

2014-02-07-example.sagews

February 10, 2014

Contents

| | | |
|---|---------------------------------|---|
| 1 | Lecture on 2014-02-07: Examples | 1 |
|---|---------------------------------|---|

1 Lecture on 2014-02-07: Examples

Screencast: <http://youtu.be/ODagX00dYUY>

```
E = EllipticCurve([6, 11])
show(E)
```

$$y^2 = x^3 + 6x + 11$$

```
v = E.gens(); v
[(-1 : 2 : 1)]
```

```
P1 = v[0]; P1
(-1 : 2 : 1)
```

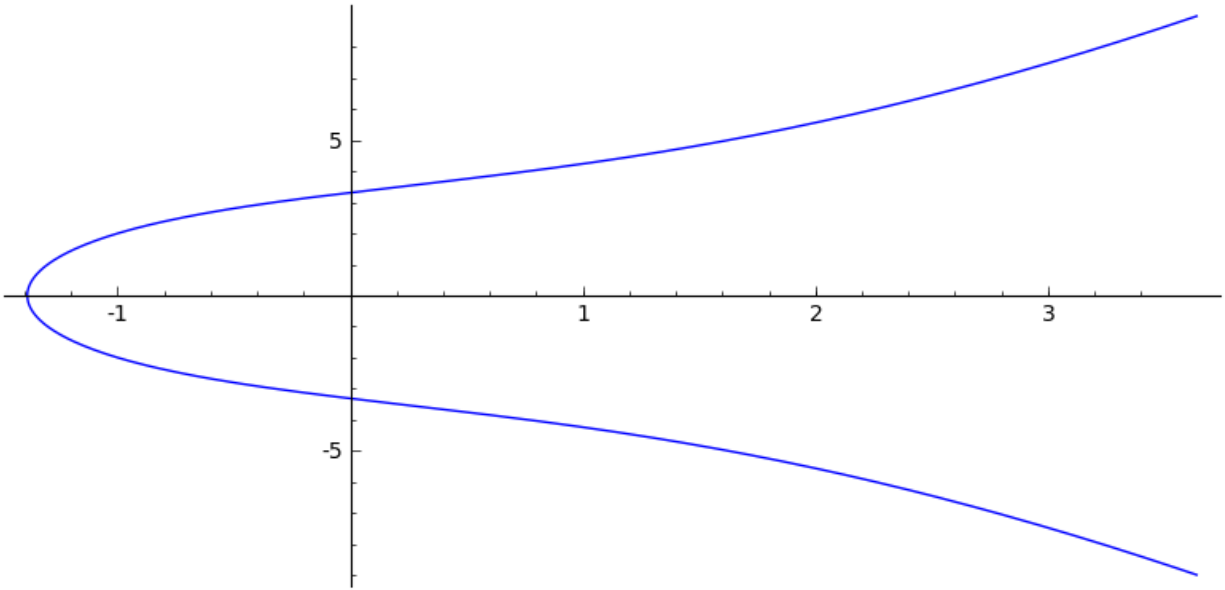
```
P1 + P1
(113/16 : -1289/64 : 1)
```

```
(113/16)^3 + 6*113/16 + 11 == (-1289/64)^2
True
```

```
P1 + P1 + P1
(24607/16641 : 10318726/2146689 : 1)
```

```
E.torsion_order()
1
```

```
E.plot()
```



17*P1

(26132262958888721345746624192275211727678096752105870434449546736707862837442669748378427
7268357036386637100217754089618639294968010848995046638541385096319/7680460403755598699874
472307720855434836680526086017760756481994706029614477858026906707520588244040407296005889
8074815543793207261108437495621175672806401 : 17910470624147290324625298261497273309104844
125994493923184018578122827040659757026949550309023504552152832836360642183809379508697804
941657456545722202740514865544915282186154389780979614549996364486520966341871360442196416
8637722078/2128535421456139050780194593136551145403316960101241166589074724518208267700526
484960576715850525543169765599054528275574168100363616679786489619702692115397232622399348
5170754006052295193143851088277855350529759786722037227754788351 : 1)

