Equazioni differenziali e problemi di Cauchy

$$f(x) + f'(x) = x$$

$$y + y' = x \ (notazione\ compatta)$$

$$f'(x) = x$$

$$y' = x \ \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + c$$

Equazioni differenziali primo ordine

- Elementari
  - Tipo 1: y'=g(x)
  - Tipo 2: y''=g(x)
- Variabili separabili
- Lineari

Equazioni differenziali "elementari"

$$Tipo\ 1$$

$$y' = g(x)$$

$$\int y'\ dx = \int g(x)dx \ \rightarrow y = G(x) + c$$

$$Tipo\ 2$$

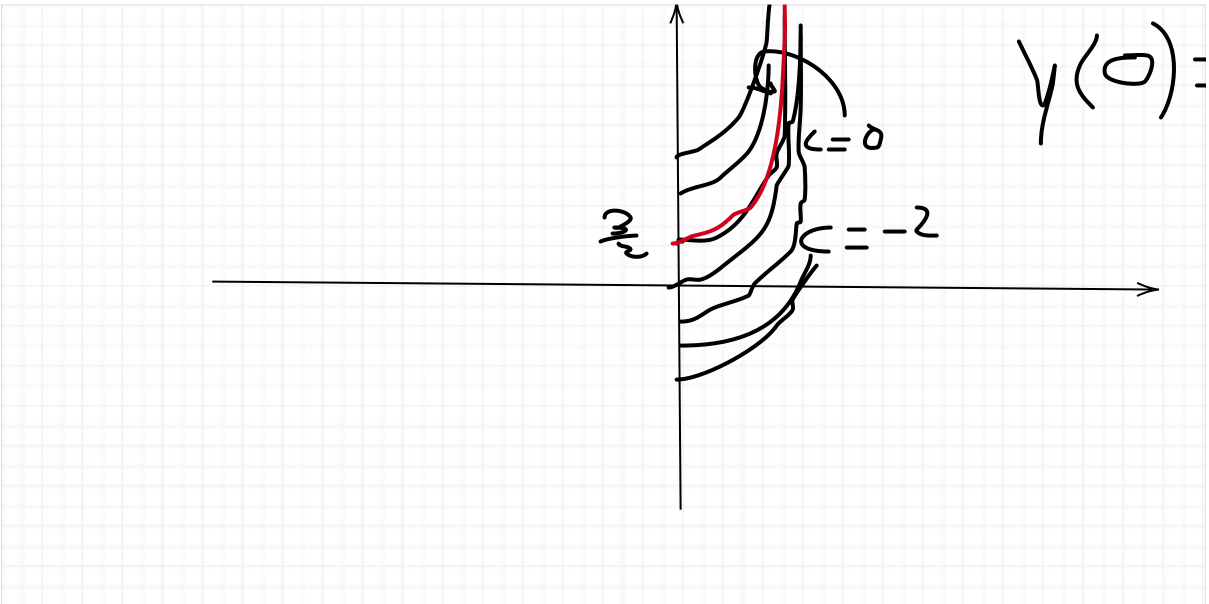
$$y'' = g(x)$$

$$\int y''\ dx = \int g(x)dx \ \rightarrow y' = G(x) + C_1 \rightarrow \int y' = \int G(x)dx + \int C_1 dx$$

$$y \ = \int G(x)dx + xC_1 + C_2$$

Esercizi

$$y' = 3e^{2x} \ \rightarrow y = \frac{3}{2}e^{2x} + c$$



PDC 1

$$y' = -e^{-x} \rightarrow y = -\int e^{-x}dx = e^{-x} + c$$
$$y(0) = 3$$

$$\textit{Sostituisco le condizioni iniziali}$$

$$3 = e^{0} + c \ \rightarrow 3 = 1 + c \rightarrow c = 2$$

$$y = e^{-x} + 2$$

PDC 2

$$y'' = x$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 4$$

$$y' = \ \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y = \ \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

$$1 = c_2$$
$$4 = c_1$$

$$y = \frac{x^3}{6} + 4x + 1$$

ED a variabili separabili (primo ordine)

