Definizione di forma differenziale

$$\omega(x,y) := \alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy$$

$$\int_{\varphi} w := \int_{b}^{a} [\alpha(\varphi_1(t),\varphi_2(t)) \cdot \varphi_1'(t) + \beta(\varphi_1(t),\varphi_2(t)) \cdot \varphi_2'(t)]dt$$

$$t \in [a,b] \rightarrow \varphi(t) = [\varphi_1(t),\varphi_2(t)]$$

Esempio

$$\omega(x,y) = y^3 dx + 3xy^2 dy$$

$$\varphi : [0,1] \rightarrow R^2,\ t \in [0,1] \rightarrow \varphi(t) = (2t,2t)$$

$$\alpha(x,y) = y^3, \quad \alpha(\varphi_1(t),\varphi_2(t)) = \alpha(2t,2t) = 8t^3$$

$$\beta(x,y) = 3xy^2, \quad \beta(\varphi_1(t),\varphi_2(t)) = \beta(2t,2t) = 24t^3$$

$$\varphi_1' = \varphi_2' = 2$$

$$\int_0^1 \left(16t^3 + 48t^3\right)dt = 64\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = 16$$

Dominio forma differenziale
Il dominio della forma differenziale e' quel dominio che mi rende definite le due funzioni $\alpha\ e\ \beta$

Esempio

$$w = \frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy$$

$$dom\ alpha = R - \{0\}$$
$$dom\ betha = R - \{0\}$$

$$D\ w = R^2 - \{0,0\}$$

FORMA CHIUSA

Una w si dice chiusa se vale :

$$\frac{\delta}{\delta y}\alpha(x,y) = \frac{\delta}{\delta x}\beta(x,y)$$

Esempio

$$\omega(x,y) = y^3 dx + 3xy^2 dy$$

$$3y^2 = 3y^2 \text{ e' chiusa per definizione}$$

SE UNA FORMA NON E' CHIUSA NON E' ESATTA
SE UNA FORMA E' ESATTA ALLORA E' CHIUSA

FORMA ESATTA

Teorema di Poincare'

Se una forma differenziale e' chiusa e il suo dominio e' un insieme semplicemente connesso allora essa e' esatta

