Inatel

Lógica Fuzzy

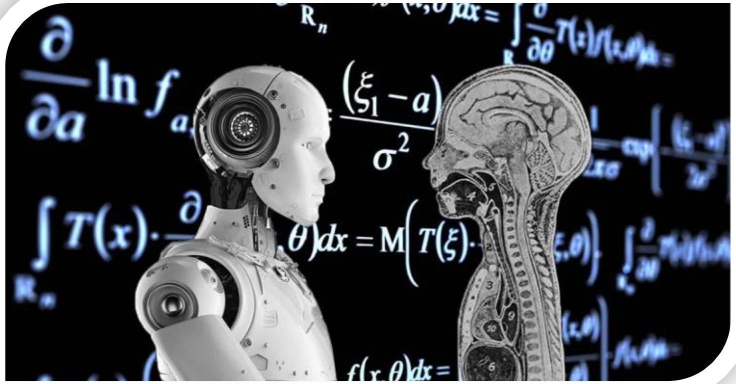
Disciplina: Inteligência Computacional (C210A/B)

Curso: Engenharia de Computação e Software

Profª. Victoria Dala Pegorara Souto

LÓGICA FUZZY

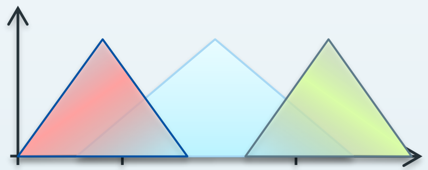
- Promover a compreensão do funcionamento e da aplicação da Lógica Fuzzy na solução de problemas reais.



Lógica Fuzzy

- Paradigma da IA

Ex. Redes Bayesianas, sistemas difusos (*fuzzy*)



Estatística/Probabilística

Lógica Fuzzy

Introdução:

- Seres humanos são capazes de lidar com **processos bastante complexos**, baseados em **informações imprecisas ou aproximadas**. A estratégia adotada pelos operadores humanos é também de natureza imprecisa e geralmente possível de ser expressa em termos linguísticos.

- A Teoria de Conjuntos Fuzzy e os Conceitos de Lógica Fuzzy podem ser utilizados para **traduzir em termos matemáticos a informação imprecisa expressa por um conjunto de regras linguísticas.**

- Se um operador humano for capaz de articular sua estratégia de ação como um conjunto de regras da forma *se … então*, um algoritmo passível de ser implementado em computador pode ser construído.

- O resultado é um **sistema de inferência baseado em regras**, no qual a Teoria de Conjuntos Fuzzy e Lógica Fuzzy fornecem o ferramental matemático para se lidar com as tais regras linguísticas.

- A Teoria de Conjuntos Fuzzy foi concebida por L.A. Zadeha com o objetivo de fornecer um **ferramental matemático para o tratamento de informações de caráter impreciso ou vago.**

Lógica Fuzzy

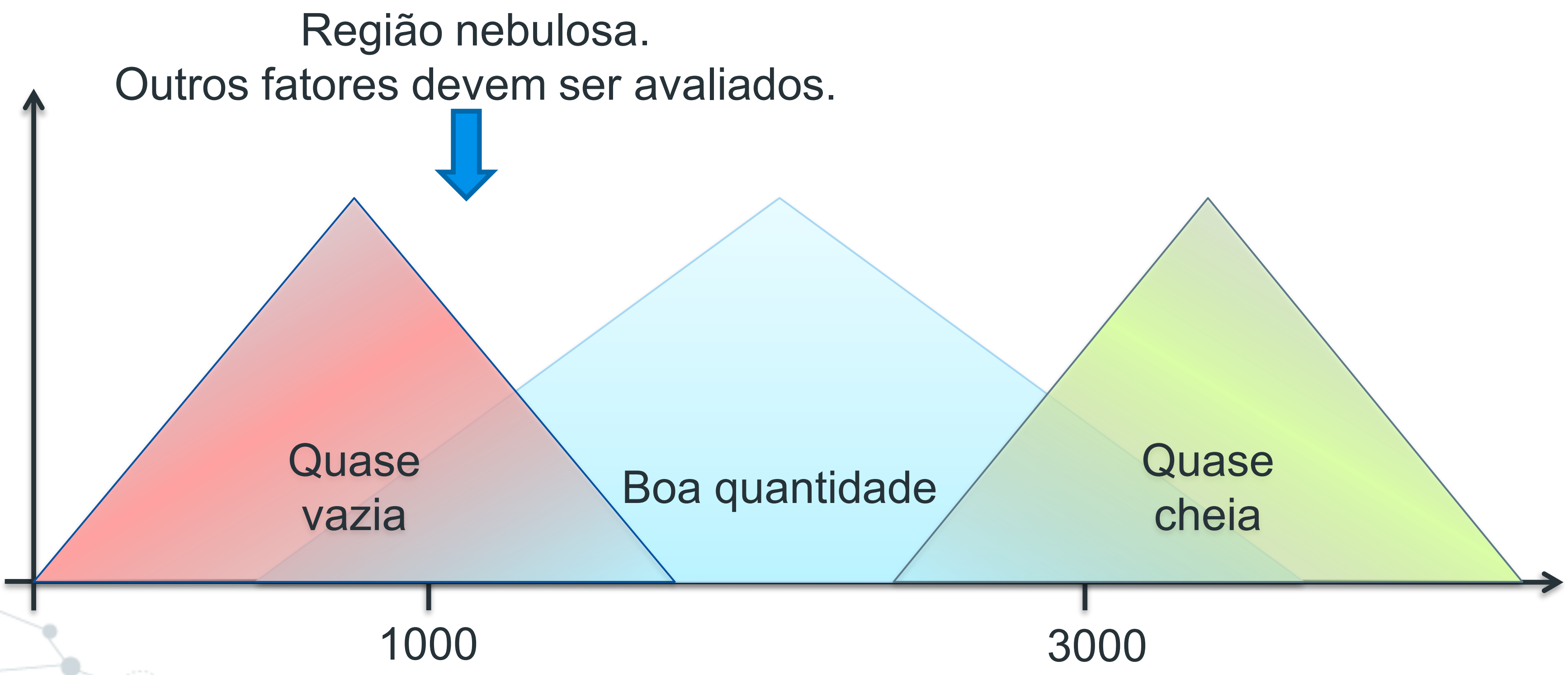
Introdução:

- **Dilema do Monte de Pedra:** Se um pedreiro for retirando as pedras de um monte de pedras, quando ela estará vazia o suficiente para que ele peça mais pedras ao fornecedor?

Lógica Fuzzy

Introdução:

- **Dilema do Monte de Pedra:** Se um pedreiro for retirando as pedras de um monte de pedras, quando ela estará vazia o suficiente para que ele peça mais pedras ao fornecedor?



Lógica Fuzzy

Introdução:

- Os sistemas Fuzzy consistem de aproximar a decisão computacional da decisão humana.
- Isto é realizado de forma que a decisão de uma máquina **não se resuma apenas** a um “sim” ou “não”, mas também tenha decisões “abstratas”, do tipo “próximo de”, “em torno de”, “muito alto”, etc.

Lógica Fuzzy

Características:

- Expressam imprecisões/incertezas;
- Sistemas baseados em regras do tipo linguísticas;
- “Raciocínio” executado de forma aproximada;
- Conclusões obtidas de forma paralela.

Lógica Fuzzy

◎ Aplicações:

- Controle de Sistemas;
- Engenharia de Software/Requisitos;
- Classificação;
- Previsão de Séries;
- Mineração de Dados;
- Aproximação de Funções;
- Otimização.

$\underbrace{\text{Fuzzy + Diferentes Paradigmas da IA}}$

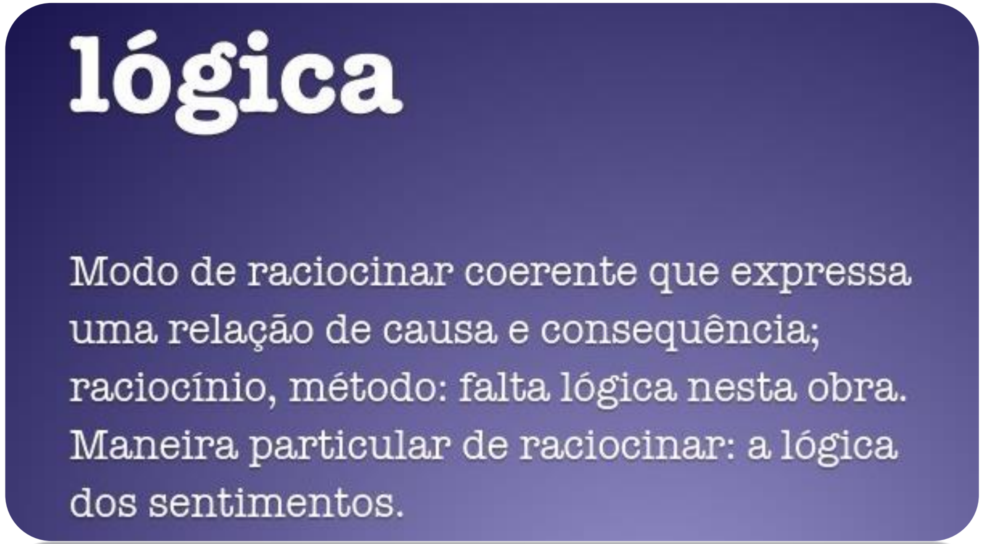
Sistemas Híbridos

⇩

Maior Capacidade de Aprendizado
Maior de Campo de Aplicação

Lógica Fuzzy

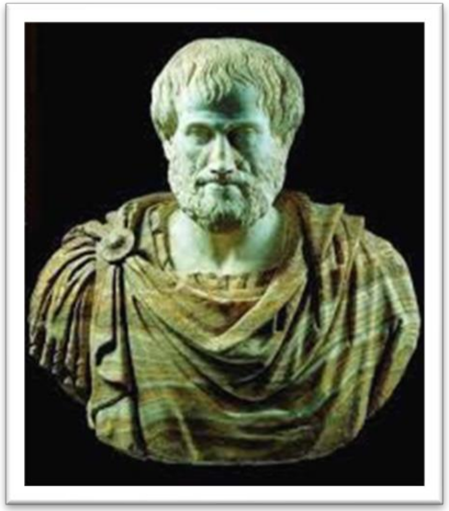
- Para compreender os conceitos de Conjuntos Fuzzy e de Lógica Fuzzy é necessário conhecimentos de **Lógica Clássica**.



Lógica Clássica
(Revisão)

LÓGICA CLÁSSICA

- Na lógica clássica (Aristóteles), os objetos são classificados em categorias (enumeráveis ou não) muito bem definidas, ou seja, um objeto pertence a uma categoria ou não.



DEFINIÇÃO DE CONJUNTO

Um conjunto é uma **coleção de zero ou mais objetos distintos**, chamados **elementos do conjunto**, os quais não possuem qualquer ordem associada.

- **Elemento:** pode designar um objeto concreto ou abstrato.
  - **Exemplos**

    Todas as vogais: a, e, i, o, u.

    Todos os dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

    Todos os números pares: 2, 4, 6, 8...

    Todos os brasileiros

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO

- Um conjunto pode ser definido:
  1) **Denotação por extensão:** listando todos os seus elementos

     Em qualquer ordem

     Separados por vírgula **VOGAIS = { a, e, i, o, u }**

     Entre chaves

  2) **Denotação por compreensão:** definição por propriedades

     {x | p(x)} : Definição geral de um conjunto por propriedades

     PARES = {*n* | *n* é um número par}

     "O conjunto de todos os elementos *n* tal que *n* é um número par."

     B = {x | x é brasileiro}

     "O conjunto de todos os elementos *x* tal que *x* é brasileiro."

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO

- Outras formas de representação:

1) **Dígitos = { 0, 1, 2, 3, ..., 9}**
2) **Pares = {0, 2, 4, 6, ...}**

nos quais os elementos omitidos podem ser facilmente deduzidos do contexto.

3) **{x | $x = y^2$ sendo que y é um número inteiro}**

o que corresponde ao conjunto {0, 1, 4, 9, 16, ...}

CONJUNTOS IMPORTANTES

- **Conjunto Vazio**

  Não contém nenhum elemento

  Denotado por Ø ou { }

  É subconjunto de qualquer conjunto.

EXEMPLOS

Conjunto de todos os brasileiros com mais de 300 anos
Conjunto de todos os números pares e ímpares simultaneamente
Conjunto dos números naturais antecessores ao zero

- **Conjunto Unitário**

  Conjunto constituído por um único elemento, independente do elemento.

  Denotado por **1**.

EXEMPLOS

Conjunto constituído pelo jogador de futebol Pelé.
O conjunto de todos os números que são simultaneamente pares e primos.
1 = { * }

CONJUNTOS IMPORTANTES

- N - Conjunto dos números naturais

(números inteiros positivos)

- Z – Conjunto dos números inteiros

(números inteiros positivos e negativos)

- Q – Conjunto dos números racionais

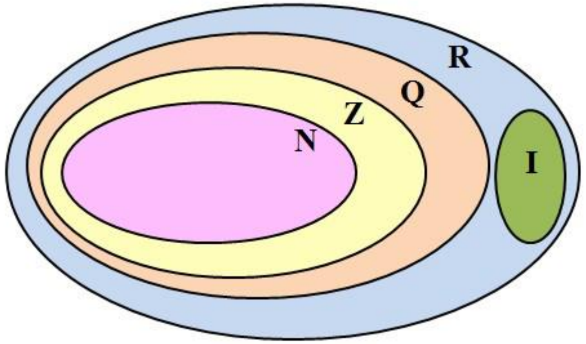
(números representados por uma fração de dois inteiros)

- I – Conjunto dos números irracionais

(É um número real que não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros – números infinito não periódico)

- R – Conjunto dos números reais

(Inclui todos os outros conjuntos)



PERTINÊNCIA

- Se um determinado elemento a é elemento de um conjunto A, tal fato é denotado por:

$$a \in A$$

caso contrário,

$$a \notin A$$

Exemplo:

1. Vogais = {a, e, i, o, u}
   - $a \in$ Vogais
   - $h \notin$ Vogais
2. B = {x | x é brasileiro}
   - Pelé ∈ B
   - Bill Gates ∉ B

CONTINÊNCIA

- Se todo elemento de um conjunto A, também pertence a um conjunto B, dizemos que **A está contido em B** (A é um subconjunto de B) e escrevemos $A \subseteq B$.

A= { -1, -2, -3, 5, 7, 10}

B= {-1, -3, 7, 10}

B é um subconjunto de A

Então, $B \supseteq A$

- Caso contrário, dizemos que $A \nsubseteq B$.

A= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

B = {3, 5, 7, 10, 11}

B não é um subconjunto de A

Então, $B \nsupseteq A$

CONTINÊNCIA: SUBCONJUNTO

- Considere o subconjunto de N, A = {1, 2, 3}

  O conjunto A possui oito subconjuntos:

  ∅*, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1, 2, 3}.

  * Lembre que ∅ é um subconjunto de todos os conjuntos.

- O conjunto das partes de um conjunto A é o conjunto cujos elementos são subconjuntos de A. É denotado por P(A).

  P({1, 2, 3}) = {∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1, 2, 3}}

- P(∅) = {∅} tem um elemento

  P({1}) = {∅, {1}} tem dois elementos

  P({1,2}) = {∅, {1}, {2}, {1,2}} tem quatro elementos

Teorema: Se A é um conjunto finito, com $|A| = n$, então: $|P(A)| = 2^n$

ESTRITAMENTE CONTIDO

- Dizemos que o conjunto A está estritamente contido no conjunto B se $A \subset B$ e $A \neq B$. Nesse caso diremos ainda que A é um subconjunto próprio de B.

EXEMPLO

$A = \{1, 3, 5\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é ímpar e $x \leq 5\}$

É imediato ver que A é um subconjunto próprio de N. No entanto, embora se tenha $A \subset B$, A não é um subconjunto próprio de B, visto ter-se $A = B$.

PERTINÊNCIA X CONTINÊNCIA

PERTINÊNCIA

É utilizada para relações entre elemento e conjunto.

Exemplo: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$2 \in A$; $7 \notin A$

CONTINÊNCIA

É utilizada para relações entre conjuntos.

Exemplo: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A \subseteq B$; $B \not\supseteq A$

Lembre-se que:

2 = Elemento 2

$\{2\}$ = Conjunto formado pelo elemento 2

UNIVERSO DE DISCURSO

- **Universo de Discurso**

  Refere-se ao domínio ou espaço em que estão definidos os elementos do conjunto.

EXEMPLO

Sejam os seguintes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \ \mid \ 15 \leq x \leq 20\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \ \mid \ x \geq 1{,}80\}$$

Universo de discurso $\begin{cases} X_A: Todos\ naturais\ entre\ 15\ e\ 20 \\ X_B: Todos\ reais\ \geq 1{,}80 \end{cases}$

FUNÇÃO CARACTERÍSTICA

FUNÇÃO CARACTERÍSTICA OU DE INCLUSÃO

- Função que mapeia cada elelemento de um universo de discurso X de um conjunto A para o conjunto {0,1} considerando se um elemento é ou não membro do conjunto.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in A \\ 0, & se \quad x \notin A \end{cases}$$

FUNÇÃO CARACTERÍSTICA

FUNÇÃO CARACTERÍSTICA OU DE INCLUSÃO

- **EXEMPLO:** Sejam os seguintes conjuntos A e B:

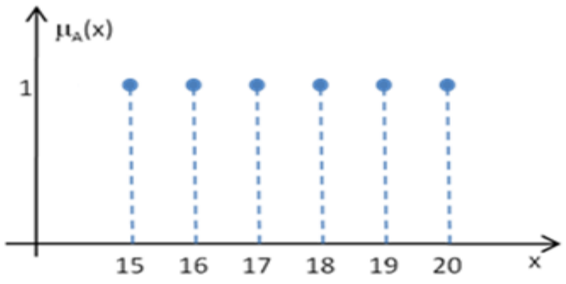
$$A = \{x \in \mathbb{N} \ | \ 15 \leq x \leq 20\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \ | \ x \geq 1{,}80\}$$

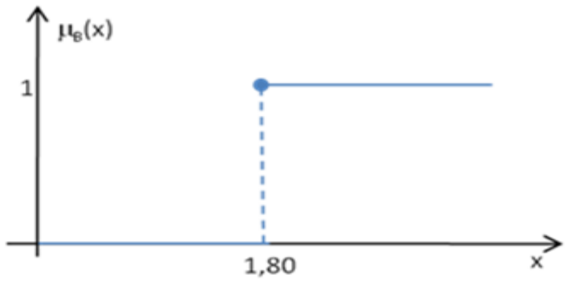
⇨ **Universo de discurso**

$$\begin{cases} X_A: Todos\ naturais\ entre\ 15\ e\ 20 \\ X_B: Todos\ reais\ \geq 1{,}80 \end{cases}$$

Função característica

$$\begin{cases} \mu_A(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \{15, \ldots, 20\} \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \\ \mu_B(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \geq 1{,}80 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \end{cases}$$

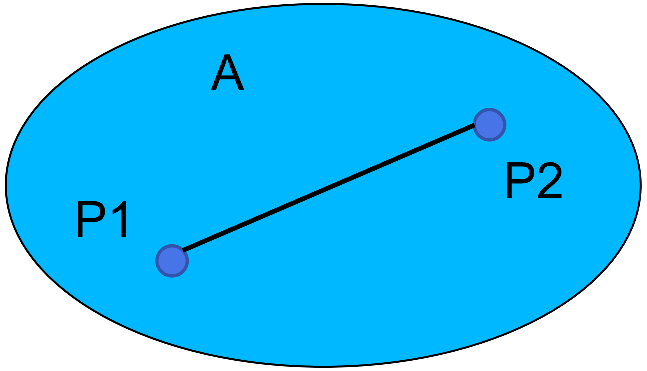




CONJUNTO CONVEXO

- Um conjunto A em $\mathbb{R}^N$ é chamado de convexo se para todo x, pertencente ao segmento de reta unindo dois pontos, P1 e P2 ∈ A, pertence também também ao conjunto A.

$$Convex(A) = \{\forall x \in A \ \mid \ x = \lambda . P_1 + (1 - \lambda) . P_2\}$$



IGUALDADE E CARDINALIDADE

IGUALDADE

- Os conjuntos A e B são iguais se têm exatamente os mesmos elementos. Então, escrevemos A = B.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad$ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{4, 3, 2, 1\}$. $\quad$ $B = \{1, 8, 2, 7\}$

$A = B$ $\quad$ $A \neq B$

$$A = B \text{ se e somente se } A \subseteq B \text{ e } B \supseteq A$$

CARDINALIDADE

- A **cardinalidade** de um conjunto A é o número de elementos de A e é denotada por $|A|$ ou $n(A)$.

$|\{0, 1, 2, 3\}| = 4$

$|\emptyset| = 0$ e $|\{\emptyset\}| = 1$

$|Z| =$ infinita

IGUALDADE E CARDINALIDADE

CARDINALIDADE

- **Princípio da Inclusão-Exclusão:** Suponha que A e B são conjuntos finitos. Então $A \cup B$ e $A \cap B$.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Considerando os conjuntos A, B e C:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Exemplo: Suponha que uma lista A contém os 30 estudantes de uma turma de matemática e que uma lista B contém os 35 estudantes de uma turma de inglês, e assuma que há 20 nomes em ambas as listas. Encontre o número de estudantes: (a) apenas na lista A; (b) apenas na lista B; (c) na lista A ou B (ou ambas); (d) em exatamente uma lista.

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

- **UNIÃO**
  - A **união** de A e B, denotada por A ∪ B, é o conjunto:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \textbf{ ou } x \in B\}$$

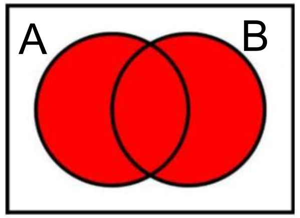
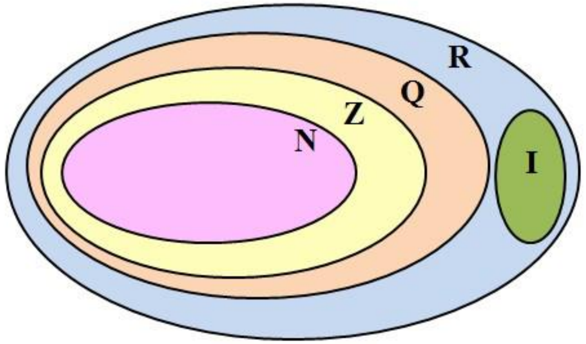


Diagrama de Venn

- **Exemplos:**

1) **A = {c, a, r, e, t} e B = {a, e, i, o, u} → A U B = {a, c, r, e, t, i, o, u}**
2) $\mathbf{R} \cup \mathbf{Q} = \mathbf{R}$
3) $\mathbf{R} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$
4) $\mathbf{U} \cup \emptyset = \mathbf{U}$
5) $\mathbf{A} \cup \emptyset = \emptyset \cup \mathbf{A} = \mathbf{A}$ → Elemento Neutro.



OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

INTERSECÇÃO

- A interseção de A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

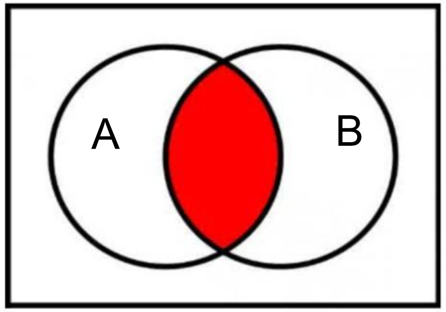
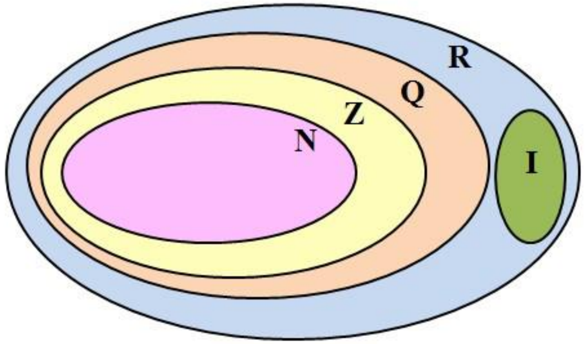


Diagrama de Venn

- **Conjuntos Disjuntos** → $A \cap B = \emptyset$

- **Exemplos:**

1) **A = {c, a, r, e, t} e B = {a, e, i, o, u}** → **$A \cap B$ = {a, e}**
2) $\mathbf{R} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Q}$
3) $\mathbf{R} \cap \mathbf{I} = \mathbf{I}$
4) $\mathbf{U} \cap \emptyset = \emptyset$
5) $\mathbf{A} \cap \mathbf{U} = \mathbf{U} \cap \mathbf{A} = \mathbf{A}$ → Elemento Neutro.