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

$$y' = y' \ln(x)$$

$$y' = e^x y \ln(y)$$

Metodo risoluzione

1. Separare le variabili
2. Integrare ambo i membri per le rispettive variabili
3. Ricavare y
4. Controllare la presenza di soluzioni costanti:

$$[Controllare\ se \ \exists \ y_c \in R \mid g(y_c) = 0]$$

$$y' = y^2 \ln(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \ln(x) \rightarrow \frac{dy}{y^2} = dx \ln(x) \tag{1}$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 1 \cdot \ln(x) dx \rightarrow -\frac{1}{y} + c_1 = x \ln(x) - x + c_2 \tag{2}$$

$$\frac{1}{y} = -x \ln(x) + x - C \rightarrow y = \frac{1}{x(1 - \ln(x)) - C} \tag{3}$$

$$y^2 = 0\ per\ y = 0\ quindi\ 0\ e'\ una\ soluzione\ costante\ dell'ED \tag{4}$$

PDC var separabili

$$y' = sinx \cdot e^y$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = sinx \cdot e^y \rightarrow \frac{dy}{e^y} = sinx \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int sinx \cdot dx \to e^{-y} = cosx - C$$

$$e^{-y} = cosx - C \to y = -\ln(cosx - C)$$

$$e^y = 0\ MAI!$$

$$1 = -\ln\left(cos\frac{\pi}{2} - C\right)$$

$$1 = \ln\left(-C^{-1}\right)$$

$$e = -\frac{1}{C} \to C = -\frac{1}{e}$$

$$y = -\ln\left(cosx + \frac{1}{e}\right)$$

ED lineari primo ordine

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

$$se\ a(x) = 0 \to Elementari$$
$$se\ f(x) = 0 \to Variabili\ separabili$$

Metodo di risoluzione con fattore integrale

1. Trovo una primitiva di a(x) quindi A(x)
2. Moltiplico ambo i membri per $e^{A(x)}$ ottenendo $y'(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} = f(x)e^{A(x)}$ si nota che $y'(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} = \left[y(x)e^{A(x)}\right]'$ quindi ho $\left[y(x)e^{A(x)}\right]' = f(x)e^{A(x)}$
3. Integrare ambo i membri ottenendo $y(x)e^{A(x)} = \int f(x)e^{A(x)} + C$
4. Ricavare y(x): $y(x) = e^{-A(x)}\left(\int f(x)e^{A(x)}\right) + Ce^{-A(x)}$

$$y'(x) - xy(x) = 2x$$

$$A(x) = -\frac{x^2}{2}$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(-2\int -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x) = -2 \ \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x) = -2 \ \cdot e^{0} + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x) = -2 \ + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

ED lineari secondo ordine (omogenee)

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$Le\ soluzioni\ sono\ uno\ spazio\ vettoriale\ di\ due\ dimensioni$$

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

Risoluzione:

$$1)\ Risolvere\ l'equazione\ caratteristica\ a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$a)\ Abbiamo\ 2\ soluzioni\ reali\ e\ distinte\ \lambda_1 \neq \lambda_2$$
$$y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$$

$$b)\ Abbiamo\ 2\ soluzioni\ reali\ coincidenti\ \lambda_1 = \lambda_2$$
$$y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2xe^{\lambda_2 x}$$

$$c)\ Abbiamo\ 2\ soluzioni\ complesse\ e\ coniugate\ \lambda = \alpha \pm i\beta$$
$$y(x) = c_1e^{\alpha x}cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}sin(\beta x)$$

Esempio

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

$$Equazione\ caratteristica:\ \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$s = -5$$
$$p = +4$$

$$1\ 2\ 4\ 5$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

$$...$$

$$\lambda = 1, 4$$

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{4x}$$

PDC

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 1$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$y(x) = c_1 e^{-x} cos(x) + c_2 e^{-x} sin(x)$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = 1$$

$$1 = c_1 e^{-0} cos(0) + c_2 e^{-0} sin(0) \to 1 = c_1$$

$$y'(x) = c_1\left(-e^{-x} cos(x) - e^{-x} sin(x)\right) + c_2\left(-e^{-x} sin(x) + e^{-x} cos(x)\right)$$
$$1 = -c_1 + c_2 \to c_2 = 2$$

$$y(x) = 1e^{-x} cos(x) + 2e^{-x} sin(x)$$

ED lineari del secondo ordine NON omogene
(Metodo della variazione delle costanti)

