## Subtema 1.4 Aplicaciones de los principales lugares geométricos

Es muy común encontrar en la bibliografía de lo que se conoce como geometría aplicada, construcciones geométricas o enlaces, diferentes casos que se pueden presentar para unir, por ejemplo, dos circunferencias por medio de otra circunferencia que sea tangente a ellas, de esta forma se analizan diferentes posibilidades de unión y posteriormente el alumno las practica y cuando tenga necesidad de aplicarlas identifica el caso de que se trate y lo repite en su aplicación. Así es cotidiano encontrarse con alumnos que al tener un problema de aplicación de enlaces, tengan su variedad de casos en hojas aparte e identifiquen cual de ellos es el que necesitan para el caso de aplicación que requieren en ese momento, hasta que los memorizan y ya no tienen necesidad de sacar las hojas con sus casos. En las presentes notas no se trabajará de esa forma, en su lugar se hará uso del concepto de **lugar geométrico** del cual el alumno ya tiene noción, y en lugar de memorizar y aplicar, tendrá que hacer un análisis del enlace a realizar a partir de la comprensión de los lugares geométricos más comunes.

En los primeros semestres de estudio de cualquier ingeniería se analizan las cónicas, de las cuales los alumnos aprenden a identificarlas, obtener sus ecuaciones, puntos importantes e inclusive hacer un trazo aproximado de ellas en el plano cartesiano.
La obtención de las cónicas se hace a partir de hacer planos de corte en un cono de base circular cuyo eje es perpendicular a dicha base, de esta forma si se hace pasar un plano de corte perpendicular al eje se obtiene una circunferencia, que la definimos como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro, a la distancia se le conoce como radio.

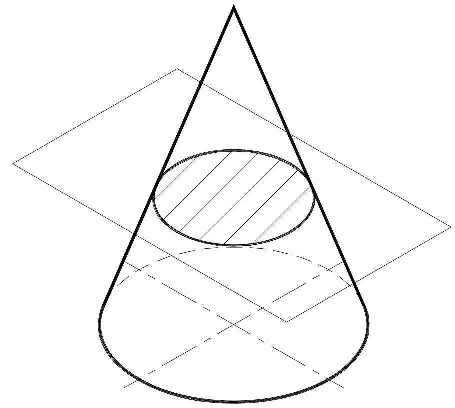


*Figura 31 Circunferencia como lugar geométrico*

La elipse se obtiene al pasar un plano de corte con un ángulo diferente al que forma la generatriz con el eje, y que esté entre cero y noventa grados, y la definimos como el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

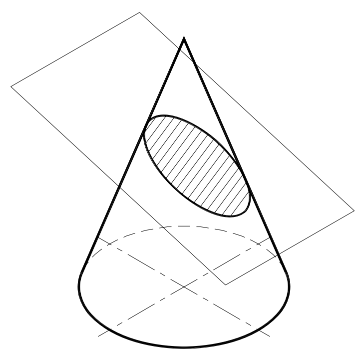


*Figura 32 Definición de elipse*

Si el ángulo del plano de corte es igual al que forma la generatriz con la base, se genera la parábola, que la definimos como el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia a un punto fijo es igual a su distancia a una recta fija, al punto fijo le llamamos foco y a la recta directriz.

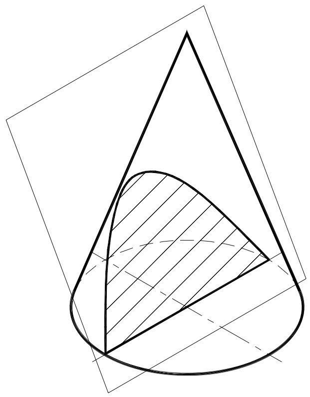


*Figura 33 Definición de parábola*

Si el plano de corte es paralelo al eje del cono se genera la hipérbola, que la definimos como el lugar geométrico de todos los puntos, tal que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es una constante positiva, a los puntos fijos les llamamos focos.

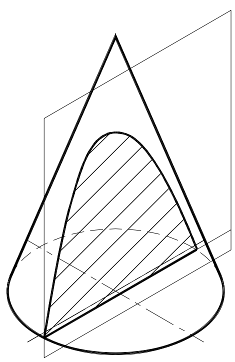


*Figura 34 Definición de hipérbola*

El concepto importante a tomar del estudio de las cónicas, en nuestro caso es el de *lugar geométrico*; los siguientes lugares geométricos que definiremos serán aplicables únicamente a circunferencias. El primer lugar geométrico que definiremos será el de **mediatriz**, que es el lugar geométrico de todos los puntos en donde, al hacer centro con el compás se toca a los dos extremos de un segmento de recta, dicho de otra forma, si quiero hacer pasar una circunferencia que pase por dos puntos, necesariamente su centro deberá alojarse en la mediatriz de la recta que los une.

Así decimos que **el lugar geométrico para un punto, es una circunferencia de radio R**, porque cumple con la condición de que, donde haga centro en la circunferencia, con un radio R puedo trazar una circunferencia que pase por el punto.

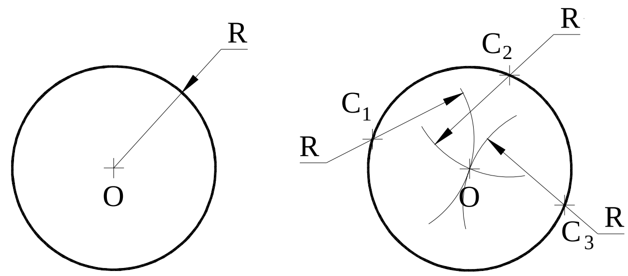



*Figura 35 Lugar geométrico para un punto*

Definimos como **el lugar geométrico para dos puntos** A y B cualesquiera, **la mediatriz del segmento que los une**, porque cumple con la condición que, en donde se haga centro en la mediatriz, se puede trazar un arco de circunferencia que pase por los puntos A y B.
La mediatriz se puede obtener trazando con las escuadras por los extremos A y B dos líneas que formen el mismo ángulo con AB, por el punto donde se cortan estas líneas (I) se traza una perpendicular a AB que es la mediatriz buscada. En la figura 36 se ilustran tres diferentes circunferencias con sus respectivos centros.

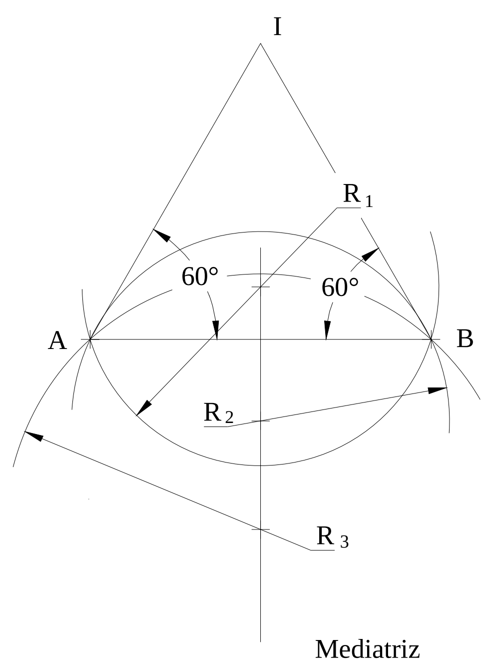



*Figura 36 Lugar geométrico para dos puntos.* ***Mediatriz***

De esta forma si nos piden trazar una circunferencia de radio R que pase por los puntos A y B, obtenemos la mediatriz de dichos puntos, y haciendo centro en uno de ellos, trazamos una circunferencia con el radio R que se nos pide y que corte a la mediatriz, identificado en la figura como $C_1$, y este será el punto en donde debe hacerse centro para el trazo de la circunferencia pedida. Evidentemente si la circunferencia pedida no corta a la mediatriz, entonces no existe solución.

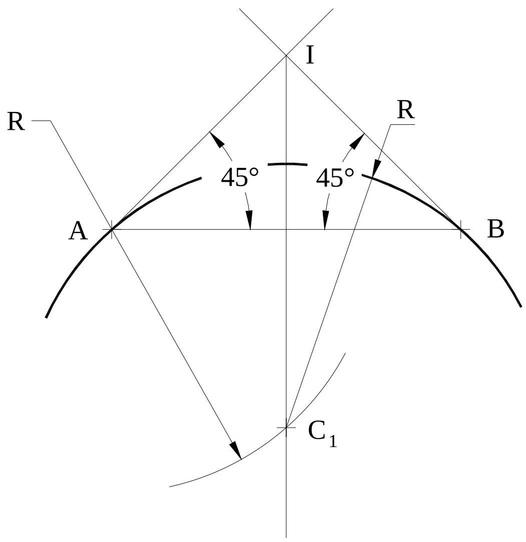



*Figura 37 Circunferencia que pasa por dos puntos*

Sabemos que por tres puntos se puede hacer pasar una circunferencia. Sean los puntos A, B y D los puntos por los que se requiere hacer el trazo; también sabemos ya que el lugar geométrico para dos puntos es la mediatriz del segmento que los une, así trazamos la mediatriz de A y B, $M_1$ en la figura, con lo que ya podemos trazar una circunferencia que pase tanto por A como por B; si ahora trazamos el lugar geométrico para los puntos B y D, que desde luego es la mediatriz del segmento que los une, $M_2$ en la figura; ambas mediatrices se intersecan, por lo que la intersección de estos lugares geométricos C en la figura, es la solución buscada, dado que la distancia AC es congruente con la distancia BC; y ésta última es congruente con la distancia DC, con lo cual ya podemos trazar la circunferencia pedida. Nótese que no es necesario trazar la mediatriz de AD para el trazo de la circunferencia, ya que necesariamente deberá pasar por la intersección de las mediatrices trazadas anteriormente.