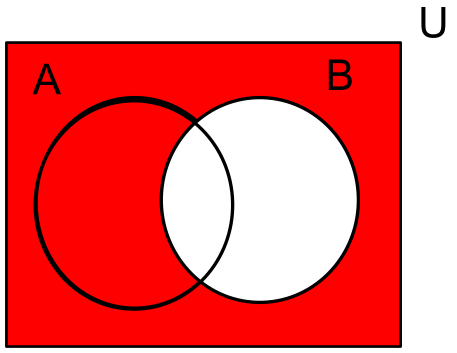


- **COMPLEMENTO**
  - O complementar de A, denotado por A^C, é o conjunto:

$$A^C = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

O conjunto U é o conjunto Universo.

Outras Representações: A' ou ~A



Conjunto U: É o conjunto representativo de todos os elementos da conjuntura na qual estamos trabalhando.

- **Exemplos:**

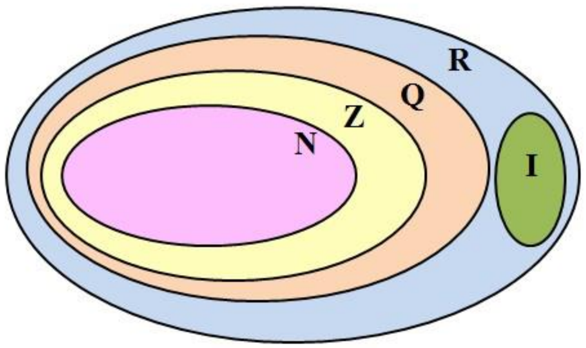
1) $\mathbf{U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}$

   $\mathbf{A = \{0, 1, 2\} \rightarrow \sim A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}$

2) $\mathbf{U = N}$

   $\mathbf{A = \{0, 1, 2\} \rightarrow \sim A = \{x \in N \mid x > 2\}}$

3) $\mathbf{\sim\emptyset = U}$
4) $\mathbf{\sim U = \emptyset}$
5) $\mathbf{\sim Q = I}$
6) $\mathbf{\sim I = Q}$

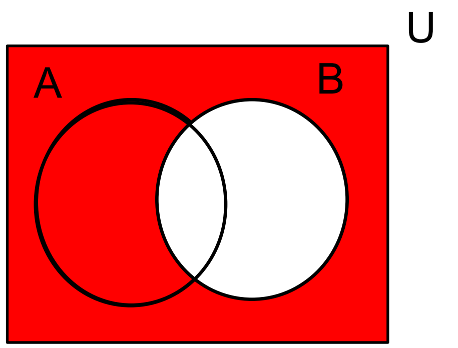


OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

- **COMPLEMENTO**
  - O complementar de A, denotado por A^C, é o conjunto:

$$A^C = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

O conjunto U é o conjunto Universo.



Outras Representações: A' ou ~A

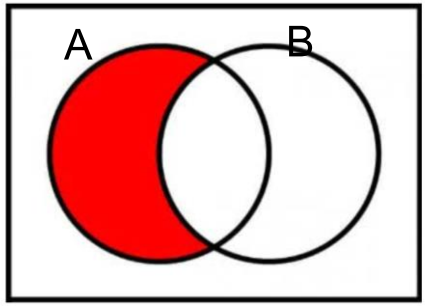
- **Observe que:**
  - a união de um conjunto com o seu complemento sempre resulta no conjunto universo ($A \cup \sim A = U$);
  - a intersecção de um conjunto com o seu complemento sempre resulta no conjunto vazio ($A \cap \sim A = \emptyset$).

- **Dupla Negação:** $\sim\sim A = A$

- **DIFERENÇA**
  - A diferença de A e B, denotada por A – B, é o conjunto:

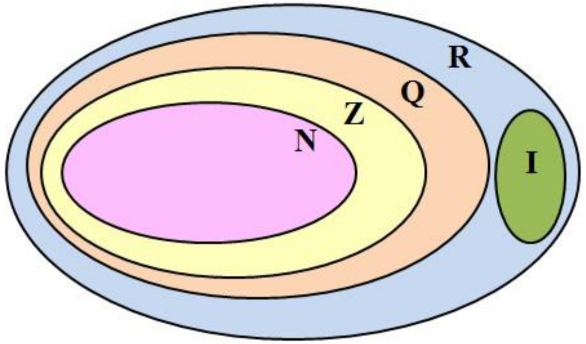
$$A - B = A \cap \sim B$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \textbf{ e } x \notin B\}$$



- **Exemplo:**

1) **B = {d, e, f, g, h, i} , A = {a, b, c, d, e, f}**
   A – B = {a, b, c}
   B – A = {g, h, i}
2) **R – Q = I**
3) **R – I = Q**
4) **Q – I = Q**
5) $\emptyset - \emptyset = \emptyset$
6) **U – ∅ = U**
7) **U – A = ~A**



PROPRIEDADES

Tabela 1-1 Leis da álgebra de conjuntos

Leis da idempotência	(1a) $A \cup A = A$	(1b) $A \cap A = A$
Leis associativas	(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leis comutativas	(3a) $A \cup B = B \cup A$	(3b) $A \cap B = B \cap A$
Leis distributivas	(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leis de identidade	(5a) $A \cup \emptyset = A$	(5b) $A \cap \mathbf{U} = A$
	(6a) $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$	(6b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
Leis de involução	(7) $(A^C)^C = A$	
Leis de complementos	(8a) $A \cup A^C = \mathbf{U}$	(8b) $A \cap A^C = \emptyset$
	(9a) $\mathbf{U}^C = \emptyset$	(9b) $\emptyset^C = \mathbf{U}$
Leis de DeMorgan	(10a) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	(10b) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

- Absorção: $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$
- Conjuntos disjuntos: $A \cap B = \emptyset$

EXERCÍCIOS

1) Considerando que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$ e $A - B = \{1, 2, 3\}$, determine o conjunto B.

2) Dados os conjuntos $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e $C = \{2, 3\}$, determine $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

3) Considerando os conjuntos $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{4, 5\}$ determine $(U - A) \cap (B \cup C)$.

4) Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, $A \cup B$ gera um conjuntos com quantos elementos?

5) Sendo $A = \{0, 2, 4, 6\}$ e $B = \{2, 4, 7, 8, 9, 10\}$, classifique como verdadeiro ou falso as seguintes afirmações. Justifique.

   a) $A–B = \{0, 2, 6, -7, -8, -9, -10\}$

   b) $A–B = \{0, 6\}$
   c) $B–A = \{7, 8, 9, 10\}$
   d) $B–A = \{-6, 0, 7, 8, 9, 10\}$

EXERCÍCIOS

6) Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B=\{c, d, e, f, g\}$ e $C=\{b, d, e, g\}$. Determinar:

a) $B–A$ c) $A–B$

b) $A–C$ d) $C–B$

7) Dado que $A = \{x \in N \mid 1 < x < 4\}$ e $B = \{x \in N \mid 2 < x < 20\}$, determine $A \cap B$.

8) Dados os conjuntos $A = \{1, 2, -1, 0, 4, 3, 5\}$ e $B = \{-1, 4, 2, 0, 5, 7\}$, calcule:

a) $A \cup B$ c) $A \cap B$

b) $A \cap (B-A)$ d) $(A \cup B) \cap A$

9) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 4\}$. Qual é o conjunto X, tal que $(X \cup B = A \cup C)$ e $(X \cap B = \emptyset)$?

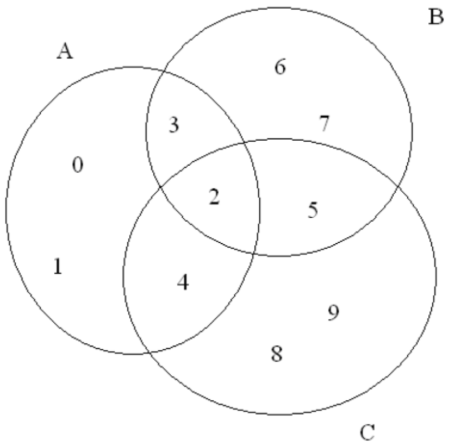
10) Descreva o conjunto das partes do conjunto $A = \{-5, 7, 11, 14\}$.

EXERCÍCIOS

11) Represente os conjuntos A={1, 2, 7, 8,4} , B={1, 2, 6, 5, 8} e C={1, 2, 3, 7, 5 8, 9} utilizando o diagrama de Venn.

12) Observe o diagrama de Venn e responda quais os elementos fazem parte dos conjuntos abaixo:

a) A =
b) B =
c) C =
d) $(A \cap B) \cup (B \cap C) =$
e) $(A \cap C) \cup B =$



13) Dado os conjuntos A = {0,1}, B = {0,2,3} e C = {0,1,2,3}, classifique em verdadeiro ou falso cada afirmação abaixo, e justifique:

a) $A \supset B$ b) $A \supset C$ c) $B \supset C$

EXERCÍCIOS

14) Escreva uma propriedade que defina os conjuntos:

a) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

b) {11, 13, 15, 17}

15) Considerando os conjuntos A = {1, 2, 3}, B = {2, 3 ,5} e C = {1, 3, 7, 8}, execute as operações abaixo:

a) A U B U C

b) (A U B) ∩ C

c) (A U C) – B

d) (B ∩ C) – A

16) Dado o conjunto {a, b, c, d, e, f, g}, qual é o número máximo de subconjuntos distintos?

17) Com base nos conjuntos A={1, 2, 3}, B={5, 6, 7} e C={1, 2, 3, 4, 5, 6}, preencha os campos abaixo com a simbologia adequada:

a) 3___A

b) 7___C

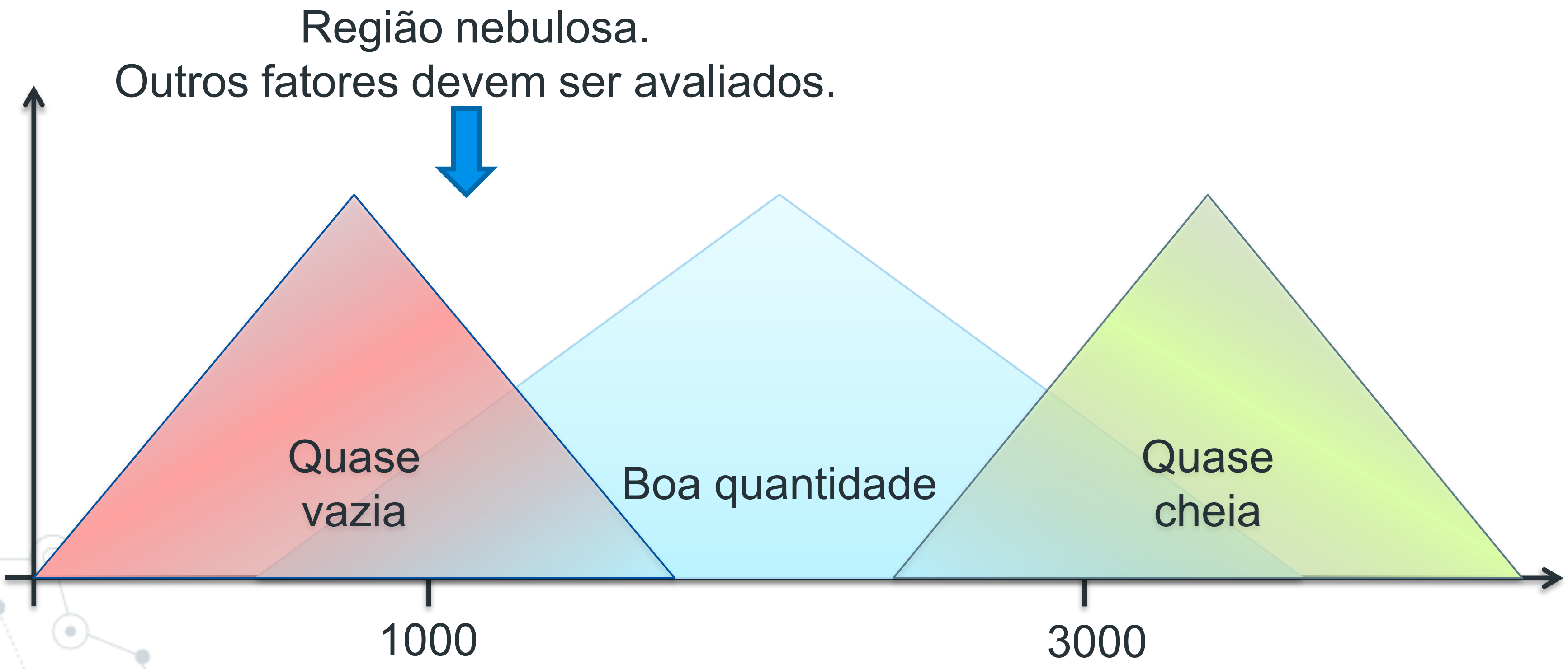
c) A___B

d) B___C

e) C___A

f) C___B

CONJUNTOS FUZZY



Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

CONCEITO DE PERTINÊNCIA:

- **Teoria Clássica:** Dado um conjunto A em um universo X, os elementos deste universo simplesmente pertencem ou não pertencem àquele conjunto. Isso pode ser expresso pela função característica f_A:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ se e somente se } x \in A \\ 0 \text{ se e somente se } x \notin A \end{cases}$$

- **Conjuntos Fuzzy:** Um conjunto fuzzy A em um universo X é definido por uma função de pertinência $\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$, e representado por um conjunto de pares ordenados

$$\boxed{A = \{\mu_A(x)/x\} \quad x \in X}$$

onde $\mu_A(x)$ indica o quanto x é compatível com o conjunto A. Um determinado elemento pode pertencer a mais de um conjunto fuzzy, com diferentes graus de pertinência.

Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

CONCEITO DE PERTINÊNCIA:

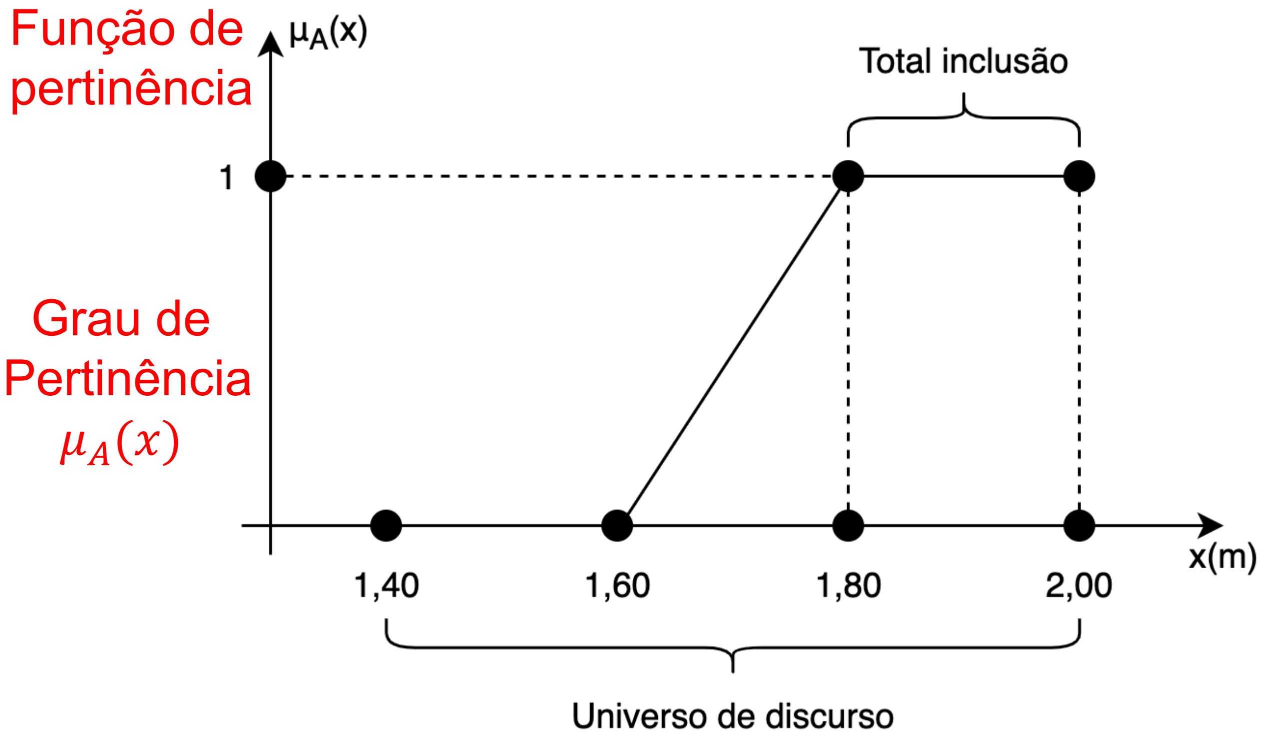
- A função que define o grau de pertinência de um elemento em um conjunto Fuzzy, levando-se em conta seu universo de discurso, é definida como função de pertinência

$$\boxed{\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]}$$

na qual $\mu_A(x)$ retorna o grau de pertinência do elemento x, pertencente ao universo de discurso X, em relação ao conjunto Fuzzy A.

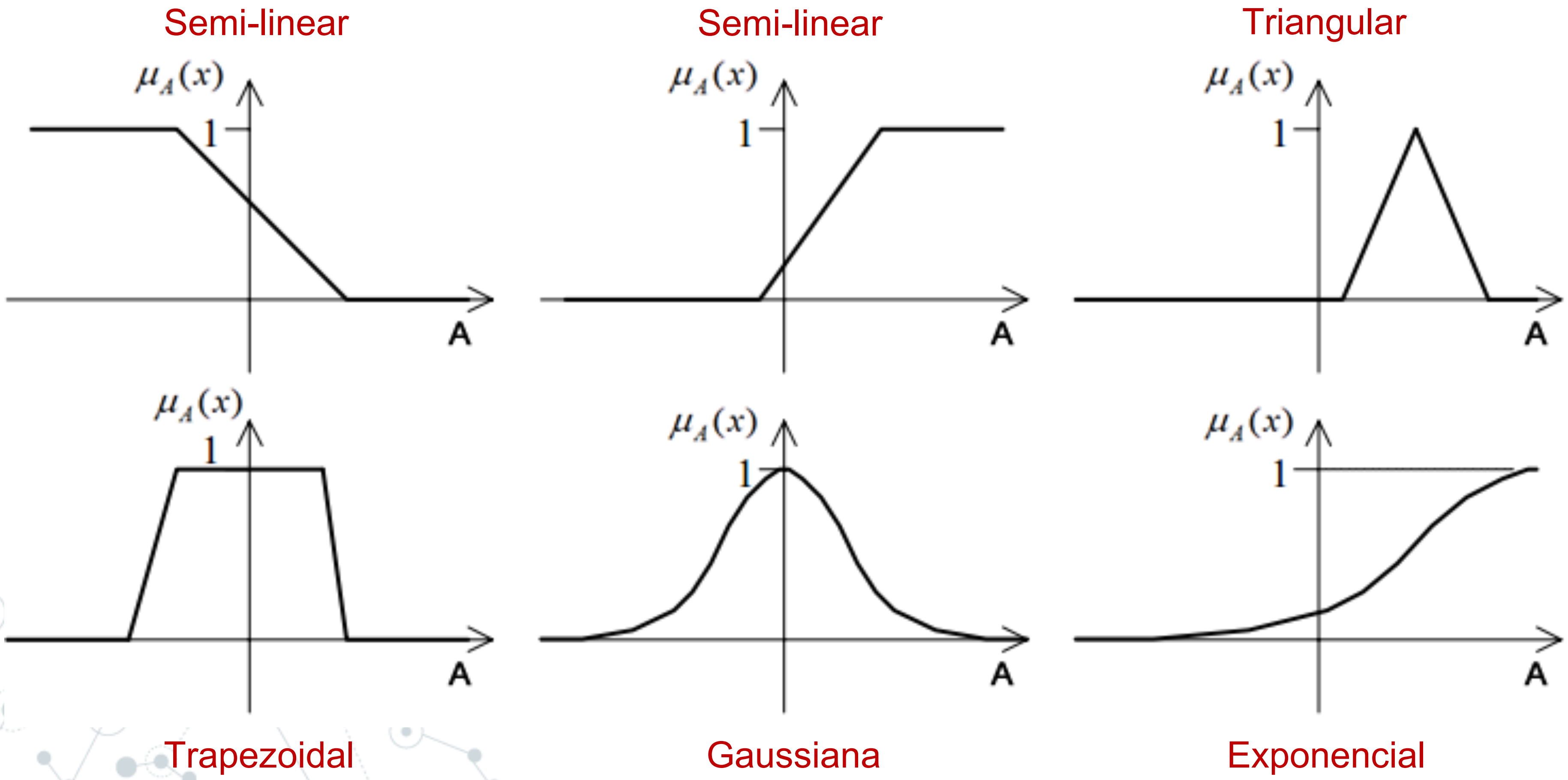
Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

- **Exemplo:**
  - Considere um conjunto Fuzzy que define o conceito de pessoa alta:



Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

- **Principais Tipos de Funções de Pertinência associados aos Conjuntos Fuzzy:**

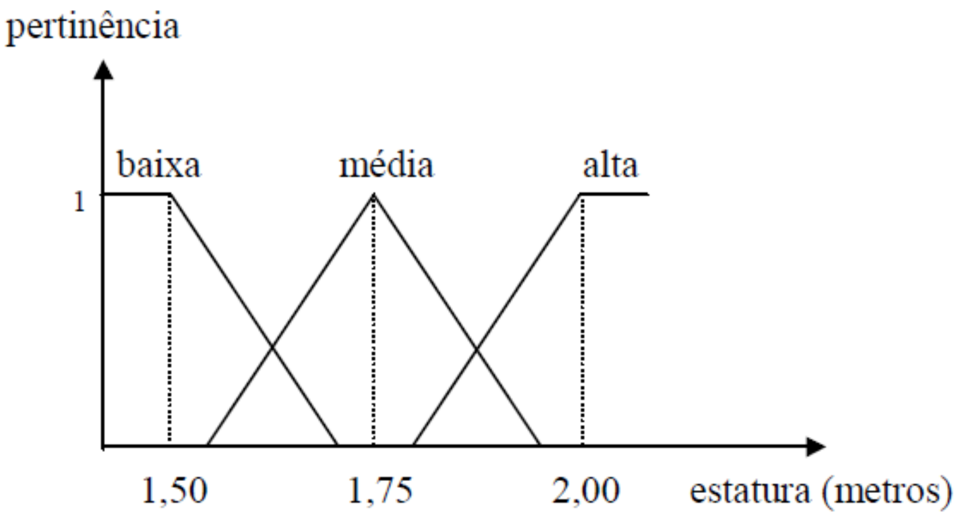


As funções de pertinência podem ter diferentes formas, dependendo do conceito que se deseja representar e do contexto em que são utilizadas.

Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

Exemplo:

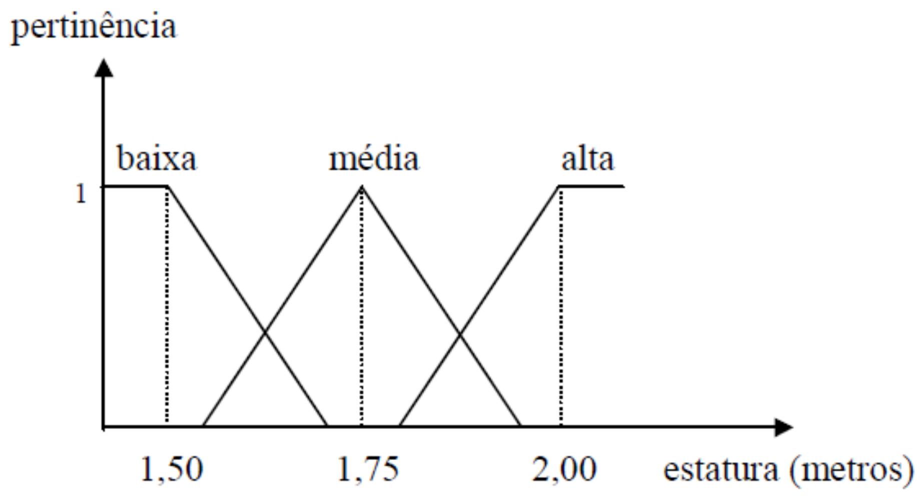
- Para exemplificar o quanto o contexto é relevante na definição de funções de pertinência e de sua distribuição ao longo de um dado universo, considere a variável linguística *estatura (de pessoas)*, constituída dos seguintes termos → $\boxed{T(estatura) = \{baixa, média, alta\}}$
- A esses faz-se corresponder Conjuntos Fuzzy A, B e C, respectivamente, definidos por suas funções de pertinência.
- Uma escolha possível de funções de pertinência seria:



Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

Exemplo:

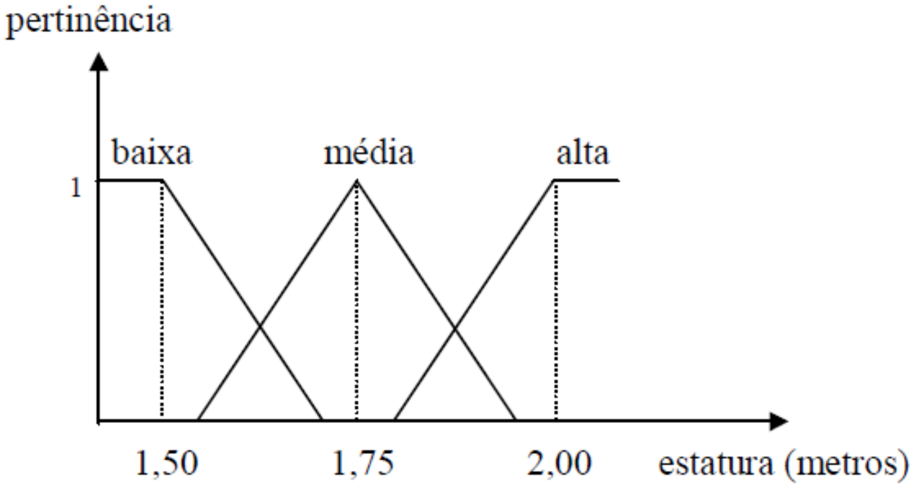
- Estaturas até 1,5 m apresentam grau de pertinência igual a 1 no conjunto A → O grau de pertinência neste conjunto decresce à medida que a estatura aumenta;
- Estaturas acima de 1,75 m é “totalmente compatível” com o conjunto B;
- Estaturas acima de 1,8 m apresentam grau de pertinência diferente de 0 em C;
- Pessoas com estatura acima de 2 m são “definitivamente” altas;
- Estaturas em um entorno de 1,75 m têm grau de pertinência diferente de 0 somente no conjunto B, o que poderia parecer inadequado para alguns observadores.



Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

Funções de Pertinência:

- Diferentes pessoas, ou grupos de pessoas, podem ter noções distintas a respeito das estaturas de seus semelhantes → Logo, o contexto é particularmente relevante quando da definição de funções de pertinência.
- Funções de pertinência podem ser definidas a partir da experiência e da perspectiva do usuário mas é comum fazer-se uso de funções de pertinência padrão, como, por exemplo, as de forma Triangular, Trapezoidal e Gaussiana.
- Em aplicações práticas as formas escolhidas inicialmente podem sofrer ajustes em funções do resultados observados.



Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

- **Conjunto Fuzzy Normalizado:** Pelo menos um de seus elementos possui grau de pertinência igual a 1

- **Altura do Conjunto Fuzzy:** Corresponde ao maior grau de pertinência assumido por um de seus elementos.

$$\boxed{ALT(A) = MAX_{x_i \epsilon X}\, \mu_A(x_i)}$$

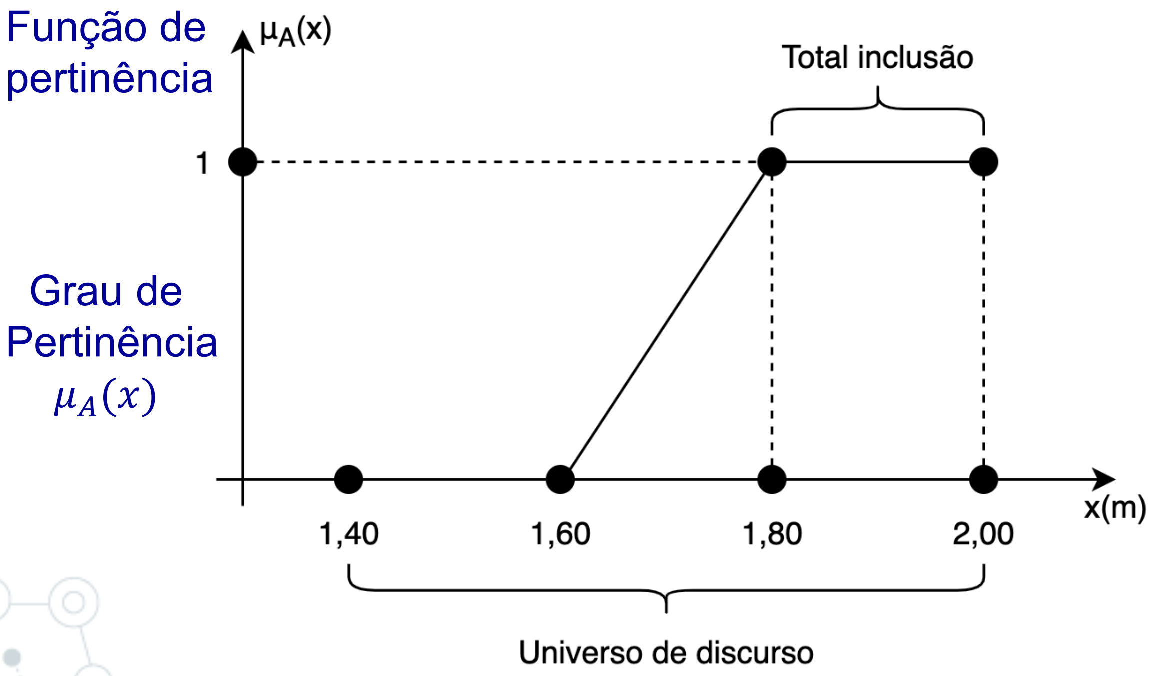
- **Suporte de Conjunto Fuzzy (Conjunto Suporte):** É o conjunto de todos os elementos de A que possuem graus de pertinência maior que zero

$$\boxed{SUPP(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}}$$

Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

Exemplo:

- Considere um conjunto Fuzzy que define o conceito de pessoa alta:



- Normalizado
- $ALT(A) = 1$
- $SUPP(A) = \{1{,}6 < x \leq 2{,}0\}$

Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

- **Conjunto Fuzzy Convexo:** Um conjunto Fuzzy é convexo se e somente se for observada a seguinte desigualdade:

$$\boxed{\begin{gathered}\mu_A(\lambda * x_1 + (1-\lambda) * x_2) \geq MIN[\,\mu_A(x_1),\, \mu_A(x_2)] \\ x_1, x_2 \in X;\ \lambda \in [0;1]\end{gathered}}$$

Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

- **Cardinalidade do Conjunto Fuzzy:** É a soma dos graus de pertinência de todos os elementos do conjunto Fuzzy, ou seja:

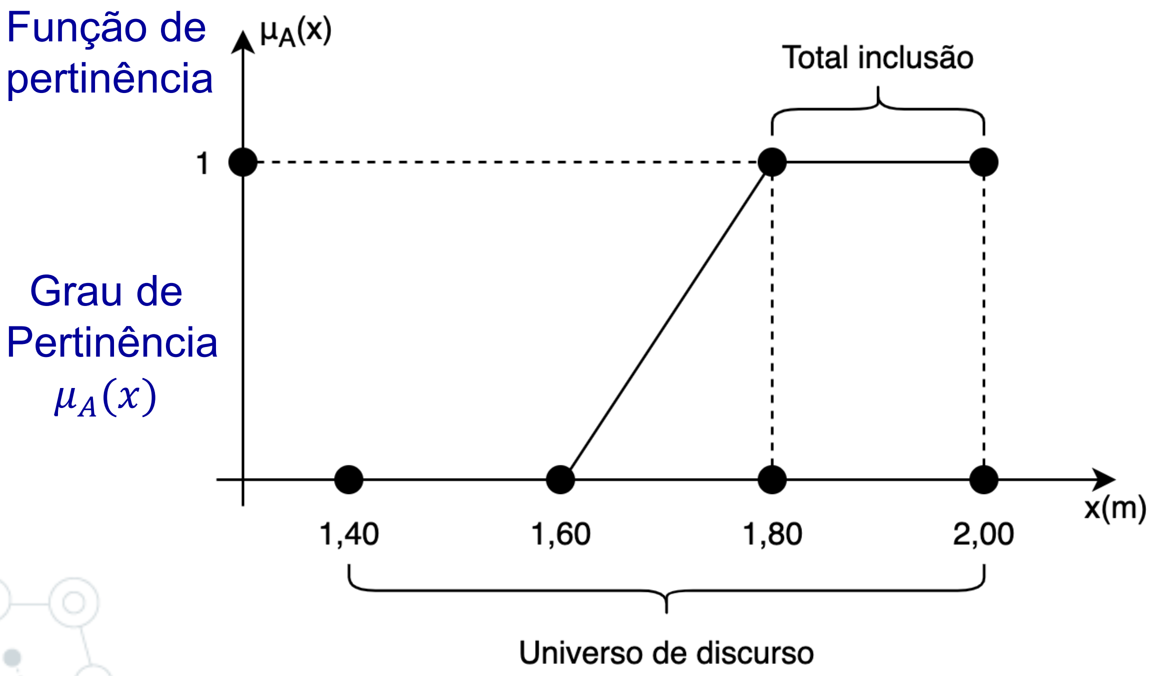
$$\boxed{CARD(A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x)}$$

- **Cortes em Conjunto Fuzzy:** Um corte α em um conjunto A é especificado por um conjunto *crisp*, que contem todos os elementos de A que possuem grau de pertinência maior ou igual a α, ou seja:

$$\boxed{A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}}$$

Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

- **Exemplo:**
  - Considere um conjunto Fuzzy que define o conceito de pessoa alta



- Normalizado
- $ALT(A) = 1$
- $SUPP(A) = \{1{,}6 < x \leq 2{,}0\}$
- $CARD(A) = \infty$

Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

- **Exemplo:**
  - Seja um conjunto Fuzzy discreto definido por:

$$A = 0{,}3/1 + 0{,}7/2 + 1{,}0/3 + 0{,}9/4 + 0{,}2/6 \quad \text{com} \quad X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

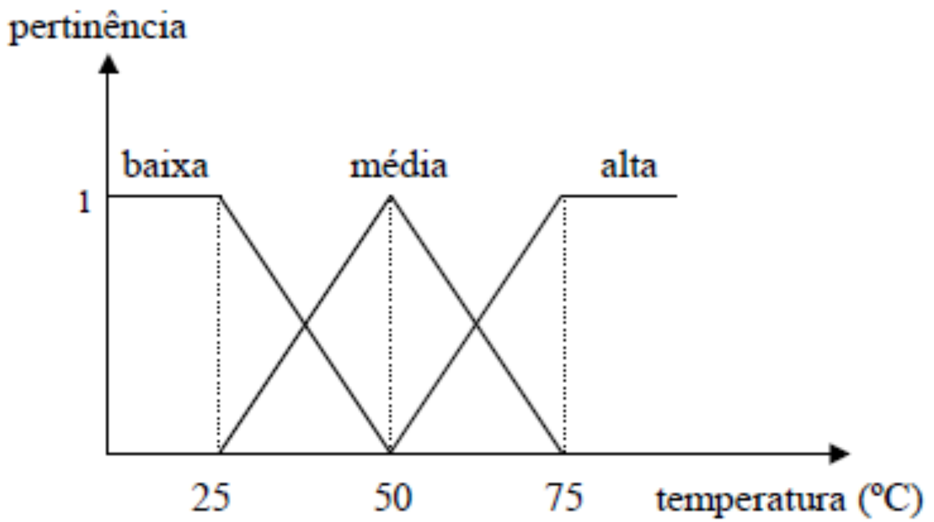
- $ALT(A) = 1{,}0$
- $SUPP(A) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ (Quando um elemento não está em A, seu grau de pertinência é zero)
- $CARD(A) = 3{,}1\ (0{,}3 + 0{,}7 + 1{,}0 + 0{,}9 + 0{,}2)$
- $A_{0{,}4} = \{2, 3, 4\}\ (\alpha = 0{,}4)$

Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

Variáveis Linguísticas:

- Uma variável linguística é uma variável cujos **valores** são nomes de conjuntos fuzzy.
  - **Exemplo: Temperatura de um determinado processo** → Pode assumir valores como *Baixa, Média e Alta.*

→ Estes valores são descritos por intermédio de Conjuntos Fuzzy, representados por Funções de Pertinência.



Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

- **Variáveis Linguísticas:**
  - Os valores de uma variável linguística podem ser **sentenças** em uma linguagem especificada, construídas a partir de *termos* (alto, baixo, pequeno, médio, grande, zero, ...), de *conectivos lógicos* (negação Não, conectivos E e OU), de *modificadores* (muito, pouco, levemente, extremamente) e de delimitadores (parênteses, ...)

  - **Objetivo das Variáveis Linguísticas:** Fornecer uma maneira sistemática para uma caracterização aproximada de fenômenos complexos ou mal definidos.
    - A utilização do tipo de descrição linguística empregada por seres humanos, e não de variáveis quantificadas, permite o **tratamento de sistemas que são muito complexos** para serem analisados através de termos matemáticos convencionais.

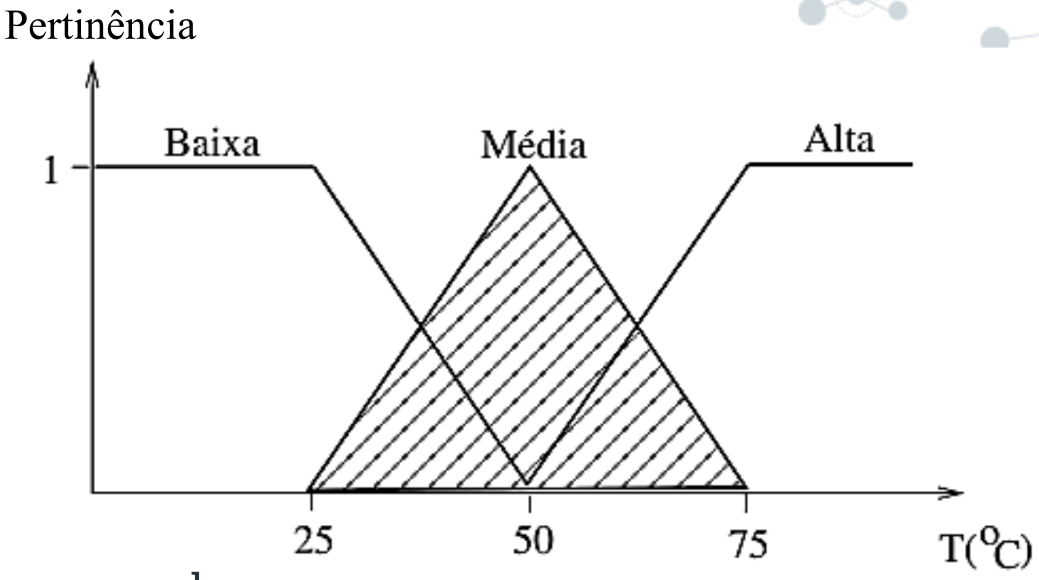
Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

Variáveis Linguísticas:

- Formalmente, uma variável linguística é caracterizada por uma quíntupla $(N, T(N), X, G, M)$, onde:
  - $\boldsymbol{N}$ → Nome da variável;
  - $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{N})$ → Conjunto de termos de N, ou seja, o conjunto de nomes dos valores linguísticos de N;
  - $\boldsymbol{X}$ → Universo do discurso;
  - $\boldsymbol{G}$ → Regra sintática para gerar os valores de N como uma composição de termos de $T(N)$, conectivos lógicos, modificadores e delimitadores;
  - $\boldsymbol{M}$ → Regra semântica, para associar a cada valor gerado por G um Conjunto Fuzzy em X.

Fundamentos de Conjuntos Fuzzy

Variáveis Linguísticas:



Exemplo:

- N → Temperatura
- $T(N)$ → {baixa, média, alta}
- X → 0 a 100 ºC (por exemplo)
- G → temperatura não baixa e não muito alta, por exemplo.
- M → Associa o valor acima a um conjunto fuzzy cuja função de pertinência exprime o seu significado.

Operações em Conjuntos Fuzzy

Operações em Conjuntos Fuzzy

Introdução

- Para os sistemas que utilizam a lógica Fuzzy, o processamento das referidas informações é normalmente consistido de operações que são efetuadas sobre os seus conjuntos Fuzzy.

- As operações básicas de união, interseção e complemento são geralmente definidas em função de operadores MAX e MIN, os quais são análogos aos operadores produto e soma da álgebra elementar.

Operações em Conjuntos Fuzzy

Conjunto Fuzzy Vazio

- Um conjunto fuzzy A em X é vazio se e somente se sua função de pertinência é igual a zero sobre todo X:

$$\boxed{A = \emptyset \text{ se e somente se } \mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X}$$

Conjunto Fuzzy Complemento

- O complemento de um conjunto Fuzzy A, pertencente a um universo de discurso X, é formado pela subtração de $\mu_A(x)$ do valor unitário {1}.

$$\boxed{\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X}$$

Operações em Conjuntos Fuzzy

Igualdade de Conjuntos Fuzzy

- Dois Conjuntos Fuzzy A e B em X são **iguais** se suas funções de pertinência foram iguais sobre todo X:

$$\boxed{A = B \text{ se e somente se } \mu_A(x) = \mu_B(x) \ \ \forall x \ \in X}$$

Subconjunto Fuzzy

- Um Conjunto Fuzzy A é um **subconjunto** de B se sua função de pertinência for menor ou igual à de B sobre todo X:

$$\boxed{A \subset B \text{ se e somente se } \ \mu_A(x) \leq \ \mu_B(x) \ \ \forall x \ \in X}$$

Operações em Conjuntos Fuzzy

Conjunto União

- O conjunto união entre dois conjuntos Fuzzy A e B, pertencentes a um mesmo universo de discurso X, é formado por todos valores máximos entre $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, para todo $x \in X$:

$$\boxed{\mu_A(x) \cup \mu_B(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A, \mu_B)}$$

Conjunto Interseção

- É aquele que será formado por todos os valores mínimos entre $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, para todo $x \in X$:

$$\boxed{\mu_A(x) \cap \mu_B(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min(\mu_A, \mu_B)}$$

OPERAÇÕES EM CONJUNTOS FUZZY

Exemplo:

- Sejam os conjuntos Fuzzy A e B, definidos no universo de discurso discreto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com $A = 0.2/1 + 0.5/2 + 1.0/3 + 0.8/4 + 0.1/5$ e com $B = 0.1/1 + 1.0/2 + 0.9/3 + 0.4/4 + 0.3/5$.
- **Calcule as operações:**

  - $\mu_A \cup \mu_B$
  - $\mu_A \cap \mu_B$
  - $\overline{\mu_A}$
  - $\overline{\mu_B}$

Operações em Conjuntos Fuzzy

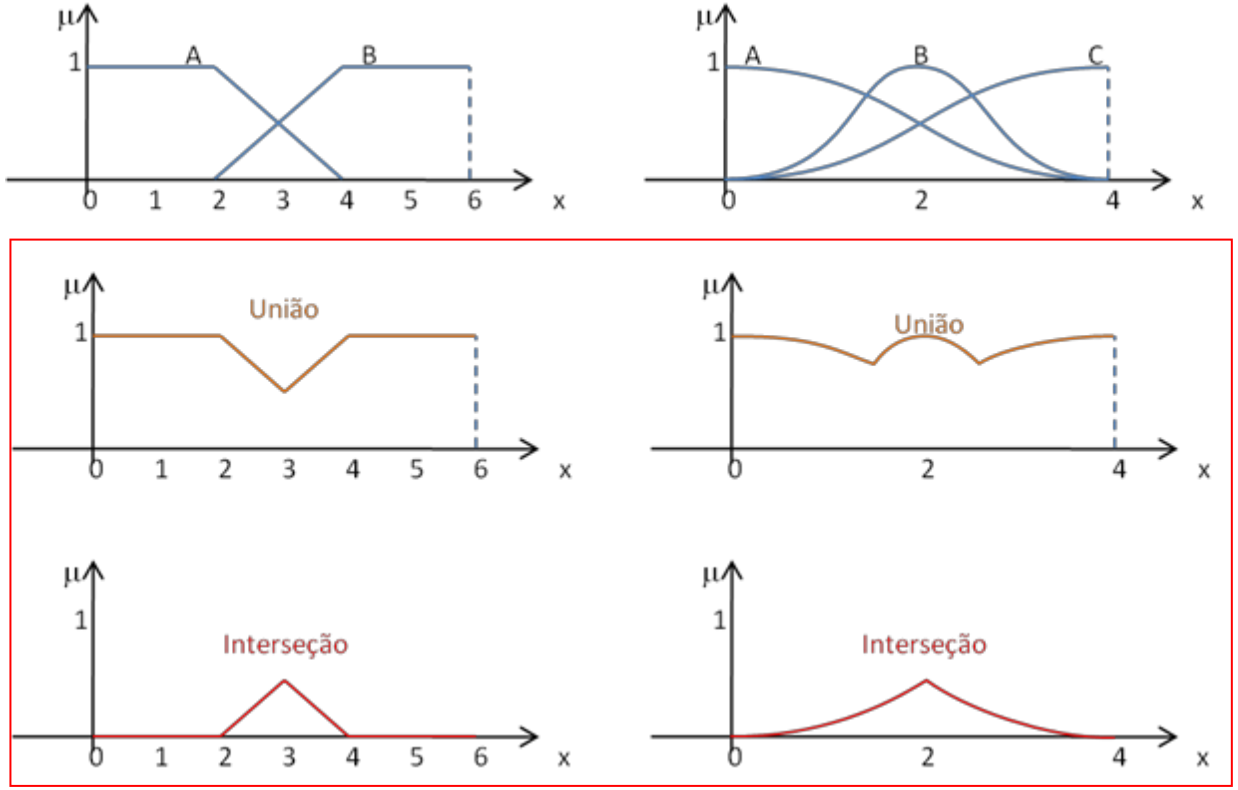
Exemplo:

- Sejam os conjuntos Fuzzy A e B, definidos no universo de discurso discreto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com $A = 0.2/1 + 0.5/2 + 1.0/3 + 0.8/4 + 0.1/5$ e com $B = 0.1/1 + 1.0/2 + 0.9/3 + 0.4/4 + 0.3/5$.
- **Calcule as operações:**

- $\mu_A \cup \mu_B = 0.2/1 + 1.0/2 + 1.0/3 + 0.8/4 + 0.3/5$
- $\mu_A \cap \mu_B = 0.1/1 + 0.5/2 + 0.9/3 + 0.4/4 + 0.1/5$
- $\overline{\mu_A} = 0.8/1 + 0.5/2 + 0.2/4 + 0.9/5$
- $\overline{\mu_B} = 0.9/1 + 0.1/3 + 0.6/4 + 0.7/5$

Operações em Conjuntos Fuzzy

- **Exemplo:**
  - Para os conjuntos Fuzzy definidos nos gráficos seguintes, obtenha a união total e a interseção total:



Operações em Conjuntos Fuzzy

- Na literatura há diversos operadores que executam as operações de união e interseção entre conjuntos Fuzzy.

- As operações básicas sobre conjuntos Fuzzy são definidas a partir de normas conhecidas da teoria dos conjuntos, que serão descritas a seguir.

Operações em Conjuntos Fuzzy

τ-norma:

- τ-norma é uma operação matemática binária τ que satisfaz as seguintes propriedades:

$x \, \tau \, y = y \, \tau \, x$	(comutatividade)
$x \, \tau \, (y \, \tau \, z) = (x \, \tau \, y) \, \tau \, z$	(associatividade)
se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $x \, \tau \, w \leq y \, \tau \, z$	(monotonicidade)
$x \, \tau \, 1 = x$ e $x \, \tau \, 0 = 0$	(contorno/condições-limite)

Operações em Conjuntos Fuzzy

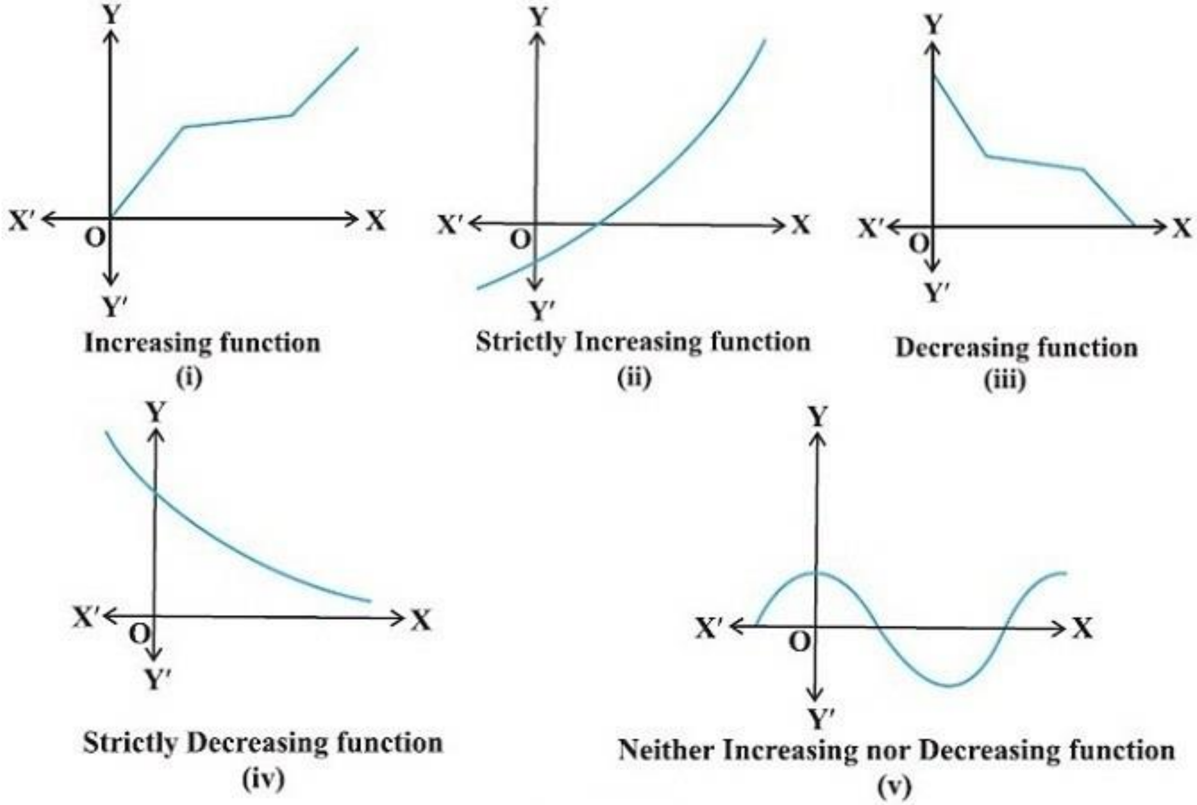
s-norma:

- s-norma é uma operação matemática binária S que satisfaz as seguintes propriedades:

$x \; s \; y = y \; s \; x$	(comutatividade)
$x \; s \; (y \; s \; z) = (x \; s \; y) \; s \; z$	(associatividade)
se $\mathrm{x} \leq y$ e $w \leq z$, então $\mathrm{x} \; s \; w \leq y \; s \; z$	(monotonicidade)
$x \; s \; 1 = 1$ e $x \; s \; 0 = x$	(contorno/condições-limite)

Operações em Conjuntos Fuzzy

- **Monotonicidade:**
  - Uma função é dita *monótona* em um intervalo se ela for crescente ou decrescente naquele intervalo.