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

Risoluzione

$$1)\ Determinare\ la\ soluzione\ dell'omogenea\ associata$$

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$$y_o = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$2)\ Trovare\ una\ soluzione\ particolare:$$

$$y_p = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

$$2b)\ Risolvere\ il\ seguente\ sistema$$

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0$$
$$c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = f(x)$$

$$4)\ La\ soluzione\ generale\ e'$$

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x)$$

Esempio

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^4}$$

$$1)$$
$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$$
$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$$
$$\lambda = 1\ preso\ due\ volte$$

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} \rightarrow y_o(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$2)$$

$$y_p = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0$$
$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)\left[e^x + xe^x\right] = \frac{e^x}{x^4}$$

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0$$
$$c_1'(x)e^x = \frac{e^x}{x^4} - c_2'(x)\left[e^x + xe^x\right]$$

$$\frac{e^x}{x^4} - c_2'(x)e^x - c_2'(x)xe^x + c_2'(x)xe^x = 0$$
$$c_1'(x)e^x = \frac{e^x}{x^4} - c_2'(x)\left[e^x + xe^x\right]$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{x^4}$$
$$c_1'(x)e^x = \frac{e^x}{x^4} - c_2'(x)\left[e^x + xe^x\right]$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{x^4} \to c_2(x) = \int x^{-4}dx = -\frac{1}{3}x^{-3}$$
$$c_1'(x) = -\frac{1}{x^3} \to c_1(x) = \frac{1}{2}x^{-2}$$

$$y_p = \frac{1}{2}x^{-2}e^x - \frac{1}{3}x^{-2}e^x$$

$$4)\ \textit{La soluzione generale e'}$$

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{6}x^{-2}e^x$$

PDC esercizio successivo

$$y'' - 2y' - 3y = 2e^{3x} + \frac{1}{3}x + 2$$

$$y(0) = \frac{11}{27} \qquad y'(0) = -\frac{1}{9}$$

$$1)$$
$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda = +3,\ -1$$

$$y_o = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

2)

$$c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{3x} = 0$$
$$-c_1'(x)e^{-x} + 3c_2'(x)e^{3x} = 2e^{3x} + \frac{1}{3}x + 2$$

$$c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{3x} = 0$$
$$c_2'(x)e^{3x} = \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{12}x + \frac{1}{2}$$

$$c_1'(x) = -\frac{1}{2}e^{4x} - \frac{1}{12}xe^{x} - \frac{1}{2}e^{x}$$
$$c_2'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}xe^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-3x}$$

$$c_1(x) = \int -\frac{1}{2}e^{4x} - \frac{1}{12}xe^{x} - \frac{1}{2}e^{x} = -\frac{1}{8}e^{4x} - \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{12}e^{x}(x-1)$$

$$\int xe^{x}dx = e^{x}x - \int e^{x} = e^{x}x - e^{x} = e^{x}(x-1)$$

$$c_2(x) = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{12}xe^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-3x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{36}e^{-3x}\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6}e^{-3}x$$

$$\int xe^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}x - \int -\frac{1}{3}e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}x - \frac{1}{9}e^{-3x} = -\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$y_p = \left[-\frac{1}{8}e^{4x} - \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{12}e^{x}(x-1)\right]e^{-x} + \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{36}e^{-3x}\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6}e^{-3x}\right]e^{3x}$$

$$y_p = -\frac{1}{8}e^{3x} - \frac{x}{9} + \frac{1}{2}xe^{3x} - \frac{2}{3}$$

3)

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{8}e^{3x} - \frac{x}{9} + \frac{1}{2}xe^{3x} - \frac{2}{3}$$

$$y(0) = \frac{11}{27} \qquad y'(0) = -\frac{1}{9}$$

$$216\frac{11}{27} = 216\left(c_1 + c_2 - \frac{1}{8} - \frac{2}{3}\right)$$

$$72\left(-\frac{1}{9}\right) = 72\left(-c_1 + 3c_2 - \frac{3}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{2}\right)$$

$$216c_1 + 216c_2 = 259$$

$$-72c_1 + 216c_2 = -9$$

$$216c_1 + 216c_2 = 259$$

$$c_1 = -\frac{1}{288}268$$

....