Facultad de Ciencias – Universidad de Málaga
ANÁLISIS NUMÉRICO
3º de Grado en Matemáticas – Curso 2020/21

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

– Control de prácticas –

- La ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2-1)\frac{dx}{dt} + x = 0, \tag{1}$$

en la que μ es un parámetro positivo, fue propuesta por el ingeniero y físico Balthasar van der Pol para estudiar comportamientos oscilatorios en circuitos que usan válvulas de vacío.

---

1. Resuelva la ecuación (1) con $\mu = 2$ y condición inicial

$$x(0) = 2, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0,$$

en el intervalo $[0, 20]$. Para ello, reescriba la ecuación en forma equivalente como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden y aplique el método RK1(2) cuyo tablero es:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Use tolerancia $1.e-6$, paso mínimo $1.e-5$ y paso máximo 1. Usando el comando `subplot`, dibuje en una ventana tres gráficas en las que se muestre

- la gráfica de x frente a t;
- la trayectoria;
- el paso h frente a t.

Ponga en pantalla el tiempo de cálculo así como los pasos máximo y mínimo utilizados.

2. Resuelva la ecuación (1) con $\mu = 2$ y condición inicial

$$x(0) = 2, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0,$$

en el intervalo $[0, 20]$ usando el método del trapecio (que es el Adams-Moulton de 1 paso):

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f_k + f_{k+1}\right), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Use el método del punto fijo para calcular y_{k+1} tomando como semilla z_0 la aproximación que daría del método de Euler explícito en t_{k+1} partiendo de y_k en el tiempo t_k. Detenga el algoritmo cuando se verifique

$$|z_k - z_{k-1}| < 10^{-12}$$

e imponga 500 como máximo número de iteraciones. Aplique el método con $h = 0.1$ y, usando el comando subplot, dibuje en una ventana dos gráficas en las que se muestre

- la gráfica de x frente a t;
- la trayectoria.

Ponga en pantalla el tiempo de cálculo y el máximo número de iteraciones que ha necesitado el método de punto fijo para converger.

- La ecuación diferencial lineal
$$\frac{d^2u}{dt^2} + 6\frac{du}{dt} + u + 2 = 0, \tag{2}$$
se obtiene a partir de la de van der Pol con parámetro $\mu = 2$ al linealizar en $x = 2$, $x' = 0$. En consecuencia, si $x_\varepsilon(t)$ es la solución exacta de (1) con condición inicial
$$x_\varepsilon(0) = 2 + \varepsilon, \quad \frac{dx_\varepsilon}{dt}(0) = 0, \tag{3}$$
y $u_\varepsilon(t)$ es la solución de (2) con condición de contorno
$$u_\varepsilon(0) = \varepsilon, \quad \frac{du_\varepsilon}{dt}(0) = 0, \tag{4}$$
se espera que
$$x_\varepsilon(t) \approx 2 + u_\varepsilon(t) \tag{5}$$
si ε y t son próximos a 0.

---

3. El objetivo de este apartado es, para $\varepsilon = 0.1$, comparar la solución x_ε de (1) con condición inicial (3) con $2 + u_\varepsilon$, donde u_ε es la solución de la ecuación (2) con condición inicial (4). Para ello, reescriba ambas ecuaciones diferenciales en forma equivalente como sistemas de primer orden y aplique el método RK4 con paso $h = 0.05$ para resolver las ecuaciones en el intervalo $[0, 20]$. Ponga en pantalla el tiempo de cálculo correspondiente a uno y otro problema. Compare en una gráfica las aproximaciones obtenidas de $x_\varepsilon(t)$ con las de $2 + u_\varepsilon(t)$. ¿Para qué valores de t se verifica (5)?

4. Escriba la ecuación (2) en forma equivalente como un sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales:
$$Y' = AY + B,$$
siendo A una matriz 2×2 y $B \in \mathbb{R}^2$. Calcule los autovalores λ_1, λ_2 de la matriz A. Dibuje la región de estabilidad D_A del método RK4 y estime para que valores de h se tiene que
$$h\lambda_i \in D_A, \quad i = 1, 2.$$
Tomando $\varepsilon = 0.1$, resuelva la ecuación en el intervalo $[0, 20]$ con condición inicial (4). Para ello, aplique el método RK4 al sistema lineal con tres valores diferentes y próximos de h: uno para el que el producto de h por los valores propios de A esté fuera de la región de estabilidad absoluta, otra para el que estén aproximadamente en la frontera y otro para el que esté en el interior de la región de estabilidad absoluta. Compare las gráficas de u_ε obtenida con los diferentes valores de h y comente los resultados.

Instrucciones:

- Si se presenta a la **primera parte** tiene que hacer los problemas 1 y 3.
- Si se presenta a la **segunda parte** tiene que hacer los problemas 2 y 4.
- Si se presenta a las **dos partes** tiene que hacer los problemas 1 y 4.
- Si le sobra tiempo puede hacer los dos problemas que no le corresponden, o parte de ellos, para mejorar la nota final.
- Entregue un único fichero 'control.py'que contenga los programas hechos para resolver el Ejercicio así como las instrucciones para ejecutarlos y los comentarios que quiera hacer.

- Entregue el fichero ’control.pyá través del campus **SIN COMPRIMIR**, para evitar posibles problemas de descompresión.
- El fichero ’control.py’tiene que estar hecho de manera que, cuando se ejecute (es decir, cuando se le da al triángulo verde en Spyder) se ejecuten los progamas, salga en pantalla lo que se pide y se generen las gráficas que se piden **sin que sea necesario tener que quitar comentarios** o escribir líneas nuevas. **Sólo se evaluarán las partes del ejercicio que se ejecuten automáticamente al ejecutar el fichero:** si hay líneas de programa comentadas se interpretará que no se desea que sean corregidas, salvo que sean comentarios sobre los resultados.
- Las gráficas que corresponden a distintos apartados tienen que estar separadas.