Inatel

C209 – Computação Gráfica e Multimídia
EC212 – Computação Gráfica

Transformações Geométricas
Parte 2/3

Marcelo Vinícius Cysneiros Aragão

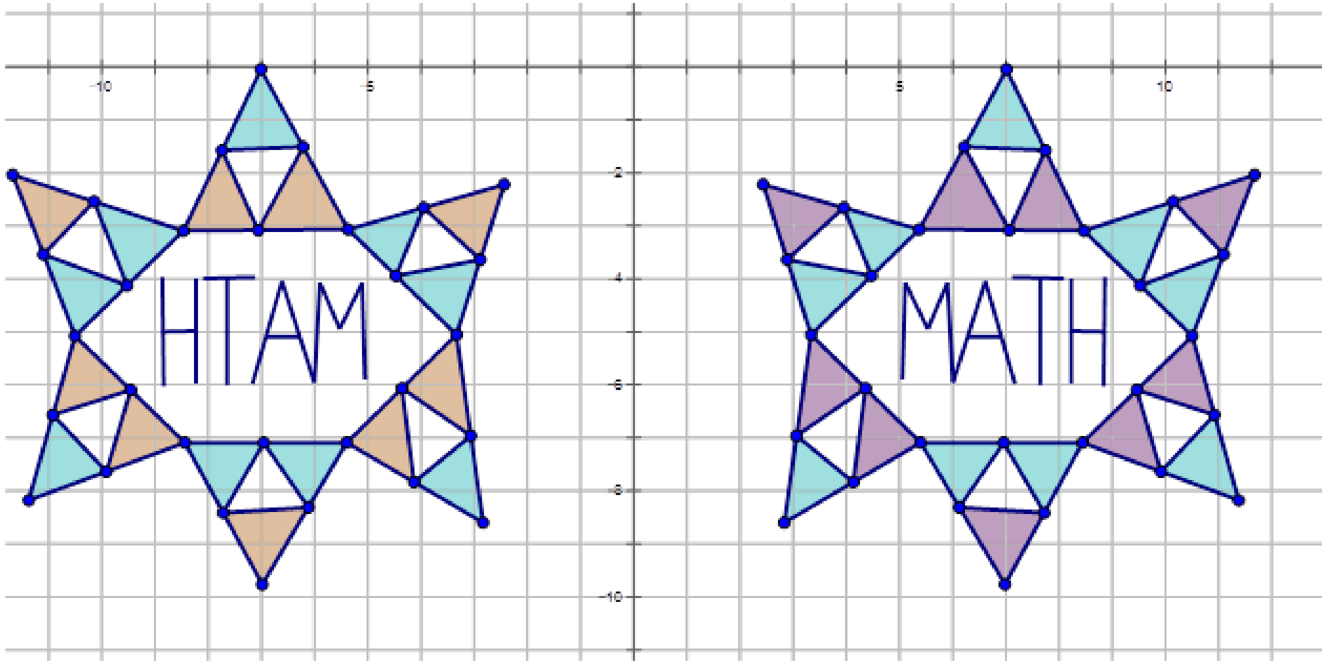
marcelovca90@inatel.br

Transformações em Pontos e Objetos

- A habilidade de representar um objeto em várias posições no espaço é fundamental para compreender sua forma.
- A possibilidade de submetê-lo a diversas transformações é importante em diversas aplicações da computação gráfica.
- As operações lineares de objetos são chamadas operações ou transformações de corpos rígidos.

Transformações em Pontos e Objetos

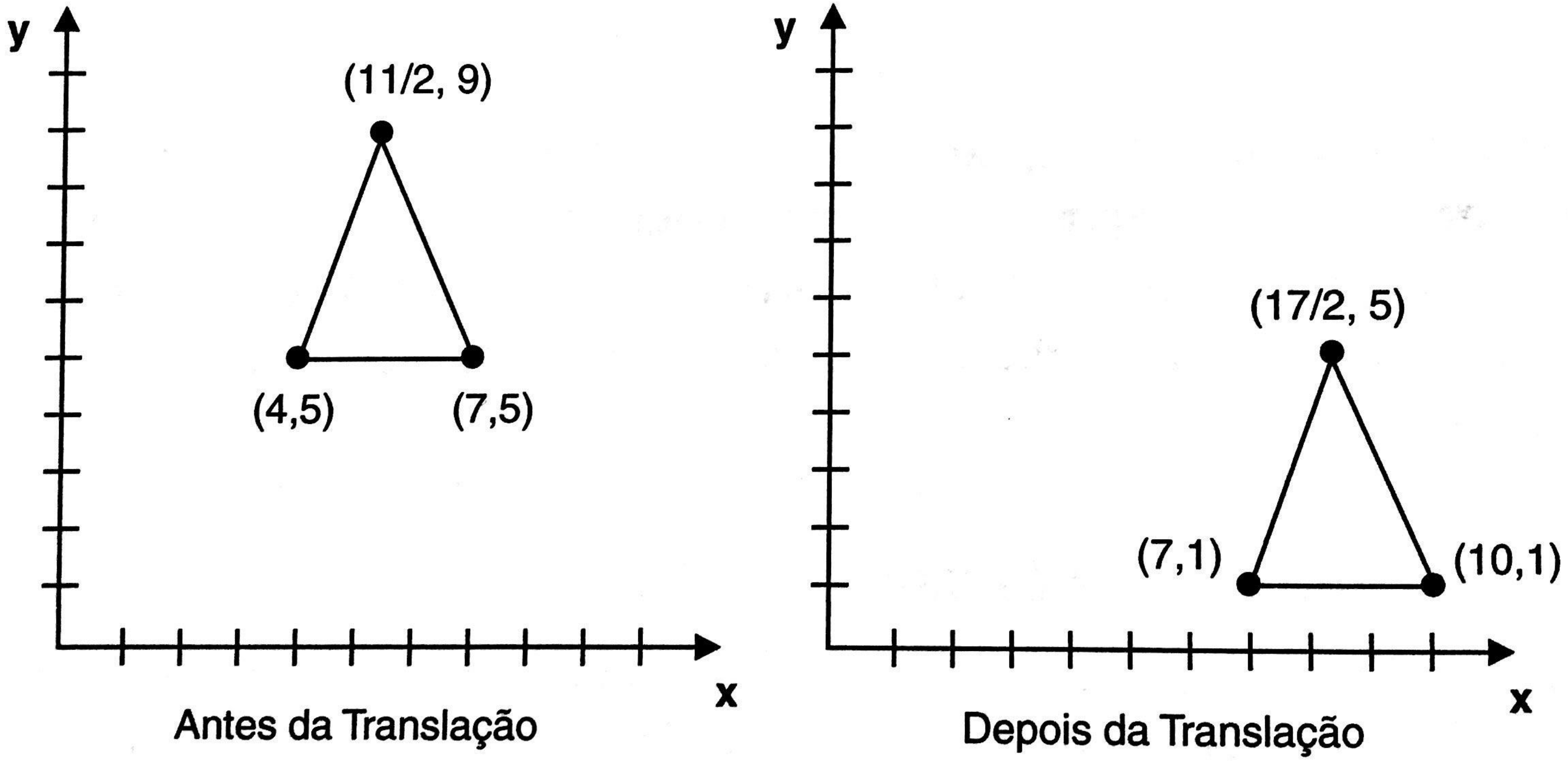
- Translação
- Escala
- Reflexão
- Cisalhamento
- Rotação



