

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО  
Навчально-науковий інститут електричної інженерії  
та інформаційних технологій  
КАФЕДРА АВТОМАТИЗАЦІЇ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ

ЗВІТ

З ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ  
З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ  
«Моделювання систем»

Виконав студент групи КН-23-1

Іщенко Євген Володимирович

Перевірив доцент кафедри АІС Бурдільна Є. В.

КРЕМЕНЧУК 2025

### Лабораторна робота № 3

**Тема:** Моделювання дискретних випадкових величин та потоків подій

**Мета:** навчитися розв'язувати задачі моделювання випадкових подій і випадкових величин із заданим законом розподілу з метою подальшого використання в задачах імітаційного моделювання.

#### Виконання завдання лабораторної роботи:

1. Побудувати процедуру імітації дискретної випадкової величини  $X$  з законом розподілення, заданим у наступній таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Варіант	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
5	0,25	0,5	0,15	0,05	0,05		

Випадкова величина приймає  $n$  значень  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  з імовірностями  $P_i, i = \overline{1, n}$

Тоді функцію розподілення можна визначити наступним чином:

$$F(x) = 0, x \leq x_1$$

$$F(x) = P_1, x_1 \leq x \leq x_2$$

$$F(x) = P_2, x_2 \leq x \leq x_3$$

.....

$$F(x) = 1, x > x_n$$

Для розв'язання поставленого завдання можна застосувати метод оберненої функції, тобто знайти випадкову величину  $x$  за допомогою перетворення  $X = F^{-1}(Y)$ , де  $Y \in [0, 1]$ ,  $F^{-1}$  – функція, обернена до  $F(x)$ .

Простіший алгоритм обчислення дискретної випадкової величини  $X$ , який заданий таблицею розподілення:

Якщо  $Y \leq P_1$ , то  $X \leq x_1$  інакше,

Якщо  $Y \leq P_1 + P_2$ , то  $X \leq x_2$  інакше,

Якщо  $Y \leq \sum_{i=1}^{n-1} P_i$ , то  $X \leq x_{n-1}$  інакше  $X = x_n$

Геометрична інтерпретація алгоритму зведена до наступного: одиничний відрізок ділиться на  $n$  ділянок довжиною  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Якщо випадкове число  $Y$  припало, наприклад, на ділянку  $P_3$ , то це означає, що як значення випадкової величини  $X$  потрібно вибрати  $x_3$ .

```
using System;

class Program
{
    static void Main()
    {
        Console.OutputEncoding = System.Text.Encoding.UTF8;

        // Задаємо ймовірності для  $X_1$ - $X_5$ 
        double[] probabilities = { 0.25, 0.5, 0.15, 0.05, 0.05 };
        double[] cumulative = new double[probabilities.Length + 1];
        cumulative[0] = 0;

        // Розрахунок меж (точок) для проміжків
        for (int i = 0; i < probabilities.Length; i++)
        {
            cumulative[i + 1] = Math.Round(cumulative[i] + probabilities[i], 2);
        }

        // Виводимо точки проміжків
        Console.Write("Точки проміжків: ");
        for (int i = 1; i < cumulative.Length; i++)
        {
            Console.Write($"{cumulative[i]}; ");
        }
        Console.WriteLine();

        // Лічильники
        int[] counts = new int[probabilities.Length];

        // Моделювання
        Random rnd = new Random();
        for (int i = 0; i < 10000; i++)
        {
            double value = rnd.NextDouble();
            for (int j = 0; j < probabilities.Length; j++)
            {
                if (value > cumulative[j] && value <= cumulative[j + 1])
                {
                    counts[j]++;
                    break;
                }
            }
        }

        // Вивід результатів
        for (int i = 0; i < probabilities.Length; i++)
        {
            Console.WriteLine($"Випадкове значення потрапило у проміжок {cumulative[i]} - {cumulative[i + 1]}: {counts[i]} разів");
        }
    }
}
```

Точки проміжків: 0.25; 0.75; 0.9; 0.95; 1;