Operações em Conjuntos Fuzzy

As principais τ-normas são:

- $Mínimo \Rightarrow \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = MIN(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- $Produto\ Algébrico \ \Rightarrow \mu_A(x).\mu_B(x) = \mu_A(x) * \mu_B(x)$
- $Produto\ Limitado \ \Rightarrow \ \mu_A(x) \otimes \mu_B(x) = MAX(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$
- $Produto\ Drástico \ \Rightarrow \ \mu_A(x)\ N\ \mu_B(x) = \begin{cases} \mu_A(x),\ \ se\ \mu_B(x) = 1 \\ \mu_B(x),\ \ se\ \mu_A(x) = 1 \\ 0,\ \ caso\ contrário \end{cases}$

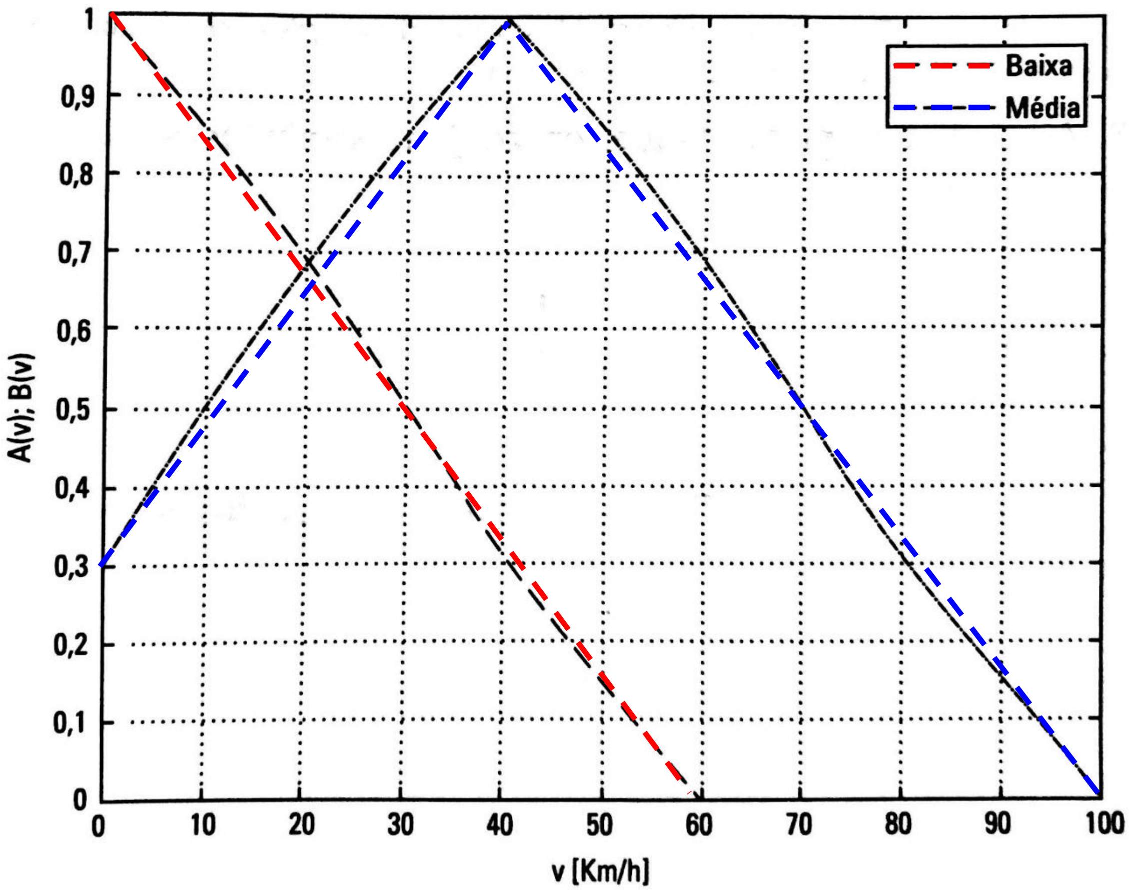
Operações em Conjuntos Fuzzy

As principais s-normas são:

- $M\acute{a}ximo \Rightarrow \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = MAX(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- $Soma\ Alg\acute{e}brica \Rightarrow \mu_A(x) + \mu_B(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) * \mu_B(x)$
- $Soma\ Limitada \Rightarrow \mu_A(x) \oplus \mu_B(x) = MIN(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$
- $Soma\ Dr\acute{a}stica \Rightarrow \mu_A(x)\, \rho\, \mu_B(x) = \begin{cases} \mu_A(x),\ se\ \mu_B(x) = 0 \\ \mu_B(x),\ se\ \mu_A(x) = 0 \\ 1,\ caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$

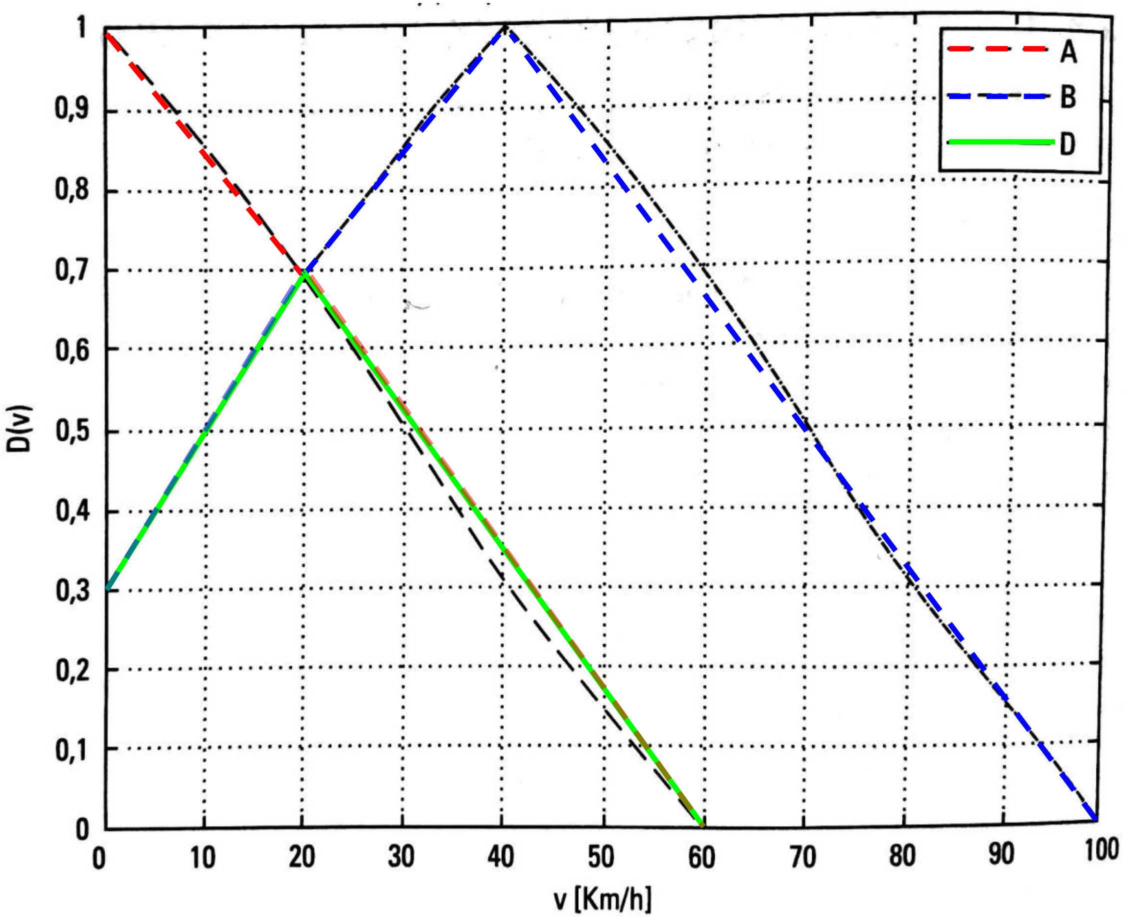
Operações em Conjuntos Fuzzy

- **Exemplo:** A figura a seguir ilustra dois conjuntos Fuzzy (A e B) relacionados com velocidade (v) de um veículo, por exemplo, que receberam as denominações "Baixa" e "Média".



Operações em Conjuntos Fuzzy

◎ **Exemplo:** A aplicação da operação MIN entre os conjuntos A e B define outro conjunto D = 0,3/0 + 0,7/20 + 0,3/40 + 0/60 + 0/80 + 0/100.



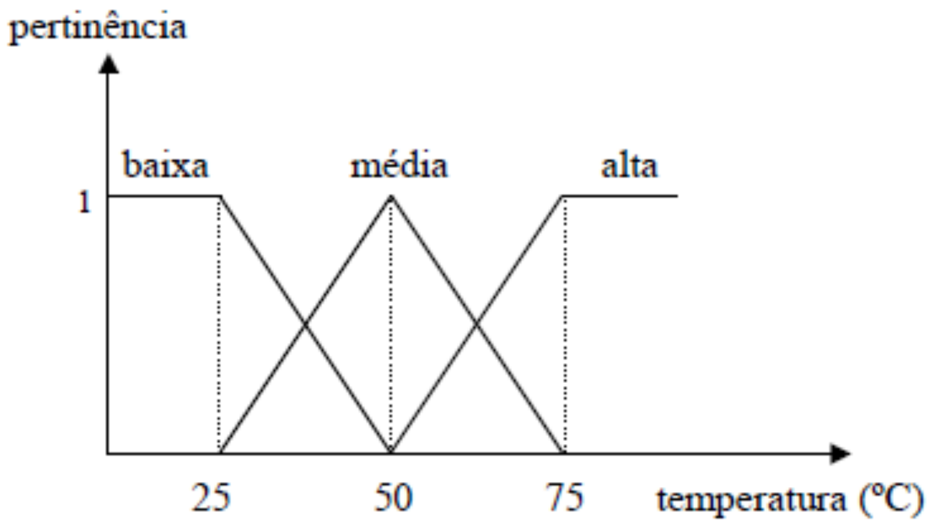
Sistemas Fuzzy

INTRODUÇÃO

Variáveis Linguísticas:

- Uma variável linguística é uma variável cujos **valores** são nomes de conjuntos fuzzy.
  - **Exemplo: Temperatura de um determinado processo** → Pode assumir valores como *Baixa, Média e Alta.*

→ Estes valores são descritos por intermédio de Conjuntos Fuzzy, representados por Funções de Pertinência.



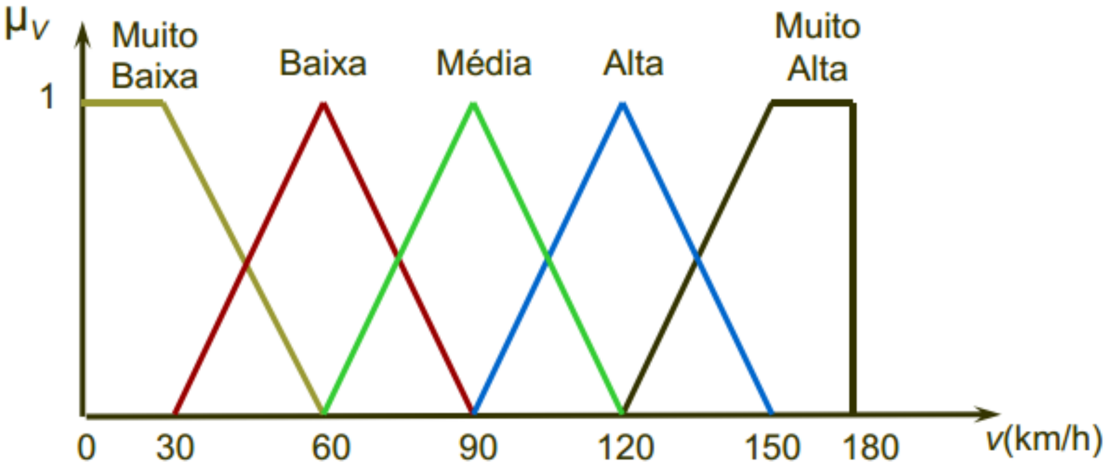
Introdução

- **Variáveis Linguísticas:**
  - Formalmente, uma variável linguística é caracterizada por uma quíntupla $(N, T(N), X, G, M)$, onde:
    - $\boldsymbol{N}$ → Nome da variável;
    - $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{N})$ → Conjunto de termos de N, ou seja, o conjunto de nomes dos valores linguísticos de N;
    - $\boldsymbol{X}$ → Universo do discurso;
    - $\boldsymbol{G}$ → Regra sintática para gerar os valores de N como uma composição de termos de $T(N)$, conectivos lógicos, modificadores e delimitadores;
    - $\boldsymbol{M}$ → Regra semântica, para associar a cada valor gerado por G um Conjunto Fuzzy em X.

Introdução

Exemplo:

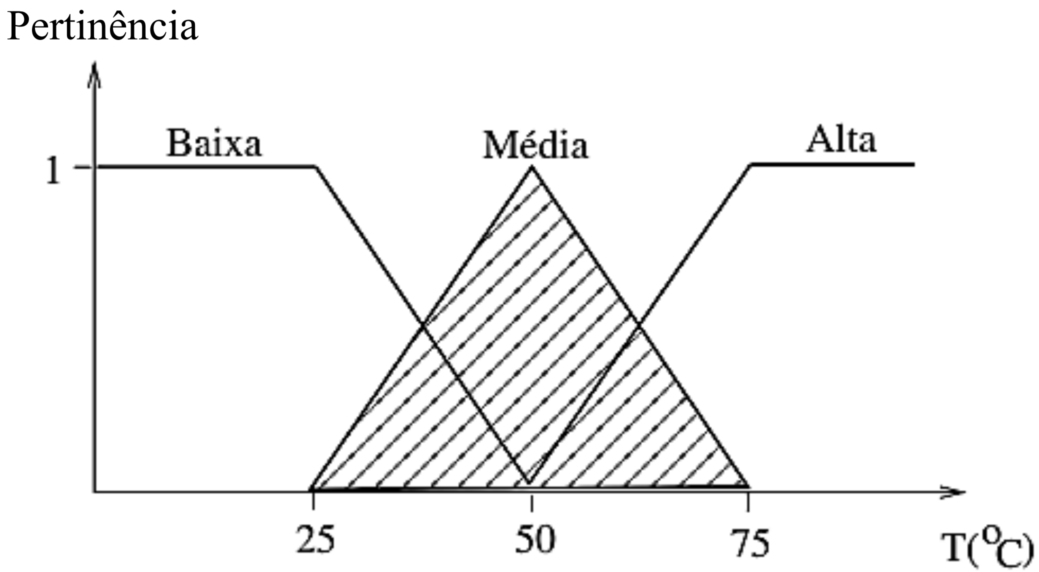
- N → Velocidade
- $T(N)$ → {muito baixa, baixa, média, alta muito alta}
- X → 0 a 180
- G → velocidade não baixa e não muito alta, por exemplo.
- M → Associa o valor acima a um conjunto fuzzy cuja função de pertinência exprime o seu significado.
- **Funções de Pertinência:** são dadas pelas funções triangulares e trapezoidais mostradas nos gráficos.



Introdução

Exemplo:

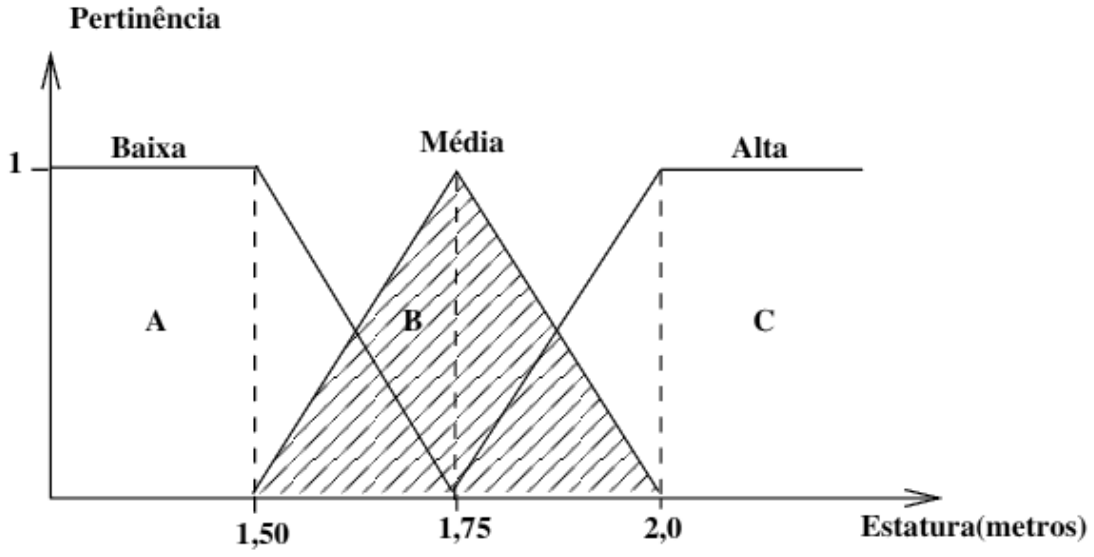
- N → Temperatura
- $T(N)$ → {baixa, média, alta}
- X → 0 a 100 ºC (por exemplo)
- G → temperatura não baixa e não muito alta, por exemplo.
- M → Associa o valor acima a um conjunto fuzzy cuja função de pertinência exprime o seu significado.



Introdução

Exemplo:

- N → Estatura
- $T(N)$ → {baixa, média, alta}
- X → 0 a 3 metros (por exemplo)
- G → estatura não baixa e não muito alta, por exemplo.
- M → Associa o valor acima a um conjunto fuzzy cuja função de pertinência exprime o seu significado.



Introdução

Exemplo: O Problema da Gorjeta

- Dado um conjunto de números entre 0 e 10, representando a qualidade do serviço em um restaurante, onde 0 é péssima e 10 é excelente, qual deve ser a gorjeta?

- Para ilustrar o valor da lógica fuzzy, são apresentadas **duas soluções diferentes** para o mesmo problema: linear e fuzzy.

- Primeiramente o problema é tratado de maneira convencional que expressam relações lineares e/ou lineares por pares.

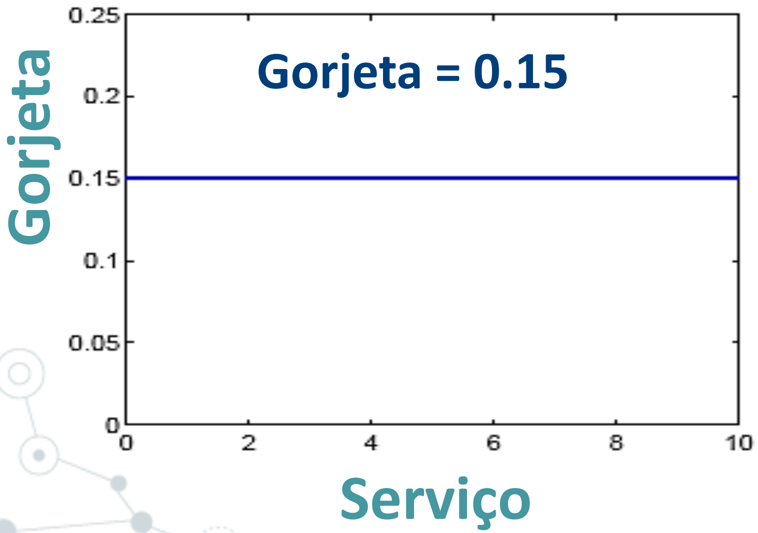
- Em seguida será feita a abordagem do mesmo sistema usando lógica fuzzy.

Introdução

Exemplo: O Problema da Gorjeta

◎ Dado um conjunto de números entre 0 e 10, representando a qualidade do serviço em um restaurante, onde 0 é péssima e 10 é excelente, qual deve ser a gorjeta?

- **Primeira Solução:** Começamos com a relação mais simples possível. Suponha que a gorjeta seja sempre igual a 15% do valor da conta.



- *O valor de referência da gorjeta é o praticado nos Estados Unidos.*
- *A gorjeta média por uma refeição é de 15% do valor da conta, dependendo da qualidade do serviço praticado*

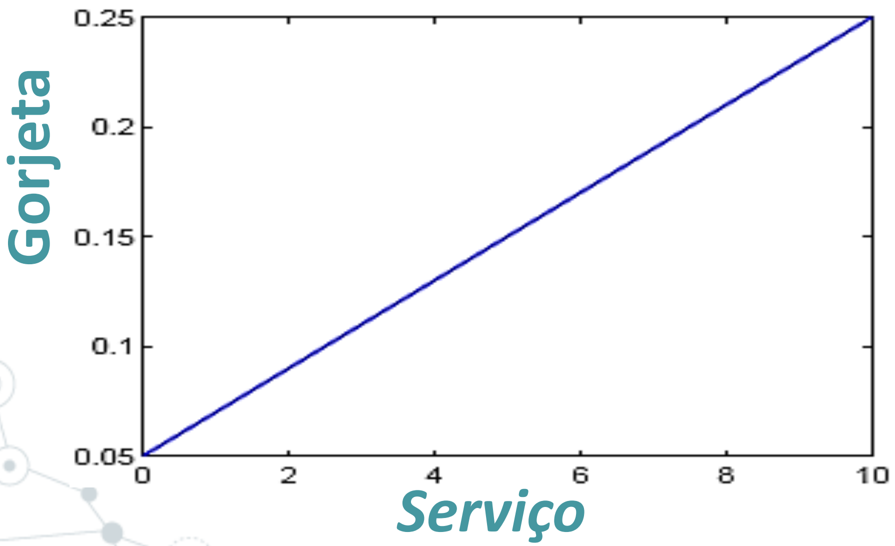
Esta relação não leva em conta a qualidade do serviço!

Introdução

Exemplo: O Problema da Gorjeta

◎ Dado um conjunto de números entre 0 e 10, representando a qualidade do serviço em um restaurante, onde 0 é péssima e 10 é excelente, qual deve ser a gorjeta?

- **Segunda Solução:** Como o serviço é avaliado em uma escala de 0 a 10, podemos ter a gorjeta variando linearmente de 5% se o serviço for ruim a 25% se o serviço for excelente.



