RETTA

Equazione parametrica retta

$$Dopo\ aver\ fissato\ un\ punto\ di\ riferimento\ ortonormale\ prendiamo\ un\ punto\ P_0(x_o, y_0, z_0)$$
$$appartenente\ ad\ una\ retta\ r\ e\ \mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}\ vettore\ con\ direzione\ parallela\ alla\ retta$$

$$[NOTA:\ per\ trovare\ un\ vettore\ parallelo\ alla\ retta\ devo\ crearlo\ utilizzando\ i\ coeff\ direttori,\ i\ parametri\ della\ t\ nell'equazione\ parametrica]$$

$$Prendo\ un\ punto\ generico\ P(x, y, z)$$

$$Il\ vettore\ che\ va\ da\ P_0\ a\ P\ e'\ P - P_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_o)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

$$Il\ punto\ P\ appartiene\ alla\ retta\ se\ il\ vettore\ \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$$

$$Riscrivo\ in\ cordinate\ ottenendo\ l'equazione:$$

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_o)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = tl\mathbf{i} + tm\mathbf{j} + tn\mathbf{k}$$

$$Facendo\ le\ eguaglianze\ per\ componente\ otteniamo\ l'equazione\ della\ retta\ in\ forma\ parametrica$$

$$\begin{aligned} x - x_o &= tl \\ y - y_o &= tm \\ z - z_o &= tn \end{aligned}$$

Equazione retta passante per due punti

$$Basta\ trovare\ il\ vettore$$

$$P_1 - P_2$$

$$e\ comporre\ il\ sistema$$

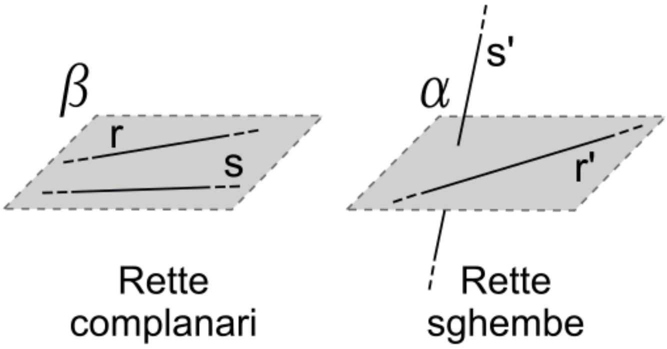
Es

$$P_0(-1, 0, 2),\ P_1(2, 3, 1)$$

$$P_0 - P_1 = (-3, -3,\ 1)$$

$$\begin{aligned} x - 2 &= -3t \\ y - 3 &= -3t \\ z - 1 &= t \end{aligned}$$

Posizione fra due rette



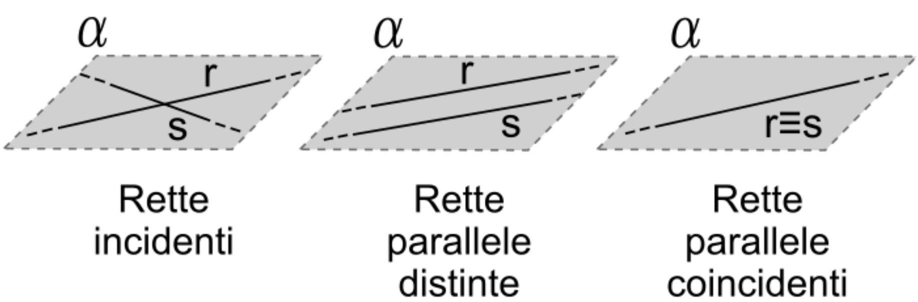
Posizioni tra rette nello spazio

Dopo questa distinzione possiamo introdurne una seconda che riguarda due rette che appartengono allo stesso piano. Nello specifico, due rette complanari possono essere:

- **incidenti** se si intersecano in uno e un solo punto;

- **parallele distinte** se non hanno alcun punto in comune;

- **parallele coincidenti** se coincidono punto per punto.