Translação

- Transladar significa movimentar o objeto.
- Transladamos um objeto transladando todos os seus pontos.
- É possível efetuar a translação de pontos no plano (x,y) adicionando quantidades às suas coordenadas.
- Assim, cada ponto em (x,y) pode ser movido por Tx unidades em relação ao eixo x, e por Ty unidades em relação ao eixo y.

Translação



Translação de um triângulo de 3 unidades na horizontal e -4 na vertical

Translação 2D

Translação 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

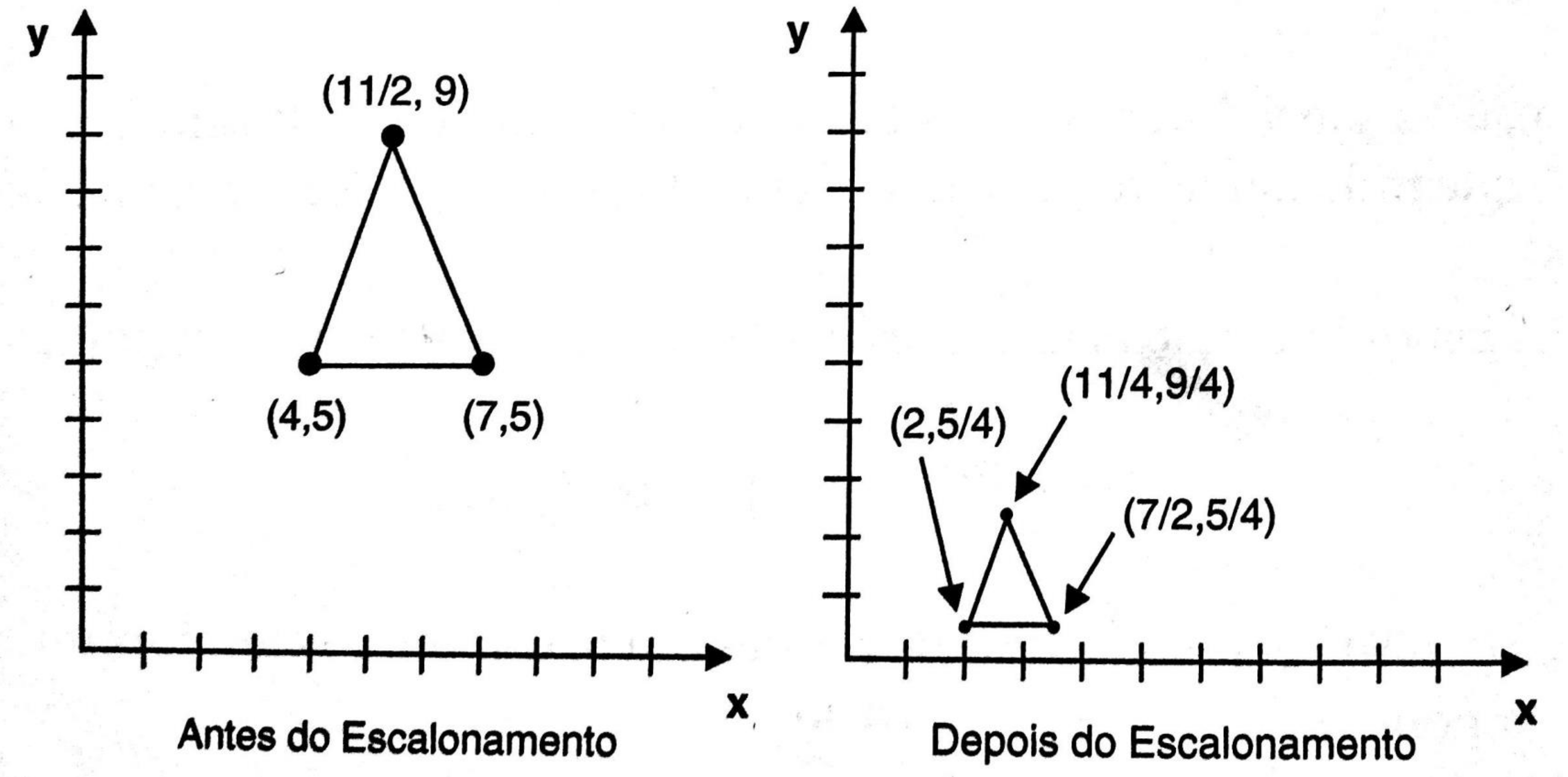
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & 0 & Ty \\ 0 & 0 & 1 & Tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- P(x,y) (2D) e P(x,y,z) (3D) representa as coordenadas do ponto antes da transformação
- P(x’,y’) (2D) e P(x’,y’,z) (3D) representa as coordenadas do ponto depois da transformação
- Tx, Ty (2D) e Tx, Ty, Tz (3D) representam o **deslocamento** em cada eixo

Escala

- Escalonar significa mudar as dimensões de escala.
- Para fazer com que uma imagem definida por um conjunto de pontos mude de tamanho, deve-se multiplicar os valores de suas coordenadas por um fator de escala.
- Estes fatores são normalmente representados por Sx, Sy e Sz, quando se referem à escala nos eixos x, y e z, respectivamente.

