Introduzione alle instabilita' termoacustiche

Isacco Faglioni

December 17, 2025

Contents

Introduzione

Queste note sono il frutto di un primissimo approccio alla discipllina *Thermoacustic instabilities*. E' un campo della combustione difficile, ma abbastanza figo che combina appunto la combustione con la teoria del controllo e la teoria dei sistemi dinamici non-lineari e in parte lineari. Nonostante Soledad dica che non ci sia spazio per Koopman in questo campo non sono convintissimo, e in ogni caso da questa primissima introduzione mi sembra un problema interessantissimo in generale anche per altri approcci.

Queste note altro non sono che la bella degli appunti presi seguendo il corso di Jacqueline O'Connor alla Princeton summer school del 2024. Le 6 ore di lezione sono su youtube al seguente link: `https://www.youtube.com/watch?v=PhyY9HYRz8A&list=PLbInEHTmP9VZ_etKwZZvrVutA7F4YN2h1`

Le lezioni sono pensate per persone interessate alla combustione ma con nessuna conoscenza pregressa su termoacustica. Gli obbiettivi principali che si pone sono i seguenti:

- Capire le tecnologie per cui le instabilità combustive sono importanti
- Descrivere il coupling termo-acustico
- Speigare la cinematica di fiamma e la risposta di essa a input armonici
- Definire e capire le basi della *Flame transfer function*
- Spiegare la risposta di fiamma e come essa e' legata alle instabilita'

Queste note sono solo la base, se il lavoro prosegue ha senso ampliarle o direttamente scrivere delle note dove la parte fisica e tecnica e' approfondita meglio.

Overview delle combustion instabilities

Le combustion instabilities sono un problema enorme in un sacco di ambiti: razzi, turbine a gas di ogni tipologia e anche fornaci industriali. Sono responsabili di danni gravissimi agli apparati combustivi, fra cui in alcuni casi anche la distruzione degli stessi. Le instabilita' causano danni economici, aumentano le emissioni e soprattutto riducono il range di instabilita'. In figura 1 e' riportato un apparato usato per testing e quindi disgtrutto da instabilita' termoacustiche.
Nella pratica e' raro che si arrivi al punto di distruggere un apparato combustivo (succede pero' eh), quello che succede e' che i range di operatibilita' degli apparati sono estremamente ridotti per evitare di entrare in zone pericolose in cui potrebbe succedere. Le instbilita' termoacustiche si presentano tutte le volte che una fiamma si trova in uno

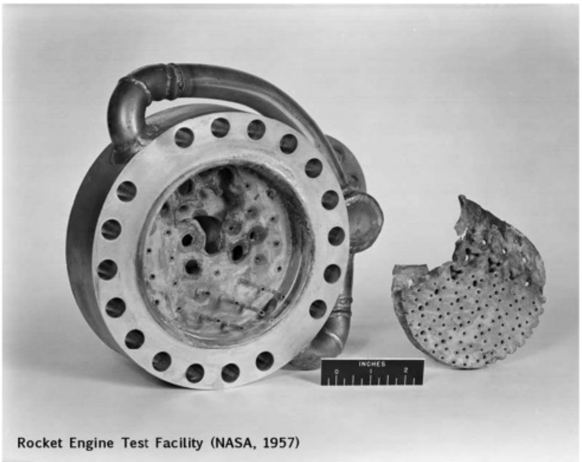

Figure 1: Apparati combustivi danneggiati da instabilità termoacustiche.

spazio chiuso. E' proprio per questo che e' un problema di cosi' larga scala. Nei laboratori che ricercano sta roba si testano dalle propulsioni dei razzi alle caldaie da casa. Un ottimo libro che riporta vari casi reali di instabilita' e come sono stati affrontati nella pratica e' [1].

Chapter 1

Acustica

Il processo riguarda l'acustica, quindi un breve ripassino delle nozioni basi di acustica e' una buona idea.