100*P1

(-4093398037061050135632016232503279515286550278860411945705844968077463038527140950751637
983312591925729903505280381245516402263364514361986392691188026865840046570315837564173726
949596448496476446499743943379571641531139482138720825004312946049293285309756736535849744
180316451737549850440849639341872747870929945580059074341940032950660739989155858292297292
929046847488219971251308633744333912345144449519746781377462259410726199807140906412110662
529929396086584253337810846144335748165750226267435434048594013418097418031147499789767084
428065286582639653610214437885327869040587820355706685594142060098638895929529209900941674
717212114795913502560326686509608468130994904959591086963213716844494979374008698777212827
347827005823609367612129457334070310187352858323745022819087972167907107128418396601311859
153671648010296955259263081141211796840945523449131667772898522834730121334269627893236143
048275271424489845345431373733162386144438804927798130467910727891824689842552289478225337
620100695808443382008910337309810802604229673731734978618244235276468691290068890037010667
428505423324751367414110701860965776795040394148597696080359315293462566546845716160020540
694899472985995588710186187568563733652546201626617715224660937841244707013584799235190760
817473081695447421314387368142839285456386165001926831689370146431793468905024611572304432
598204951048228460165304255246109820265070323952124827725228074267887571805423910254692699
772502750437603928954187322809619847650059972183577679398235419401123733172613656089629661
257646409304933185378987636021416795827191221999616285163495344809611693851029681232625488
147518591897457083471424944810887537637721019906043171787519792048914383197389621016428407

240890655635226988133265985287105408825417519149778746788786138576303516400597473986840147
589117619880068861250773194557352548640603159799389416605269824878583819416226729630707859
792211150376264645280376502991877109567583534455857453851764977348512823966455471099538067
768231118615398292309345876273992853401108940209062646101067981407818057693518032286901836
779825811327946092430857556195951990781034316195599861670303896929850617817093127139754749
53389859440030468501736821499969048038065208552858884747125779513149206194801657362248119
993809081561997714135354287464628475019498258148107648343918176582543240449299611096745108
777814290179606096253977456647636282472603034867873123788184183810369555568618365505746889
675561824430745183827252892732788400103660812798715721454660568596437965592218016814332641
942393416312924898443158291796749819101846295389772387066821874444702995246840364234562344
381087766917495014742588299586965607234981005557677995959083239961821911745292822377260589
670241578954116944135141054804597558220381504023311570964869060902608430806934849630863802
966010291193800001651999370778634956409401448146065411079468729585166319078317040253236128
8690638534895969670013305568327001616418838428825944997503456602861257432762086814422469
992425018970060261153515688472734015521180449434326072703177238644410292729413388813326939
099670321280404916514886890050466893256949057832853008340318285663147729293788569673421754
526089742763798375025419277211052235916325558006373786317705412776517919045888492622578481
801011258502606494213106843748938022126609286841669444599728567614730403335819819616878971
588159318626618979508094286212370352715257695060590299846293533709419207474073176731143645
101506234086168923209605528802193334074258886359812990129961586311310990800778038457033980
838640779715985506979794515220374710317848598279138750043044702784944824806150745173567461
963707003265581561507107120140784354352600077220435898430963796113090123493560381171933770
045493860992810416475702236415689424309816293585461327442040080727589365802210078169218510
668336955905532445551423862116668263450345183821594658870057227564133484289075276757256047
219470467569827663533576415752097631752962163443250407065183002129957169734184397623518701
724312890884580131003458568159494136946706033862190117740468783271414196151001336850111261
428789575367689564083693907877655030850873366403739214178516446873167603593692404622385994
333434590690416423029275029876046697734180063109366106614072996806390601679022978552271974
418394702162786073405069359398594086159543089605189124511941179137303580707581432670605653
197874335867005596924742260859339904295138360318549277608560393953248924658120188802351246
984952711412035027492059522078472720727153345096161175088946140295104106950244639883325824
031240365704552890774710227387826330944113558868458656332025022528381575732869546848360538
120257393231001203093728237552678496066994326001506581409564041628548740813557882258152952
151102321386297923967633432311765506740909856172411507342458791523511880365855384985555064
027315474171072944725105115111178718170065679083005108699594764534688889622381890612713585
432586389129096054664511540492404724265345522115153464295122891392588405604426499460374989
787073421774106265123809380791943146215730912156719671657836498370644959018400731195572788
436136401718266670221241485243254336584583020497573751771729822065995131004081469848363125
247145993729704727747650662386162275007855425367891025933752537961823095389875028005484401
271399371220092494774154190989160688839600617952776956902985313348580608890505191551782073
85411356502852773850743634455115147003725834030709067970354042061396193837119/490943323501
550998308403321076700700331700387524832329224841396746921158417216941651248419195946252928
322062236237486918668741296657404873076978245622269391433529718561193752607220323235715282
580276005516198665882185737216799620940153793720894065881080847499279911143981598449116294
785432567173752631080005674536207462702522521196632931300522250536748584121479556737209994
035167973162832618329614029405249725237803977714716976188779532618115817704286234943775733
727343131515806858282267158195038456822684208814681687108463560879300745102174890760376770
378312832813837013289813260779091709338925559505784165677627655236176477080199604349970356
022381427240134465085592909210371747935409500460461005919492224373393430069167812602122048
435334352177735485914833496975861270561343550640414968306510718364885308317609669032339090
012206219893987613272425247325217908907178026503984513022986053395530798254218677355336624