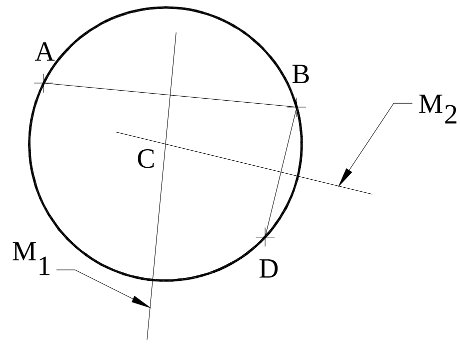



*Figura 38 Circunferencia que pasa por tres puntos*

Consideremos una línea curva cualquiera, AB, si unimos estos dos puntos por medio de una recta, ésta recibe el nombre de secante, Si fijamos el punto A y definimos un punto $B_1$ más cercano a A sobre la curva con relación a B, podemos trazar una nueva secante, y así sucesivamente hasta hacer coincidir el punto Bn con el punto A, en este instante, la recta recibe el nombre de recta tangente, que toca en uno y en sólo un punto a la curva, en nuestros análisis solemos definirlo como Punto Tangencia y denotarlo por PT, si ahora consideramos tres puntos de la curva muy cercanos, por estos tres puntos podemos hacer pasar una circunferencia que prácticamente coincide con nuestra curva, al valor del radio de la circunferencia se le conoce como radio de curvatura. Ahora bien, si por el PT trazamos una perpendicular recibe el nombre de Normal que contiene al centro de curvatura.

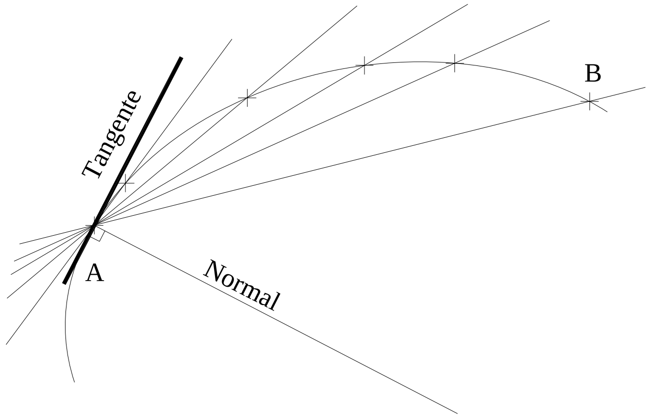



*Figura 39 Recta tangente y recta normal*

Definiremos entonces a la **normal** como **el lugar geométrico de todos los puntos que contienen a las circunferencias que son tangentes a una recta en un punto de ella,** en este caso A; la normal y la tangente son perpendiculares y la normal contiene al centro del arco de curvatura.

Supongamos ahora que tenemos un plano inclinado y sobre él colocamos un cilindro de base circular, con la base perpendicular al plano como se indica en la figura 40 , desde un punto de vista teórico, la circunferencia que representa al cilindro toca en uno y en un sólo punto al plano, este punto es el punto de tangencia $PT_1$; un instante después, el cilindro estará en una posición diferente y el cilindro estará tocando al plano en otro punto $PT_2$, y así en diferentes instantes. Por otro lado, el centro de la circunferencia describirá una línea como se muestra en la figura, que resulta paralela al plano inclinado separada una distancia R que es el radio de la circunferencia de la base. De esta forma definimos como **el lugar geométrico para una recta, otra recta paralela separada una distancia R,** porque satisface la condición, de que donde se haga centro sobre la recta, se puede tocar tangencialmente a la recta dada.

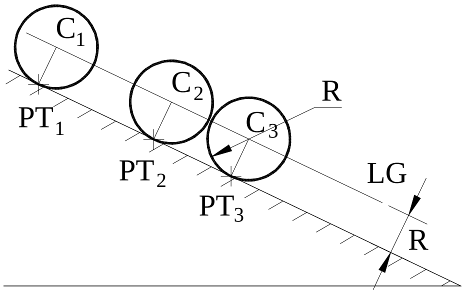



*Figura 40 Lugar geométrico para una recta*

Si nos piden trazar un arco de circunferencia de radio R que sea tangente a una recta y que pase por un punto dado A en este caso, *figura 41*,

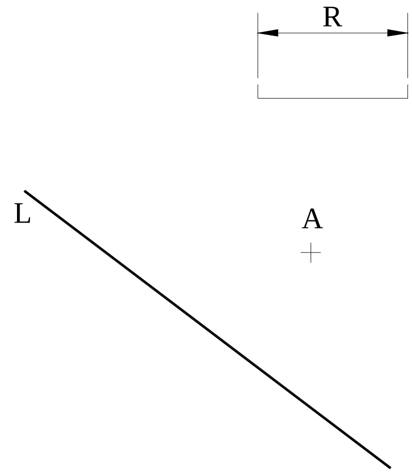



*Figura 41 Datos para trazar una circunferencia tangente a una recta dada*

Lo que hacemos es analizar lo que podemos trazar; sabemos que el lugar geométrico para un punto es una circunferencia, de esta forma trazamos una circunferencia del radio R que nos piden con centro en el punto A, y que identificamos en la figura 42 como $LG_1$, podemos hacer centro en esta circunferencia y con toda seguridad sabemos que si trazamos una circunferencia con el radio pedido tocará al punto A. También sabemos que el lugar geométrico para una recta es otra recta, en este caso trazamos la paralela a la distancia R identificada en este caso como $LG_2$, y con toda seguridad sabemos que si trazamos una circunferencia con centro en la paralela, será tangente a la recta que nos piden. La intersección de los lugares geométricos identificados como $C_1$ y $C_2$ en la figura, satisface la condición pedida ; en este caso se muestran las dos soluciones, para el caso de una aplicación en particular bastaría saber cuál de las dos es la que necesitamos. Para terminar, una vez obtenida la intersección de los lugares geométricos se traza la perpendicular a la recta que pase por $C_1$ o $C_2$ según sea el caso, y en la intersección con la recta dato se determina el punto de tangencia, hasta ese momento se traza el arco pedido.

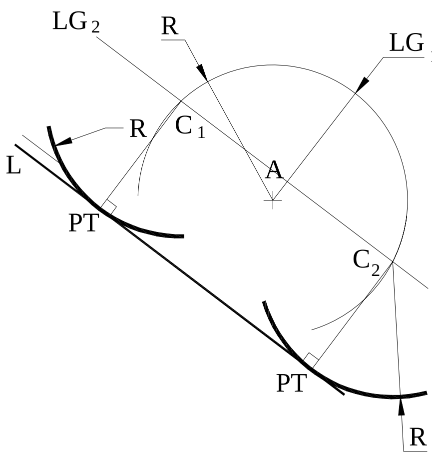



*Figura 42 Arcos tangentes a una recta*

Si se desea trazar una circunferencia de radio R tangente a otra circunferencia dada de radio T, basta con trazar una circunferencia concéntrica de radio R+T, y uniendo cualquier punto de esta nueva circunferencia, C en la figura, con el centro de ambas se determina el punto de tangencia para posteriormente trazar el arco pedido de radio R.

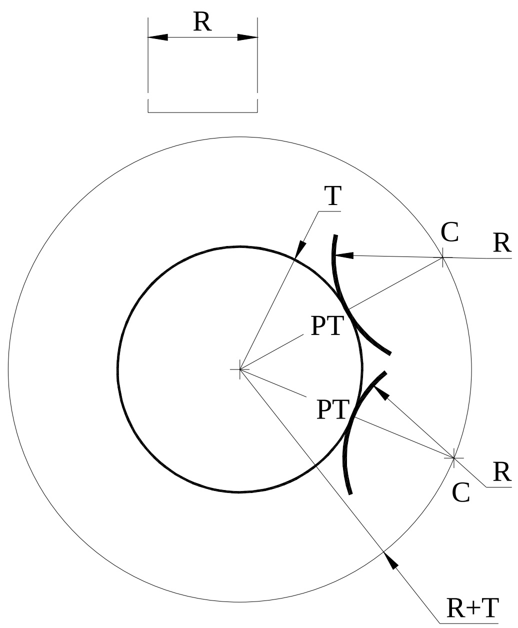



*Figura 43 Arcos tangentes a una circunferencia*

Establecemos entonces que **el lugar geométrico para una circunferencia es otra circunferencia concéntrica,** porque cumple con a condición de que donde se haga centro en la circunferencia concéntrica se toca tangencialmente a la circunferencia dato con un arco de circunferencia siempre del mismo radio. Ahora bien, en el ejemplo anterior se hizo la suma de radios, pero en algunos casos se puede realizar también la resta de radios, lo que da otro lugar geométrico que cumple también con la condición pedida, como se muestra en la figura 44.