Un'onda e' una trasmissione di energia senza trasmissione di massa. Le onde possono essere trasversali (come le onde elettromagnetiche) o longitudinali. Le onde sonore sono onde longitudinali. Le onde longitudinali si chiamano cosi' perche' la vibrazione o oscillazione avviene nel verso di propagazione dell'onda, la figura 1.1

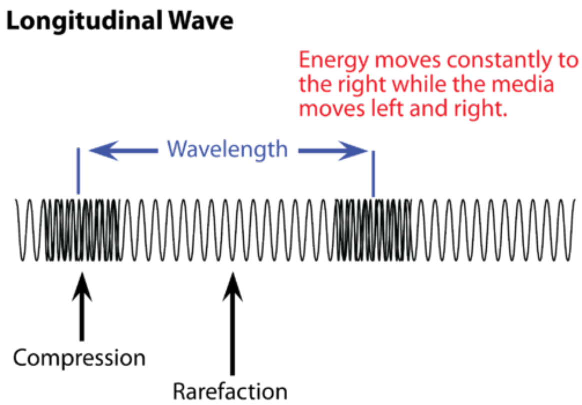

Figure 1.1: Visualizzazione onda longitudinale

Il suono e' un'onda di pressione, pero' puo' essere pensata anche come un onda di velocita'. (Le zone del gas a bassa pressione si muovono ad alta velocita e viceversa. DA RIVEDERE) Le instabilita' sono problemi in generali molto difficili da affrontare anche nella loro forma piu' semplice. Pertanto in queste prime note ci limitiamo a considerare il caso di perturbazioni *"lineari"* ossia piccole rispetto alla fiamma $\Longrightarrow$ no esplosioni o shock. Le perturbazioni vengono dette *lineari* poiché, assumendone l'ampiezza sufficientemente piccola, è possibile linearizzare attorno allo stato di base (la fiamma). Trascurando i termini non lineari di ordine superiore nella perturbazione, il problema risultante è lineare nella variabile perturbata. In caso di problemi di questo tipo, il suono si espande isotropicamente, ossia in maniera uguale in tutte le direzioni seguendo:

$$c^2 = \gamma RT, \ \gamma = \frac{c_p}{c_v} \tag{1.1}$$

Come tutte le onde, le onde sonore soddisfano l'equzione d'onda (ricordi di Maurone nazionale e il suo corso di fenomeni ondulatori):

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2}$$

Se dopo una magistrale in fisica hai effettivamente bisogno di rimetterti a studiare la funzione d'onda e' il caso di cambiare vita, quindi ci metto proprio una discussione piccola piccola per rinfrescare la memoria. Nel caso 1D:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \implies p(x,t) = f(ct+x) + g(ct-x) \tag{1.3}$$

La soluzione e' una funzione che si evolve avanti e indietro nella direzione x e solo avanti nel tempo. Una famiglia di funzioni che soddisfa queste condizioni e' quella delle funzinoi armoniche $e^{i\theta}$, dunque:

$$p(x,t) = Re\{(p_+ e^{ikx} - p_- e^{-ikx})e^{-i\omega t}\} \tag{1.4}$$

Spesso in acustica si preferisce lavorare nel dominio della trasformata di Fourier. Nel nostro caso specifico di instabilita' termoacustiche e' ancora piu' comodo perche' e' qualcosa che viene bene anche per la teoria del controllo. L'equazione d'onda nel dominio di Fourier diventa una ODE:

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} - k^2\hat{p} = 0,\ k = \frac{\omega}{c},\ \omega = 2\pi f \tag{1.5}$$

$$\hat{p}(x,t) = \hat{p}_+ e^{ikx} + \hat{p}_- e^{-ikx} \tag{1.6}$$

Da questa brevissimissimima discussione, si puo' vedere da un punto di vista matematico il concetto di **Risonanza**, attorno a cui gira tutto il problema legato alle instabilita' termoacustiche.