Escala



Uma figura antes e depois de uma mudança de escala genérica, de ½ na horizontal e ¼ na vertical

Escala 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escala 3D

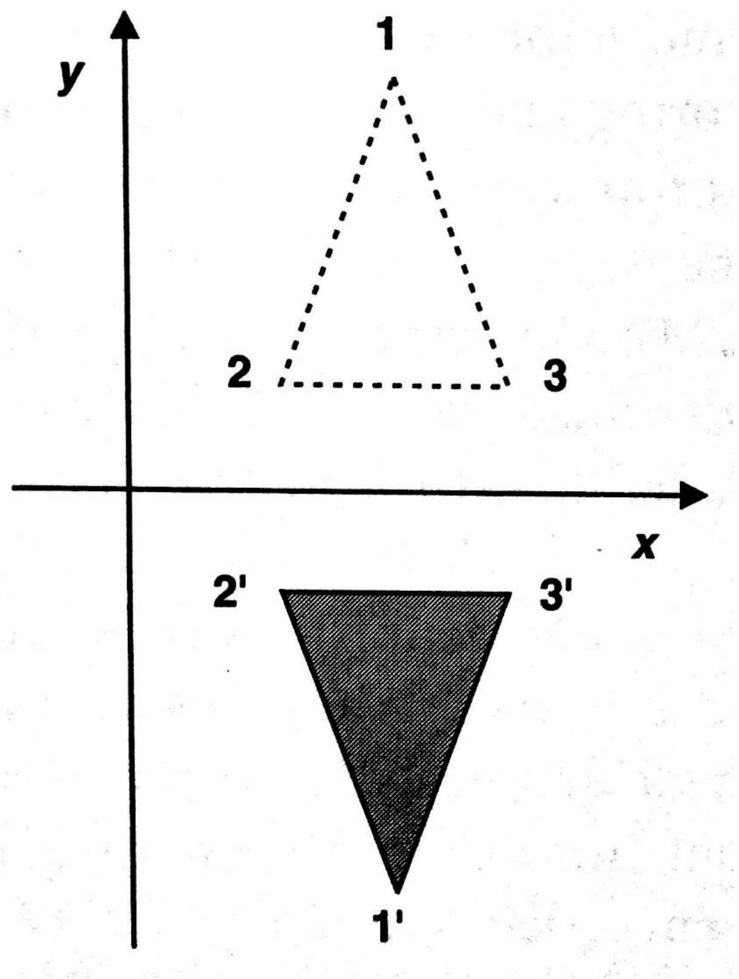
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- P(x,y) (2D) e P(x,y,z) (3D) representa as coordenadas do ponto antes da transformação
- P(x’,y’) (2D) e P(x’,y’,z) (3D) representa as coordenadas do ponto depois da transformação
- Sx, Sy (2D) e Sx, Sy, Sz (3D) representam o **fator de escala** em cada eixo

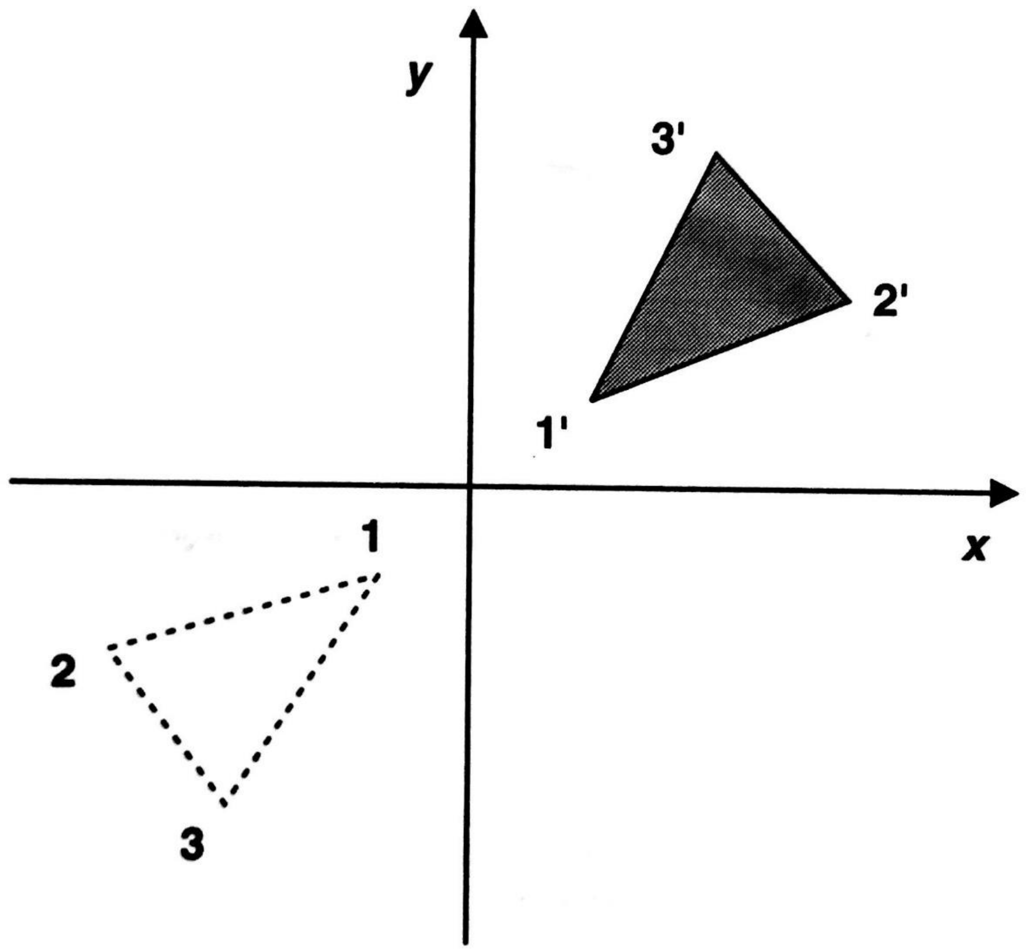
Reflexão

- A transformação de reflexão em torno de um eixo, ou espelhamento (*flip*), aplicada a um objeto, produz um novo objeto que é como se o objeto anterior fosse visto reproduzido por um espelho.
  - No caso de uma reflexão 2D, o espelho pode ser considerado sobre o eixo vertical ou horizontal.
  - No caso de objetos 3D, a reflexão pode ser em torno de qualquer um dos três planos.