Gorjeta = 0.05 + (0.20/10)*Serviço

Introdução

Exemplo: O Problema da Gorjeta

- A fórmula faz o que queríamos e é bastante simples.
- Entretanto, queremos que a gorjeta reflita também a qualidade da comida.
- Esta extensão do problema é definida como:

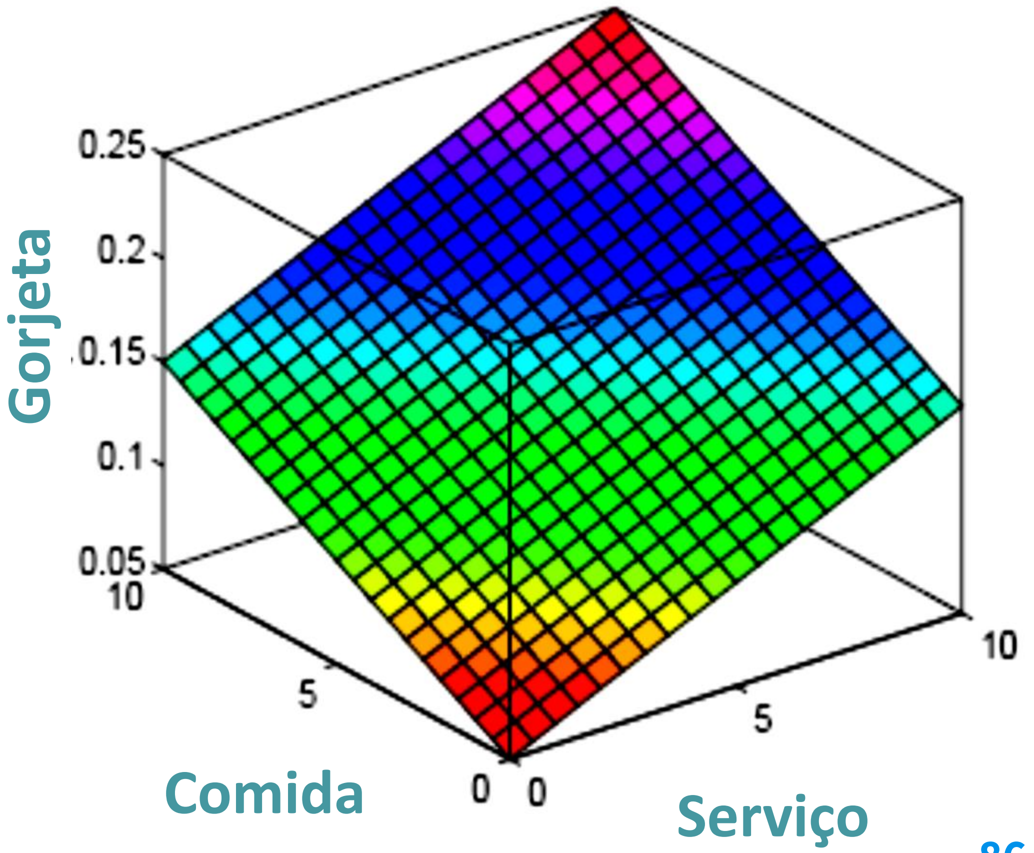
Dados dois conjuntos de números entre 0 e 10 (onde 0 é “péssimo” e 10 é “excelente”) que representam respectivamente a qualidade do serviço e a qualidade da comida, qual deve ser a gorjeta?

Introdução

Exemplo: O Problema da Gorjeta

- **Solução:** A fórmula agora, passa a ser a seguinte:

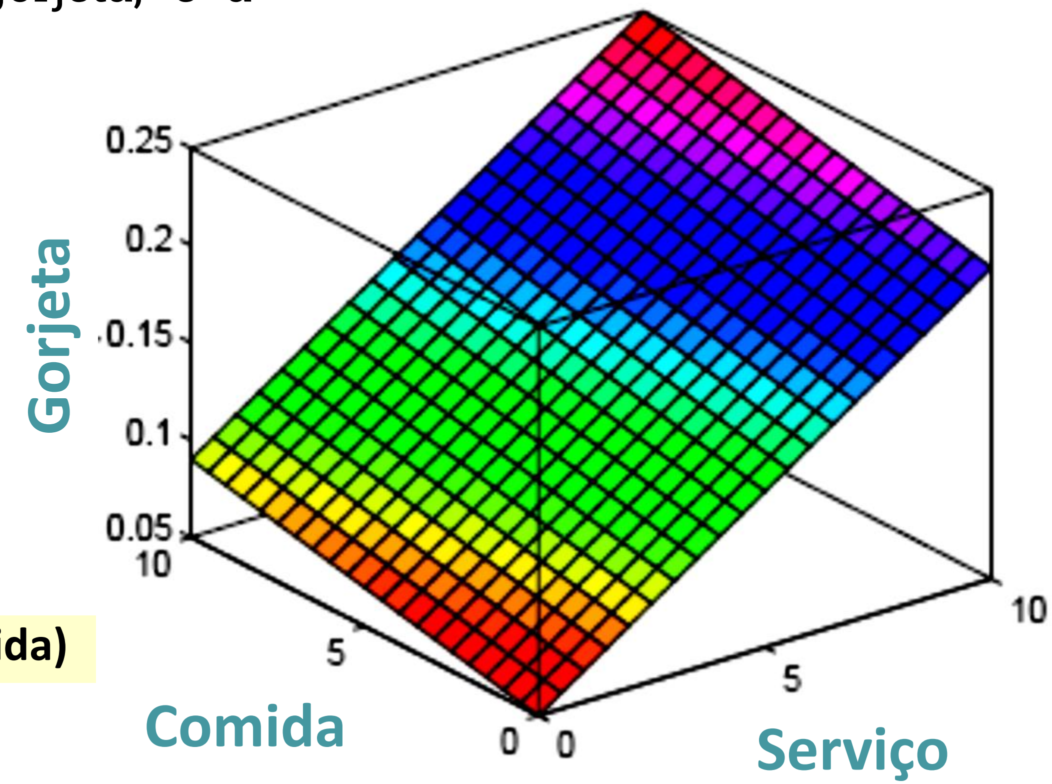
Gorjeta = 0.05 + (0.20/20)*(Serviço + Comida)



Introdução

Exemplo: O Problema da Gorjeta

- **Solução:** Neste caso, o resultado parece bom, mas suponha que desejemos que o serviço seja mais importante do que a qualidade da comida. Assim, o serviço representará 80% da gorjeta, e a comida apenas 20%.



Gorjeta = 0.8*(0.05 + (0.20/10)*Serviço) + 0.2*(0.05 + (0.20/10)*Comida)

Introdução

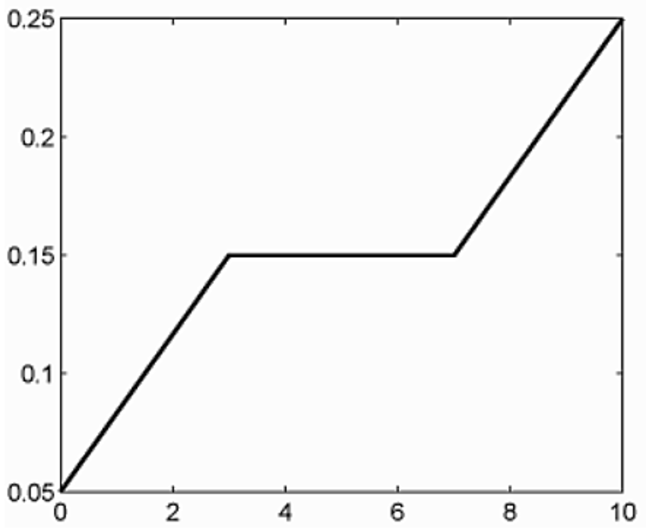
Exemplo: O Problema da Gorjeta

- **Solução:**

  - Ainda assim, a resposta continua muito uniformemente linear.
  - Suponha que queiramos uma resposta mais plana no meio, isto é, queremos dar 15% de gorjeta de um modo geral, e só sairemos deste platô se o serviço for excepcionalmente bom ou ruim.
  - Retornando ao problema unidimensional que considera somente o serviço, podemos colocar juntos uma simples estrutura condicional:

```
SE Serviço < 3
   Gorjeta = 0.8*(0.05 + (0.10/3)*Serviço) + 0.2*(0.05 + (0.20/10)*Comida);

SENÃO SE Serviço < 7
   Gorjeta = 0.15*0.8 + 0.2*(0.05 + (0.20/10)*Comida);
SENÃO
    Gorjeta = 0.8+(0.15 + (0.10/3)*(Serviço–7)) + 0.2*(0.05 + (0.20/10)*Comida)
```



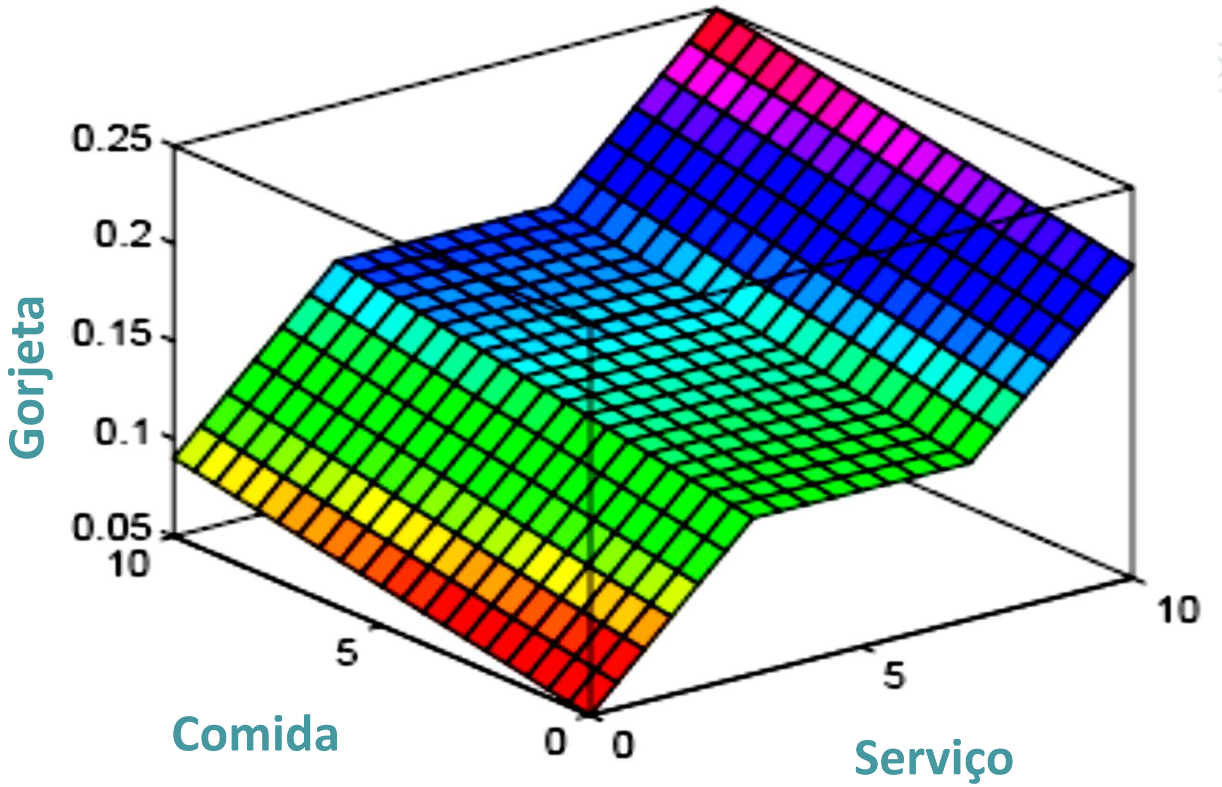
Introdução

Exemplo: O Problema da Gorjeta

- **Solução:** Expandindo a solução para Três Dimensões:

- O gráfico parece bom, mas a **função ficou complicada;**
- É um pouco complicado de codificar isto corretamente e a **manutenção/modificação futura deste código não é trivial;**
- Além disso, é muito menos aparente como o algoritmo funciona para alguém que não acompanhou os passos do processo desde o início;
- Seria bom se pudéssemos **capturar os aspectos fundamentais do problema**, deixando de lado todos os fatores que poderiam ser arbitrários.

Abordagem Fuzzy



Introdução

Exemplo: O Problema da Gorjeta

- **Abordagem Fuzzy:**

  - Fazendo uma lista do que realmente importa, pode-se chegar às seguintes **condições ou regras descritivas:**

    se o serviço for ruim então gorjeta é pequena;
    se o serviço for bom, a gorjeta é razoável;
    se o serviço for excelente então a gorjeta é generosa.

  - A **ordem** em que estas regras são apresentadas aqui é **arbitrária**, ou seja, não importa qual regra vem antes.

  - Se quiséssemos incluir o efeito da comida na gorjeta, poderíamos adicionar as duas seguintes regras:

    se a comida for ruim, então gorjeta é pequena;
    se a comida for deliciosa, então a gorjeta é generosa.

Introdução

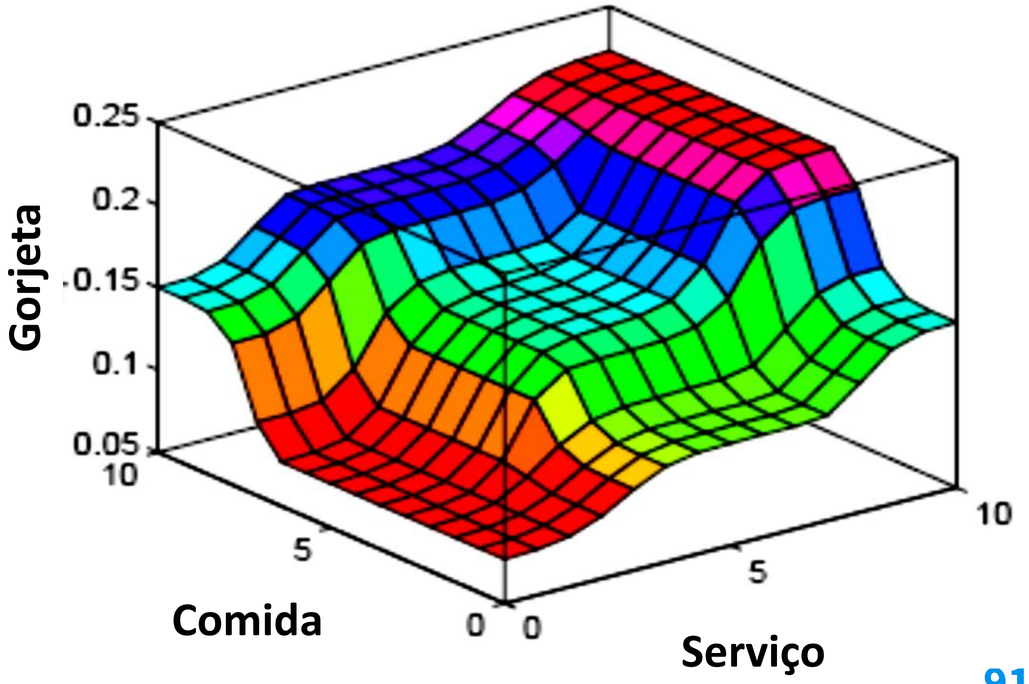
Exemplo: O Problema da Gorjeta

- **Abordagem Fuzzy:**
  - Podemos combinar estes dois diferentes conjuntos de regras em uma lista resumida (com apenas três regras), como abaixo:

Se o serviço for ruim OU a comida for ruim
então gorjeta é pequena;

Se o serviço for bom
então a gorjeta é razoável;

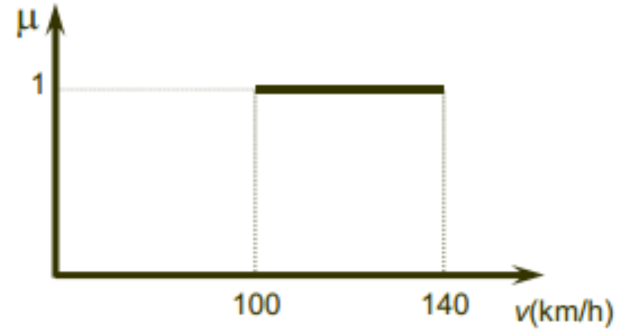
Se o serviço for excelente OU a comida for deliciosa
então a gorjeta é generosa.



- Estas três regras são o núcleo de nossa solução.
- Coincidentemente, acabamos de definir as regras para um sistema empregando ***lógica fuzzy***!

O Problema da Gorjeta

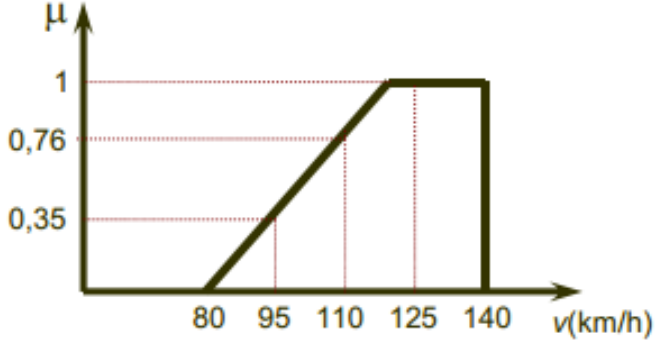
Comparação entre Abordagens



Lógica Clássica

objetos pertencem ou não a uma determinada classe

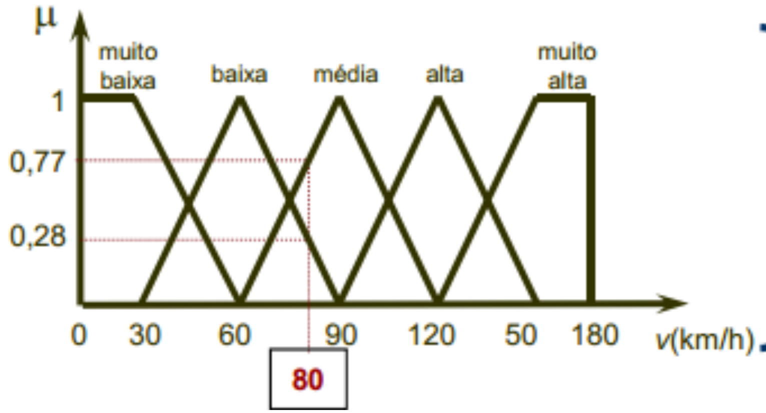
(como tratar paradoxos?)



Lógica Fuzzy

objetos podem pertencer mais (ou menos) a uma determinada classe

(não é probabilidade!)



Sistema Fuzzy

Variáveis representadas por funções de pertinência

Sistema Fuzzy

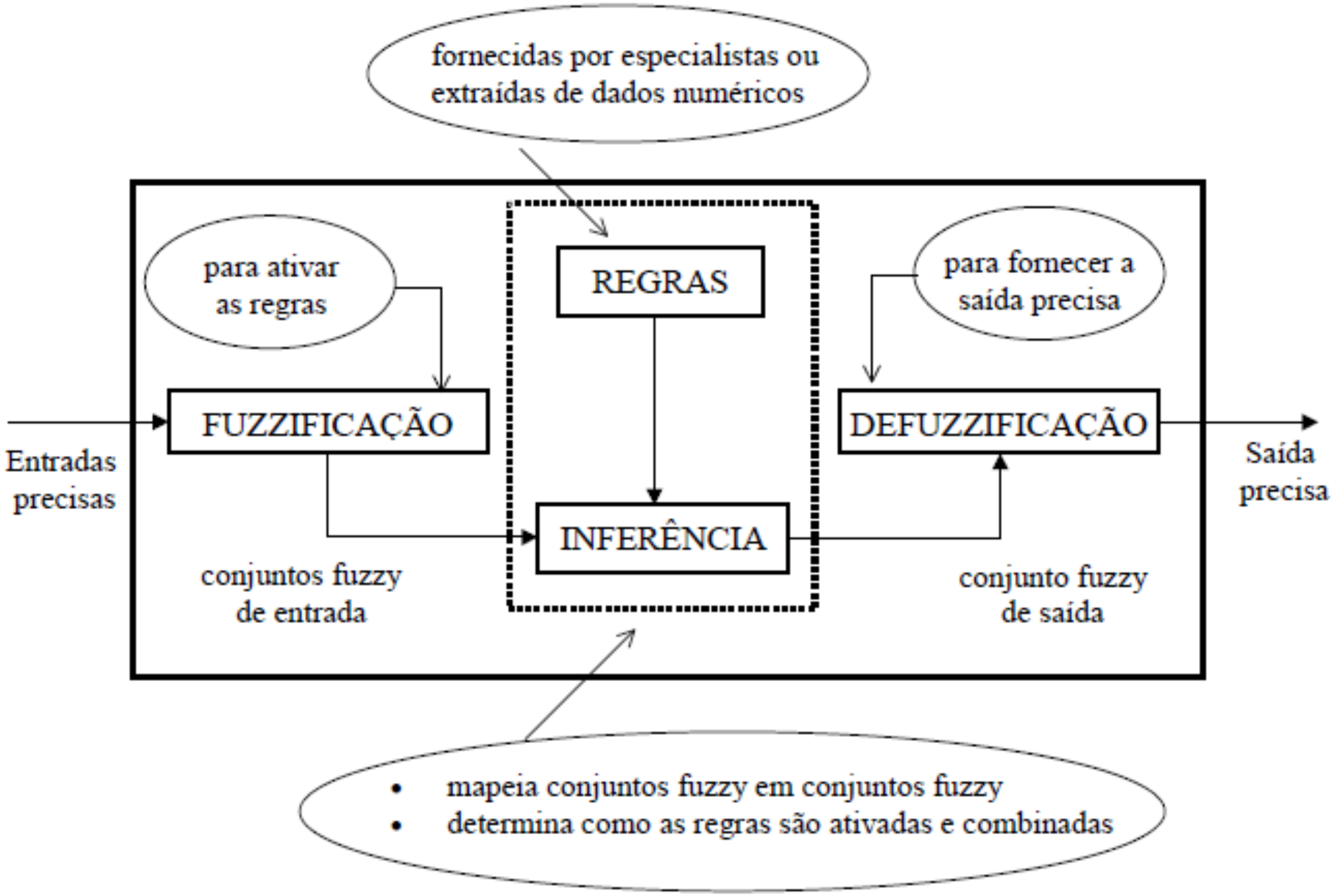
- Podemos, então, concluir que um Sistema Fuzzy é aquele em que as variáveis de entrada e saída são representadas por **funções de pertinência através de variáveis linguísticas e relacionadas através de regras do tipo:**

Se <condição> então <ação>

- Na terminologia da lógica fuzzy:

Se <antecedente> então <consequente>

Sistema Fuzzy

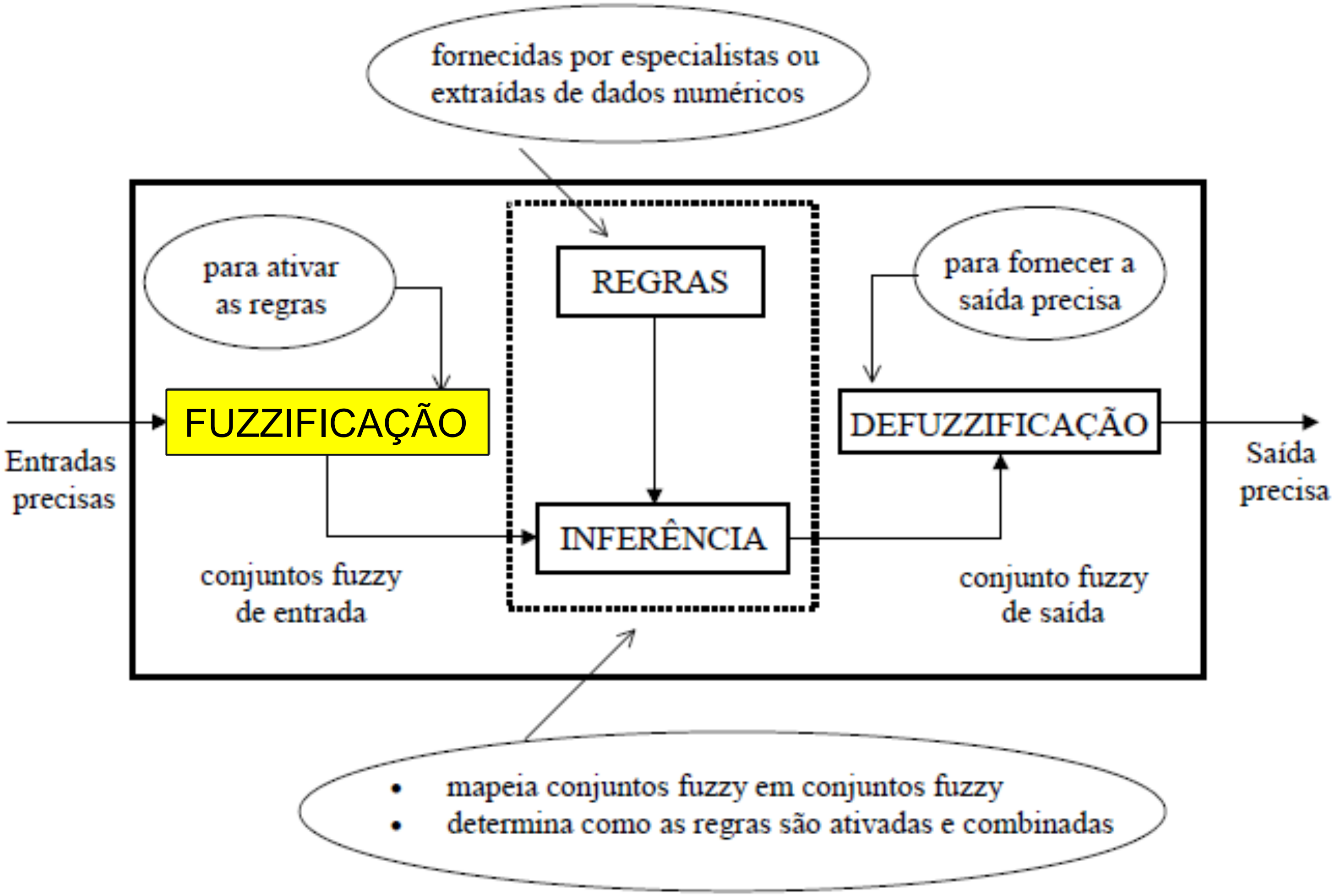


- No **Sistema de Inferência Fuzzy**, consideram-se entradas *não-fuzzy, ou precisas* (resultantes de medições ou observações).

