Note sull' Operatore di Koopman

Isacco Faglioni

November 28, 2025

Contents

Chapter 1

Introduzione

La teoria dell'operatore di Koopmane nasce come un nuovo approccio legato allo studio di sistemi dinamici. L'idea nasce mentre Koopman lavora alle basi della meccanica quantistica. L'idea che da inizio a tutto e' quella di studiare sistemi classici attraverso gli osservabili come si fa in meccanica quantistica. Questo approccio e' fondamentalmente diverso dai precedenti e come vedremo in queste note porta con se benefici e problemi unici. Prima di inizare con la vera e propria teoria, e' opportuno fare un breve recap dei 3 approcci storicamente (e tuttora) usati per lo studio dei sistemi dinamici.

- **Newton**: $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ descrive lo stato del sistema. L'evoluzione è governata dal sistema dinamico:
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \tag{1.1}$$
con $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ campo vettoriale che descrive l'evoluzione del sistema. Se risolvo l'equazione per $\mathbf{x}(t)$ usando il vincolo e fisso una condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ ottengo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}_0, t)$. $\mathbf{S}$ prende il nome di flusso e di solito viene vista come una funzione del tempo parametrizzata nella seguente maniera: $\mathbf{S}^t(\mathbf{x}_0)$ porta il sistema da $\mathbf{x}_0$ al tempo 0 a $\mathbf{x}(t)$ al tempo t.

- **Poincaré**: Poincaré si rende conto che ci sono sistemi per cui l'approccio di Newton non funziona, ad esempio per il problema dei 3 corpi l'equazione della dinamica non ha soluzioni analitiche. Cambia modo di guardare il problema e si rende conto che si può dire molto su un sistema dinamico studiando la parte destra dell'eq 1.1. Questo approccio tende a essere quello preferito dai fisici e dalla teoria di Poincaré derivano le principali nozioni di interesse per un sistema dinamico: punti fissi $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, orbite periodiche $\mathbf{x}(t + \tau) = \mathbf{x}(t)$, varietà stabili o instabili, mappe di Poincaré. Da questa teoria deriva anche il concetto importante per l'approccio operatoriale di **invariante**: quantità che rimangono costanti lungo l'evoluzione, $I(\mathbf{x}(t)) = I(\mathbf{x}_0)$ per ogni t. Gli invarianti hanno sempre un significato fisico (energia, momento angolare, carica) e caratterizzano la dinamica del sistema.
Un problema ababstanza grosso e' pero' che quando aumentano i gradi di liberta' si incontrano difficolta'. La geometria di uno spazio molto alto dimensionale e' un bordello e non si puo' manco visualizzare.

- **Wiener**: Dei tre decisamente il meno comune ma comunque molto utilizzato in problemi concreti. Me ne frego di definire un modello per il mio sistema dinamico e mi limito a osservare i dati che misuro. Una volta che ho preso i dati in ingresso e uscita guardo lo spettro di frequenze del mio sistema e come si comporta. E' giusto citare questo approccio perche' la teoria del controllo e' costruita principalmente su questa roba qua, per quanto riguarda la teoria degli operatori interessa abbastanza poco.

Conoscere le basi della teoria dei sistemi dinamici è fondamentale per avere un punto di appoggio solido nell'approccio operatoriale. Il caldo consiglio che do e' che prima di buttarsi a leggere le note di un dottorando uno si concentri piu' che altro su questi libri scritti da mostri sacri [3], [1]

Approccio di Koopman

L'approccio di Koopman e' completamente differente da un punto di vista concettuale. Invece che studiare direttamente la dinamica del sistema si studia la dinamica di uno spazio di funzioni sul sistema. Il vantaggio che si trae da cio' e' che l'operatore che descrive l'evoluzione degli osservabili e' lineare, quindi si possono sfruttare tutte le conoscenze della dinamica di sistemi lineari a sistemi che in generale non lo sono. Lo svantaggio e' che lavorando in uno spazio funzionale questo operatore spesso e' infinito dimensionale perche' ho infinite funzioni scalari che vanno dallo spazio del mio sistema dinamico a $\mathbb{R}^n$.