Reflexão em y



Reflexão em xy



Reflexão 2D

Reflexão 3D

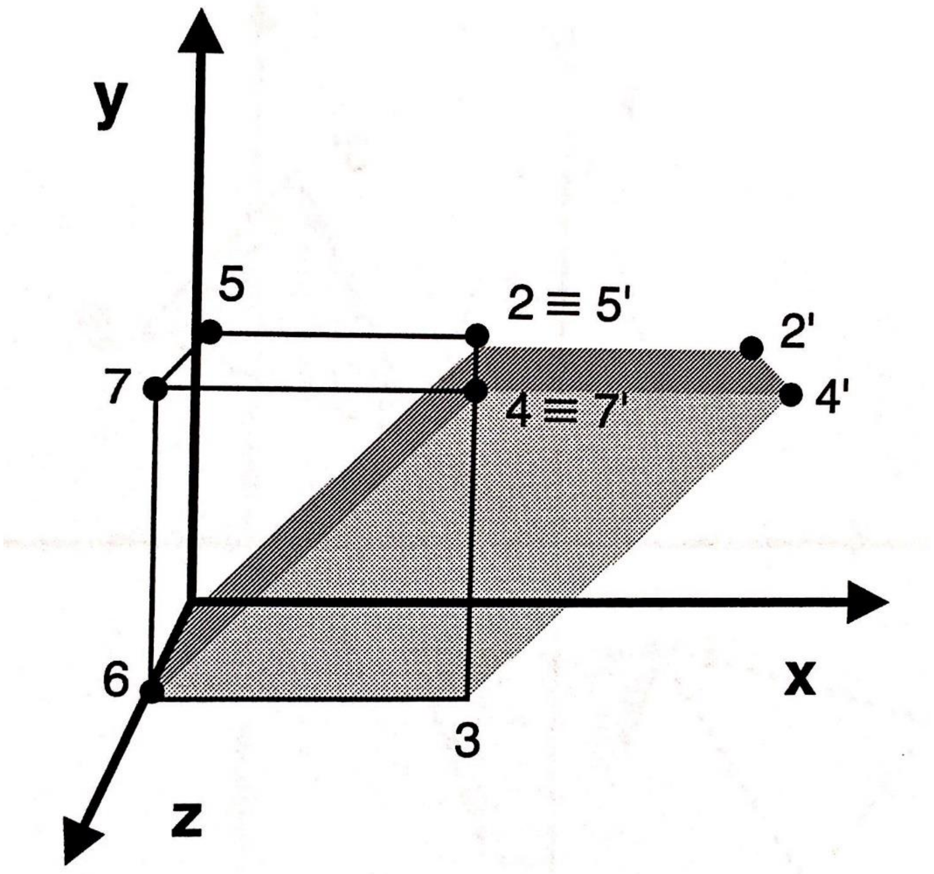
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- P(x,y) (2D) e P(x,y,z) (3D) representa as coordenadas do ponto antes da transformação
- P(x’,y’) (2D) e P(x’,y’,z) (3D) representa as coordenadas do ponto depois da transformação
- Os valores -1 indicam **qual(s) eixo(s) sofrerá(ão) reflexão**

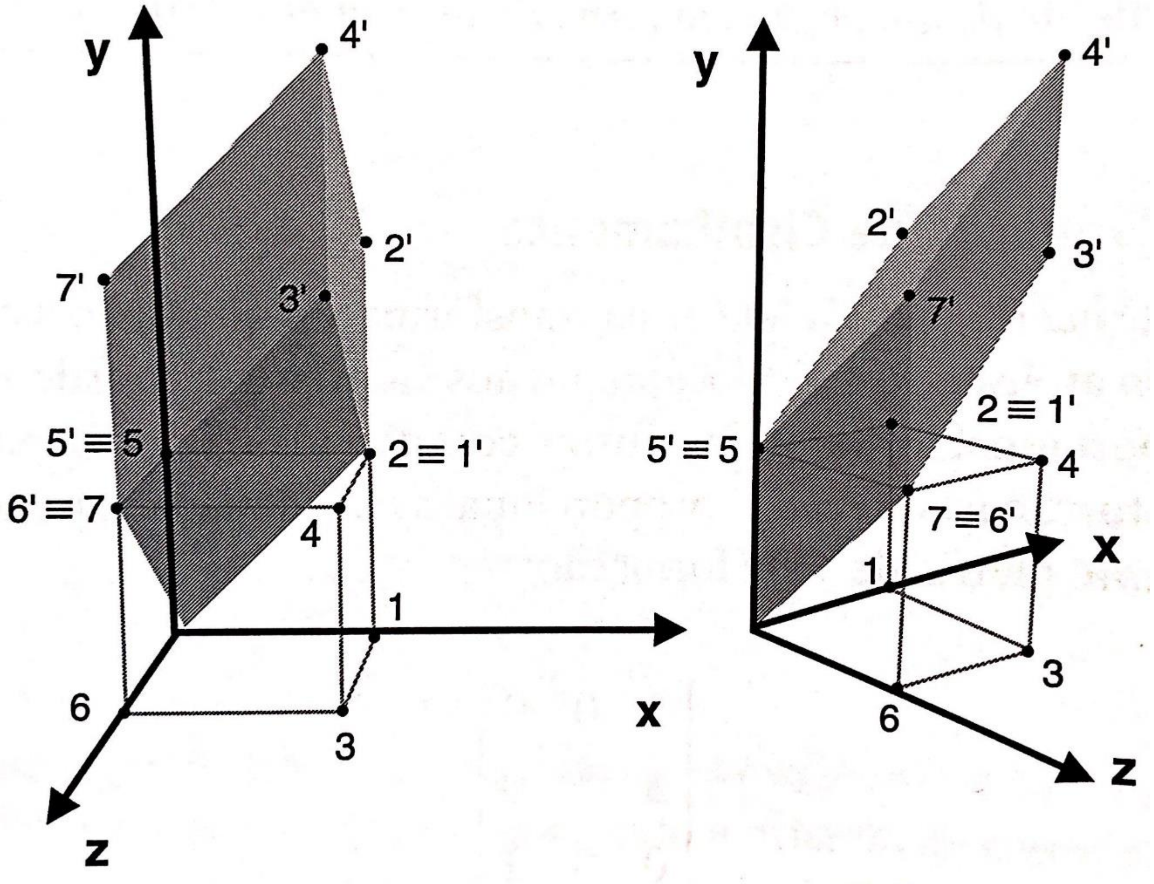
Cisalhamento

- Cisalhamento (*shearing* ou *skew*) é uma transformação que distorce o formato de um objeto.
- Nela aplica-se um deslocamento aos valores das coordenadas x, y ou z do objeto proporcional ao valor das outras coordenadas de cada ponto transformado.



Cisalhamento

- Qualquer número real pode ser usado como parâmetro, assim como é possível fazer a direção em qualquer direção.