- Em virtude disso, é necessário efetuar-se um *mapeamento* destes dados para os conjuntos fuzzy (de entrada) relevantes, o que é realizado no estágio de **Fuzzificação**.

- A primeira etapa de processamento de um sistema baseado em lógica fuzzy é a de **Fuzzificação**.

Sistema Fuzzy



- A primeira etapa de processamento de um sistema baseado em lógica fuzzy é a de **Fuzzificação**.

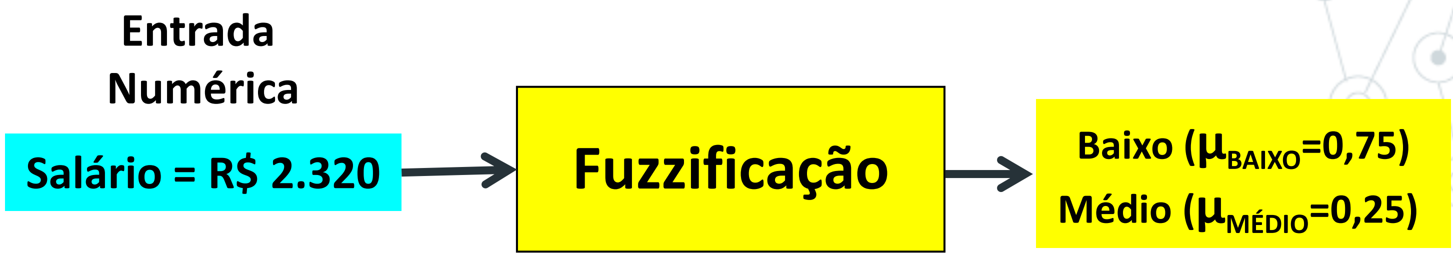
Fuzzificação: Esta tem por objetivo **classificar o valor numérico de entrada** de acordo com termos linguísticos relacionados aos conjuntos fuzzy que definem a função de pertinência.

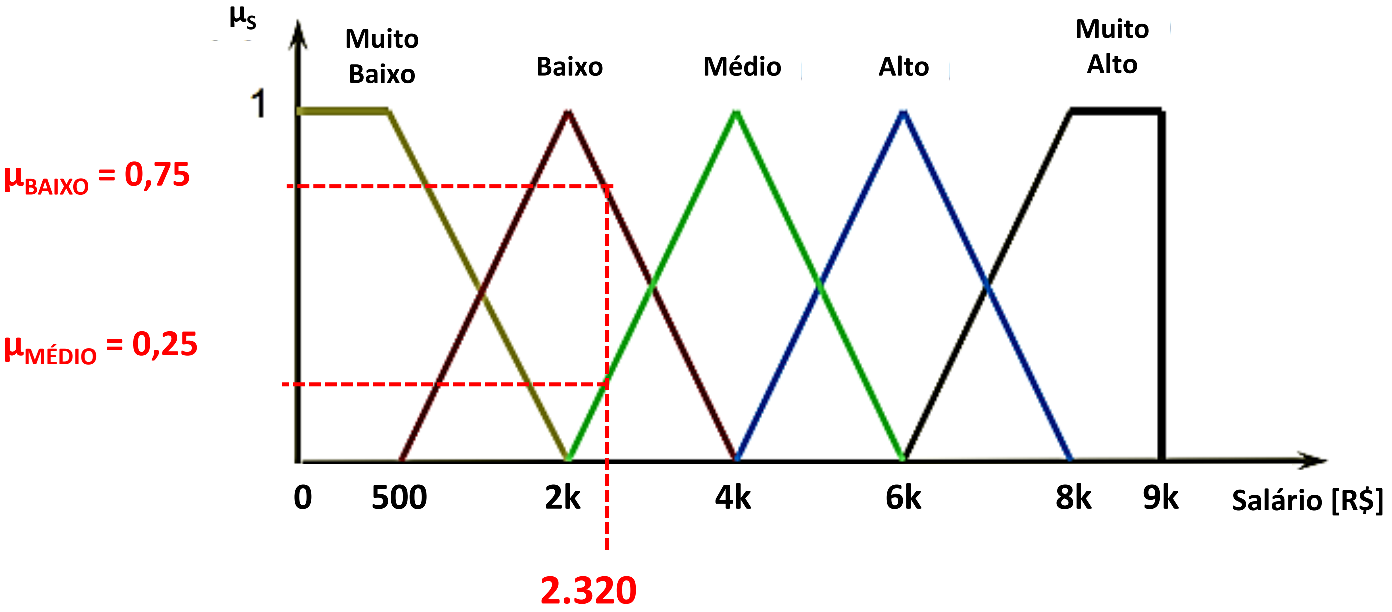
→ Nesse estágio ocorre também a ***ativação*** de regras relevantes para uma da situação.

Sistema Fuzzy - Fuzzyficação

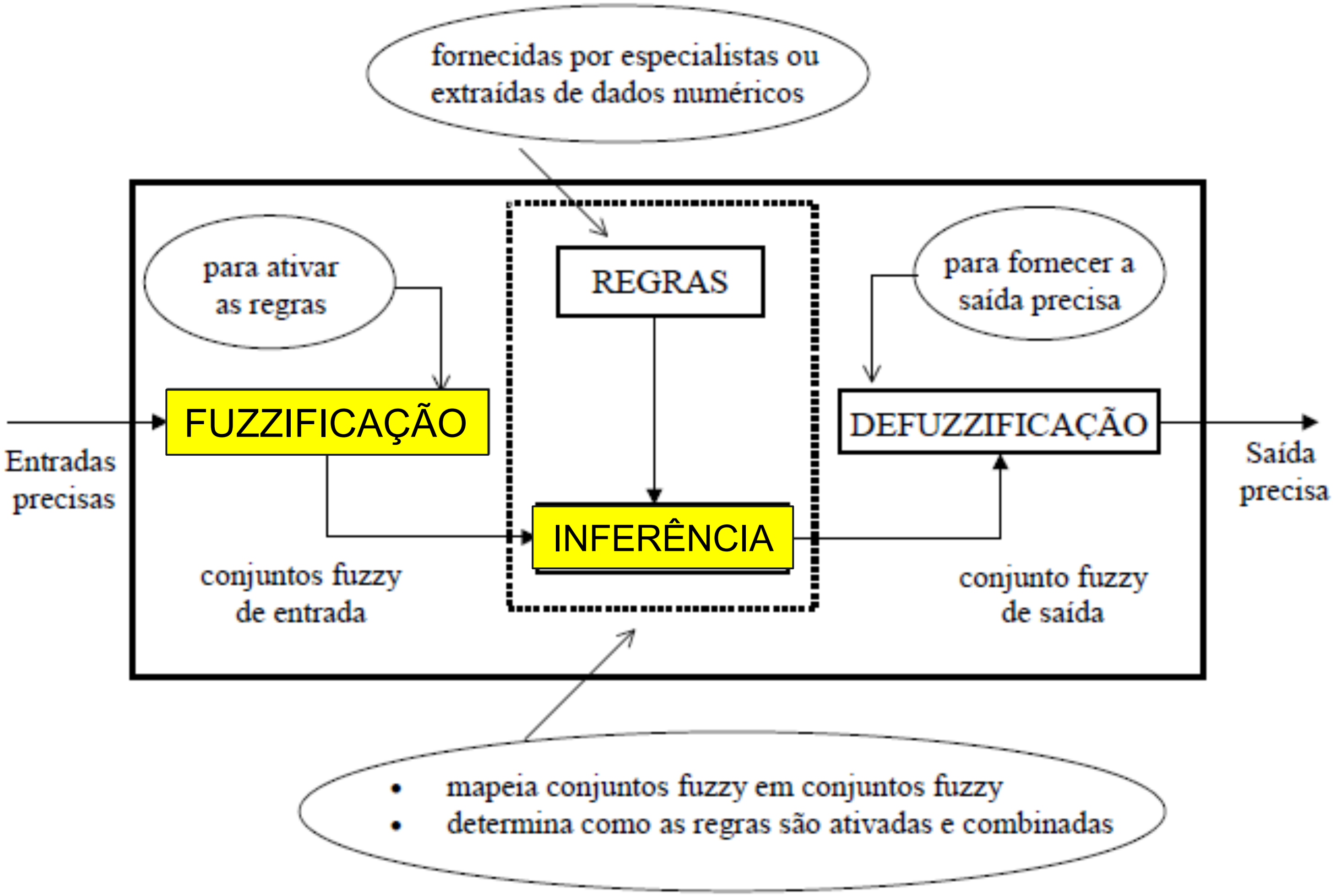
Exemplo: Dado um valor numérico de entrada, este é classificado por um termo linguístico e um grau de pertinência.

→ Ambos dependem da função de pertinência.





Sistema Fuzzy

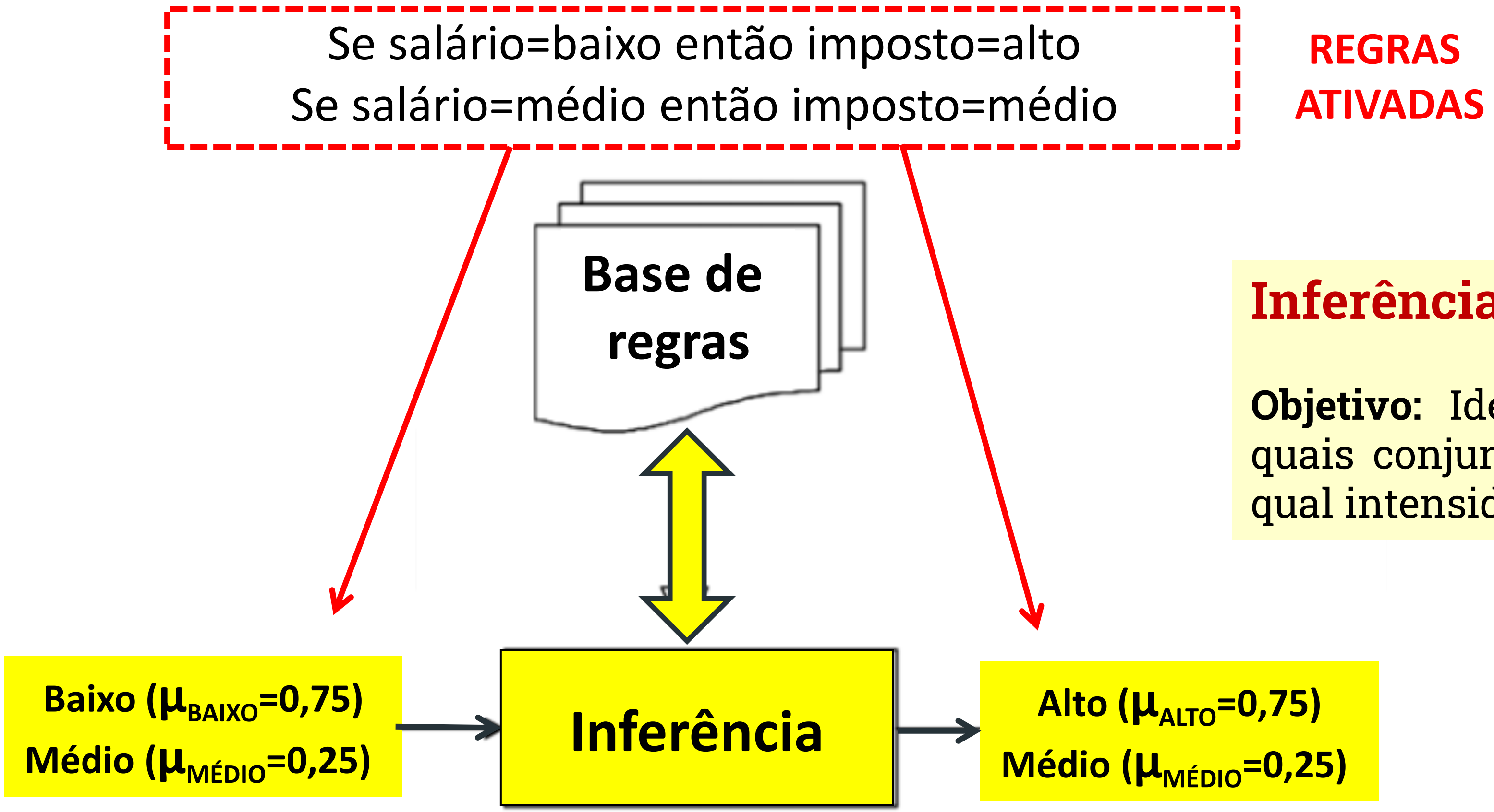


Inferência: Corresponde ao *"raciocínio do sistema"*.

Objetivo: Identificar quais regras foram ativadas e quais conjuntos fuzzy de saída serão ativados e com qual intensidade.

→ Obtém o conjunto fuzzy de saída através do processo de **Inferência**.

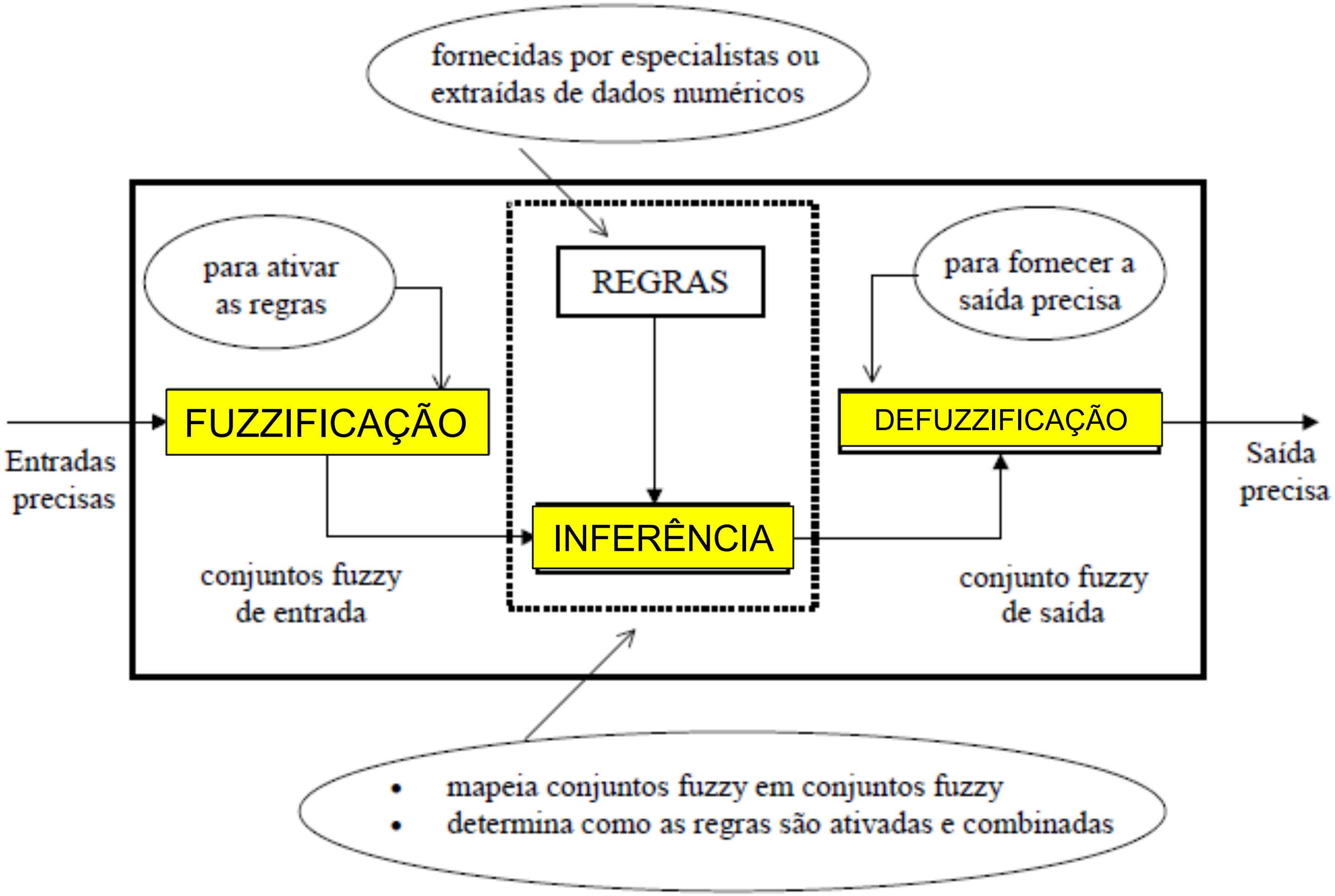
Sistema Fuzzy - Inferência



Inferência: Corresponde ao *"raciocínio do sistema"*.

Objetivo: Identificar quais regras foram ativadas e quais conjuntos fuzzy de saída serão ativados e com qual intensidade.

Sistema Fuzzy



Defuzzificação: Tem o papel inverso ao da fuzzificação, ou seja, produz uma saída numérica correspondente aos conjuntos de saída ativados.

→ Isso se faz necessário pois, em aplicações práticas, geralmente são requeridas saídas precisas.

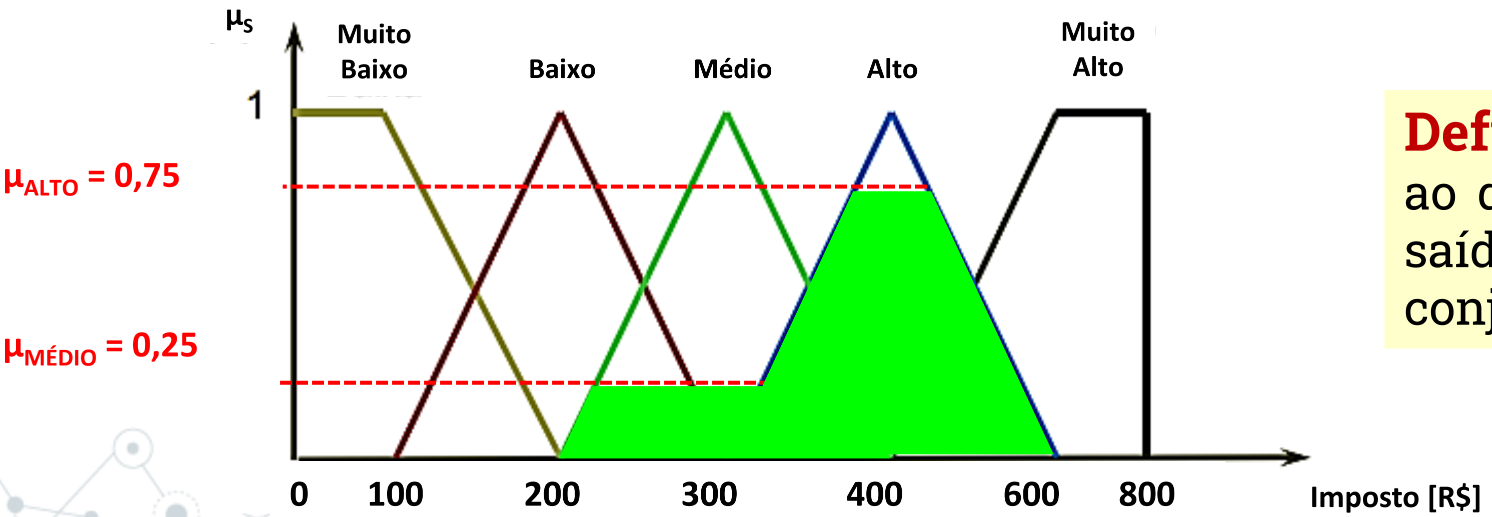
Sistema Fuzzy - Defuzzificação

Alto (μ_{ALTO}=0,75)
Médio ($\mu_{MÉDIO}$=0,25)

→ **Defuzzificação** →

Saída Numérica

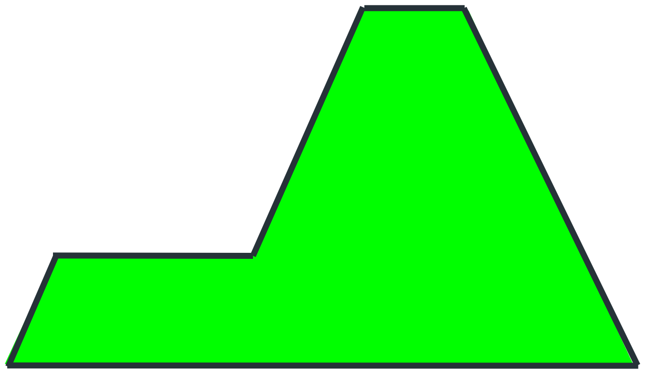
Imposto = R$387,50



Defuzzificação: Tem o papel inverso ao da fuzzificação, ou seja, produz uma saída numérica correspondente aos conjuntos de saída ativados.

Sistema Fuzzy - Defuzzificação

- **A qual valor numérico corresponde a figura abaixo?**

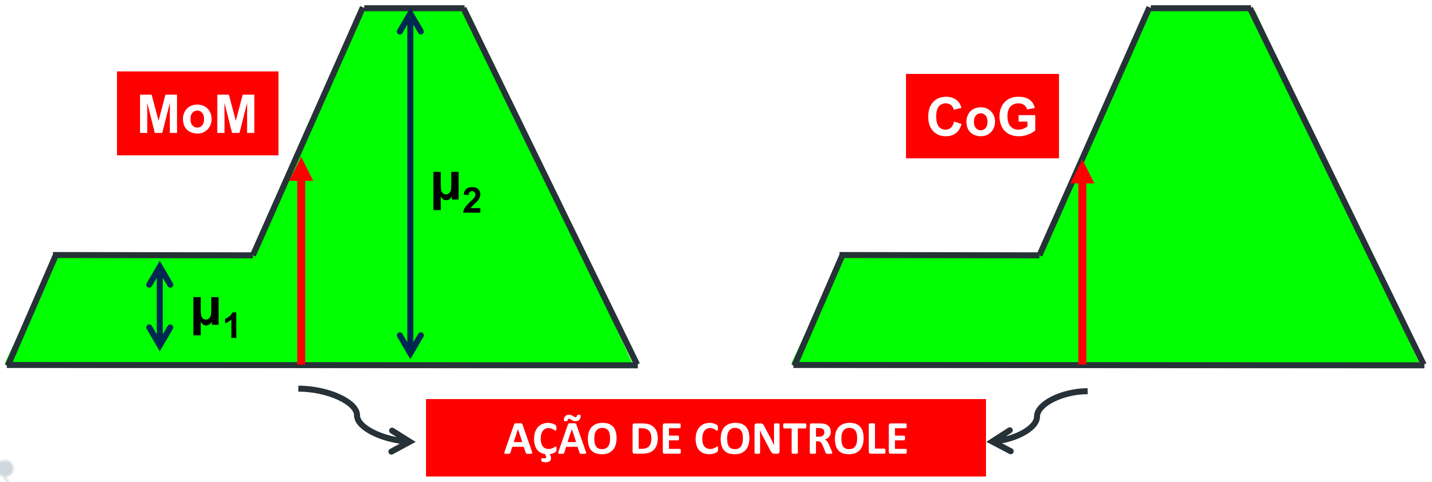


- No contexto fuzzy, há diversas maneiras de se encontrar a resposta para a pergunta anterior.
- O cálculo é feito através de **Métodos de Defuzzificação**, sendo os mais utilizados:
  - **Centróide;**
  - **Média dos Máximos;**
  - **Centro dos Máximos.**

Sistema Fuzzy - Defuzzificação

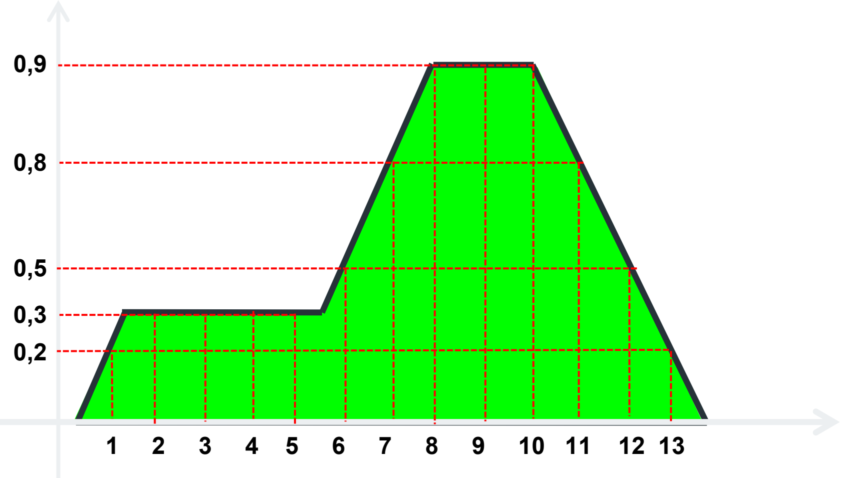
- **Método da Média dos Máximos (MoM)**
  - Gera uma ação de controle que representa o valor médio de todas as ações de controle individuais cujas funções de pertinência assumem o valor máximo.