057792496088296857747466660572575334604634818267981330956634745700126866536210070259307593
339091849118104464101890059749323612604708572810944141450323531520480859181962140710209548
589687280446854791390066079664337542289006028554358536709105631255823341034700791677620043
103387614120602079059662175359560553979043319849052470631831991461395254345086423908950964
610606063189302543110393940907560095927258374280150005898526272592209899354310572770647877
837320909792611022500165535435279882194763263999727968934382721026722001830313253889009612
720107052902202399413465595728054350514066581098936147455778897671861540396427113702487877
529560290442572430844079272908454795549397057771733317945308264203433711946559292169300698
540142785460689336850029633441511604985772279327270803088782835555440509259314528350810183
177359102942427895472246929110909764966861287660530971065711093232228141927570388087718098
802993936551933545316984354194754023033713858835838135502713274002858319624796400256309003
240508006670866390150698822274163716213593611382026804069776778287330152725352893910088752
999843300349593222916581153534016672295075154327266697700849003573496887778344254978577750
052280915395483171792279616587581413060294266350642444607093001311238519799579414109612906
547594431286562158270161572248244104941935362204268824655579561600203885916608720901104251
078189763691824438534079265571478185495367545772202701835268426474891920193474021247925568
236977306873896894896728508595961410173576237867677412435686657459989957603655563480633669
741640511159556601125129511989340540161667893608894646774131836588781636132753465569605406
893980228870425302228602951600647174340085506570977576808225174427844584715117970841600468
207298793978252555604156352546984359655489513093560589717907025661264642146480053607670697
303571045660313667531720834840667748840263154827226418501371564407088527416854380904358184
2667186522504762717803980030330322031504033796393871856940175468307948622345000714349510
683734012830869428720916634885460115462463559452387183014435940419944530416879183125364652
746367827493047756045548185272893376607182823159988410555626651356350237915842073773891406
534023677453701282437684221846645318451854427037858160441552130241624981546146925667099338
064781830361422315448746344743615998355274894232729169688532946162123461617302869432955260
071156032604570016719527943098975391456622026160214322885202465636299856657530805339336861
444528377413072769501521329396351190949018097252062176054302514034161530088429312534357019
020713260064363857887681892726505366133363698136912278222958637991399319925381577544530331
074711728389358076788745266137745958576772271989336564700018806285482727273826290329383784
890270937294927524485001889490889023567438030686146514461888441621587649948445207565220360
790931793302738591900363000165673135838721070038983686934424579051983726540263239042731994
121025161078824338006334726548804267072378130989852963680997759923398517992183624124621125
158818628279647437313369415193495714089945479227801751977374117378740237552200236508042363
621170082157757466096887177582163694241770214180217570673239049678541644027339004433174032
164874029333268800779305009224018879414409972819455056788304611299059546927574067856746783
450015278344567818006037474779614779571631571443958849922672525076118783020809971873795279
879810520683366961007688488012893087201483019703077124655864585258213248892388254581473728
416916506601636052945790800622450830615746285089675223329567324378056717841903155148627125
055252000734229572316518128736759298057779517807067268278583586308080291714682504709351123
567562054326176126991669858823151732534603614173714579890568671540665977029562129940882293
467487305591757273109716630038940566874101406996581463681554279973042514405255437157639670
720402989203652767165497925932043969969049833474334741704432988992861781714348424911355517
500944459347069618189684811880455868919597010827279977346237069743980413844017344131956726
782609051116214179691401175365539939010682367974840176305664906248780175041187751799263158
155188355522657883178705558738159829003269541627820627944605805207614697509880724325600075
453300208372433354480061088416203438051071169787462617266195399974053965680998720854217440
795244262906865252482305477432065937180429061083513318668875619470495633262943399356690793
263115315007867160491838268748775654458658680397119595611335692556619214478900437384171403
748439140081026624640934367584752083971442589600225402565488704 : 253193883303393779555812
226498661010603850690344858946710798856463722422697003093290918666189413761376417896111137