Cisalhamento 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & S & 0 \\ S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

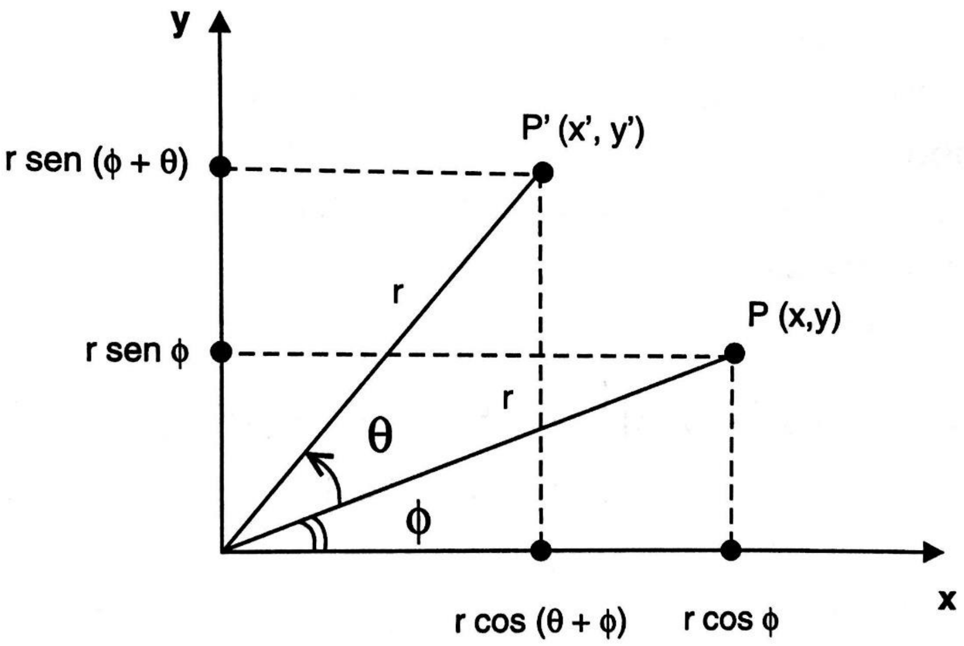
Cisalhamento 3D

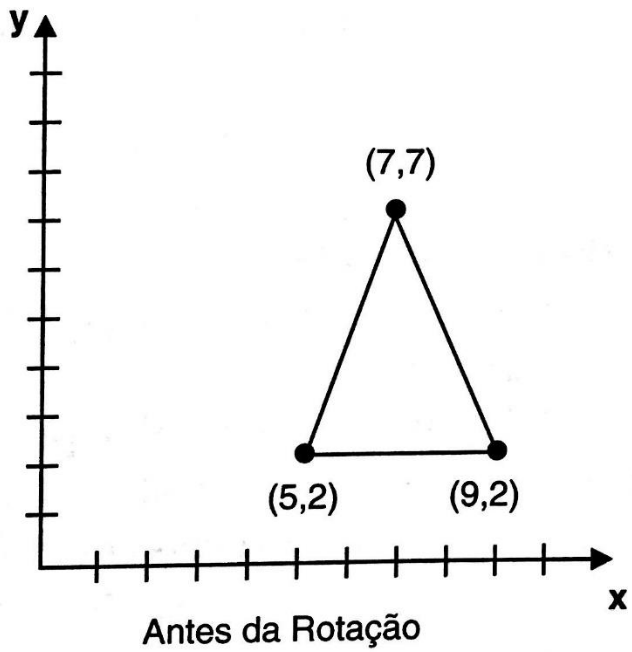
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & S & S & 0 \\ S & 1 & S & 0 \\ S & S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

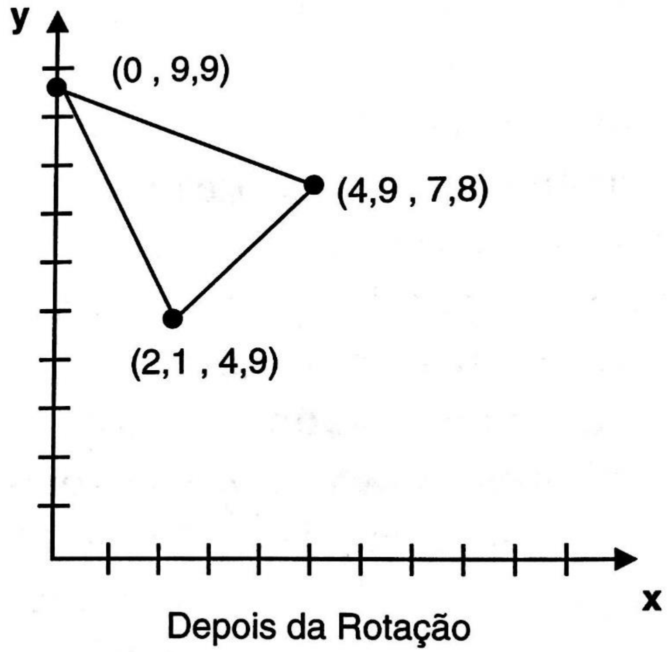
- P(x,y) (2D) e P(x,y,z) (3D) representa as coordenadas do ponto antes da transformação
- P(x’,y’) (2D) e P(x’,y’,z) (3D) representa as coordenadas do ponto depois da transformação
- Os valores S indicam **distorção na direção [coluna] proporcional a coordenada [linha]**