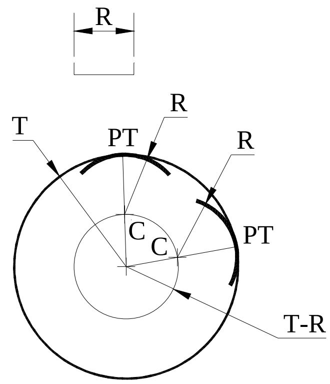
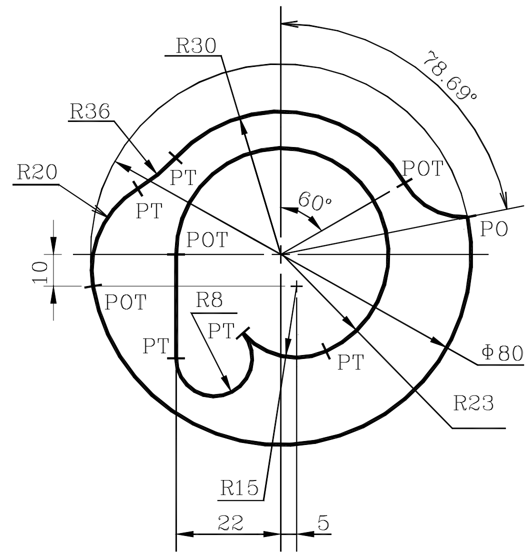



***Figura 44 Arcos tangentes a una circunferencia***

Analicemos algunos casos simples de aplicación, en términos generales se parte de un croquis de la figura a realizar y se dan los datos en donde se va a realizar el trazo, conviene hacer el análisis en el croquis. Sugerimos que para la realización del siguiente ejercicio, se sobrepongan hojas de papel albanene, una por trazo, para hacer más clara la interpretación del dibujo, y posteriormente se pongan todas las hojas albanene que muestren todos los trazos.

**Ejercicio**

Dibuja a escala natural la LEVA PARA ENGRANE DE TRINQUETE que se muestra en el croquisa partir de los datos proporcionados en la parte inferior de la hoja, deja los trazos auxiliares e indica con PT los puntos de tangenia y con C los centros de arcos de circunferencia.




C R O Q U I S

Dimensiones, en mm

PO = Punto obligado (no de tangencia)

tan 11.31 = 0.2

El primer paso es dibujar todo lo que podamos y que nos den como información, en el caso de la Leva se puede dibujar la circunferencia exterior marcada como $\phi$80 y con centro en la intersección de los ejes que nos dan como dato, de la misma forma se puede trazar la circunferencia de radio 30, y podemos empezar el análisis. Nos piden trazar una circunferencia que sea tangente a la circunferencia de radio 30 que pase por el punto PO, el cual podemos localizar sobre la circunferencia de $\phi$80. Nótese que para este trazo nos dan como dato el complemento del valor angular de 78.69°, es decir, 11.31°, así con el escalímetro podemos tomar a cualquier escala la medida de una unidad (mientras más grande sea mayor precisión tendremos, en este caso a escala 1:1) y por el cruce de las rectas dato, tomar la medida de la unidad en sentido horizontal hacia la derecha en realidad se midieron 100 mm que para nosotros representan una unidad, y por este extremo *levantamos* una perpendicular para que en ella midamos a la misma escala el valor de la tangente de 11.31°, en esta caso 0.2, en realidad 20 mm, al unir el cruce con este punto, generamos un triángulo rectángulo con 0.2 como un cateto y la unidad como el otro, de esta forma hemos trazado el ángulo de 78.69° que nos piden.

Una vez ubicado el punto PO, estamos en posibilidad de analizar el trazo, nos piden unir con un arco de circunferencia dos circunferencias (la de $\phi$80 y R30) que sea tangente a la circunferencia de R30 y que pase por el punto PO de la otra. La recta con el valor angular de 60° es el lugar geométrico de todas las circunferencias que son tangentes a la de R30, porque cumplen con la condición que donde se haga centro sobre esta recta, se puede tocar tangencialmente a la circunferencia R30 con un arco, esta recta se identifica como $LG_1$ en la figura 45.

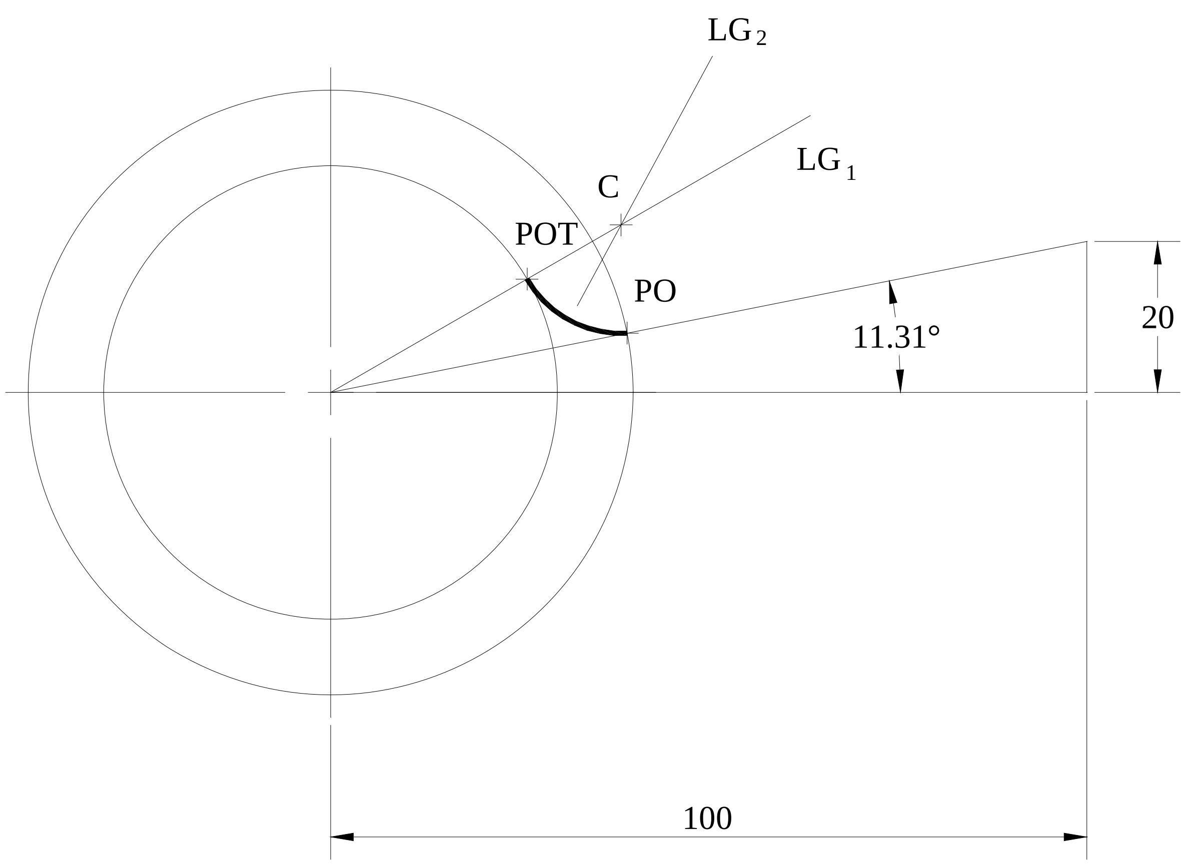



*Figura 45*

Siguiendo con el análisis, necesitamos una circunferencia que pase por PO y por POT, sabemos que el lugar geométrico para dos puntos es la mediatriz del segmento que los une, porque cumple con la condición, que donde se haga centro en este lugar geométrico se puede trazar un arco de circunferencia que pase por dichos puntos, obtenemos la mediatriz que identificamos como $LG_2$ en la figura 45, la intersección de LG1 y $LG_2$ (C en la figura 45) satisface el trazo que nos piden, porque es tangente a la circunferencia R30 y pasa por PO y POT, realizamos este arco de punto a punto.