340338870384183156504823961894159008508233591462089227099430180506367188988923078887426569
311886791162895363515116074143945764662474157195294599326904186899084494328352561528934463
719538050280555664459840609143728446826168560966799750527291456335276654274852783157276165
744723289320186922567516903312950805603728250505726206202766612997010327763114565175083149
563715178511401389104077828239652688395930738355449416492504224361902859127900916306489502
646097792496524104018953799153691340073026991376585891179183371129998297344420991614497473
077070785044316414646037859494056819218496721974735696742463658905857185993240717606189167
542775529674609912381056966900353311233117610872055317918973130529574322489360669089322509
065236340368116281437916671542707878128268572799498704637764446877462655162305685199277975
802947134869464868581133782144007808889574125814829889159071819163320095516636045296011715
063807925705132209178732408340330561155214461933211208756422787657181892916357109382378411
947483932015318320214922038426874436804996301465209589978084046607380643988249323726598832
980152976839168554908430290907465584948731312446435798348806567601000195054689879187715610
275036543117053004188385283409317591005215308153657846770852985596793074234106578406885695
894325369273965871845419178679065798323876164857166764674394483067414557218041917918149851
161288781199420163905057939614593263197313245006855429078898203945485814788632275274841145
689923823029321955846042537017688125024690733331987118038437340752969142380173540532076354
119963102676570132948204385797126630973698701560934170473650566668375692194759372971870694
862566503456649335797090532937911837336428759235961630649843636555535051871465720460150928
763317649433562041498462393955517657628973798022892916373143720988232023291157080385390234
155201885689015745447716189930776955663225536332958006867308384042327377114928123144878054
090132791030972870114333466059950826999484523021852323984053539248770915230506848963887626
361546670591771373745589526737057432087801906280472865850002667579082786160170127800458873
375853877129499945896964780763184835227767437000872283785400713202007664825979697967261190
675829613414419777067406351255514791617888720402670337112648585991171350850307172363973518
619912642323550144288100791391149112531240759549189866310719259119700173365749388133709380
266902747758663899516933745348744854889488340648405513755813691306270125177262832165381536
160021092435864259162683491218696392900249170596181172913798846441273352516557675738316792
256206826790731805259792576089757473304527678796552110713912243480707423303607715844146596
947026155982877119248928292682990818747087961218329016195102616774697782086464892136135478
601609272083088680637489607547646463479426024381308870785908330254788625865885161525533508
296905821751775290687148675756180620407324783253452171690310489516922347969150762543656754
556785295870557454200843109643099373946327263363734566175018125451389359812933017020760952
019685615170499387735374298111491807961169044100332851043063918784606985007297764672794041
917007400663189133141575311623091065111401790790360498016697082637567504335567467865794175
002687427743400622825974726067600849419293043506487162210606899912439535946968745622246043
811262829162583305450665682603872831246934769146674736841752085313127887102849505125208632
762529580485144424873269368124527204177592207473773790323960136596323128324606483330510699
618668232794747490942502427809374231306641144263996654650078430402073086477795685178979980
529778110280462732193891900776192111377672983033743368576096796513555336225521040087809415
385453381327525725803982545843364576157463958271559592022057872144213729476698643923699719
639040872613822047676078613992519290022975400712432685855139248055530089699979770466354401
820613260622307323242370560247305197612020041404588798455960125670269649071673897171634157
779831697943358781405864368626519313250875431516331947101663536080612302235721710259198078
129212935674426362716218301086133511375037351676248057199498352902073029331459881551551727
144430933706561463062086109326819009625347977671670465975920774620508346960696758096686133
350011550136376700947727474533620094972710368094198615700458520681635238581519080023765880
718304900822688387070200007833928701579176213533175811915117083394615664011434330098059996
756997307936631656545821192760465679861155605394383728076525154741046146235292458853334167
705027138308565207322202585463267387156459847337936339826675344172270100077787755207342182
532221158879605901673761039536624054345798919253420438786832400765988800689166694766890978