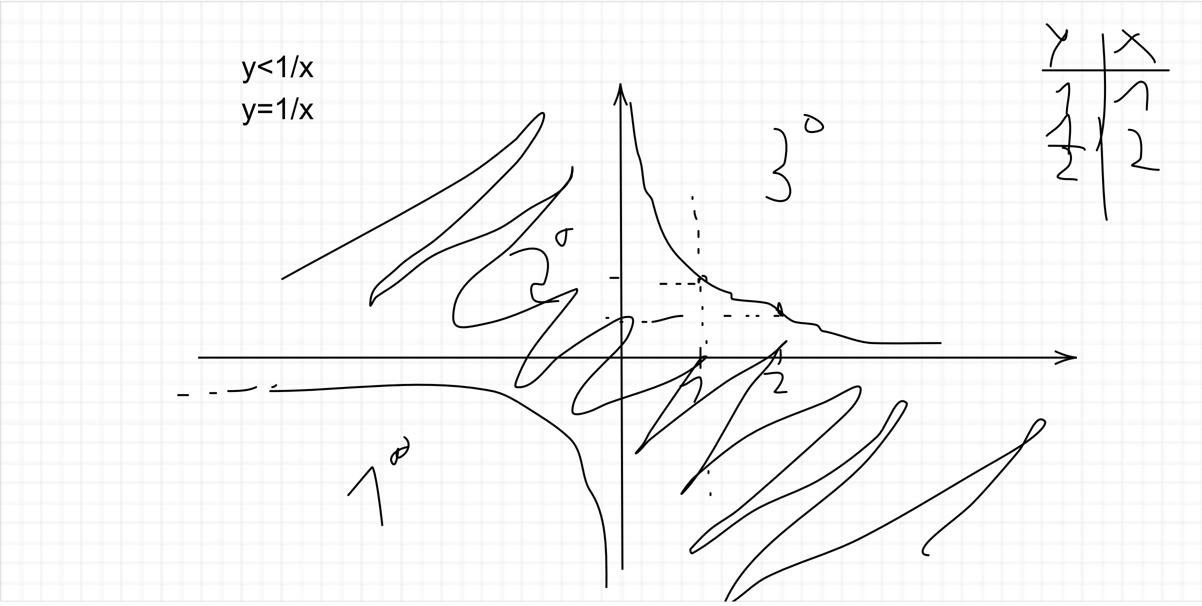
Esercizio sull'esattezza

$$w = \frac{[xy - (1-xy)\ln(1-xy)]}{1-xy}dx + \frac{x^2}{1-xy}dy$$

Dominio

$$xy \neq 1$$
$$xy < 1$$

$$A = \left\{(x,y) \in R^2 \text{ tale che } xy < 1\right\}$$



Il dominio e' semplicemente connesso (non ci sono buchi)

$$Verifichiamo\ se\ w\ e'\ chiusa$$

$$w = \frac{[xy - (1-xy)\ln(1-xy)]}{1-xy}dx + \frac{x^2}{1-xy}dy$$

$$w = \left[\frac{xy}{1-xy} - \ln(1-xy)\right]dx + \frac{x^2}{1-xy}dy$$

$$derivata\ rispetto\ a\ y\ di\ alpha =$$

$$\frac{x(1-xy)+x^2y}{(1-xy)^2} + \frac{x}{1-xy}$$

$$\frac{2x(1-xy)+x^2y}{(1-xy)^2}$$

$$\frac{2x-x^2y}{(1-xy)^2}$$

$$derivata\ di\ beta\ rispetto\ a\ x =$$

$$\frac{2x(1-xy)+yx^2}{(1-xy)^2} = \frac{2x-x^2y}{(1-xy)^2}$$

$$quindi\ la\ forma\ e'\ chiusa,\ ed\ essendo\ il\ dominio\ semplicemente\ connesso\ possiamo\ dire\ per\ il\ teorema\ di\ Poincare'\ che\ la\ forma\ e'\ esatta$$

Definizione forma differeziale esatta

$$Una\ forma\ differenziale:$$

$$\omega(x,y) = \alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy$$

$$Si\ dice\ esatta\ se\ esiste\ una\ funzioen\ differenziabile\ f(x,y)\ tale\ che:$$

$$\frac{\delta}{\delta x}f(x,y) = \alpha(x,y)\ AND\ \frac{\delta}{\delta y}f(x,y) = \beta(x,y)$$

$$Esempio\ flash$$

$$\omega(x,y) = y^3dx + 3xy^2dy$$

$$f(x,y) = xy^3$$

$$\frac{\delta}{\delta x}f(x,y) = y^3$$

$$\frac{\delta}{\delta y}f(x,y) = 3xy^2$$

$$La\ funzione\ f(x,y)\ e'\ detta\ POTENZIALE\ [PRIMITIVA\ FORMA\ DIFFERENZIALE] \tag{1}$$

COME CALCOLARE IL POTENZIALE

$$1)\ Si\ sceglie\ una\ delle\ due\ componenti\ della\ forma\ differenziale\ e\ la\ si\ integra$$

$$\int [\alpha(x,y)]dx = f(x,y) + c(y) \tag{2}$$

$$2)\ Si\ deriva\ il\ risultato\ rispetto\ all'altra\ variabile\ e\ lo\ si\ pone\ uguale\ all'altra\ componente\ della\ forma\ differenziale$$

$$\frac{d}{dy}[f(x,y) + c(y)] = \beta(x,y)$$

$$\textit{ottenendo cosi' un'equazione in } c'(y) \textit{ che ci permette di trovare } c(y)$$

$$3)\ \textit{Si sostituisce il valore trovato della c nella 2 ed cosi otteniamo la famiglia di funzioni che sono potenziale}$$