Únicamente para facilitar la comprensión de los trazos, sugerimos, aunque en realidad no es necesario, hacer los trazos siguientes en una hoja de albanene. En esta hoja únicamente hemos dejado las circunferencias R30, $\phi$80 y los ejes. Nos piden trazar una horizontal a 10 mm de la horizontal dato para ubicar un POT, y posteriormente trazar una circunferencia de R20 tangente a $\phi$80. Para que R20 sea tangente a $\phi$80, necesariamente su centro deberá estar ubicado sobre la normal, por lo que hay que unir POT con el cruce de las rectas dato, que justamente es la normal, ya que contiene al centro de curvatura. Por POT medimos 20 mm y determinamos al punto C, que es el centro de R20 y que es tangente a $\phi$80. Vamos a seguir en el mismo albanene, para analizar el trazo de R36, nótese que era necesario trazar R20 para realizar este trazo.

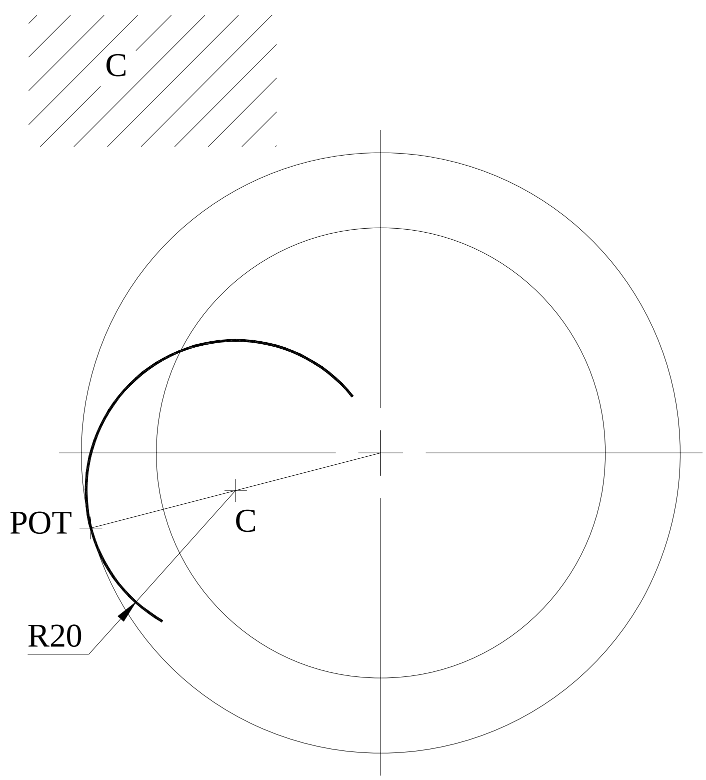



*Figura 46*

Nos piden enlazar dos circunferencias R20 y R30, en este caso, por medio de un arco de circunferencia de R36, haciendo referencia al croquis, verificamos que el centro C está ubicado en la región rayada, en la figura 46, y que la distancia que hay del centro C al PT sobre R30 son 36 unidades, también sabemos que la distancia del cruce de la horizontal y vertical dato a PT son 30 unidades, por lo que la distancia que existe entre el cruce y PT son 66 unidades.

El lugar geométrico para una circunferencia es otra circunferencia concéntrica, en este caso una circunferencia concéntrica a R30 con un radio de 66, y que identificamos como $LG_1$ en la figura 47, porque cumple con la condición; que en donde haga centro en R66, voy a tocar con un arco de 36 mm a R30. Para obtener el lugar geométrico de R20, analizamos nuevamente en el croquis y verificamos que la longitud que existe de C a PT es de 36 unidades (el valor del radio de enlace) y que la distancia que hay de C al centro de R20 son 56 unidades; como el lugar geométrico para una circunferencia es otra circunferencia concéntrica, trazamos una circunferencia con centro en la de R20 y con un radio de 56 mm, y que identificamos como $LG_2$, dado que cumple con la condición que; donde hagamos centro en LG2 tocaremos tangencialmente a R20 con un arco de circunferencia de R36. La intersección de los lugares geométricos satisface el trazo, pues podemos trazar una circunferencia de R36 que sea tangente tanto a R30 y R20, unimos C con el cruce (centro de R30 y $\phi$80) y definimos los puntos de tangencia, tanto en R30 como en R20, y hasta que tengamos estos PT, hacemos el trazo correspondiente.

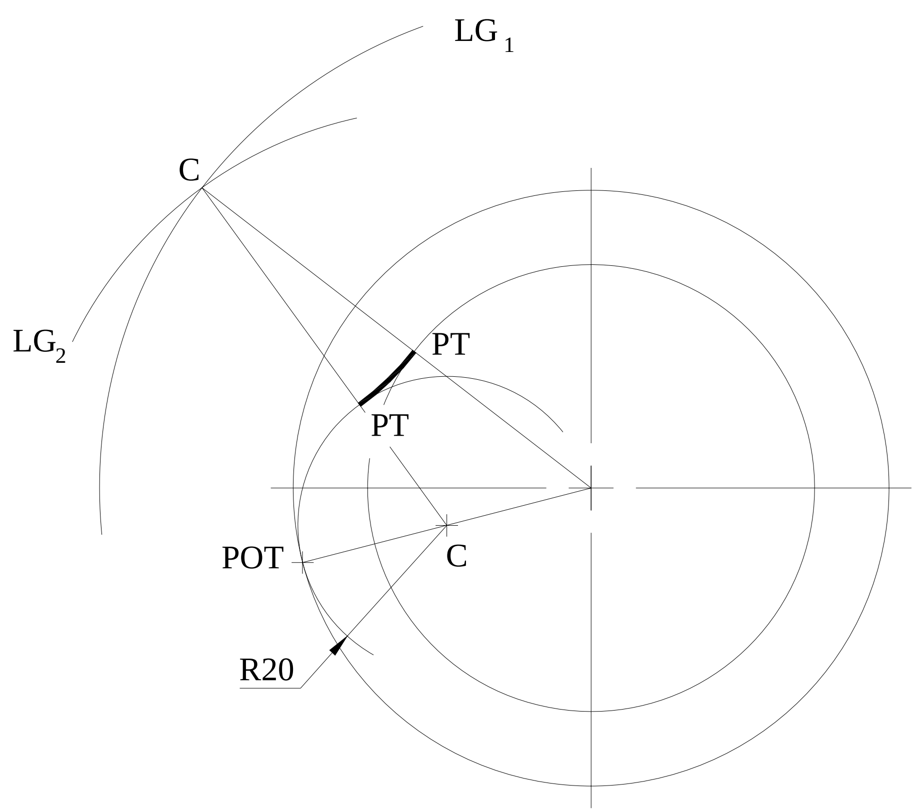



*Figura 47*

En un albanene en blanco realizamos el siguiente trazo. Existe un POT sobre una recta vertical que está a 22 unidades del eje vertical que nos dieron como dato, fácilmente podemos hacer este trazo. Como por POT nos piden trazar una circunferencia de 23 mm de radio, a partir del POT medimos horizontalmente sobre la línea dato hacia la derecha esas 23 unidades y determinamos el punto C que es el centro de dicha circunferencia, que no cioncide con el cruce de las rectas dato; nótese que esta recta (la horizontal) resulta ser un lugar geométrico porque cumple con la condición que, donde se haga centro sobre esta horizontal, podemos trazar un arco que toque tangencialmente a la recta vertical en el punto POT.

Una vez trazada la circunferencia R23, analizamos el trazo que nos piden y vemos que se trata de enlazar una recta y una circunferencia conocido el radio de enlace, en este caso de 8 mm. En el croquis verificamos que el centro de R8 se encuentra en la región con rayado de sección mostrado en la figura 48 , de esta forma sabemos que el lugar geométrico para una recta es otra recta paralela en este caso a 8 mm hacia la derecha,