541983401088083293902186074710742400732854129368899990300640527660599764470408525810567992
202732131509140078780153579581666375449756596434372134684542310552945018549740877201100078
990852298734482930037862617884151087345637939164874567430539799975282723271582524853675523
871785550454510733571071726554130912421414907171422538143730017208768905783396188796263469
932077002231483200157939652468158727912256366610749041391573924720297724976357001874614268
058301510948696800546702053266526232525198313508463878075740147812863680582406424049412274
803518294010051354939051965212082796580022002044111629537408157139822835005490289988183089
431182579040691941351755193453312470625268782548791824610488501413106302588204014369120372
290499700564829944925975091349955844052106852117867864030810057519824451344117377278621959
635925949411458373268310405850658653662068578241411782265568900334204078840062315770379067
167210814871009719135065592345202875128338223058002651041451875959615150190132116219485765
42287023947353888554282055077211405754405555675467148791840890295859696275440048072176847
885436335330565954480481750817844542243392934110585473529116887358931498829010801545205046
214900220421774194710894382394850919031837388057129623056399346301608807489253417367312003
881886085506404373349988529008797126891448017929872644652520459765280393936451828626127389
251924969751700892229778429509811756524526591725571730213479805071553921052735463178879278
381361330110864229865053104983121475150393436038571165219805193302434333012893597576445232
848475562562505602950347217675163508880086266491100568240110657644359399317778860147145127
422877233836868465784784642708642027434658106233511378624464614251370832013900745870780855
911435432265452425599134115817451925930484754088931590638197295352205195579177303936195959
195350048428334206244564342144669251346333451703932591576468993342254397564325590112809906
70764996154422057341839403216917250386982316657553505874038731658597601111209605878762066
526200598733379229599401565871594506204581610443848355945334539406485189588522721597875338
637983802663197281105247583466811669215718194065756417855989220686717889462937570109365354
616708534743541354230299410400698006374569069879950645307815550453614446253477758906738977
911615129166081494574999304646372219112319735027334472691781356020852543851451444744638874
668502495425269572572052495487684896231983547332424386845658713184636344965833153771999141
153374375847677594217990435525103122976101884647186060279013504302274452140511208822216733
246251505025565278148491932665120771655090124805387645464080597095994954592431140824891005
693045634772980914937373870468470114512743726902493208584962058249524153804674019905727730
556057903918102312704670921751970165982506477448507950461601431460517623097815382977784313
806915000292110786932968092453224479304081932471990109951334220244932540093010647054866409
259235731586032502101916254327897995575892525856212730474306870203866705183876267805140642
522821351503918659166385481069978940529496621386635786223990928835998912342405088557355108
551359783874479924595457408564031571997973001948706717912462601561803434406654435372957665
559439819030918390388896899595044891986511312463200924171491937130034710828306608787207799
729263461050491134843158420036915149957311161821439526863500986065367798858384528526303300
49682396598130201481811430942124751150675361/108779494782177729037320368417135778961584302
687025429355953382681910935719695536743446932756367238211090244063781314579561162392178981
020981732119519382912168999750422934304918629263559163607897069007787440968551752777395172
418014438318055182852822639063522800900699353885422570601971823217445068275231766561368414
476672214675334104563656822057354714262028076467084665991024209278763426388541567050726675
378001451289417019521745745488103259221664243695102840176455569331560783651847941725873171
894286644033015211246245438169072475333550094134826122296438696318280775799584643791166763
382792916935916865026176008542435862526388485813353885224735712109211922578219047436885877
800565981952099976831289957943194719788803539107351661017496011748536821744791962951084858
052855511851593682933733931355254460338127863492806231536209875579253003722063259231544313
564353026571141022517276828957503233547809406730340331945179304389709770800038661822541777
085070317661924673200923793318666303608062935569745521607156144353876102178841388762444477
035322459840336573349232295111995464912711852618429954352517908928224422189321342311228877
835158586933517891526794265095600829079858840625655513694413861502624011069459191627028202