1.1 Risonanza

La risonanza e' definita come il fenomeno per cui, in un sistema oscillante, l'ampiezza delle oscillazioni indotte da una sollecitazione esterna assume valori molto elevati. Questo fenomeno e' spiegabile da un punto di vista matematico dall'equazione 1.5 a cui viene aggiunta una forzante periodica. Consideriamo un tubo di lunghezza L aperto in $x = 0$ e chiuso in $x = L$, sottoposto a una forzante armonica. L'equazione d'onda forzata nel dominio di Fourier diventa:

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} + k^2\hat{p} = -\frac{F_0}{c^2}\delta(x - x_0) \tag{1.7}$$

dove F_0 rappresenta l'ampiezza della forzante posizionata in x_0.
Le condizioni al contorno sono:

$$\hat{p}(0) = 0 \quad \text{(estremità aperta)} \tag{1.8}$$

$$\left.\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \quad \text{(estremità chiusa)} \tag{1.9}$$

La soluzione puo' essere espressa come serie sui modi normali del sistema:

$$\hat{p}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \tag{1.10}$$

dove i numeri d'onda naturali sono $k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$, corrispondenti alle frequenze di risonanza:

$$\omega_n = ck_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2L} \tag{1.11}$$

Sostituendo nell'equazione forzata e applicando l'ortogonalità delle funzioni seno, si ottiene l'ampiezza di ciascun modo:

$$A_n = \frac{F_0}{c^2}\frac{\sin(k_n x_0)}{k_n^2 - k^2} \tag{1.12}$$

Questa espressione puo' essere riscritta come:

$$A_n = \frac{4F_0L^2}{(2n-1)^2\pi^2c^2}\frac{\sin(k_n x_0)}{1-(\omega/\omega_n)^2} \tag{1.13}$$

1.1.1 Divergenza all'esatta frequenza di risonanza

Dall'equazione (1.13) si osserva che quando la frequenza di eccitazione ω si avvicina a una delle frequenze naturali ω_n, il denominatore tende a zero:

$$\lim_{\omega\to\omega_n} A_n = \lim_{\omega\to\omega_n} \frac{4F_0L^2}{(2n-1)^2\pi^2c^2}\frac{\sin(k_n x_0)}{1-(\omega/\omega_n)^2} \to \pm\infty \tag{1.14}$$

La divergenza rappresenta la risonanza ideale: in assenza di smorzamento, l'energia fornita dalla forzante si accumula indefinitamente nel modo risonante, e l'ampiezza delle oscillazioni cresce linearmente nel tempo fino a valori infiniti.

NOTA: la sezione sulla risonanza l'hai fatta scriver a claude quindi da rivedere

1.2 Risonanza di un cilindro

In particolare per un cilindro pieno di gas ci sono 3 modi oscillatori:

- **Longitudinale**: tipicamente descritto da seni e corrispondenti
- **Radiale**: tipicamente descritto da funzioni di Bessel
- **Azimutale**

La figura 1.2 li visualizza tutti e 3 in maniera chiara:

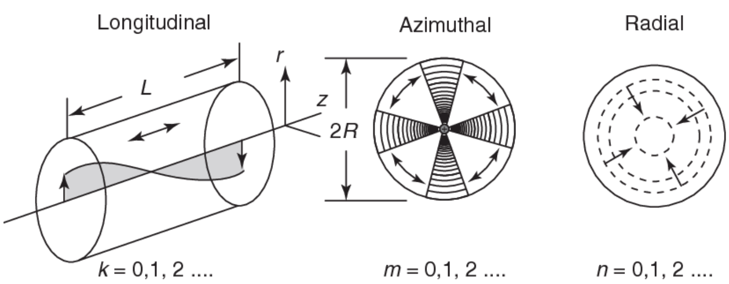

Figure 1.2: Modi vibrazionali di un cilindro

Chapter 2

Coupling

Bibliography

[1] Timothy C Lieuwen and Vigor Yang. *Combustion instabilities in gas turbine engines: operational experience, fundamental mechanisms, and modeling*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.