Posizioni tra rette complanari nello spazio.

Metodo per determinare posizione reciproca due rette

$1)\ Ricavare\ le\ direzioni\ delle\ rette\ (s,\ r)\ (coefficenti\ che\ moltiplicano\ le\ t\ nell'equazione\ parametrica)$

$2)\ Prendere\ due\ punti\ qualsiasi,\ uno\ appartenente\ alla\ prima\ retta\ (P_s)\ e\ uno\ alla\ seconda\ (P_r)$

$3)\ Studiamo\ il\ determinante\ della\ matrice$

$$A = \begin{pmatrix} x_r - x_s & y_r - y_s & z_r - z_s \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix}$$

$3a)\ Det\ \neq 0\ \rightarrow\ le\ rette\ sono\ sghembe\ (e\ non\ posso\ dire\ altro,\ mi\ fermo)$

$3b)\ Det\ =\ 0\ \rightarrow Complanari$

$Adesso\ analizzo\ il\ rango\ della\ matrice$

$$B = \begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix}$$

$Se\ il\ rango\ e'\ 2\ allora\ le\ rette\ sono\ incidenti$

$Se\ il\ rango\ e'\ 1\ le\ rette\ sono\ parallele$

$Da\ qua\ abbiamo\ due\ possibili\ casi:$

$Se\ il\ punto\ P_r\ \in\ s\ oppure\ P_s\ \in\ r\ le\ rette\ sono\ parallele\ COINCIDENTI$
$altrimenti\ sono\ parallele\ DISTINTE$

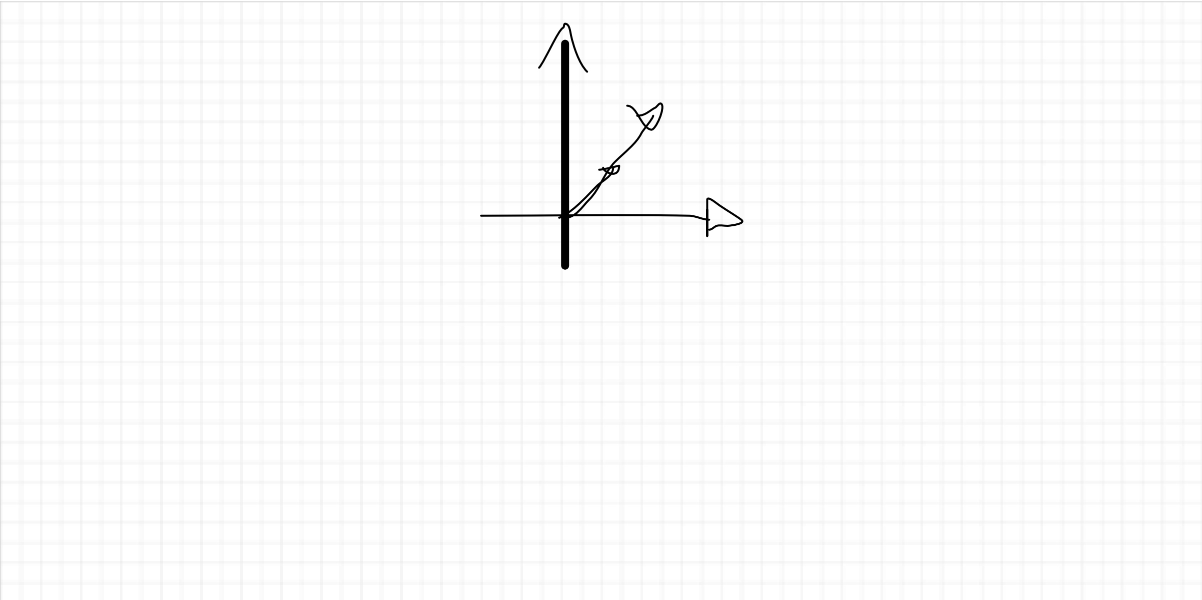
$[Per\ capire\ se\ un\ punto\ appartiene\ ad\ una\ retta\ devo\ sostituire\ le\ sue\ COORDINATE$
$nella\ equazione\ della\ retta]$