954324851164985952878451091879957439837613899048358677894129070901289799478714700010536789
774558687610185487077865403978848759683031397756816280846786695001960457043854660331832286
422760916963121120501029547255732770756239129186729673292440211692950570584604698440040426
915050685394086011864358414664888551114860148373793492762551269677836859218052055899896625
924060110565568006836424137347630566384503996134494224865244597296889835253823029166661393
538125604521560740267014514024169203701363572765034260006907270539086930032789984793823331
946148677637857441330126834629507422114741798635313294617990656574313832151601813705261121
295766083527941759404603070439064242743071102200711395349589723149905656753481786589519933
962214570709592630878682024399035072844817384807822027831999822679772809984479253863923350
025128495822123004247100979220307720437714828966651723493331513771978670526552150072305969
503342767814484849657147908517159153135596839585476228389448046856993126979257899182608294
931256811093623604155227098360183532097760427612863723032128109749336768611257893972494139
151764103778980343505484956065310141811829090901167843989755589336074396462956230240382992
247644841399015366334752828677395503486278179959169074872160580644970163293617635453209306
735177966871396467481114016355903811052951169111779110678655932932260145604085822103873304
112789330522397438863516974558407746797773429236741342768107016141968743056771589704039535
757816778446197538106524717932969880491572370767872878546351341614665072546422003657306167
707894169543868010544416770550802234310786629454089060609508339643488770483835209479513956
81658628818154190207913148472755743092947527658828965160952033455535951442276126061325494
215635963398669656613687879225072381507119914838593117827737619980454945460514729863649890
074308244039131816531504688870807713561418508778975045937214615580400015359957109140453732
544597887424578252080696312421697116125800165293065462551512137380477284310937236700935647
675496371644704710670418031074247472516848084344909415014992767416014356757195822866927158
214348031874734045923813335334705638616371046230273984977109970526811709164065307017355102
922303337841275673434242431272405783931711651307781806120539145240350738718801040091679383
217585601605642353634992914948733145029010339890950406076441372845376320907873654588890010
726693104071413052297870235032087807259954266667153805045871945821665153979830929009258424
384476012120220884067752784868044228214953248037220417358733121620033635724041299873131049
461517468048978531758251679077147251835447451560417358306839365225307597428278107068189254
581618554864398643488173566129514115690555278758819157445581806041472838042229826730922264
243660866707976411397748817664832439644126225657267289039390321068216639898485123510354700
145720927687771410923423919392534980258211686049382657951853729063299213533180717851496701
256836186520118556368879575347313376030841900989469980161894618688524463977338458522319596
962459001046728886131249047801355304291311358363916629801602480022391634123213424478323215
823825872998650457831226435295434841093803236919289561028553883081349882940688894361774845
453307075802775540472578994551703442182260818862693706879840682585112588220499064558205907
882229519994082367421628634431104770823861515132824661210487260234498879803300610983520571
178259248028455193707220055289968759273971507256842082278533497534348341622365566870400746
842979678048711213687205289088599122256761624498210323816694286903631861214096230924999204
883829906950421461533050649087390864639297370932966414240411681345179810591716464944685747