Rotação

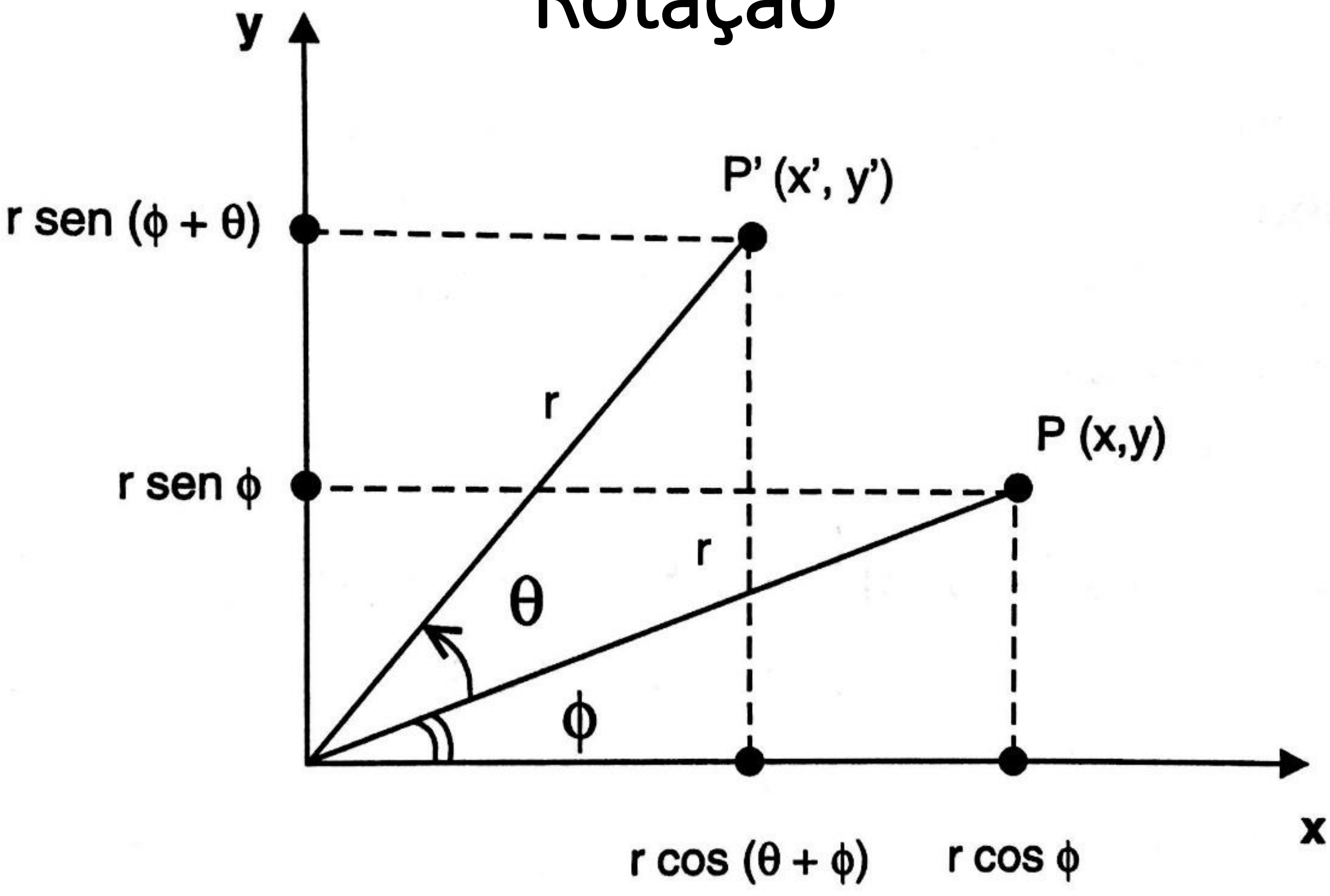
- Rotacionar significa girar.







Rotação



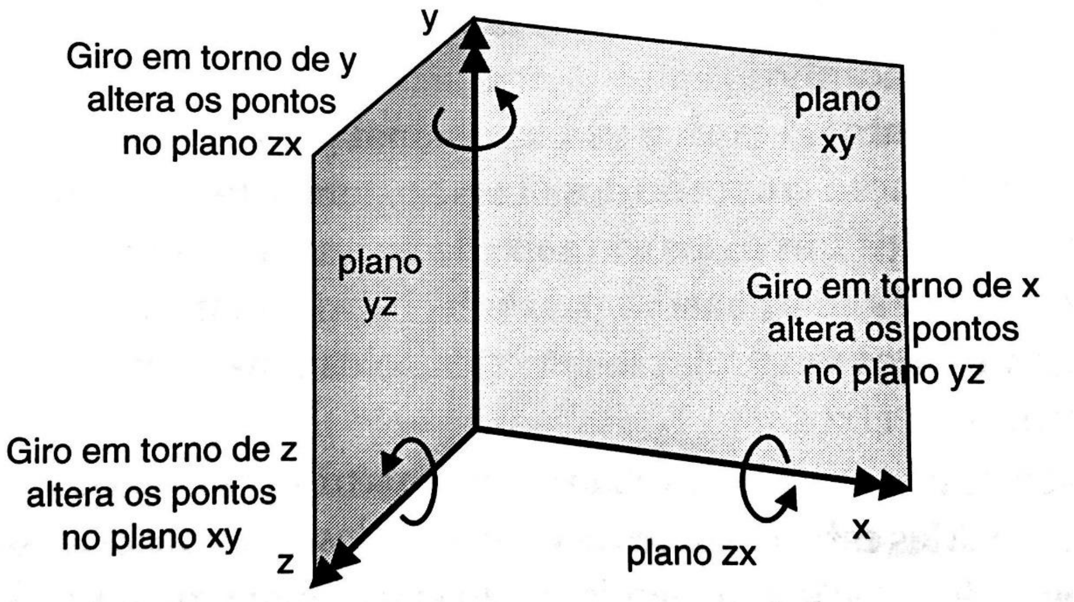
Rotação 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- P(x,y) representa as coordenadas do ponto antes da transformação
- P(x',y') representa as coordenadas do ponto depois da transformação
- θ representa o **ângulo de rotação**

Rotação 3D

- No eixo x: $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$
- No eixo y: $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$
- No eixo z: $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

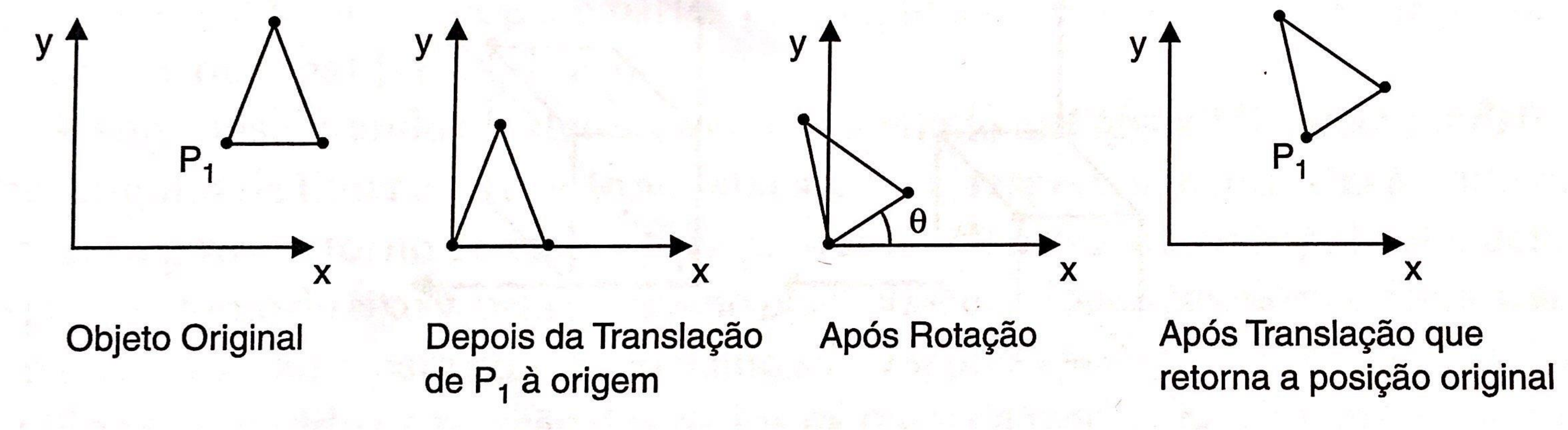


- P(x,y,z) representa as coordenadas do ponto antes da transformação
- P(x’,y’,z’) representa as coordenadas do ponto depois da transformação
- θ representa o **ângulo de rotação**