##

$Digressione\ sul\ significato\ di\ l.i.\ e\ l.d.$
$Come\ ricordarsi\ cosa\ significa\ lineare\ dipendenza\ (piu'\ figura)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$rango\ NON\ massimo \rightarrow Det = 0 \rightarrow Lineare\ dipendenza \rightarrow Parallelismo$
$rango\ massimo \rightarrow Det \neq 0 \rightarrow Lineare\ indipendenza \rightarrow NON\ Parallelismo$



##

Esercizio posizione reciproca rette

$$Studiare\ posizione\ rec\ rette$$

$$r:$$
$$3x - z - 20 = 0$$
$$y - 4 = 0$$

$$[Eq\ cartesiana\ della\ retta,\ sono\ le\ equazioni\ di\ due\ piani\ messe\ a\ sistema]$$

##

$$Digressione\ passaggio\ da\ cartesiana\ a\ parametrica:$$
$$Basta\ costruire\ il\ sistema$$
$$x = t$$
$$ax + by + cz + d = 0$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$$Esempio$$
$$Esprimo\ in\ forma\ parametrica\ la$$
$$x + y + z + 1 = 0$$
$$-x + y - 2z + 1 = 0$$

$$pongo\ x = t\ e\ sostituisco\ nelle\ altre\ ed\ ottengo\ il\ sistema\ seguente$$

$$x = t$$
$$t + y + z + 1 = 0$$
$$-t + y - 2z + 1 = 0$$

$$Svolgo$$

$$x = t$$
$$y = -t - z - 1$$
$$-t + y - 2z + 1 = 0$$

$$x = t$$
$$y = -t - z - 1$$
$$-t - t - z - 1 - 2z + 1 = 0$$

$$x = t$$
$$y = -t - z - 1$$
$$z = -\frac{2}{3}t$$

$$x = t$$
$$y = -\frac{1}{3}t - 1$$
$$z = -\frac{2}{3}t$$

##

$$s:$$
$$x = 1 + 3t$$
$$y = 2t$$
$$z = 3 - t$$

1) *Direzioni rette*

$$\mathbf{d_s}(3, 2, -1)$$

per trovare $\mathbf{d_r}$ *faccio il prodotto vettoriale dei coefficienti dei due piani che la formano*

$$det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -(-\mathbf{i} - 3\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{d_r}(1, 0, 3)$$

2) *Troviamo un punto appartenente alla retta r e uno alla s*

$$P_r(7, 4, 1)\ P_s(1, 0, 3)$$

3) *Studio il determinante*

$$det\begin{pmatrix} 7-1 & 4-0 & 1-3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \; le\ rette\ sono\ complanari$$

$$3b)\ Studio\ rango\ matrice$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, r_k = 2 \; \rightarrow le\ rette\ sono\ incidenti$$

In un sistema di riferimento cartesiano $RC(O, x, y, z)$, supponiamo di conoscere le coordinate di due punti

$$P(x_P, y_P, z_P) \quad \text{e} \quad Q(x_Q, y_Q, z_Q)$$

e di voler determinare le equazioni cartesiane della retta r passanti per P e Q.

Il metodo più veloce prevede di utilizzare i punti per cui la retta passa per calcolare un vettore parallelo ad essa.

$$\mathbf{v} = (l, m, n) = (x_Q - x_P,\ y_Q - y_P,\ z_Q - z_P)$$

In base ai valori di l, m, n possono avvenire le seguenti casistiche.