623088052500714957953090515164636957691094795153642156836127336549591368140675162834369756
531550995513158298866851884403362819517823540012118576212890626429886796767653398066639004
714185619503276348619393202162207240970279249548282397418834196724789581657878727228834367
169764692698353328286117134923404533065911046438062094145318163245201911414870218168120206
631339269450390880755559614816797612971851464781686781746544237135717697455369570666705763
696537838524780209679057209534212576218973525832564585650434228517522820590781399300182698
468574063155408155213261263993709813714993582031119542494146755238654440693138375857184816
011844259017211128257913629004395833765445506592811630618999900404059554559952191315744961
666949488201380731521183948525533108441586889821250264026767481741126559668741983503713009
617545623382732081722471921966926639496970406257059695050134402734358126368825426932671298
674919144857675799493213820633431103775310729317585070334301484626956542403306641819534925

```

855849312623459089047157740195890034154777659614762376328060711286792865845929019733644932
200199929159276389319094661250158438247207370814464928097826625264197029683414094024022650
669588119254137447180893987435177910729975689561150225058515445056979702052124971271954234
882198403312720847957466804756080909450523809928454159811442926849531011550523773931404861
724608799940704385057963454941497778244089989096533191062798023542397336713510615211606455
782460974614923387260201725413342233528149688625635031504217621084006322623203007223687582
306639826641478631221998276391793554788538987557419955030787679462566967242369165778589353
584125671107249806435071939281305203950685475534177082210459346211302615839174547792927109
483162756403211471811014593168150204882176433197685793994170894142961644798092521230678877
502025832716012042189192633630573248635719925078487096742058968459479972384279490551202495
218975774178004490616508672203410614704028514776957338937872308597671387367238537573174982
572163939048004869401215420080877886711255113387927536304295023995204051588495159875509215
822182561928031924608512387486726056144313564897987244477495675516365056483167109810333880
655985105848497467896734724049275386353465952383147724418482262666665655197817992685113251
500349473023227594854004851511016248245043361743942343927425673520917062807741749609239699
781802450434335415217926700344700271345336802647969905267209278764323064613269523594729896
156788361835107000899293641597002796046143518553072292045507505310371113115116334050741558
243251102573733512030106253041739818884027215788897035909895384500526471006889689621070713
421991933219508738319399300358916155877756994965422340767992986573388095709027165285802119
532525140624940345283832439257472700419241002132087940710497885388972165701758233531527580
879643102031135770016587004579126962156413026264297424044782026560234702180471715301843856
953978082933065986954430170936850913028071625239340173807805375333781348656510736357307486
222927637547504684032075404392351279647786622915030334674947107680781678648038206768681906
233678698906536795042938106596093735717779478458605669986176515269368796501234499981910138
664624879196906551588657594159026872789193517422417805059551423795454605175575373280946325
23409247373381788548608 : 1)

```

```
E = EllipticCurve([53,21])
```

```
%time v = E.gens()
```

```
CPU time: 0.50 s, Wall time: 0.21 s
```

```
v
```

```
[(1660/361 : 130491/6859 : 1)]
```

$$y^2 = x^3 - 7896$$

```
E = EllipticCurve('389a')
```

```
E = E.short_weierstrass_model(); show(E)
```

$$y^2 = x^3 - 3024x + 46224$$

```
E.gens()
```

```
[(-24 : 324 : 1), (12 : 108 : 1)]
```