L'idea e' vecchissima (1931) [2], e' soggetta a nuovo interesse perche' stanno nascendo recentissimamente delle tecniche in grado di approssimare molto bene numericamente questo operatore partendo da misure di un sistema dinamico.

Chapter 2

Teoria di Koopman: basi teoriche

La teoria di queste cose è veramente ricchissima e richiede nozioni di matematica avanzata che attualmente mi mancano. In ogni caso sono stato in grado di seguire le lezioni di I. Mezić e ho provato a comprendere di cosa si parla anche da un punto di vista non così superficiale. In ogni caso qualora uno volesse davvero diventare un drago e affrontare sta disciplina come dio comanda servono:

- **Analisi funzionale**: teoria degli spazi di Hilbert e Banach, operatori lineari (limitati e illimitati), teoria spettrale, operatori compatti e autoaggiunti
- **Teoria della misura**: spazi di misura, teoria ergodica, misure invarianti, trasformazioni che preservano la misura
- **Sistemi dinamici**: teoria qualitativa dei sistemi dinamici, stabilità, varietà invarianti, teoria del chaos
- **Geometria e topologia differenziale**: varietà differenziabili, campi vettoriali, forme differenziali, fibrati
- **Analisi armonica**: trasformata di Fourier, teoria delle rappresentazioni (almeno le basi), analisi spettrale
- **Equazioni alle derivate parziali**: teoria dei semigruppi, problemi di Cauchy, equazioni di evoluzione

Noi ci buttiamo comunque e vediamo cosa ne salta fuori :)

2.1 Osservabili e operatori evoluzione

Prendiamo un sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ definito su uno spazio delle fasi $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ in generale puo' essere un oggetto abbastanza complicato, ma per ora si puo' pensare (e spesso nelle applicazioni e') un qualche $\mathbb{R}^n$.
Un **osservabile** e' definito come una funzione:

$$\mathbf{g} : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{C}^n \tag{2.1}$$

Chiaramente se riprendo il flusso di un sistema dinamico $\mathbf{S}$ si ha che l'osservabile segue l'evoluzione di un sistema dinamico a partire da $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{g}(\mathbf{S}^t(\mathbf{x}_0))$. Da questo posso definire una famiglia di operatori che agiscono sullo spazio degli osservabili e che descrivono la loro evoluzione nel tempo:

$$\mathbf{U}^t[\mathbf{g}](\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}(\mathbf{S}^t(\mathbf{x}_0)) \tag{2.2}$$

Se $\mathcal{M}$ e' un oggetto matematico continuo (non rigoroso, ma si capisce cosa si intende) allora gli operatori chiaramente sono oggetti infinito dimensionali, perche' su un continuo posso definire infinite funzioni (Questa roba qua e' spiegata da culo). La proprieta' forse piu' importante di tutte di questi operatori e' che sono **lineari**.

Proposizione 2.1.1 (Linearità degli operatori di evoluzione). *Gli operatori* $\mathbf{U}^t$ *definiti da*

$$\mathbf{U}^t[\mathbf{g}](\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}(\mathbf{S}^t(\mathbf{x}_0))$$

sono lineari sullo spazio degli osservabili.

Proof. Un operatore è lineare se soddisfa:

1. **Additività**: $\mathbf{U}^t[\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2] = \mathbf{U}^t[\mathbf{g}_1] + \mathbf{U}^t[\mathbf{g}_2]$

2. **Omogeneità**: $\mathbf{U}^t[\alpha\mathbf{g}] = \alpha\mathbf{U}^t[\mathbf{g}]$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$