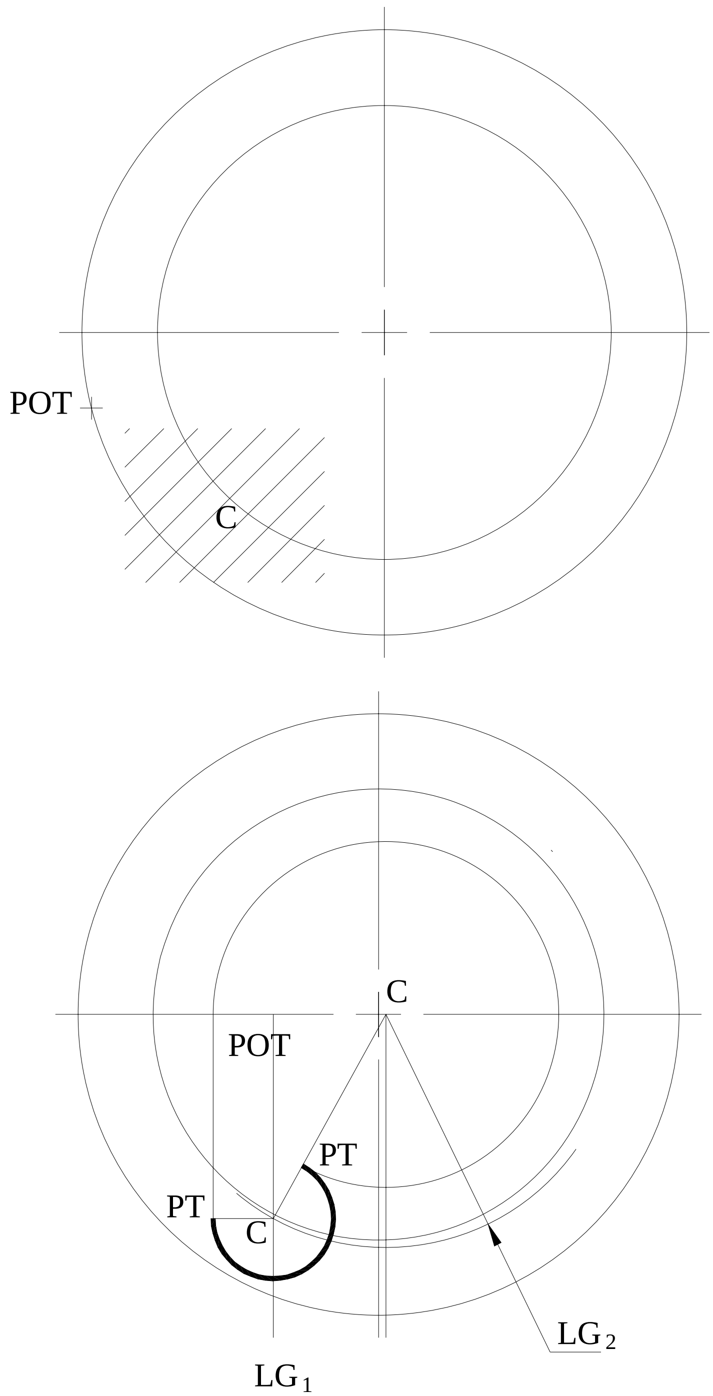



*Figura 48*

hacemos este trazo e identificamos a dicha recta como LG1, dado que cumple con la condición que, donde hagamos centro en dicha recta podemos tocar tangencialmente con un radio de 8 mm a la recta que contiene al POT. Si nuevamente analizamos en el croquis, vemos que la distancia que existe de C a Pal PT es de 8 unidades y que la distancia que existe de C al centro de la circunferencia de R23 son 31 unidades, así sabemos que el lugar geométrico para una circunferencia es otra concéntrica, en este caso de 31 unidades concéntrica a R23, y que identificamos como LG2, puesto que donde hagamos centro en esta circunferencia, podemos tocar tangencialmente con un arco de 8 mm a la circunferencia de R23; la intersección de los lugares geométricos satisface el trazo pedido, identificamos a dicho punto como C y a partir de este trazamos la perpendicular a la recta para definir al PT sobre la recta, y trazamos un segmento de C al centro de la circunferencia de R23 para definir sobre ésta el POT, ya que tengamos estos puntos podemos realizar el enlace pedido.

Finalmente si sobreponemos todos los albanene y únicamente resaltamos los enlaces, el resultado es la pieza pedida mostrada en la figura sin considerar los trazos auxiliares. Conviene comentar que no se deben darse las cosas por hecho; por ejemplo considerar que las circunferencias de R30 y R23 son concéntricas, ya que llegamos a un resultado erróneo, por otro lado no siempre son semejantes, geométricamente hablando, el croquis y el resultado final, por lo que debemos hacerle caso a nuestro análisis siempre que esté bien hecho.

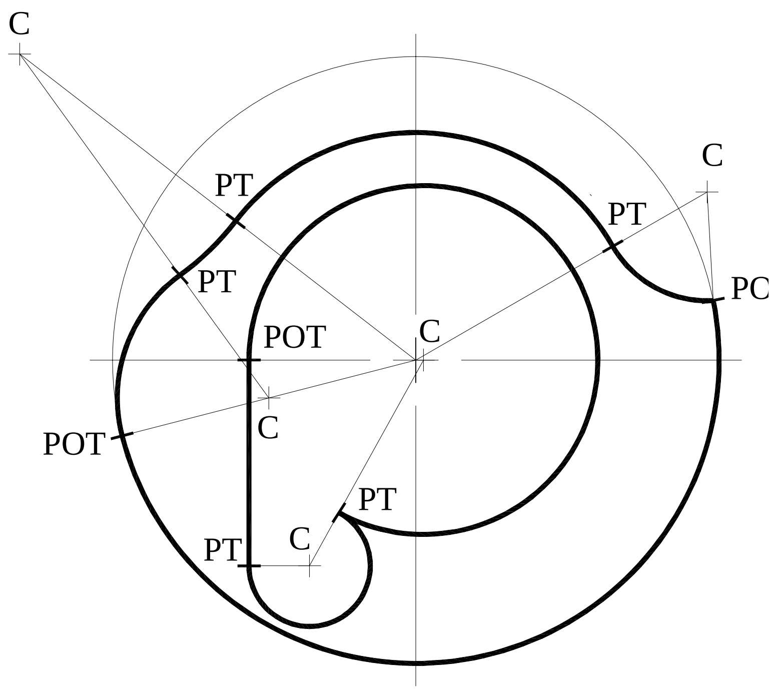



*Figura 49 Figura terminada*

Para seguir con otros trazos necesitamos del Teorema de Tales, que establece que, *todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.* Para demostrar este teorema sea el ángulo inscrito ADB mostrado en la figura 50, como AC es congruente con DC, por definición de circunferencia, el triángulo ACD es isósceles y por tanto $\alpha = \alpha'$, de la misma forma CBD es también isósceles y por tanto $\beta = \beta'$, de esta forma $2\alpha+2\beta = \pi$ y dividiendo por 2, tenemos que $\alpha+\beta = \pi/2$, que es justamente lo que se quiere demostrar.

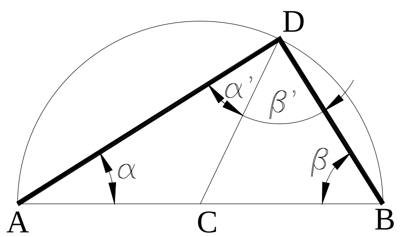



*Figura 50 Teorema de Tales*

Si queremos trazar por un punto las tangentes posibles a una circunferencia, como se muestra en la figura 51 lo que tenemos que hacer es aplicar el teorema de Tales.

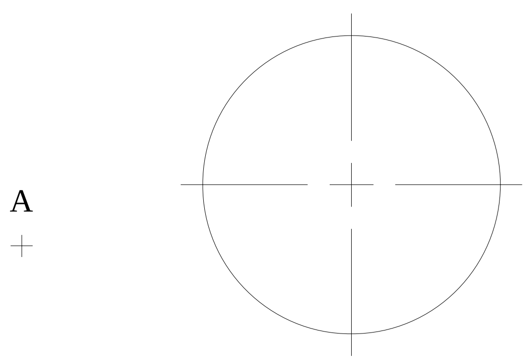



*Figura 51*

Trazamos una recta que vaya del punto A al centro de la circunferencia, por el punto medio de esta recta, identificado como C en la figura 52, trazamos una semicircunferencia con centro en C, la cual corta a la circunferencia dato en el punto que denominamos PT, si unimos con rectas A,PT,O, el ángulo formado en el vértice PT es un ángulo recto (por Tales), y dado que PT,O es perpendicular a A,PT esta última recta es necesariamente la tangente, ya que es perpendicular a O,PT que por pasar por el centro de curvatura de la circunferencia, es la normal. Si trazamos la semicircunferencia por el otro lado podemos determinar la otra tangente que nos piden, y que se ilustra en la figura.