Rotação em torno de um ponto

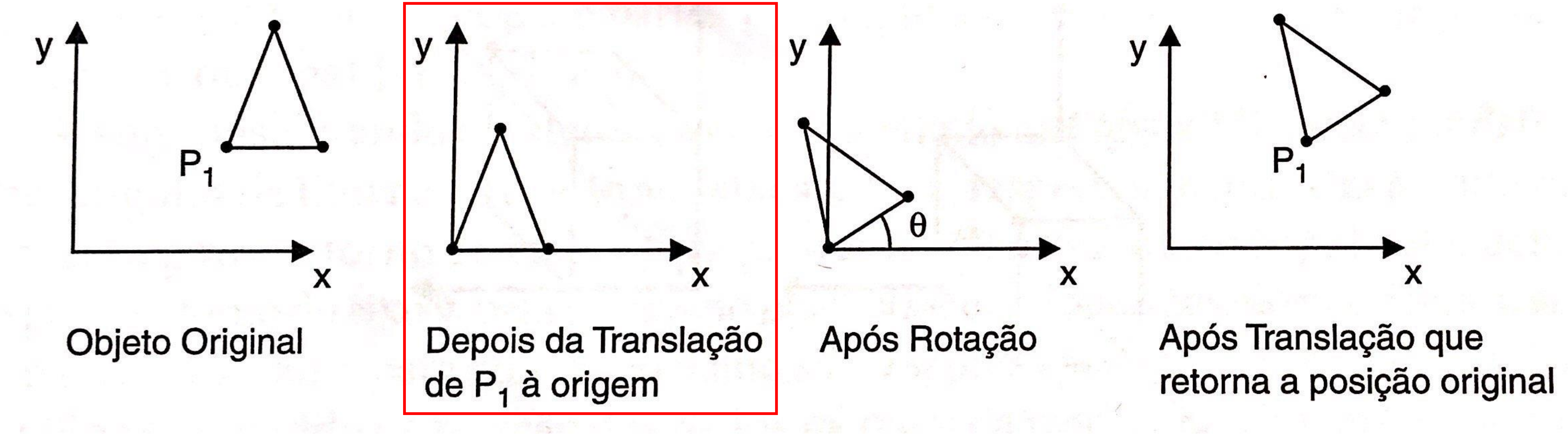
- Para alterar a orientação de um objeto em torno de um certo ponto, realizando uma combinação de rotação com a translação, é necessário:
  - Realizar uma translação para localizar esse ponto na origem do sistema;
  - Aplicar a rotação desejada;
  - Realizar uma translação inversa para retornar o ponto à posição original.

Rotação em torno de um ponto (2D)



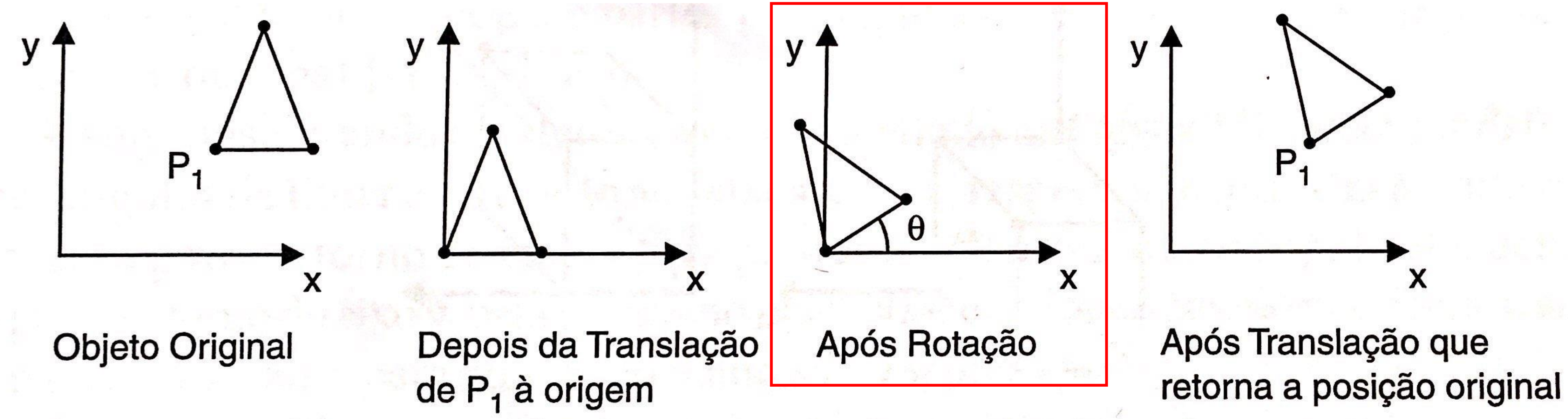
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & +Tx \\ 0 & 1 & +Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Tx \\ 0 & 1 & -Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de um ponto (2D)