- **Método do Centro de Gravidade (CoG)**
  - A ação de controle numérica é calculada obtendo-se o centro de gravidade da distribuição de possibilidades da ação de controle global.



Sistema Fuzzy - Defuzzificação

- **Método do Centro de Gravidade (CoG)**
  - O centro de gravidade é calculado por meio da relação entre o somatório do produto de cada abscissa pelo seu respectivo grau de pertinência e o somatório dos graus de pertinência.



$$CoG = \sum x.\mu(x) \Big/ \sum \mu(x)$$

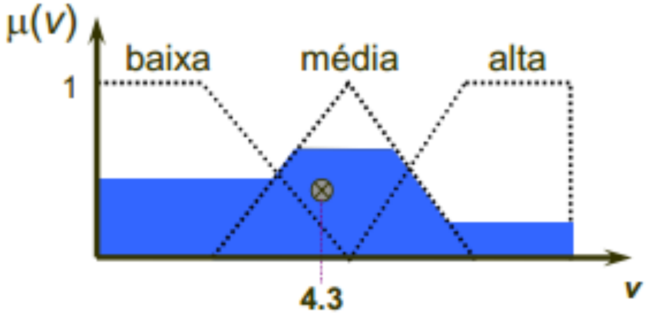
$$CoG = \frac{1*0,2 + (2+3+4+5)*0,3 + 6*0,5 + 7*0,8 + (8+9+10)*0,9 + 11*0,8 + 12*0,5 + 13*0,2}{0,2 + 4*0,3 + 0,5 + 0,8 + 3*0,9 + 0,8 + 0,5 + 0,2} = 7,29$$

Sistema Fuzzy - Defuzzificação

Método do Centro de Área (CDA)

$$CDA = \frac{\sum_{k=1}^{N} \mu(v_k) \cdot v_k}{\sum_{k=1}^{N} \mu(v_k)}$$

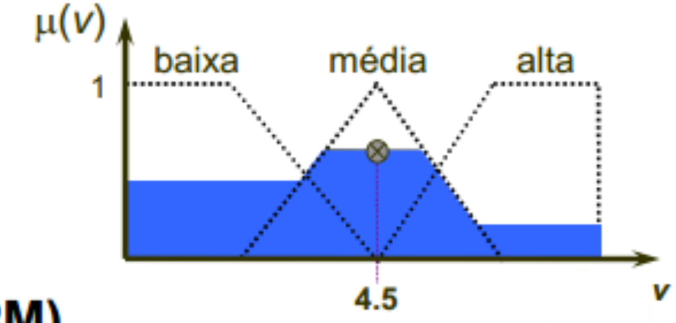
Onde N é o número de discretizações do universo de discurso.



Método da Média dos Máximos (MDM)

$$MDM = \sum_{k=1}^{M} \frac{v_k}{M}$$

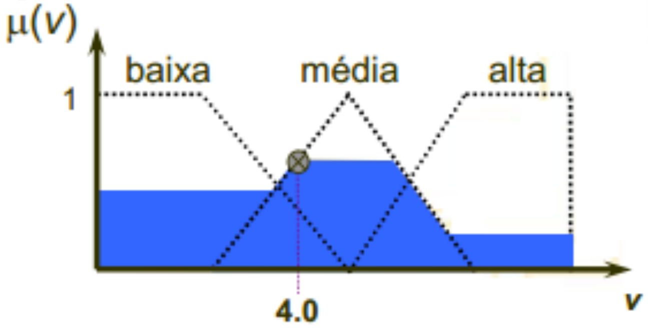
Onde v_k são os valores que contem graus de pertinência máximos e M é a quantidade destes elementos.



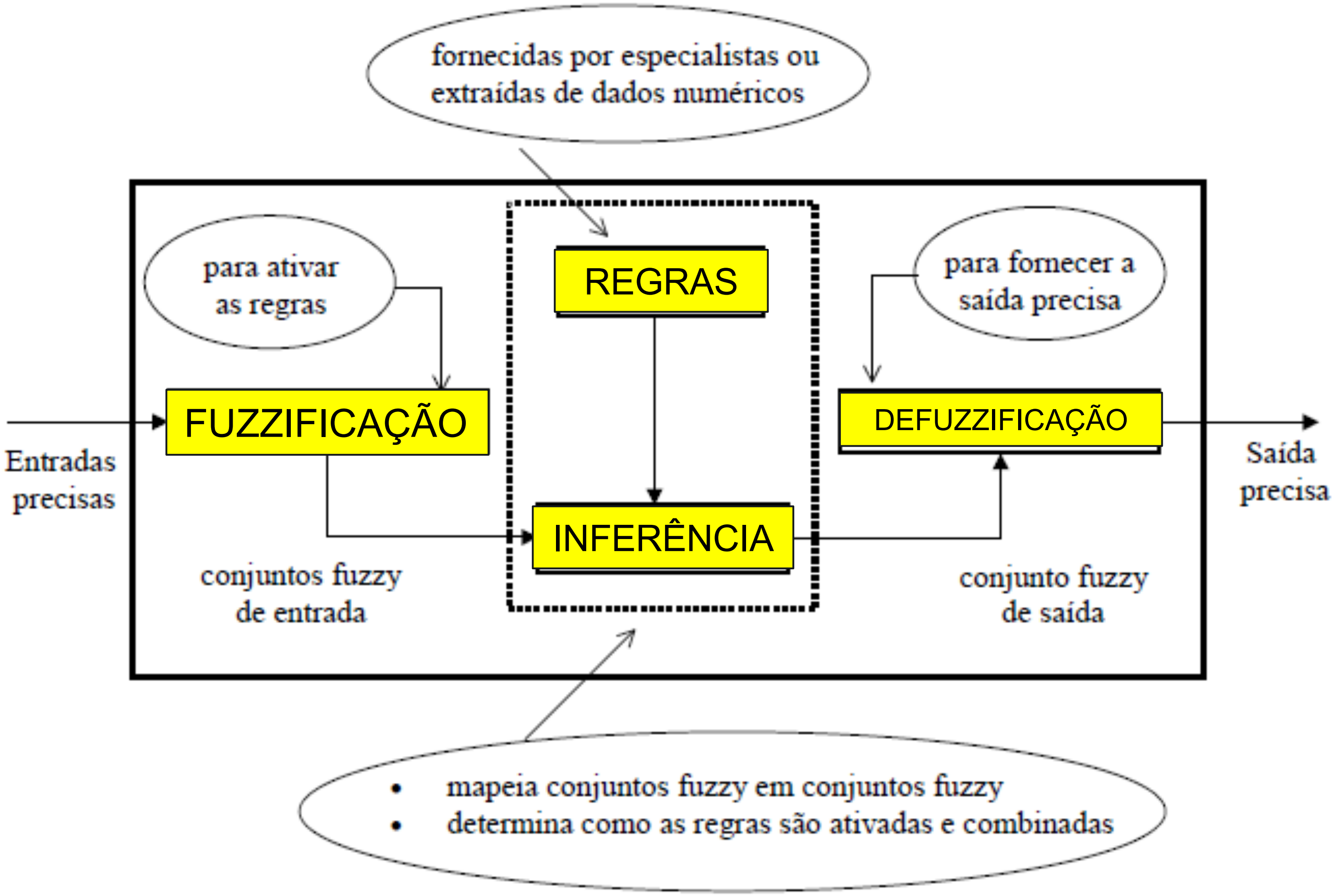
Método do Primeiro Máximo (MPM)

$$MPM = \min_{v}\{\max\{\mu(v)\}\}$$

MPM é o valor do universo de discurso onde ocorre o primeiro maior máximo.



Sistema Fuzzy



Regras: As regras podem ser fornecidas por especialistas, em forma de sentenças linguísticas.

→ Fundamental no desempenho de um Sistema de Inferência Fuzzy.

→ Extrair regras de especialistas na forma de senteças do tipo *se … então* pode ser uma tarefa difícil.

→ **Solução:** Métodos de extração de regras de dados numéricos.

Sistemas Fuzzy SISO

SISTEMAS SISO

Inferência em Sistemas SISO (Única Entrada e Única Saída)

- Em **sistemas simples**, com entrada e saída únicas, a relação entre conjuntos fuzzy é direta e pode ser escrita através de regras como:

Se <velocidade=alta> então <aceleração=média>

Se <nível=alto> então <abertura_da_válvula=pouca>

- Nestes casos, o grau de pertinência da saída é o mesmo da entrada, ou seja, se velocidade for igual a "*alta*" com μ_{ALTA}=0,7 então a aceleração será média com $\mu_{MÉDIA}$=0,7 → **A relação é direta.**

Sistemas Fuzzy MISO

Sistemas MISO

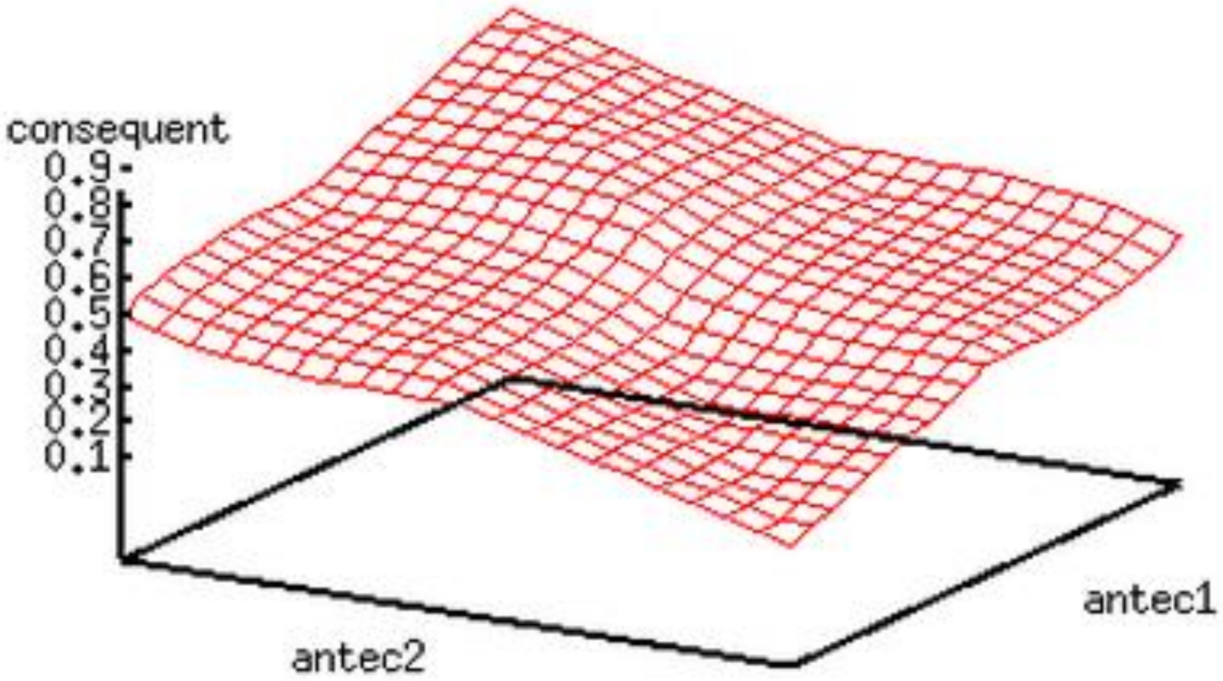
Inferência em Sistemas MISO (Múltiplas Entradas e Única Saída)

- É possível notar, pelas informações anteriores, que a base de regras armazena o “conhecimento” acerca do comportameto do sistema e o processo de inferência corresponde ao “raciocínio” do mesmo;
- Cabe ressaltar que este não é apenas um processo de busca executado sobre uma base de dados, mas um tipo de mecanismo capaz de extrair conclusões com base em uma série de afirmações declaradas na forma de regras de produção;
- Este mecanismo é totalmente baseado nas proposições da lógica clássica e torna-se mais complexo à medida que o número de variáveis aumenta.

Sistemas MISO

Inferência em Sistemas MISO (Múltiplas Entradas e Única Saída)

- Neste caso deve-se estabelecer uma relação entre vários conjuntos de entrada com um único valor de saída.
- A saída dependerá do estado das entradas. Um exemplo gráfico desta relação para um Sistema com duas entradas é:



Sistemas MISO

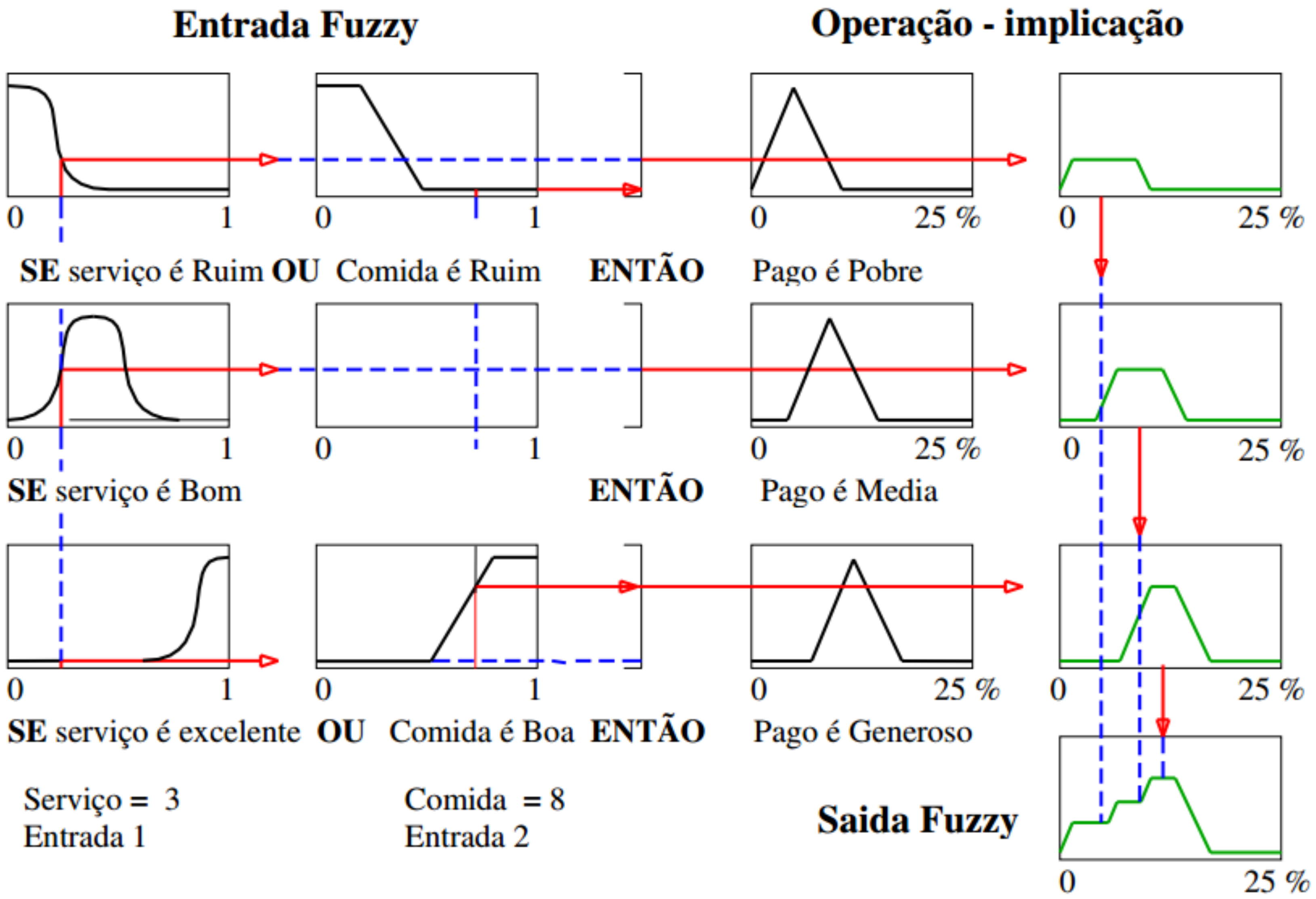
Inferência em Sistemas MISO (Múltiplas Entradas e Única Saída)

- No processo de inferência, operações relacionais são utilizadas para *"disparar"* regras *fuzzy* *"Se-Então"* existentes na base de regras, de acordo com o estado das variáveis de entrada.
- Como várias regras são ativadas (ou disparadas), tem-se como resultante uma **região** *fuzzy* que está relacionada com a saída do processo.
- Os passos para a obtenção dessa região *fuzzy* de saída são:

1. Identificar todas as regras que estejam ativadas;
2. Determinar a saída *fuzzy* **de cada uma** das regras ativadas.
3. Combinar (**agregar**) todas as saídas *fuzzy* calculadas.

Sistemas MISO

Se o serviço for ruim ou a comida for ruim **então** gorjeta é pequena;
Se o serviço for bom **então** a gorjeta é razoável;
Se o serviço for excelente ou a comida for deliciosa **então** a gorjeta é generosa.



Tipos de Sistemas Fuzzy

TIPOS DE SISTEMAS FUZZY

- Na literatura existem vários modelos de sistemas *fuzzy*, que se diferenciam, normalmente, na forma de ***“expressar”* o consequente da regra, ou seja, a ação de controle.**

- Alguns dos modelos mais conhecidos são o **Modelo de Mamdani (1973)** e o **Modelo de Takagi-Sugeno (1983)**.

  - **Modelo de Mamdani (1973) →** Relaciona dois conjuntos *fuzzy* de forma direta;

  - **Modelo de Takagi-Sugeno (1983) →** Dispara uma ação com base na média ponderada entre as saídas ativadas.

Modelo de Mamdani

- O modelo de Mamdani utiliza conjuntos *fuzzy* nos **consequentes** das regras *fuzzy*.

- Neste modelo, a saída da etapa de inferência é representada por um conjunto *fuzzy*, que é o resultado da agregação das saídas, sendo o resultado submetido a defuzzificação.

- No modelo Mamdani tanto os antecedentes como os consequentes são mapeados com conjuntos *fuzzy*.

- Um exemplo de regra típica num modelo Mamdani:

SE Erro é "Grande" E a Derivada de Erro é "Pequena" Então Torque é "Alto".

Modelo de Mamdani

- Caso o sistema em questão tenha mais de uma variável de entrada, é necessário aplicar uma técnica de agregação dos conjuntos antecedentes, que neste caso geralmente é dada pelas τ-**norma (mínimo – interseção)**

- Nas aplicações práticas têm-se N regras ativadas, das quais são gerados N conjuntos consequentes, um por regra.

- Para obter o conjunto final de saída, é feita a composição dos conjuntos através de uma **s-norma (máximo - união), pois considera todas as ações de controle isoladamente.**

- ***Agregação e combinação: combinam uma série de conjuntos fuzzy para produzir um único correspondente.***

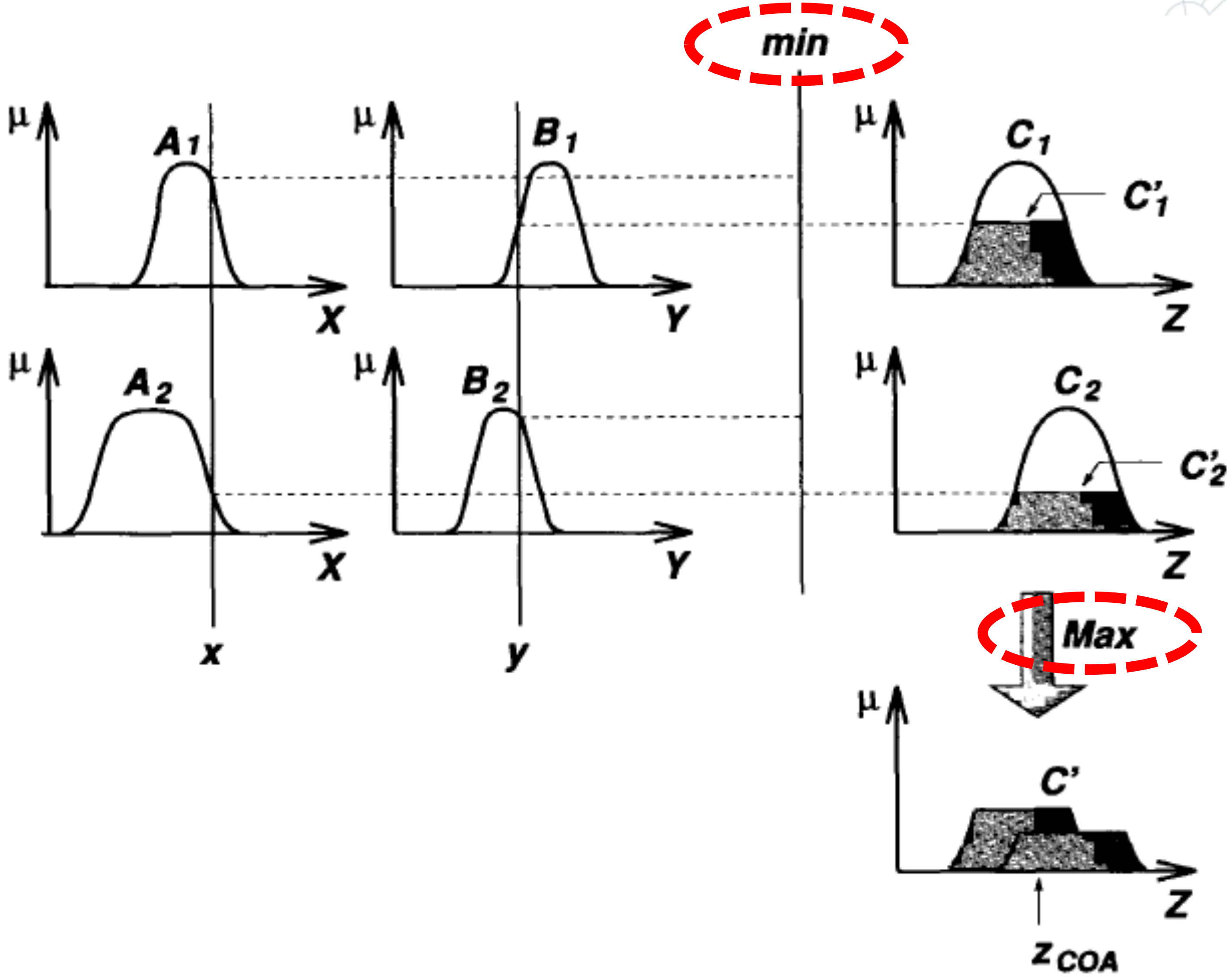
Modelo de Mamdani

- **Normas triangulares:**
  - Fornecem modelos genéricos para as operações de intersecção e união de conjuntos *fuzzy*.
    - **Normas triangulares (τ-normas) →** Intersecção;

      → Associada, normalmente ao **ANTECENDENTE** das regras ativadas.
    - **Co-normas triangulares (s-normas) →** União;

      →Associada, normalmente ao **CONSEQUENTE** das regras ativadas.

Modelo de Mamdani



Modelo de Mamdani
Exemplo

Especificação das Variáveis do Problema

- A determinação da pressão, num sistema automatizado para freios automotivos, pode ser estimada a partir da quantidade de movimento (massa e velocidade) do veículo.