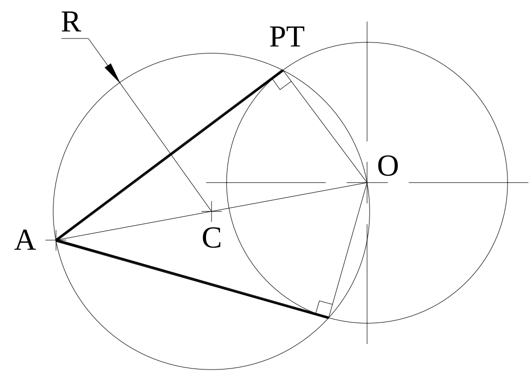



*Figura 52*

En el caso de enlazar dos circunferencias por medio de una recta, también se emplea el teorema de Tales. En la figura 53 se muestran las circunferencias (en este caso una reducción del trazo original), y vamos a analizar lo que se conoce como *enlace exterior.*

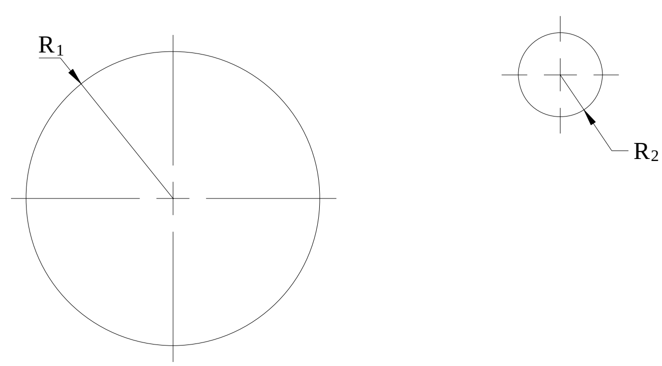



*Figura 53*

Lo primero que hacemos es trazar una circunferencia concéntrica a la de radio mayor con radio igual a la mayor menos la menor, en este caso R1-R2, posteriormente se unen los centros de las circunferencias dato, por medio de de un segmento, y por el punto medio de éste se traza la semicircunferencia de Tales, la cual corta a la circunferencia previamente trazada; por este punto, P en la figura 54 trazamos un segmento desde el centro de R1 y que corte a R1, este punto es el punto de tangencia, PT; posteriormente trazamos una paralela e este último segmento que pase por el centro de la circunferencia R2 para determinar el punto de tangencia PT sobre esta circunferencia; finalmente unimos los punto de tangencia por medio de una recta, que es la que se pide. Obsérvese que la distancia de P a PT es justamente R2; y que la distancia del centro de R2 a PT sobre R2 necesariamente es R2 y como estas dos rectas parten del centro de las circunferencias son rectas normales; como la recta que va del centro de R2 a P forma un ángulo recto con una de las normales la recta que va de PT a PT también es perpendicular al segmento P-PT y por tanto el segmento PT-PT es la recta tangente.

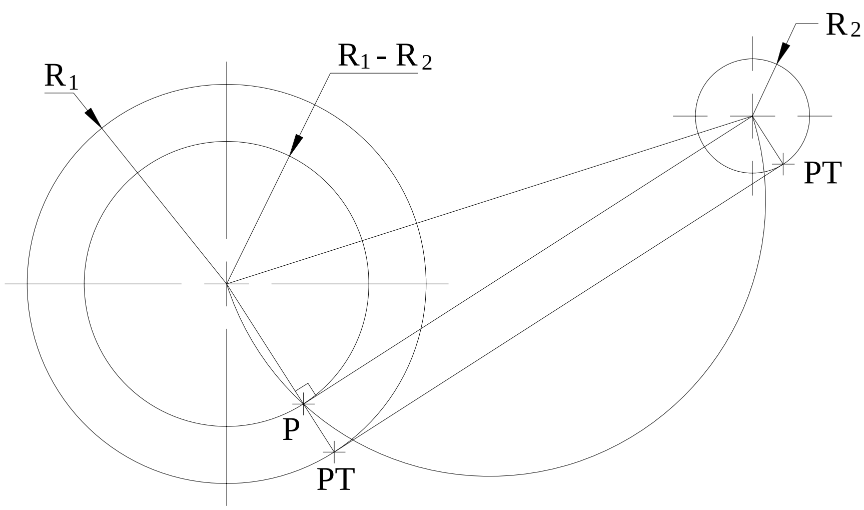
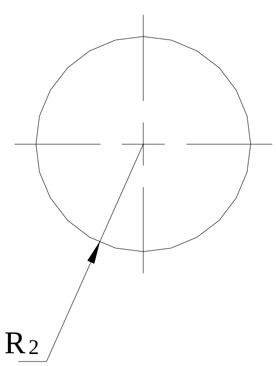



*Figura 54*

La figura 55 muestra dos circunferencias que se desea enlazar por medio de una recta, en lo que se conoce como *tangentes internas*; en este caso se suman los radios de las circunferencias dato.



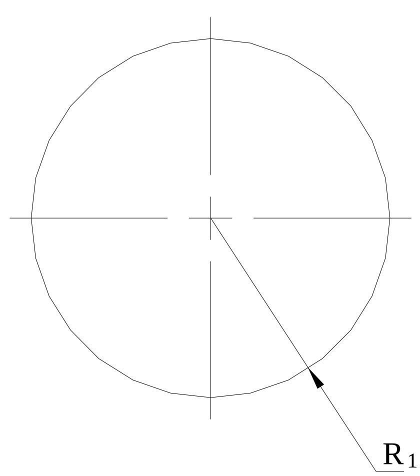




*Figura 55*

Evidentemente, en este caso la suma se puede hacer con cualquiera de las dos circunferencias, independientemente de sus valores relativos.
En la figura 56 se muestran las dos circunferencias con radios $R_1$ y $R_2$ para realizar el trazo.

En este caso trazamos una circunferencia concéntrica a $R_2$ con radio $R_1+R_2$ y trazamos también la semicircunferencia de Tales con centro en el punto medio del segmento que une los centros de las circunferencias dato, este arco corta a la circunferencia concéntrica a R2 en el punto P que es el vértice en donde se encuentra en ángulo recto, al unir P con el centro de $R_2$ se determina el PT sobre $R_2$; y al trazar una paralela a este segmento que pase por el centro de $R_1$, se determina el PT sobre $R_1$, de esta forma se traza el segmento que va de PT a PT que es el trazo que nos piden. Nótese que el segmento PT-PT es paralelo a uno de los lados que forman el ángulo recto del trazo de Tales, lo que hace que sea efectivamente la recta tangente.

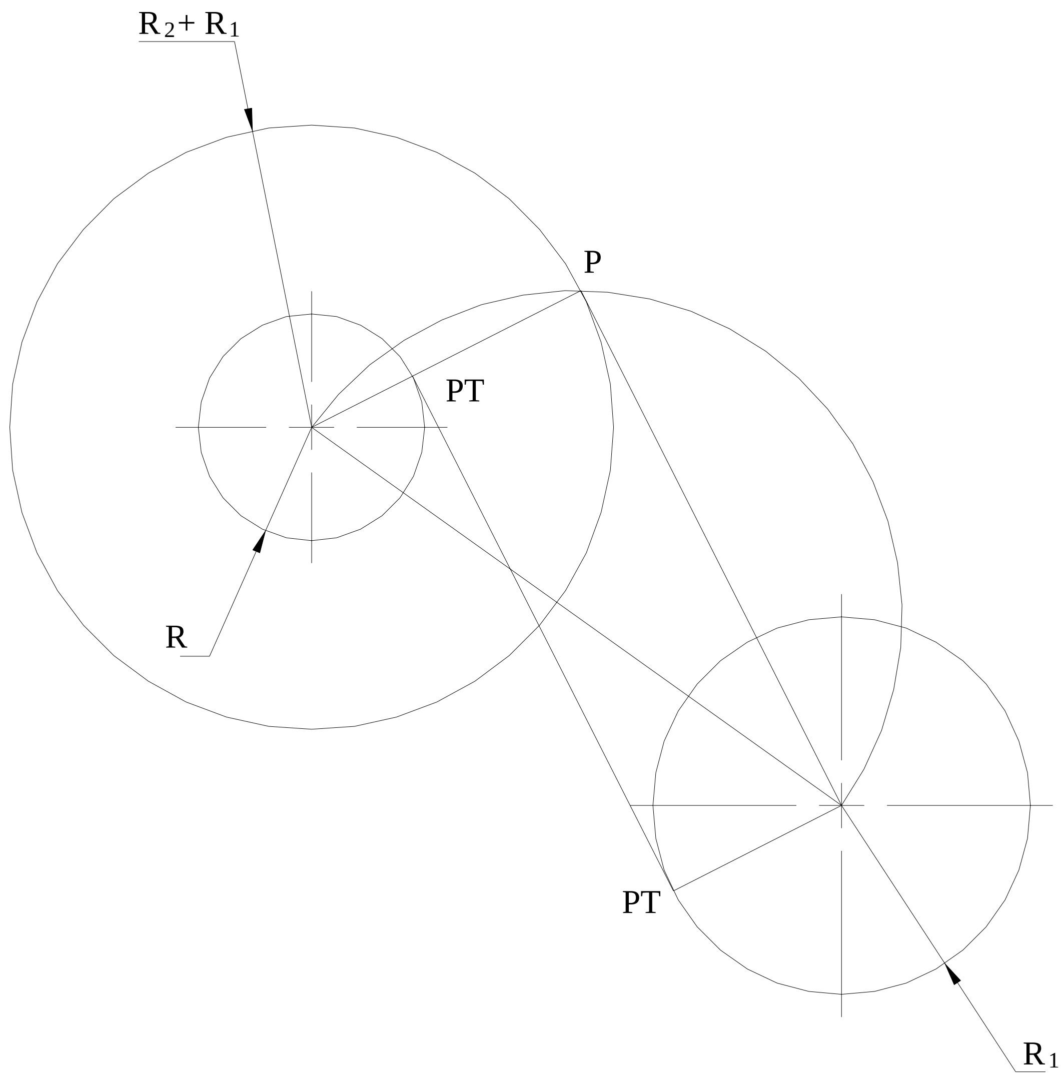
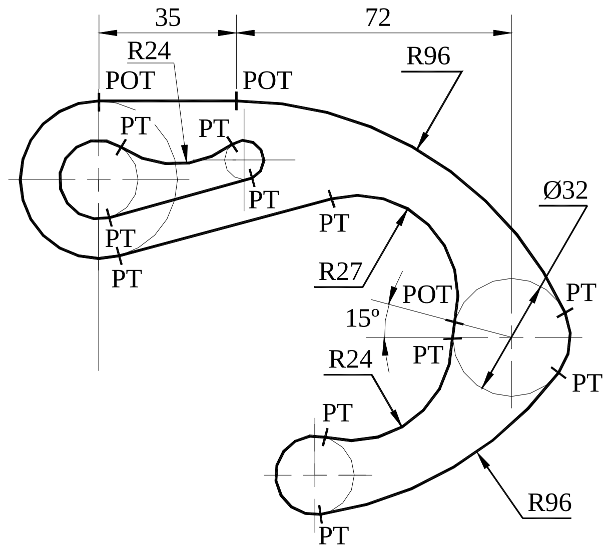