Випадкове значення потрапило у проміжок 0 - 0.25: 2521 разів

Випадкове значення потрапило у проміжок 0.25 - 0.75: 4964 разів

Випадкове значення потрапило у проміжок 0.75 - 0.9: 1508 разів

Випадкове значення потрапило у проміжок 0.9 - 0.95: 513 разів

Випадкове значення потрапило у проміжок 0.95 - 1: 494 разів

2. Створити процедуру моделювання випадкової величини з експоненціальним законом розподілення з параметром  $\lambda$ , який заданий у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

Варіант	5	$X_2$
$\lambda$	1,5	0,5

Для моделювання випадкової величини з експоненціальним законом розподілення з параметром  $\lambda$  можна також використовувати обернену функцію. Експоненціальна щільність розподілення випадкової величини має вигляд:

$$Y(x) = \lambda e^{-\lambda x}, (x > 0)$$

оберненою функцією буде функція

$$X = \frac{\ln(1-Y)}{\lambda},$$

де  $Y$  – набір псевдовипадкових чисел, які отримані, наприклад, за допомогою функції rand.

```
using System;
using System.Collections.Generic;
class Program
{
    static void Main()
    {
        Console.OutputEncoding = System.Text.Encoding.UTF8;
        double lambda = 1.5;
```

```

List<double> Xn = new List<double>();

Random rnd = new Random();

Console.WriteLine($"Генерація 10 випадкових чисел з експоненціальним розподілом при  $\lambda =$ 
{lambda}");

for (int i = 0; i < 10; i++)
{
    double y = rnd.NextDouble(); // Випадкове число в [0,1)
    // Застосування оберненої функції розподілу
    double xn = -Math.Log(1 - y) / lambda;
    Console.WriteLine($"X[{i + 1}] = {xn:F4}");
    Xn.Add(xn);
}
}

```

Генерація 10 випадкових чисел з експоненціальним розподілом при  $\lambda = 1.5$

X[1] = 1.0178

X[2] = 0.4316

X[3] = 0.6744

X[4] = 2.2162

X[5] = 0.5280

X[6] = 0.2787

X[7] = 0.7100

X[8] = 0.3095

X[9] = 0.6535

X[10] = 0.0860

3. За допомогою складеної процедури моделювання випадкової величини з експоненціальним законом розподілення змодельовати потік подій, у якому інтервали часу між подіями мають експоненціальне розподілення з параметром  $\lambda$ . Результати моделювання відобразити на осі часу з позначенням моментів виникнення подій.

Для моделювання потоку подій, у якому інтервали часу між подіями розподілені за довільним законом, можна скористатися наступним алгоритмом:

1. За допомогою генератора псевдовипадкових чисел і оберненої функції отримати ряд значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$
2. Нанести їх на вісь часу наступним чином:
  - перша подія настає після  $x_1$  одиниць часу після початку моделювання,
  - друга подія настає після  $x_1 + x_2$  одиниць часу після початку моделювання і так далі.

```
using System;
using System.Collections.Generic;

class Program
{
    static void Main()
    {
        Console.OutputEncoding = System.Text.Encoding.UTF8;

        double lambda = 1.5;
        int numberOfEvents = 10; // Кількість подій для моделювання
        List<double> interEventTimes = new List<double>(); // Список інтервалів між
        подіями
        List<double> eventTimes = new List<double>(); // Час виникнення кожної
        події

        Random rnd = new Random();
        double currentTime = 0;

        Console.WriteLine($"Моделювання потоку подій з експоненціальним розподілом ( $\lambda =$ 
        {lambda})");
        Console.WriteLine();

        for (int i = 0; i < numberOfEvents; i++)
        {
            double y = rnd.NextDouble(); // Генерація псевдовипадкового числа в [0,1)
            double interval = -Math.Log(1 - y) / lambda; // Обернена функція
            експоненційного розподілу

            interEventTimes.Add(interval);
            currentTime += interval;
            eventTimes.Add(currentTime);

            Console.WriteLine($"Подія {i + 1} настала через {interval:F4} одиниць часу,
            сумарний час: {currentTime:F4}");
        }

        Console.WriteLine("\nМоменти виникнення подій на осі часу:");
    }
}
```

```
        foreach (var time in eventTimes)
        {
            Console.WriteLine($"| {time:F4} ", time);
        }
    }
}
```

