

Nombre: _____

– Control de prácticas: Modelo 1 –

1. Se considera el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -9y, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

a) Escriba un programa python que resuelva la ecuación diferencial usando el método RK cuyo tablero de Butcher es:

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Indicación. Al ser lineal la ecuación diferencial, las ecuaciones a resolver para calcular las etapas $y_k^{(i)}$, $i = 1, 2$, son también lineales: despéjalas y use la expresión resultante en el programa. Puede usar el reverso de la hoja del enunciado para entregar la expresión del esquema.

b) Aplique el programa realizado al problema (1) en el intervalo $[0, 2]$ tomando particiones uniformes de $N = 10, 20, 40, 80, 160$ subintervalos. Calcule y ponga en pantalla los errores cometidos y estime el orden del método. Compare la gráfica de la solución exacta con las distintas aproximaciones numéricas obtenidas.

2. Se considera el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) = 2(y(t) - t)(y'(t) - 1), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 2, \end{cases} \quad (2)$$

cuya solución exacta es

$$y(t) = \tan(t) + t.$$

a) Resuelva numéricamente el problema en el intervalo $[0, 1.3]$. Para ello, escriba la ecuación diferencial de segundo orden en forma equivalente como un sistema de dos ecuaciones de primer orden y aplique el método encajado RK4(5), cuyo tablero de Butcher es:

$$\begin{array}{c|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12}{13} & \frac{1932}{2197} & -\frac{7200}{2197} & \frac{7296}{2197} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{439}{216} & -8 & \frac{3680}{513} & -\frac{845}{4104} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{8}{27} & 2 & -\frac{3544}{2565} & \frac{1859}{4104} & -\frac{11}{40} & 0 \\ \hline & \frac{25}{216} & 0 & \frac{1408}{2565} & \frac{2197}{4104} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \hline & \frac{16}{135} & 0 & \frac{6656}{12825} & \frac{28561}{56430} & -\frac{9}{50} & \frac{2}{55} \end{array}$$

Tome $h_0 = 2 \cdot 10^{-4}$, tolerancia $\epsilon = 10^{-5}$, paso mínimo $1.e - 5$ y paso máximo 0.1. Obtenga y ponga en pantalla:

- el error cometido;
- el tiempo de cálculo;
- los pasos mínimo y máximo utilizados;
- el número total de pasos.

Usando el comando subplot, dibuje en una única ventana gráfica:

- la gráfica de la solución exacta $y(t)$ y la aproximación obtenida;
- la gráfica de los pasos h_k utilizados frente al tiempo t_k .

¿Encuentra alguna razón que explique la evolución de los pasos de tiempo utilizados?

Instrucciones:

- Si no sabe hacer el ejercicio 1 con el método RK que se propone, utilice el método de Euler implícito. Si no sabe hacer el ejercicio 2, sustituya el problema de Cauchy por la ecuación de primer orden $y'(t) = 2 + (y(t) - t)^2$ con condición inicial $y(0) = 0$, cuya solución es la misma. En ambos casos, la puntuación será la mitad.
- Entregue la hoja de examen con su nombre. Entregue un único fichero **control.py SIN COMPRI-MIR** a través del campus. El fichero tiene que contener los programas hechos para resolver los ejercicios así como las instrucciones para ejecutarlos y los comentarios que quiera hacer.
- Separe las gráficas que corresponden a distintos apartados. Recuerde que se pueden crear nuevas ventanas gráficas desde el programa usando la instrucción:
`figure('Nombre ')`
 Esta instrucción crea una nueva ventana gráfica con el título Nombre.
- El fichero **control.py** tiene que estar hecho de manera que, cuando se ejecute (es decir, cuando se le da al triángulo verde en Spyder) se ejecuten los programas, salga en pantalla lo que se pide y se generen las gráficas que se piden **sin que sea necesario tener que quitar comentarios** o escribir líneas nuevas. **Sólo se evaluarán las partes del ejercicio que se ejecuten automáticamente al ejecutar el fichero:** si hay líneas de programa comentadas se interpretará que no se desea que sean corregidas, salvo que sean comentarios sobre los resultados.