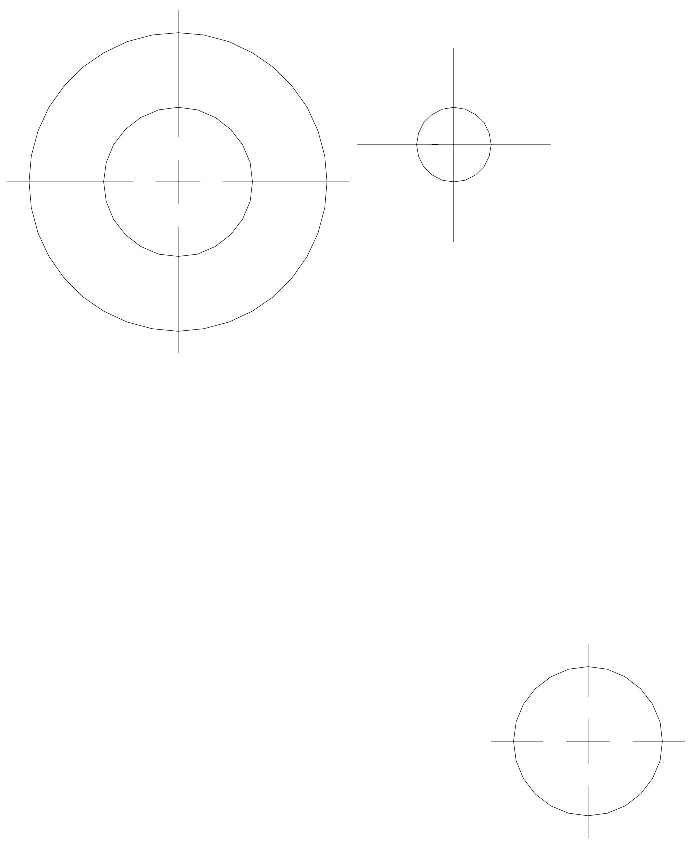

*Figura 56 Trazo de tangentes internas a dos circunferencias*

El siguiente ejercicio tiene una combinación de todos los casos de enlaces analizados, únicamente se hará con detalle los trazos en que esté involucrado el teorema de Tales, y de los otros se hará una referencia a lo que debe hacerse para que pueda practicarse en la resolución del ejercicio. Para seguir practicando, se recomienda visitar las páginas de los profesores de Dibujo.

Dibuja a escala natural, el BALANCÍN que se muestra en el croquis, a partir de los trazos proporcionados en la parte inferior de la hoja, dejando todos los trazos auxiliares necesarios e indicando claramente con PT todos los puntos de tangencia, con C los centros de arcos de circunferencia y lugares geométricos, además de la nomenclatura respectiva.




C R O Q U I S
Dimensiones, en mm



En el caso del enlace superior de la circunferencia de radio 24, se aplica la suma de radios. Se puede ubicar el POT sobre la recta que parte de la intersección de la circunferencia superior izquierda con la recta vertical midiendo 35 unidades, como éste es un punto de tangencia, podemos trazar su normal y sobre ésta medir las 96 unidades de la circunferencia que nos piden trazar; en este momento no sabemos hasta dónde trazarla, pero si analizamos, podemos trazar una recta vertical a 72 unidades del POT, y en esta recta se encuentra ubicado el centro de la circunferencia indicada como $\Phi$32, que es tangente a R96; ahora bien, si trazamos una circunferencia de R96 menos R16 (redio de la circunferencia $\Phi$32) y hacemos centro en la circunferencia de R96, estaremos encontrando el centro de $\Phi$32 puesto que si unimos dichos centros, se determina el PT en la circunferencia $\Phi$32, que es hasta donde hay que trazar la circunferencia de R96 como se muestra en la figura 57.

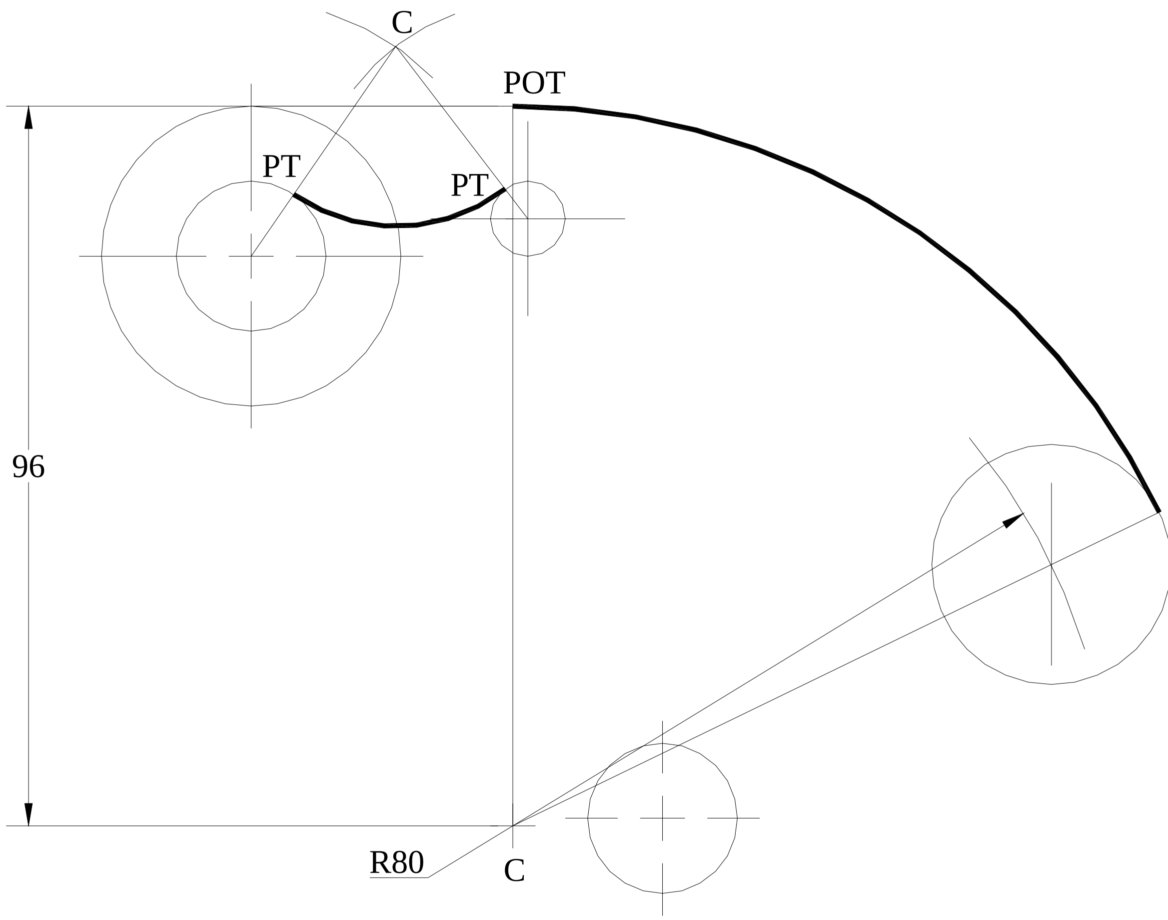



*Figura 57*

En la parte superior, que donde se realizó el trazo de R24, está aplicado el teorema de Tales con las tangentes externas, con las mismas circunferencias donde se hizo el trazo. Así que a la circunferencia de radio mayor ($R_1$) le restamos la de radio menor ($R_2$) y concéntrico a $R_1$ trazamos la circunferencia auxiliar con dicho valor, es decir $R_1$-$R_2$. Trazamos la semicircunferencia de Tales haciendo centro en el punto medio de la recta que une los centros de $R_1$ y $R_2$, y en donde esta semicircunferencia corte a la circunferencia auxiliar, ahí está el ángulo recto en P, unimos el centro de $R_1$ con P y prolongamos este segmento hasta que corte a $R_1$, punto que define a un PT. Ahora trazamos un segmento paralelo a $R_1$-P que pase por el centro de $R_2$, para poder definir el PT en $R_2$, y una vez definidos los PT, trazamos la recta que nos piden.