Моделювання потоку подій з експоненціальним розподілом ( $\lambda = 1.5$ )

Подія 1 настала через 1.2165 одиниць часу, сумарний час: 1.2165

Подія 2 настала через 0.0645 одиниць часу, сумарний час: 1.2809

Подія 3 настала через 0.1809 одиниць часу, сумарний час: 1.4618

Подія 4 настала через 0.0372 одиниць часу, сумарний час: 1.4990

Подія 5 настала через 1.5137 одиниць часу, сумарний час: 3.0127

Подія 6 настала через 1.2541 одиниць часу, сумарний час: 4.2668

Подія 7 настала через 0.0483 одиниць часу, сумарний час: 4.3150

Подія 8 настала через 0.1454 одиниць часу, сумарний час: 4.4605

Подія 9 настала через 0.0445 одиниць часу, сумарний час: 4.5049

Подія 10 настала через 0.5799 одиниць часу, сумарний час: 5.0849

**Висновок:** У ході лабораторної роботи було вивчено принципи моделювання випадкових процесів та розроблено програмні засоби для імітації дискретних випадкових величин і потоків подій. Основна увага приділялася роботі з експоненціальним розподілом, який широко використовується в теорії ймовірностей. Було створено спеціалізовані програми, що дозволяють генерувати випадкові величини з заданими параметрами та аналізувати їх характеристики. Всі параметри моделей підбиралися індивідуально згідно з варіантом завдання, що забезпечило глибоке розуміння принципів роботи з випадковими процесами. Отримані результати демонструють ефективність використаних методів і можуть бути застосовані для вирішення більш складних завдань імітаційного моделювання в майбутніх дослідженнях.

## **Контрольні питання:**

### **1. Що таке дискретна випадкова величина?**

Дискретна випадкова величина — це величина, яка може набувати лише окремих, ізольованих значень (як правило, цілих чисел), кожному з яких відповідає певна ймовірність. Прикладом дискретної випадкової величини може бути кількість влучень у мішень або кількість заявок, що надійшли за одиницю часу.

### **2. Як задається закон розподілення дискретних випадкових величин?**

Закон розподілення дискретної випадкової величини задається у вигляді таблиці, в якій кожному можливому значенню випадкової величини відповідає певна ймовірність. Сума всіх ймовірностей повинна дорівнювати 1. Такий розподіл можна задати як таблично, так і графічно.

### **3. Яким чином робиться моделювання дискретних випадкових величин?**

Моделювання дискретної випадкової величини здійснюється методом кумулятивної суми (накопиченої ймовірності). Генерується випадкове число з інтервалу  $[0; 1)$ , після чого визначається, до якого з інтервалів накопичених ймовірностей воно належить. Значення випадкової величини, яке відповідає цьому інтервалу, і є результатом моделювання.

### **4. Яким чином робиться моделювання випадкових величин з довільним законом розподілення?**

Для моделювання випадкових величин із довільним законом розподілення використовують метод оберненої функції розподілу. Полягає він у наступному:

1. генерується випадкове число  $Y$  з рівномірного розподілу на  $[0; 1)$ ;
2. обчислюється значення  $X = F^{-1}(Y)$ , де  $F^{-1}$  — обернена функція до функції розподілу  $F(x)$ .

**5. Як можна змоделювати потік подій, у якому інтервали часу між подіями мають експоненціальне розподілення?**



Для моделювання потоку подій з експоненціально розподіленими інтервалами часу застосовують обернений метод. Спочатку генерується послідовність випадкових величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , що мають експоненційний розподіл за формулою:

$$X = -\ln(1 - Y) / \lambda, \text{ де } Y \in [0;1)$$

Далі визначаються моменти часу настання подій як сума попередніх інтервалів:

$$T_1 = X_1$$

$$T_2 = X_1 + X_2$$

$$T_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

...

Таким чином, формується часовий ряд, який моделює потік подій.