Se l, m, n sono diversi da zero, le equazioni cartesiane della retta compongono il sistema lineare

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_P}{l} = \dfrac{y - y_P}{m} \\[2ex] \dfrac{y - y_P}{m} = \dfrac{z - z_P}{n} \end{cases}$$

PIANO

Equazione cartesiana piano

$$Equazione\ generica$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$ragionamento\ con\ i\ punti\ non\ allineati$$

$$P_0(x_0, y_0, z_0),\ P_1(),\ P_2()\ e\ un\ P()$$

$$P - P_1,\ P_1 - P_0,\ P_2 - P_0$$

$$det\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

Piano con un vettore ortogonale e un punto

$$\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$$

$$P_0(x_o, y_0, z_0)$$

$$1)\ Consideriamo\ la\ generi\ equazione\ cartesiana\ del\ piano$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$e\ sostituiamo\ a\ posto\ dei\ coefficienti\ a, b, c\ le\ componenti\ del\ vettore$$

$$lx +\ my + nz + d = 0$$

$$2)\ Imponiamo\ il\ passaggio\ per\ il\ punto\ \ P_0(x_o, y_0, z_0)$$

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0$$

$$lx_o +\ my_o + nz_o + d = 0$$

$$3)\ Ricavo\ valore\ del\ parametro\ d$$

$$d = -lx_o -\ my_o - nz_o$$

$$e\ sostituisco\ nell'equazione\ generica$$

$$lx + my + nz - lx_o -\ my_o - nz_o = 0$$

Esempio

$Scrivere\ eq\ cartesiana\ piano\ passante\ per\ il\ punto\ P(0, 0, 1)[P(x, y, z)]\ e\ ortogonale\ al\ vettore$

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v}(1, -1, +3)$$
$$\mathbf{v}(l, m, n)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$x - y + 3z + d = 0$$

$$d = -3$$

$$x - y + 3z - 3 = 0$$

Piano generato con due vettori fra loro linearmente indipendenti ed un punto del piano

$$P_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$$

$$\mathbf{w} = l_1\mathbf{i} + m_1\mathbf{j} + n_1\mathbf{k}$$

I due vettori essendo paralleli al piano posso usarli per determinare le componenti di un vettore ortogonale al piano e quindi ricadere nel caso precedente

Per trovare il vettore ortogonale faccio il prodotto vettoriale

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{pmatrix}$$

una volta trovato il vettore ortogonale ricado nel caso precedente

Esempio

Determinare eq piano passante per il punto $P(-2, 3, 1)$ e parallelo ai vettori

$$\mathbf{v}(3, 3, -2)$$
$$\mathbf{w} = (0, 1, 1)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -(-2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}) + 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$-10 - 9 + 3 + d = 0 \rightarrow d = 16$$

$$5x - 3y + 3z + 16 = 0$$

Piano passante per tre punti

$$\textit{come per trovare l'equazione generica impongo che}$$

$$det\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

Esempio

$$\textit{Calcolare eq cartesiane piano passante per questi punti}$$

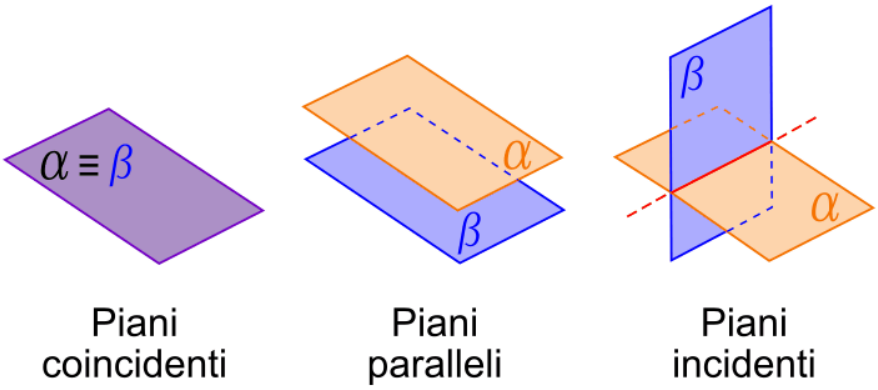
$$P_0(1,0,2)\ P_1(0,1,3)\ P_2(2,-1,0)\ P(x,y,z)$$