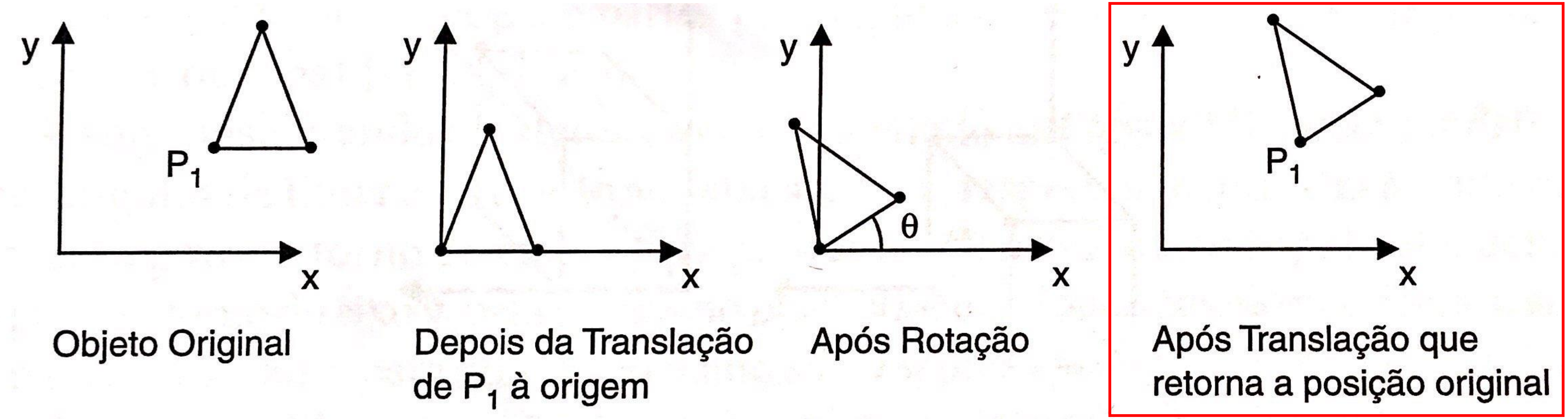
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & +Tx \\ 0 & 1 & +Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -Tx \\ 0 & 1 & -Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de um ponto (2D)



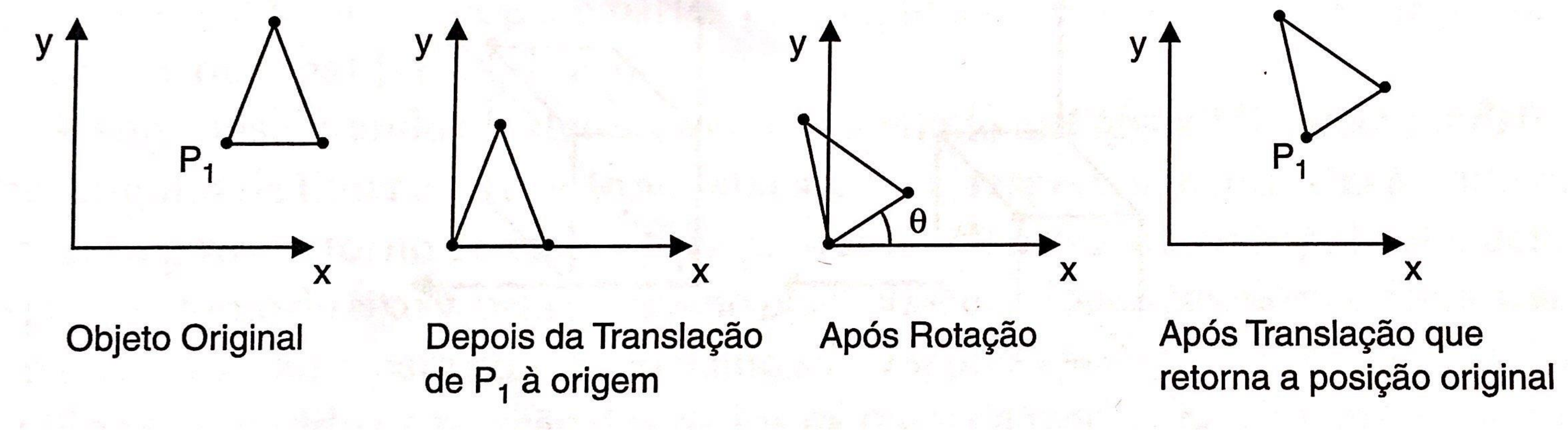
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & +Tx \\ 0 & 1 & +Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \boxed{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Tx \\ 0 & 1 & -Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de um ponto (2D)



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & +Tx \\ 0 & 1 & +Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \times \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Tx \\ 0 & 1 & -Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de um ponto (3D)

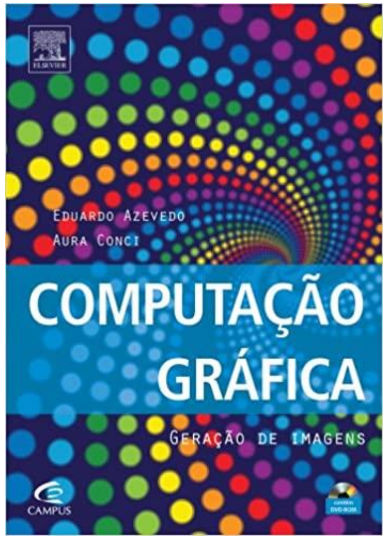


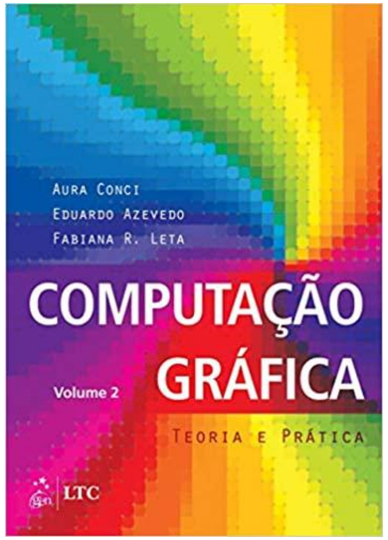
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & +Tx \\ 0 & 1 & 0 & +Ty \\ 0 & 0 & 1 & +Tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -Tx \\ 0 & 1 & 0 & -Ty \\ 0 & 0 & 1 & -Tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2D: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & +Tx \\ 0 & 1 & +Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Tx \\ 0 & 1 & -Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3D: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & +Tx \\ 0 & 1 & 0 & +Ty \\ 0 & 0 & 1 & +Tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -Tx \\ 0 & 1 & 0 & -Ty \\ 0 & 0 & 1 & -Tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Referências & Links Interessantes





- AZEVEDO, Eduardo; CONCI, Aura, Computação gráfica volume 1: geração de imagens. Rio de Janeiro, RJ. Editora Campus, 2003, 353 p. ISBN 85-352-1252-3.

- AZEVEDO, Eduardo; CONCI, Aura; LETA, Fabiana R. Computação gráfica volume 2: teoria e prática. Rio de Janeiro, RJ: Editora Elsevier, 2007, 384 p. ISBN 85-352-2329-0.

- PAULA FILHO, Wilson de Pádua, Multimídia: Conceitos e aplicações. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2000, 321 p. ISBN 978-85-216-1222-3.