Esempi
(trovare il potenziale)

$$w(x, y) = \frac{[xy - (1-xy)\ln(1-xy)]}{1-xy}dx + \frac{x^2}{1-xy}dy$$

$$Dominio$$

$$1 - xy > 0$$

$$D\ \left\{(x, y) \in R^2 \mid 1 - xy > 0\right\}$$

$$\int \frac{x^2}{1-xy}dy = -x\int -x(1-xy)^{-1}dy = -x\ln(1-xy) + c(x)$$

$$\frac{d}{dx}[-x\ln(1-xy) + c(x)] = \frac{[xy - (1-xy)\ln(1-xy)]}{1-xy}$$

$$-\ln(1-xy) + \frac{xy}{1-xy} + c'(x) = \frac{xy - (1-xy)\ln(1-xy)}{1-xy}$$

$$-\ln(1-xy) + \frac{xy}{1-xy} + c'(x) = \frac{xy}{1-xy} - \frac{\ln(1-xy)}{}$$

$$c'(x) = 0$$

$$\left[c'(x) = g(x) \to \int g(x) = c(x)\ \textit{caso generale}\right]$$

$$c(x) = k$$

$$f(x, y) = -x\ln(1-xy) + k$$

Esercizio trovare potenziale

$$w(x, y) = \left(2xy - \frac{1}{x}\right)dx + x^2dy$$

....

$$\textit{Il dominio viene SPACCATO in due dalla retta } y = 0$$

$$\textit{quindi non sarebbe semplicemente connesso ma posso trattare il dominio come}$$

$$\textit{l'unione di due domini semplicemente connessi}$$

$$D_1 \left\{ (x, y) \in R^2 |\ x > 0 \right\}$$

$$D_2 \left\{ (x, y) \in R^2 |\ x < 0 \right\}$$

....

.... *E' ESATTA...*

Calcolo potenziale :

$$\int x^2 dy = x^2 y + c(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^2 y + c(x) \right] = 2xy - \frac{1}{x}$$

$$2xy + c'(x) \ = \ 2xy - \frac{1}{x}$$

$$c'(x) \ = \ -\frac{1}{x}$$

$$c(x) = \ -\int \frac{1}{x} dx = \ -\ln(|x|) + k$$

$$f(x, y\ ) = x^2 y - \ln(|x|) + k$$

$$f(x, y) = x^2 y - \ln(x) + k \qquad per\ D_1$$

$$f(x, y) = x^2 y - \ln(-x) + k \qquad per\ D_2$$

TEOREMA

Se una forma differenzia e' esatta l'integrale curvilineo lungo una curva e' dato da

$$\int_\gamma w(x, y) dxdy \ = \ f(P_f) - f(P_i)$$

TEOREMA per escludere l'esattezza

w e' esatta se e solo se per ogni curva regolare chiusa vale :

$$\int_{\gamma_{chiusa}} w = 0$$

ESERCIZIO STUDIO FORMA DIFFERENZIALE E CALCOLO INTEGRALE CURVILINEO

$$w(x,y) = \left[\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right] dx + \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) dy$$

$$calcolare\ l'integrale\ sulla\ curva: \ \gamma\ (2+cos(t), 2sin(t))\ per\ t\ [0,\pi]$$

$$1)\ Dimostrare\ che\ e'\ esatta$$
$$dominio + chiusura = Poincare'$$
$$2) Determinare\ potenziale$$
$$3) Calcolare\ integrale$$
$$4)\ Verificare\ risultato\ col\ potenziale$$

$$Dominio:$$

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 \mid x^2+y^2 > 0\right\}$$

Rappresentare una curva:

$$Abbiamo\ due\ strumenti\ da\ utilizzare:$$

$$-Tabellino\ con\ t\ x\ y\ per\ vedere\ i\ punti\ (importante\ per\ farsi\ una\ idea\ e\ vedere\ il\ verso\ di\ percorrenza)$$
$$-\ Fare\ sistema\ delle\ due\ equazioni\ parametriche\ ed\ eliminare\ il\ parametro\ t,$$
$$in\ questo\ modo\ ottengo\ una\ equazione\ "normale"\ y = f(x)$$
$$-\ Se\ non\ vengono\ cose\ semplici\ con\ gli\ altri\ due\ utilizzare\ geometria\ analitica$$