Additività: Consideriamo due osservabili $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 : \mathcal{M} \to \mathbb{C}^n$ e un punto iniziale $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^t[\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2](\mathbf{x}_0) &= (\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2)(\mathbf{S}^t(\mathbf{x}_0)) \\ &= \mathbf{g}_1(\mathbf{S}^t(\mathbf{x}_0)) + \mathbf{g}_2(\mathbf{S}^t(\mathbf{x}_0)) \\ &= \mathbf{U}^t[\mathbf{g}_1](\mathbf{x}_0) + \mathbf{U}^t[\mathbf{g}_2](\mathbf{x}_0)\end{aligned}$$

Omogeneità: Consideriamo un osservabile $\mathbf{g} : \mathcal{M} \to \mathbb{C}^n$, uno scalare $\alpha \in \mathbb{C}$ e un punto iniziale $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^t[\alpha\mathbf{g}](\mathbf{x}_0) &= (\alpha\mathbf{g})(\mathbf{S}^t(\mathbf{x}_0)) \\ &= \alpha \cdot \mathbf{g}(\mathbf{S}^t(\mathbf{x}_0)) \\ &= \alpha \cdot \mathbf{U}^t[\mathbf{g}](\mathbf{x}_0)\end{aligned}$$

□

Vale la pena sottolineare che l'operatore agisce fra due spazi funzionali:

$$\mathbf{U}^t : \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{C}^n) \to \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{C}^n)$$

dove $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{C}^n)$ è lo spazio delle funzioni (osservabili) $\mathbf{g} : \mathcal{M} \to \mathbb{C}^n$.

Quindi se anziche' studiare la dinamica del sistema $\mathbf{x}$ studio la dinamica degli osservabili $\mathbf{g}$ posso usare tutte le tecniche spettrali che usavo nell'analisi di sistemi lineari. Il problema e' appunto approssimare bene questo operatore $\mathbf{U}$ infinito dimensionale. Questo sara' visto piu' avanti, per ora ci si concentra sul fatto che l'operatore sia lineare e sul che struttura abbia il suo spettro.

2.2 Autofunzioni

Le autofunzioni di $\mathbf{U}^t$ sono osservabili $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}^n$ che soddisfano:

$$\mathbf{U}^t[\phi](\mathbf{x}_0) = e^{\lambda t}\phi(\mathbf{x}_0), \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{M} \tag{2.3}$$

dove $\lambda \in \mathbb{C}$ è l'autovalore associato. E' ora utile vedere un caso semplice:

Esempio 2.2.1 (Sistema stabile)**.** *Consideriamo il sistema dinamico:*

$$\dot{z} = -\lambda z, \quad \lambda > 0$$

con condizione iniziale $z(0) = z_0$, si ha $z(t) = \mathbf{S}^t(z_0) = e^{-\lambda t} z_0$. Prendo $\phi(z) = z$:

$$\mathbf{U}^t[\phi](z) = \mathbf{S}^t(\phi(z)) = \mathbf{S}^t(z) = e^{-\lambda t} z$$

Dunque ϕ e' autofunzione con autovalore λ.

Il risultato ottenuto nell'esempio e' generalizzabile (non lo faccio per ora) a tutti i sistemi lineari. Con cio' intendo che gli autovalori di $\mathbf{A}$ (matrice associata al sistema lineare) sono anche autovalori di $\mathbf{U}$. Una ulteriore proprieta' importante delle autofunzione puo' essere vista sull'esempio 2.2.1

$$\phi(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$\mathbf{U}^t[\phi](z) = \mathbf{S}^t(\phi(z)) = \mathbf{S}^t(z^n) = e^{-\lambda t} z^n$$

Ossia anche la moltiplicazione di una autofunzione per se' stessa e' autofunzione. Questa proprieta' e' molto forte a vale la pena generalizzare.

2.2.1 Proprieta' algebriche delle autofunzioni

Chapter 3

Applications

Your applications content here.

Bibliography

[1] Vladimir Igorevich Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] Bernard O Koopman. Hamiltonian systems and transformation in hilbert space. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 17(5):315–318, 1931.

[3] Lev Davidovich Landau and Evgeny Mikhailovich Lifshitz. *Mechanics*, volume 1. Pergamon Press, 1960.