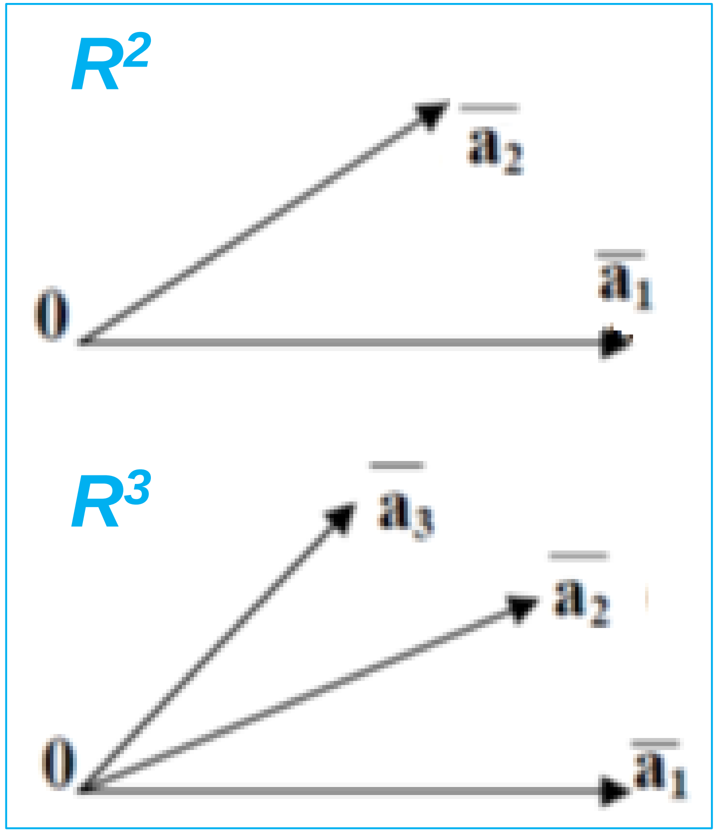
$$|(X,Y)| \le |X|\cdot|Y| \quad yoki \quad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Ikki vektor orasidagi burchak

$$(X,Y) = |X|\cdot|Y|\cdot\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{(X,Y)}{|X|\cdot|Y\cdot|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}, \qquad \varphi\in[0;\pi]$$

n o‘lchovli vektorlar sistemasining rangi va bazisi



n o‘lchovli haqiqiy arifmetik ***R^n* fazoning bazisi** deb, har qanday chiziqli erkli *n* o‘lchovli *n* ta vektorlarning tartiblangan tizimiga aytiladi.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *n* o‘lchovli *n* ta vektor R^n fazoning bazisi bo‘lsin, u holda bu fazodagi ixtiyoriy vektorni bazis vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida yoyish mumkin va bu yoyilma yagonadir:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \ldots + \vec{a}_n x_n$$

$\vec{a} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ haqiqiy sonlar vektorning koordinatalari

4 o‘lchovli vektorlar sistemasining rangi va bazisini aniqlash

5-misol. Vektorlar sistemasi berilgan, uning rangini aniqlang va bazislaridan birini quring: $\vec{a}_1=(1,-1,2,3),\quad \vec{a}_2=(-2,-3,0,1),\quad \vec{a}_3=(-2,-9,4,6),\quad \vec{a}_4=(-1,2,-2,-1)$

Yechilishi: Vektorlar sistemasining chiziqli erkliligini tekshiramiz: $\vec{a}_1x_1+\vec{a}_2x_2+\vec{a}_3x_3+\vec{a}_4x_4=0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&-2&-1&0\\-1&-3&-9&2&0\\2&0&4&-2&0\\3&1&6&-1&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ I+II\\ -2I+III\\ -3I+IV\end{array}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\0&-5&-11&1&0\\0&4&8&0&0\\0&7&12&2&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ \div 4\\ \\ \end{array}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\0&-5&-11&1&0\\0&1&2&0&0\\0&7&12&2&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ 5III+II\\ \\ -7III+IV\end{array}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\0&0&-1&1&0\\0&1&2&0&0\\0&0&-2&2&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ \\ 2II+IV\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\boxed{1}&\boxed{0}&1&\boxed{0}&0\\ \boxed{0}&\boxed{0}&-1&\boxed{1}&0\\ \boxed{0}&\boxed{1}&2&\boxed{0}&0\\ \boxed{0}&\boxed{0}&0&\boxed{0}&0\end{array}\right)$$

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4$ -bu vektorlar berilgan vektorlar sistemasining bazisi bo’ladi. Sistema 3 ta basis vektordan tashkil topganligi uchun uning rangi 3 ga teng.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar:

1. *n*-o‘lchovli haqiqiy arifmetik vektor fazo deganda nimani tushunasiz?
2. Vektorlar ustida chiziqli amallar deganda qanday amallar tushuniladi?
3. Vektorlar ustida bajariladigan chiziqli amallar bo‘ysunadigan xossalarni sanab o‘ting.
4. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deb nimaga aytiladi?
5. Arifmetik vektor uzunligi deb nimaga aytiladi?
6. Vektorlarning uzunligi bo‘ysunadigan qanday xossalarni bilasiz?
7. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi xossalarini bilasizmi?
8. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini yozing.

Adabiyotlar:

1. Соатов Ё.У. “Олий математика”, Т., Ўқитувчи нашриёти, 1-қисм, 1995.

2. R. R. Raxmatov va b. “Chiziqli algebra va analitik geometriya”, T., TATU. 2021.

3. Рябушко А.П. и др. “Сборник индивидуальных заданий по высшей математике”, Минск, Высшая школа, 1-часть, 1991.

E'TIBORINGIZ UCHUN RAHMAT!

SADADDINOVA
SANOBAR SABIROVNA,
DOTSENT
**OLIY MATEMATIKA
KAFEDRASI**