$$det\begin{pmatrix} x - 1 & y & z - 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-x + 1 - y = 0$$

$$x + y - 1 = 0$$

Posizione reciproca piani



Posizioni reciproche tra due piani nello spazio.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \end{pmatrix}$$

studio rango matrici

$$A)$$

$$r_k(A) = 2 \ rango\ massimo \ \rightarrow r_k(A|\mathbf{b}) = 2$$

In questo caso non abbiamo parallelismo, i piani sono incidenti

La direzione della retta di incidenza e' data dal prodotto vettoriale

$$\mathbf{V_r} = (a, b, c) \times (a', b', c')$$

$$B) \ r_k(A) = 1$$

$$B1) \ r_k(A|\mathbf{b}) = 2 \ abbiamo\ piani\ paralleli\ e\ distinti$$

$$B_2) \ r_k(A|\mathbf{b}) = 1 \ abbiamo\ piani\ paralleli\ e\ coincidenti$$

Esempio

$$\textit{Studio posizione fra due piani al variare del parametro } h$$

$$2x + hy - 2z + 3 = 0$$

$$x + 2y - z - 1 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & h & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & h & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4 - h \neq 0 \rightarrow$$

$$h = 4 \textit{ rango } 1$$
$$h \neq 4 \textit{ rango } 2 \rightarrow \textit{piani incidenti}$$

$$\textit{se } h = 4$$

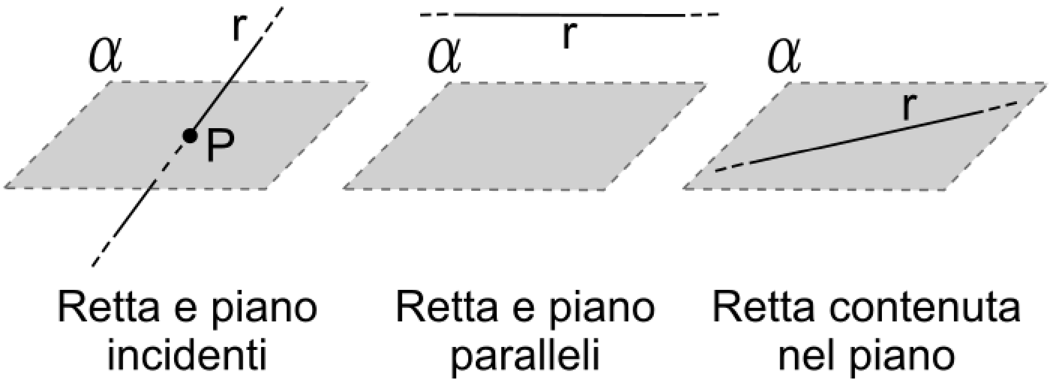
$$(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$det\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \textit{rango} = 2 \rightarrow \textit{piani paralleli distinti}$$

Posizioni retta piano

Per fissare le idee ecco una **rappresentazione grafica delle posizioni reciproche tra retta e piano**.



$$\text{Studio posizione reciproca}$$

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_1=0 \end{cases}$$

$$\text{Dobbiamo studiare la matrice}$$

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$(A|\mathbf{b})=\begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \end{pmatrix}$$

$$A)$$
$$r_k(A)=3$$
$$r_k(A|\mathbf{b})=3$$

$$\text{retta e piano incidenti}$$

$$\text{per trovare il punto di intersezione risolvi il sistema}$$

$$B)\ r_k(A)\neq r_k(A|\mathbf{b})$$

$$retta\ e\ piano\ sono\ paralleli$$

$$C)\ r_k(A) = 2$$
$$r_k(A|\mathbf{b}) = 2$$

$$la\ retta\ giace\ sul\ piano$$

$$Il\ rango\ non\ puo'\ essere\ 1\ perche'\ altrimenti\ non\ ho\ nessuna\ retta$$