- Os especialistas envolvidos com o projeto do sistema especificaram o seguinte sistema *fuzzy* para ser aplicado neste problema:

→ Variáveis de Entrada:
Velocidade (km/h) → $v \in [0; 180]$
Massa do veículo (ton) → $m \in [0; 2,4]$

→ Variável de Saída:
Pressão no freio (atm) → $p \in [0; 1]$

Modelo de Mamdani

Exemplo

Especificação das Variáveis do Problema

- A fim de validar o sistema em questão, deseja-se, então, saber qual a pressão a ser exercida nos freios de um veículo com massa de 1,5 ton a uma velocidade instantânea igual a 155 km/h.
- Os operadores fuzzy a serem utilizados serão os seguintes:

Conectivo → E (Mínimo), OU (Máximo)

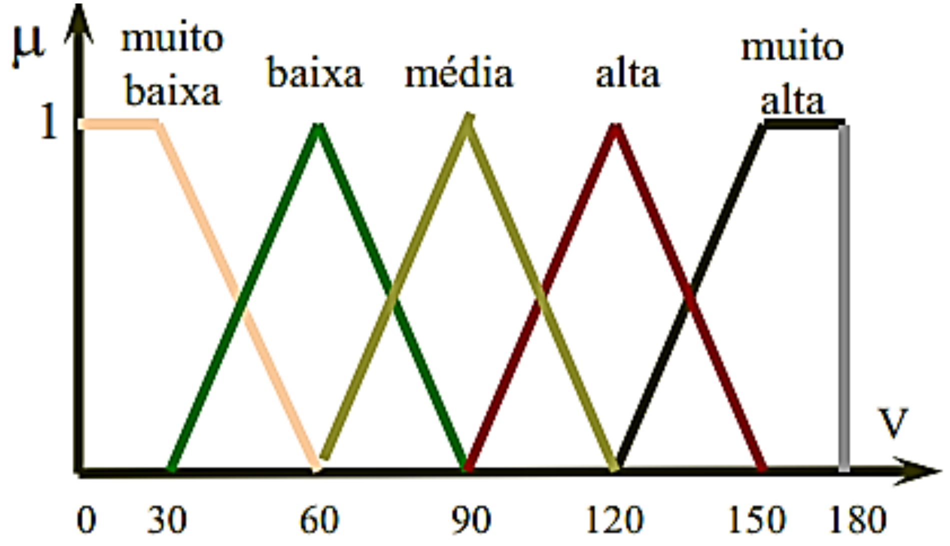
Implicação → Mamdani

Agregação → Máximo

Defuzzificação → Centróide

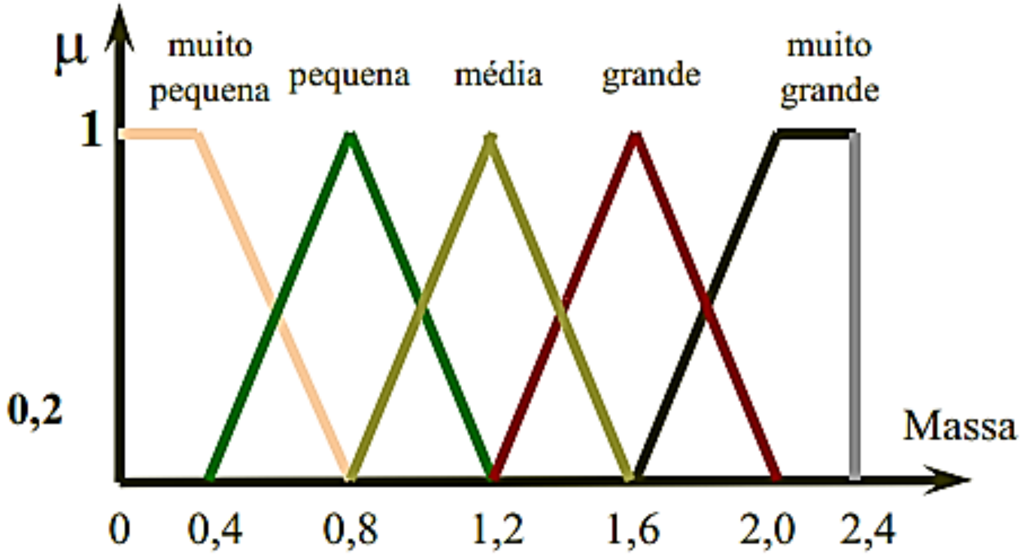
Modelo de Mamdani

Exemplo



Especificação das Funções de Pertinência

- Variável de Entrada:
Velocidade (km/h)
→ v ∈ [0; 180]

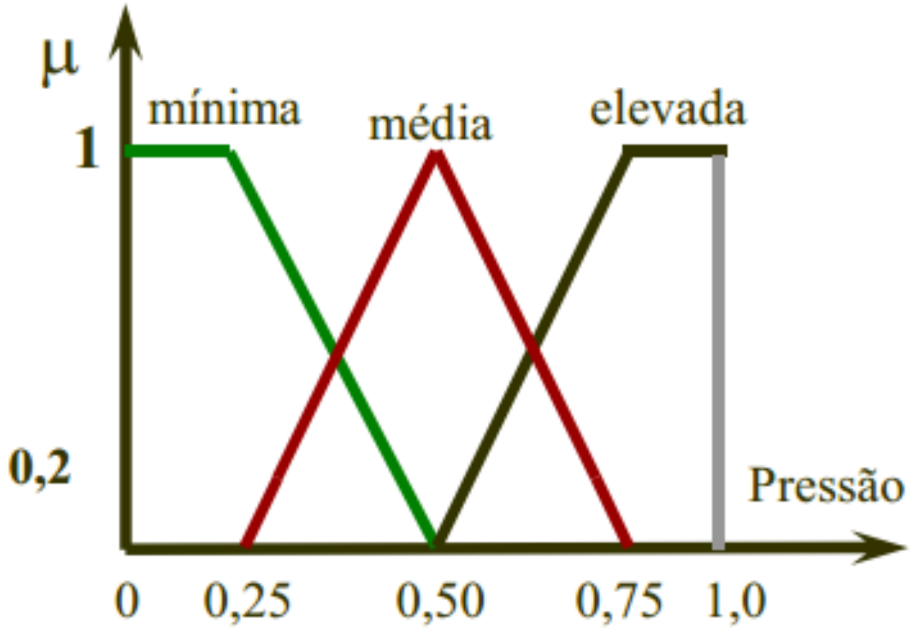


- Variável de Entrada
Massa do veículo (ton)
→ m ∈ [0; 2,4]

Modelo de Mamdani

Exemplo

Especificação das Funções de Pertinência



-Variável de Saída:

Pressão no freio (atm)

→ p ∈ [0; 1]

Modelo de Mamdani

Exemplo

Especificação da Base de Regras

- Após análise do problema, foi decidido que todas as regras do sistema seriam do tipo:

Se (velocidade é “alta”) E (massa é “grande”)
Então a pressão no freio é “elevada”

massa \ velocidade	MB	BA	ME	AL	MA
MP	MI	MI	MI	ME	ME
PE	MI	MI	MI	ME	ME
ME	MI	MI	ME	ME	ME
GR	ME	ME	EL	EL	EL
MG	ME	ME	EL	EL	EL

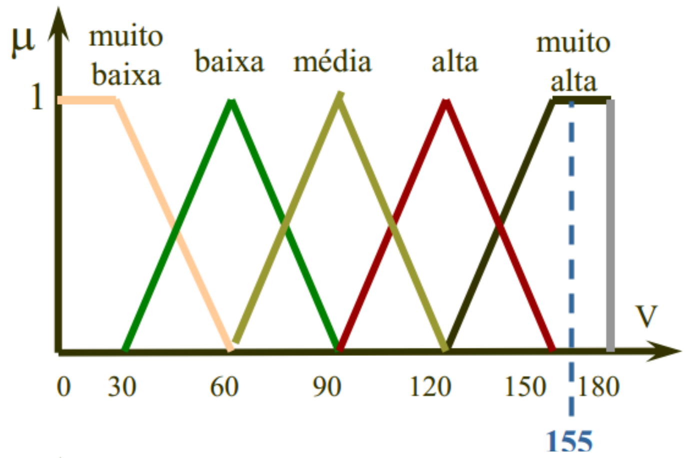
Velocidade:
MB (muito baixa), BA (baixa),
ME (média), AL (alta),
MA (muito alta)

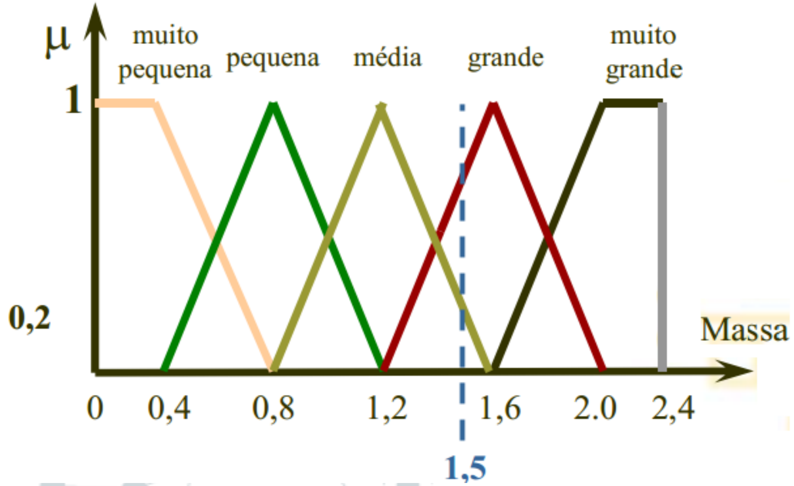
Massa: MP (muito pequena),
PE (pequena), ME (média),
GR (grande), MG (muito grande)

Pressão: MI (mínima),
ME (média), EL (elevada)

Modelo de Mamdani
Exemplo

◎ **Fuzzificação das Variáveis:**





- Para (v=155 km/h) e (m=1,5 ton), tem-se duas regras ativadas, conforme as funções de pertinência das entradas.
- As regras ativadas estão circuladas em azul.

velocidade

massa	MB	BA	ME	AL	MA
MP	MI	MI	MI	ME	ME
PE	MI	MI	MI	ME	ME
ME	MI	MI	ME	ME	ME
GR	ME	ME	EL	EL	EL
MG	ME	ME	EL	EL	EL

Modelo de Mamdani

Exemplo

- **Implicação:**

  - Levando-se em conta os seguintes valores de entrada:

    v= 155 km/h e m = 1,5 ton

  - É possível verificar que as seguintes regras foram ativadas:

1ª - Se (velocidade é “muito alta”) E (massa é “média”) Então a pressão no freio é “média”

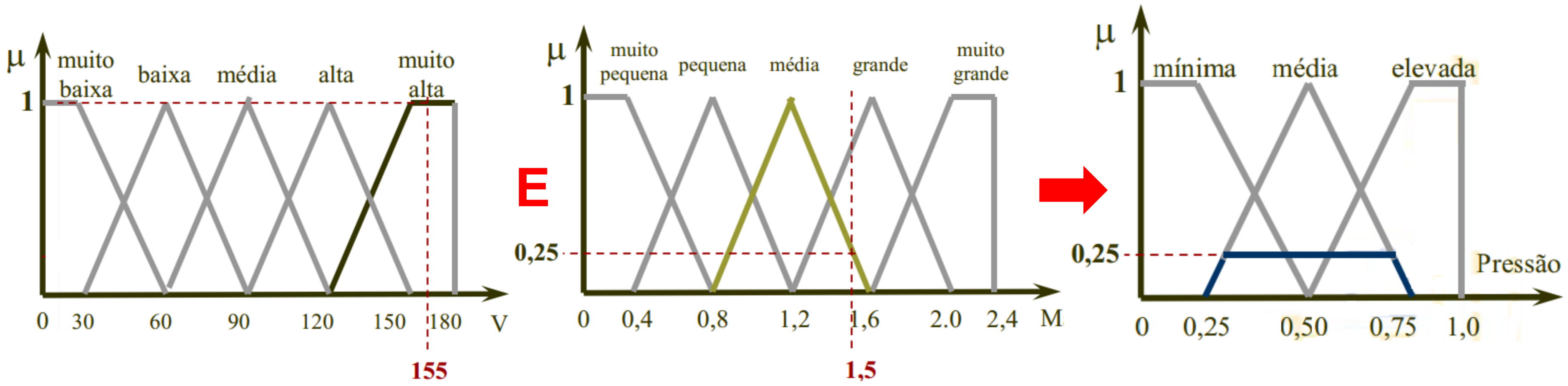
2ª - Se (velocidade é “muito alta”) E(massa é “grande”) Então a pressão no freio é “elevada”

MODELO DE MAMDANI

Exemplo

- **Implicação (PRIMEIRA Regra)**

Conectivo **E (AND)** => Mínimo
Implicação **ENTÃO** => Mamdani (Operador "Mínimo")



Se (velocidade é "**muito alta**") **E** (massa é "**média**") **Então** pressão é "**média**")

$\mu_{\text{MUITO ALTA}} = 1$

$\mu_{\text{MÉDIA}} = 0{,}25$

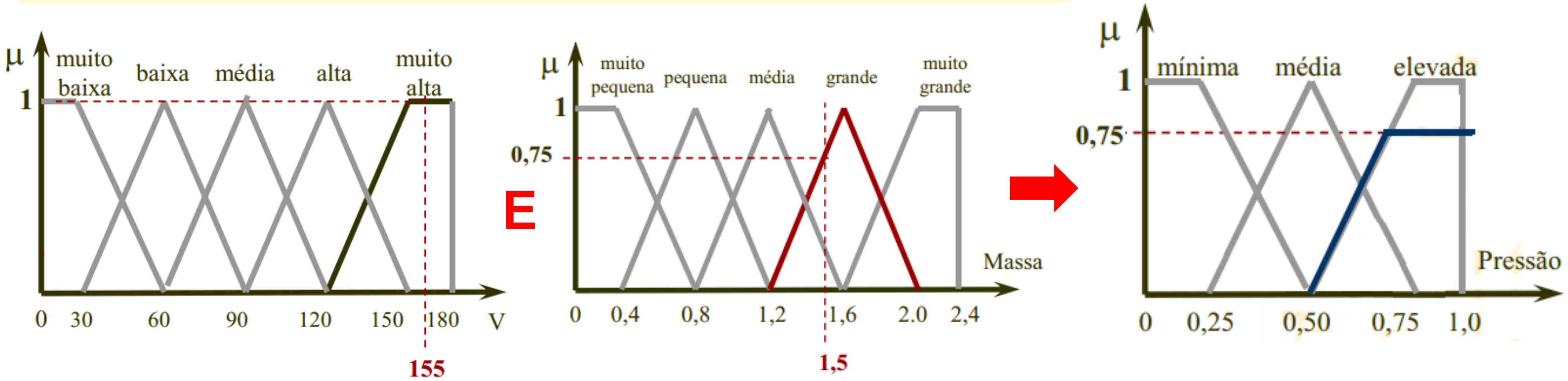
$\mu_{(\text{MUITO ALTA} \cap \text{MÉDIA})} =$
Mín (1; 0,25) = 0,25

Modelo de Mamdani

Exemplo

◎ **Implicação (SEGUNDA Regra)**

Conectivo **E (AND)** => Mínimo
Implicação **ENTÃO** => Mamdani (Operador "Mínimo")



Se (velocidade é "**muito alta**") **E** (massa é "**grande**") **Então** pressão é "**elevada**")

$\mu_{\text{MUITO ALTA}} = 1$

$\mu_{\text{GRANDE}} = 0,75$

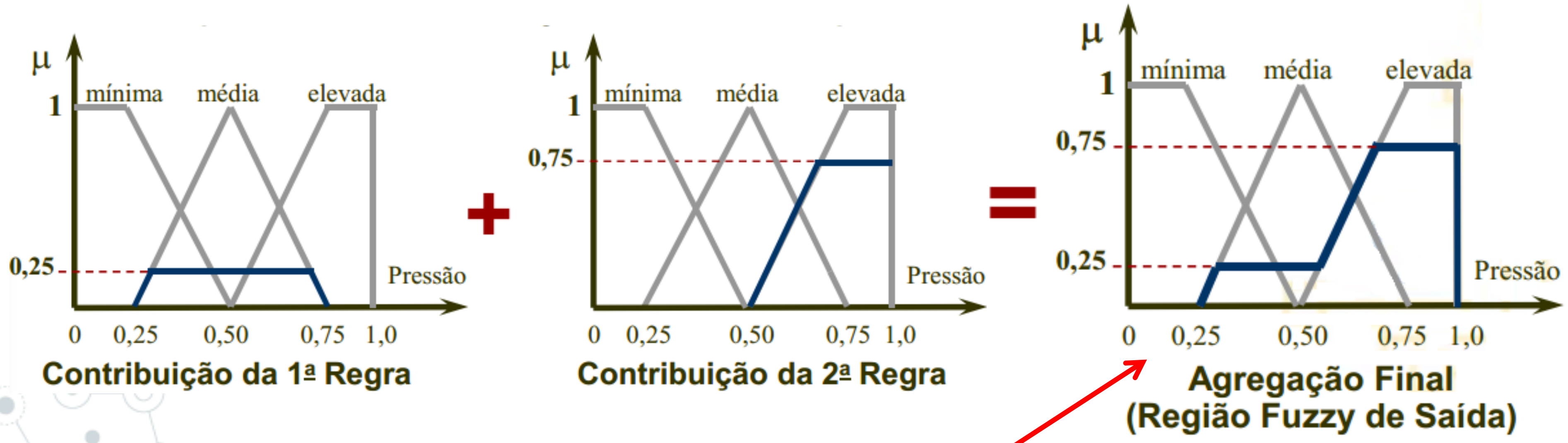
$\mu_{(\text{MUITO ALTA} \cap \text{GRANDE})} =$

Mín (1; 0,75) = 0,75

Modelo de Mamdani

Exemplo

- **Agregação**
  - Sua função é agregar (combinar) as contribuições das regras ativadas.
  - Operador de Agregação → **Máximo** (entre as curvas que delimitam as regiões de contribuição de cada regra ativada)



$\mu_{(FINAL)}$ = **MÁX (0,25; 0,75)**

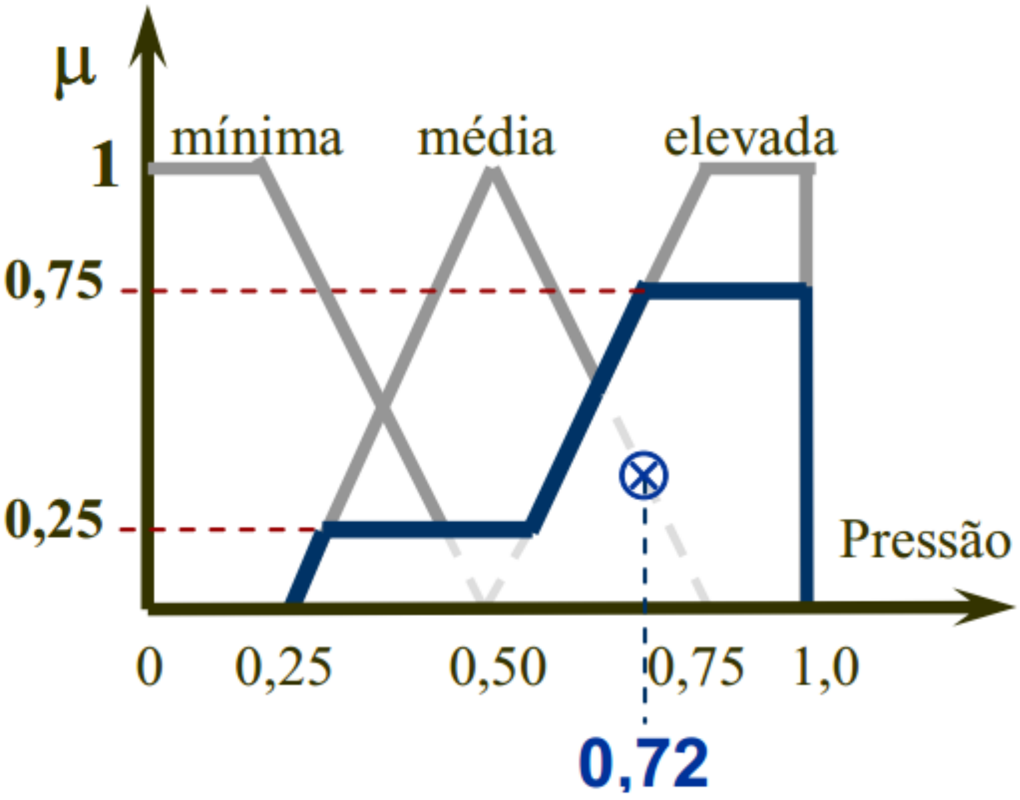
Modelo de Mamdani

Exemplo

- **Defuzzificação → Centróide**

(Aproximação do Centróide)	
x	u(x)
0,25	0,00
0,30	0,25
0,55	0,25
0,65	0,75
1,00	0,75

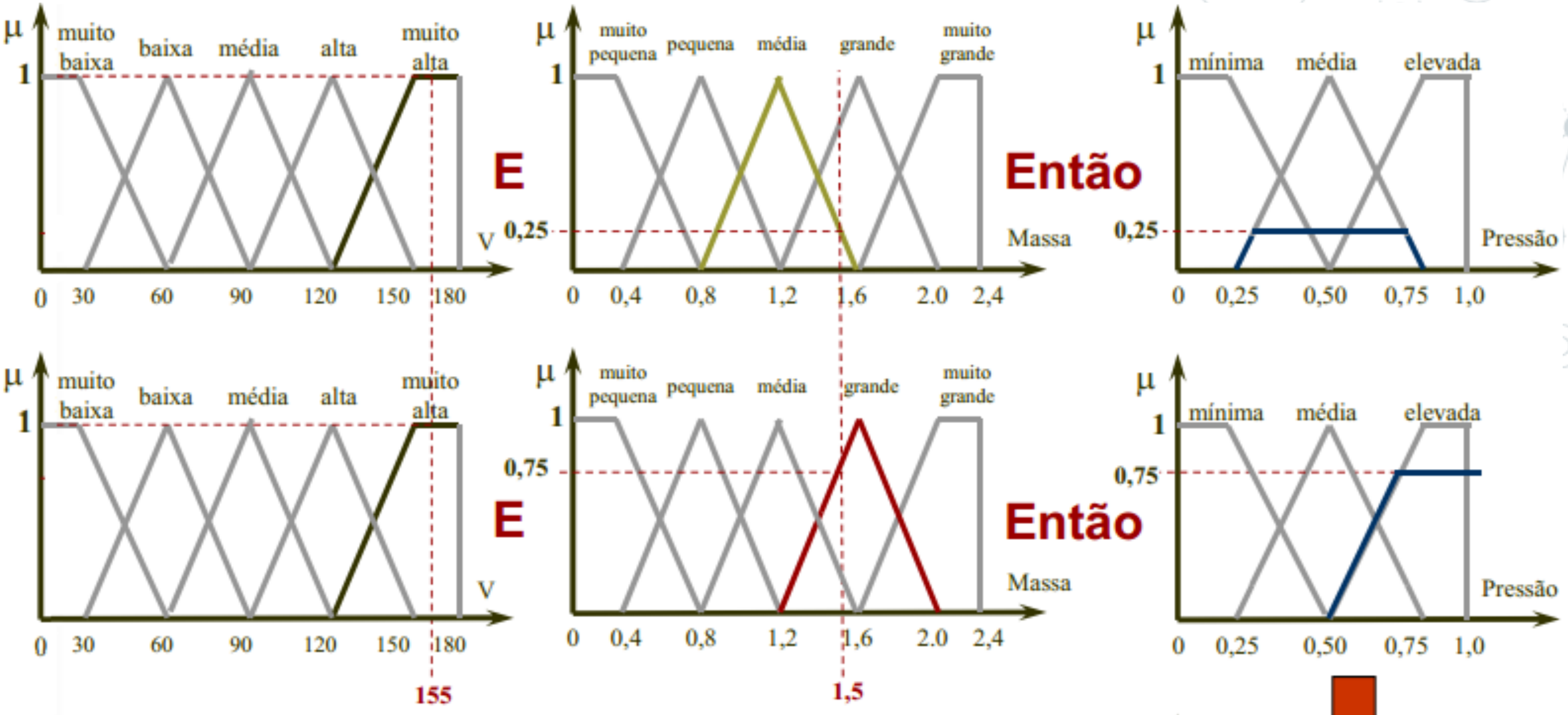
Σu(x)*x	1,45
Σu(x)	2,00
Centróide	0,73



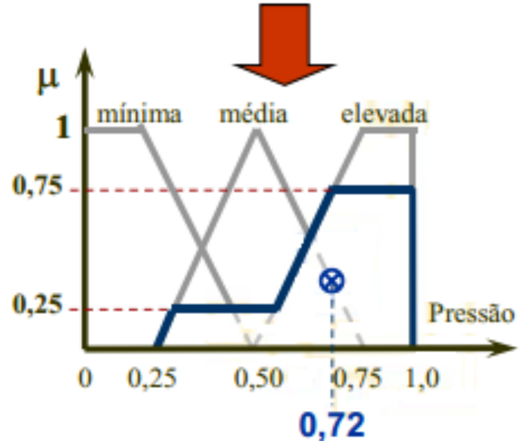
Modelo de Mamdani

Exemplo

- **Resumo:**



Conectivo → E (Mínimo), OU (Máximo)
Implicação → Mamdani
Agregação → Máximo
Defuzzificação → Centróide



Modelo de Takagi-Sugeno

- No modelo de Takagi-Sugeno (TS), o consequente de cada regra é função das variáveis de entrada;
- A saída final de todas as regras é determinada pela média ponderada das saídas geradas por cada um das regras.
- Os coeficientes de ponderação são definidos pelos graus de ativação das respectivas regras.
- Uma regra típica de um modelo Sugeno é da seguinte forma: **SE Erro=x e a Derivada_do_Erro=y então Torque é τ_i = a.x+b.y+c** → Onde τ_i é o valor de saída de cada um das regras.

Obrigada pela Atenção!

Dúvidas?

victoria.souto@Inatel.br