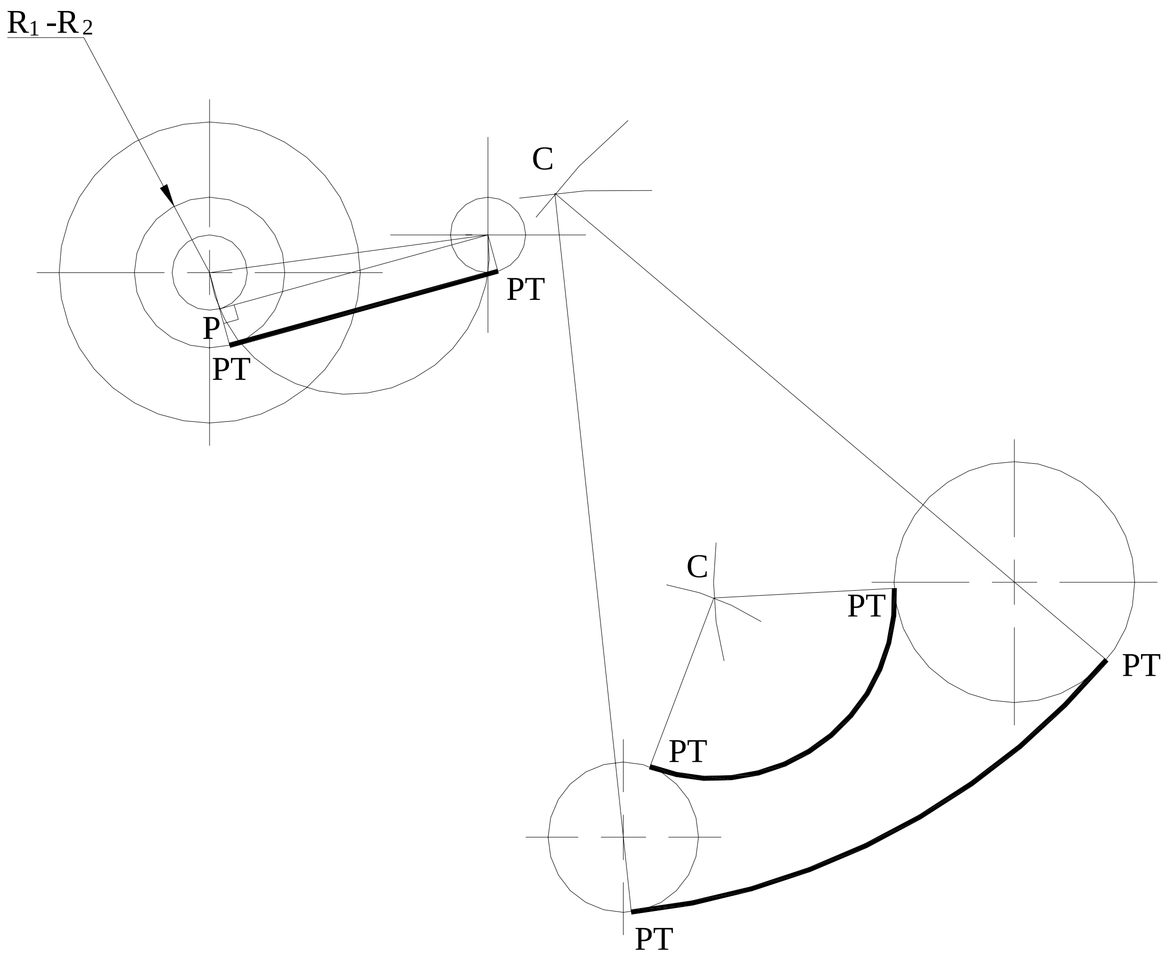



*Figura 58*

Para el trazo que hace falta, podemos ubicar el punto de tangencia sobre la circunferencia y a partir de ahí medir 27 unidades para trazar la circunferencia de R27, podemos verificar así que el el siguiente trazo que nos piden se trata de tangentes interiores, figura 59. Podemos sumar los radios y trazar la circunferencia resultante concéntrica a cualquiera de las dos circunferencias dato, en este caso lo haremos con la circunferencia que fue dada como dato gráfico y que es de R20, así resulta la suma de radios de 47 mm, y trazamos una circunferencia concéntrica a R20 de radio 47, posteriormente trazamos la semicircunferencia de Tales y en donde corte a la circunferencia auxiliar, definimos P, punto en donde se encuentra el ángulo recto, y que al unirlo con el centro de R20 se define el PT en R20, trazamos una paralela a P-PT que pase por el centro de R27 para definir sobre esta circunferencia el PT, y lo que nos queda es hacer el trazo que nos piden.

Con este trazo se ha terminado la figura del Balancín, y todo lo correspondiente a los trazos geométricos. Se sugiere practicar con otros trazos con base en los análisis presentados a partir de los lugares geométricos correspondientes.

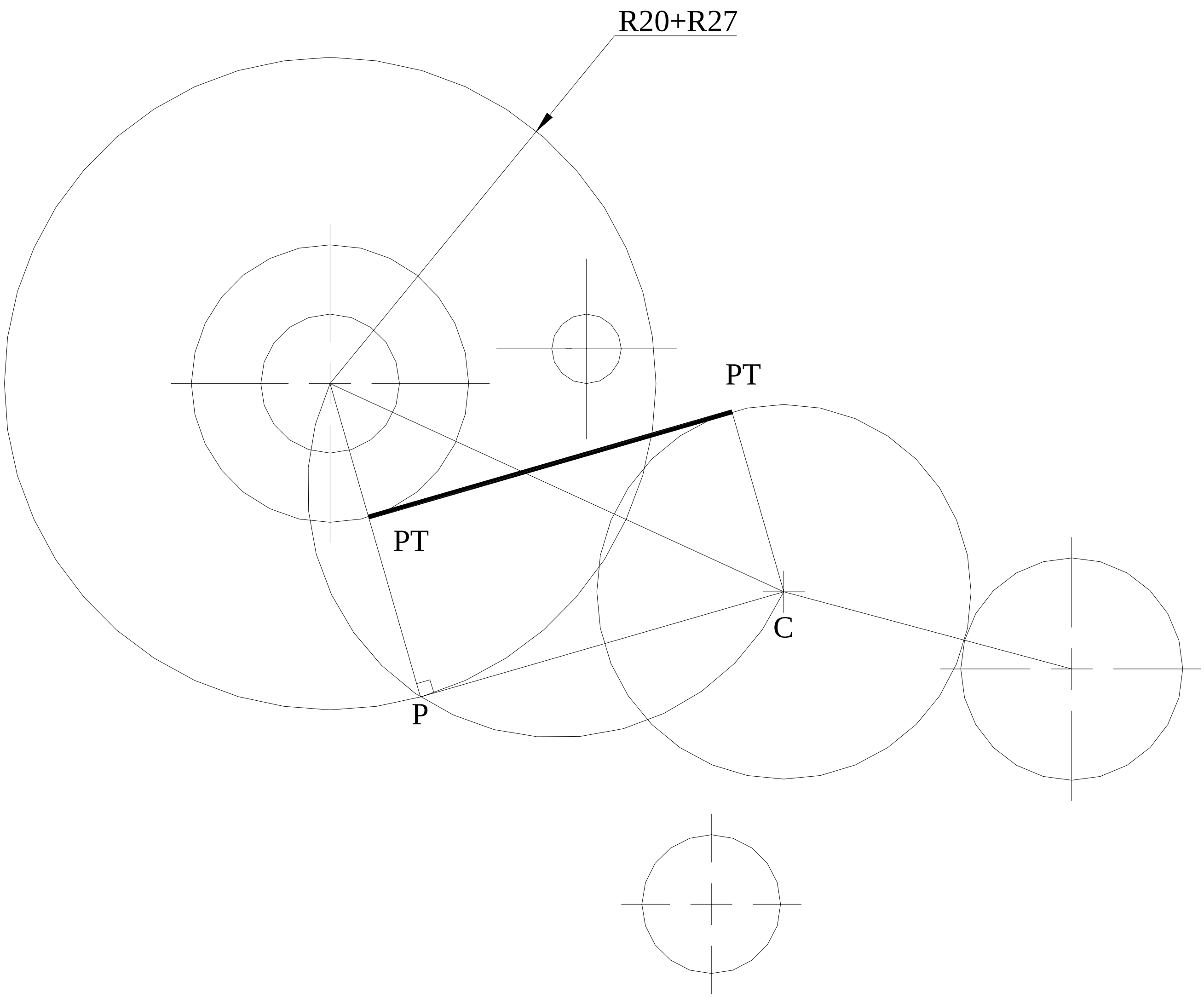



*Figura 59*