DIGRESSIONE METODO CRANER (di solito conviene nei sistemi grossi)

Metodo di Cramer per sistemi lineari di 2 equazioni in 2 incognite

Vediamo come applicare il **metodo di Cramer per un sistema lineare di due equazioni in due incognite**:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Scriviamo i coefficienti delle incognite in una sorta di tabella, che chiameremo *matrice dei coefficienti* (o *matrice incompleta*)

$$(\spadesuit) \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

Consideriamo la quantità D *definita* dalla seguente formula: la chiameremo *determinante della matrice 2x2*

$$\mathrm{D} = (a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)$$

Per ricordare la formula di calcolo del determinante di una matrice 2x2 è sufficiente tenere a mente il seguente schemino:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)$$

A questo punto abbiamo due possibilità:

- se il determinante è uguale a zero, dobbiamo fermarci. **Il metodo di Cramer non si può applicare e il sistema sarà indeterminato o impossibile**. Per scoprirlo procederemo con uno degli altri 3 metodi (sostituzione, riduzione o confronto).

$$\mathrm{D} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Indeterminato o impossibile}$$

- Se il determinante è diverso da zero, allora **il sistema è determinato e possiamo proseguire con la regola di Cramer**:

$$\mathrm{D} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Determinato}$$

Calcoliamo la seguente quantità, che chiameremo *determinante dell'incognita x*

> Calcoliamo la seguente quantità, che chiameremo *determinante dell'incognita x*
>
> $$\mathrm{D}_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = (c_1 \cdot b_2) - (c_2 \cdot b_1)$$
>
> ottenuto da (♠) sostituendo i coefficienti della x con i termini noti delle equazioni del sistema.
>
> Allo stesso modo calcoleremo il *determinante dell'incognita y*:
>
> $$\mathrm{D}_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot c_2) - (a_2 \cdot c_1)$$
>
> ottenuto da (♠) sostituendo i coefficienti della y con i termini noti delle equazioni del sistema.
>
> Fatto ciò, **il metodo di Cramer individua le soluzioni del sistema 2x2** mediante le seguenti formule
>
> $$x = \frac{\mathrm{D}_x}{\mathrm{D}} \quad ; \quad y = \frac{\mathrm{D}_y}{\mathrm{D}}$$

Esempio

$$x + 5y - 3z + 5 + 0$$

$$x - y - 1 = 0$$
$$2y - z + 2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A|\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det = 1 - 1 = 0$$

$$r_k = 2$$

$$r_{k_b} = 2$$

$$la\ retta\ giace\ sul\ piano$$

Studio con uso coefficienti direttori

$$coeff\ direttori\ retta\ \mathbf{n}(a, b, c)\ [equazione\ cartesiana]$$

$$coeff\ direttori\ piano\ \mathbf{v}(l, m, n)$$

$$prodotto\ scalare\ standard$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$$

$$detto\ P_o\ punto\ appartanente\ alla\ retta$$

$$A)\ se\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \neq 0\ sono\ incidenti$$

$$B1)\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0\ e\ P_o \notin\ al\ piano,\ allora\ sono\ paralleli\ esterni$$

$$B2)\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0\ e\ P_o \in\ al\ piano,\ allora\ la\ retta\ giace\ sul\ piano$$

Esempio

$$x + 5y - 3z + 5 + 0 = 0$$

$$x - y - 1 = 0$$
$$2y - z + 2 = 0$$

$$P(1, 0, 2)$$

$$\mathbf{v}(1, 5 - 3)$$

$$\mathbf{n} = (1, -1, 0) \times (0, 2, -1) =$$

$$det = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = i + j + 2k = (1, 1, 2)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = (1, 1, 2)(1, 5 - 3) = 0$$

P appartiene quindi

la retta giace sul piano